# GRAVITACION (1)

FISICA Y QUIMICA

Por J. LUIS NARCISO CAMPILLO
Catedrático del Instituto de Alcoy

y R. BERROJO JARIO
Catedrático de la Sección Delegada del Instituto de Alcoy.

En esta primera parte se consideran las leyes que rigen el movimiento de un cuerpo sometido a fuerzas centrales. Después, y siguiendo las leyes de Kepler observamos que el movimiento de los planetas es precisamente de este tipo. Finalmente se llega a la deducción de la ley de Newton.

Reservamos para un segundo trabajo el problema inverso al abordado en éste: conocida la ley de Newton y con la fórmula de Binet, buscamos el tipo de trayectoria que puede darse en un campo de fuerzas centrales gravitacionales. Discutiremos allí las posibilidades de las distintas órbitas y las condiciones de cada una. Esto nos servirá para entrar en el problema de los satélites artificiales.

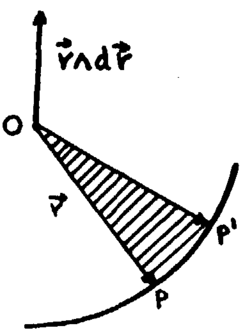


Fig. 1

## 1. TEOREMA DEL MOMENTO CINETICO

Si consideramos un punto material de masa $m$ que se mueve a la velocidad $\vec{v}$, su cantidad de movimiento será: $\vec{L} = m\vec{v}$.

Si elegimos un centro de momentos, se llama momento cinético, $\vec{p}$, con respecto al punto O, al momento del vector cantidad de movimiento, $\vec{L}$, con respecto a dicho punto.

Como

$$\vec{\mathrm{L}} = m\vec{v} = m\,\frac{d\vec{r}}{dt}$$

resulta:

$$\vec{p} = m\vec{r} \wedge \frac{dr}{dt}$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) =$$

$$= m\,\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \wedge m\,\frac{d\vec{r}}{dt}$$

El primer sumando del segundo miembro es nulo por tratarse del producto vectorial de dos vectores de la misma dirección. En el segundo sumando tenemos la expresión $m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt}$ que, según la ecuación fundamental de la Dinámica es igual a $\vec{\mathrm{F}}$. Por consiguiente, toda la expresión anterior queda reducida a:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{\mathrm{F}}} \qquad [1]$$

que nos dice que «la derivada del momento cinético con respecto al tiempo es igual al momento de la fuerza que actúa sobre el cuerpo».

## 2. FUERZAS CENTRALES

Fuerza central es la que está dirigida hacia el punto O (fig. 1) y que solamente es función de la distancia a este punto. Según la ecuación [1], en el caso de fuerzas centrales:

$$\vec{r} \wedge \vec{F} = 0$$

de donde

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

y por tanto

$$\vec{p} = m\,\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{const.}$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{const.}} \qquad [2]$$

Según el significado geométrico del producto vectorial, $\vec{r} \wedge d\vec{r}$ será el doble del área rayada en la figura 1 y constante en este caso según [2].

En consecuencia, $\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$, que es el área barrida en la unidad de tiempo será también constante.

Por otra parte, de la constancia de $\vec{p}$ en cuanto a la dirección, se sigue que el plano que determinan $\vec{r}$ y $d\vec{r}$ tiene dirección fija. Por consiguiente, la trayectoria es plana.

Resumiendo, cuando un punto material está sometido a una fuerza central su movimiento se realiza de forma que:

1.º La velocidad areolar es constante.

2.º La trayectoria es plana.

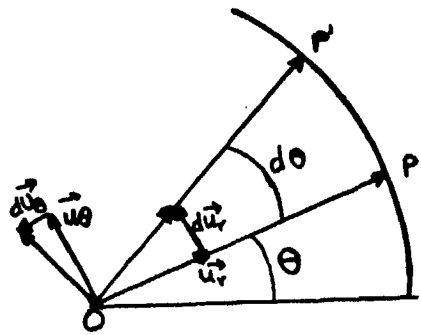


Fig 2

## 3. VELOCIDAD EN COORDENADAS POLARES

El estudio del movimiento que nos ocupa se describe mejor utilizando las coordenadas polares $r$ y $\theta$, siendo $r$ el módulo del vector de posición y $\theta$ el ángulo que forma con un eje de referencia.

Por definición

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario en la dirección de $\vec{r}$, escribimos:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$$

y derivando:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \qquad [3]$$

El factor $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ de la expresión anterior podemos ponerlo en la forma:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

donde $d\theta$ es la variación experimentada por $\theta$ al pasar el móvil de P a P' (fig. 2).

Pero la derivada de un vector de longitud constante es otro vector perpendicular al primero (véase cálculo vectorial) y así, $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ de valor unidad según la figura, será el vector unitario $\vec{u}_\theta$ perpendicular a $\vec{u}_r$. Tendremos así:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_\theta$$

y sustituyendo en la expresión [3] llegamos a:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta}$$

Como posteriormente vamos a utilizar el cuadrado de la velocidad para el cálculo de la energía cinética, procedemos seguidamente a evaluar $v^2$:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r) + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta) +$$

$$+ 2\,\frac{dr}{dt} \cdot r \cdot \frac{d\theta}{dt}\,(\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta)$$

En la expresión anterior,

$$(\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r) = 1$$

$$(\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta) = 1$$

$$(\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta) = 0$$

por lo que quedaría:

$$\boxed{v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \qquad [4]$$

## 4. LEY DE LAS AREAS EN COORDENADAS POLARES

Según vimos en el párrafo 2:

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{const.}$$

Sustituyendo las expresiones halladas anteriormente:

$$\vec{r} = \vec{r} \cdot u_r \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

nos queda:

$$r\vec{u}_r \wedge \left( \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}\,\theta \right) =$$

$$= r\vec{u}_r \wedge \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r\vec{u}_r \wedge r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta =$$

$$= r \frac{dr}{dt} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_r + r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$$

Como $u_r \wedge u_r = 0$ y $u_r \wedge u_\theta = u_s$ (otro vector unidad perpendicular a los otros dos), tendremos:

$$\boxed{r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_s = \text{const.}} \qquad [5]$$

## 5. FORMULAS GENERALES RELATIVAS AL MOVIMIENTO EN UN CAMPO DE FUERZAS CENTRALES

Si consideramos como positivo el sentido OP de la figura 1, la función potencial será entonces: (véase cálculo vectorial):

$$\vec{F} = - \frac{dV}{dr}$$

Empleando coordenadas polares, tenemos:

a) Ley de las áreas:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$$

(empleamos el módulo de la expresión [5]).

b) Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_c + E_p = \text{const.} \; \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + V = C'$$

Eliminando $\frac{d\theta}{dt}$ entre las expresiones a) y b) (despejando en a) y sustituyendo en b)):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2} \qquad \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}\right] + V = C'$$

Como V es función de $r$ y $m$, C y C' son constantes, tenemos que $\frac{dr}{dt} = f(r)$ lo que nos permite conocer $r = f(t)$.

De la ley de las áreas a): $d\theta = \frac{c}{r^2}\, dt$ que por integración: $\theta = f'(t)$.

El movimiento queda así perfectamente determinado al conocer $r$ y $\theta$ en función del tiempo. Bastará fijar los valores de las constantes de integración según las condiciones iniciales.

Es más interesante el encontrar una expresión matemática que relacione el tipo de fuerza aplicada con la trayectoria descrita por el punto móvil.

Para hallar la ecuación de la trayectoria basta eliminar el tiempo entre las ecuaciones a) y b). De la ley de las áreas:

$$dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta$$

y sustituyendo en b):

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{\frac{r^2}{c}\, d\theta}\right)\right] + r^2\left[\left(\frac{d\theta}{\frac{r^2}{c}\, d\theta}\right)\right] + V = C'$$

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{c^2}{r^4} + \frac{c^2}{r^2}\right] = C' - V \qquad [6]$$

que es la ecuación diferencial de la trayectoria.

Haciendo $\frac{l}{r} =$, tendremos:

$$-\frac{l}{r^2}\, dr = du \qquad (du)^2 = \frac{l}{r^4}\,(dr)^2$$

y sustituyendo en [6]:

$$\frac{mc^2}{2} \cdot \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = C' - V$$

Para poner de manifiesto la fuerza F, derivemos con respecto a $\theta$:

$$\frac{mc^2}{2} \left[ 2 \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d^2\theta} + 2u \frac{du}{d\theta} = \right] - \frac{dV}{d\theta}$$

El segundo miembro lo podemos expresar:

$$- \frac{dV}{d\theta} = - \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{d\theta}$$

donde

$$- \frac{dV}{dr} = F$$

y

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\left( \frac{1}{u} \right)}{d\theta} = - \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

y sustituyendo:

$$\frac{mc^2}{2} \left[ 2 \left( \frac{du}{d\theta} \right) \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u \frac{du}{d\theta} \right] - F \cdot \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

Simplificando:

$$mc^2 \frac{d^2u}{d\theta^4} + u = - \frac{F}{u^2}$$

y deshaciendo el cambio de variable:

$$F = - \frac{mc^2}{r^2} \frac{d^2\left( \frac{1}{r} \right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \qquad [7]$$

Esta expresión se conoce con el nombre de «*Fórmula de Binet*» que nos permite, conocida la trayectoria, determinar la ley según la cual varía la fuerza, o viceversa.

## 6. MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS Y LEY DE NEWTON

Recordemos las leyes de Kepler:

1.ª Todos los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, ocupando éste uno de los focos.

2.ª Las áreas barridas por el radio vector que une el Sol con el planeta, son proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas (velocidad areolar constante).

3.ª Los cuadrados de los tiempos empleados por los planetas en sus giros alrededor del mismo astro son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses descritas en su trayectoria.

Según tales leyes, el campo de fuerzas donde se mueven los planetas es un campo de fuerzas centrales cuyo centro es el Sol.

La ecuación de una elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

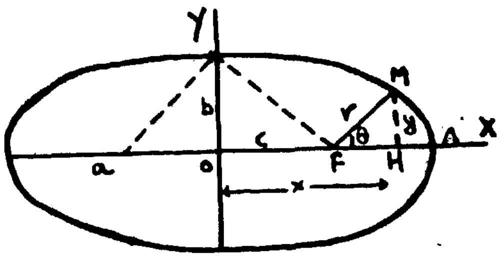

Fig. 3

que vamos a expresarla en coordenadas polares. En la figura 3 y llamando $e$ a la excentricidad, tenemos:

$$e = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}} = \frac{c}{a} \qquad c = a \cdot e$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2 \cdot e^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$x = \mathrm{OF} + \mathrm{FH} = ae + r\cos\theta$$

$$y = \mathrm{HM} = r \operatorname{sen}\theta$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la elipse y simplificando nos queda:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{a(1 - e^2)}$$

Ecuación de la elipse en coordenadas polares en la que hemos despejado $\frac{1}{r}$ para poderla utilizar en la fórmula de Binet. El otro término en dicha fórmula es $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}$ por lo que procedemos a derivar $\frac{1}{r}$:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = \frac{-e \text{ sen } \theta}{a\,(1 - e^2)}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = -\frac{e \cos \theta}{a\,(1 - e^2)}$$

y sustituyendo:

$$F = \frac{mc^2}{r^2}\,\frac{-e \cos \theta}{a\,(1 - e^2)} + \frac{1 + e \cos \theta}{a\,(1 - e^2)} = -\frac{mc^2}{r^2}\,\frac{1}{a\,(1 - e^2)} \qquad [8]$$

CALCULO DE C

Según la expresión de la ley de las áreas $r^2 \ldots = C$ es decir,

$$C = \frac{\text{doble del área de la elipse}}{\text{tiempo de una vuelta (período)}} = \frac{2\pi ab}{T}$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo $b$ por su valor en función de $a$ y $e$ resulta:

$$C^2 = \frac{4\,\pi^2\,a^2\,b^2}{T^2} = \frac{4\,\pi^2\,a^2 \cdot a^2\,(1 - e^2)}{T^2} =$$

$$= \frac{4\,\pi^2\,a^4\,(1 - e^2)}{T^2}$$

y llevando este valor a la fórmula [8]:

$$F = \frac{m\,4\,\pi^2\,a^4\,(1 - e^2)}{r^2\,T^2\,a\,(1 - e^2} = -\frac{m}{r^2}\;\frac{4\,\pi^2\,a^3}{T^2}$$

Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler, según la cual $\frac{a^3}{T^3}$ permanece constante, podemos hacer:

$$\frac{4\,\pi^2\,a^3}{T^2} = \text{const.} = K$$

En definitiva $$\boxed{F = -K\,\frac{m}{r^2}} \qquad [9]$$

En consecuencia, se trata de fuerzas dirigidas hacia el Sol (significado del signo menos), proporcionales a las masas de los planetas e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia al Sol. La ecuación [9] se conoce con el nombre de «ley de la atracción newtoniana».

## 7. LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL

Hemos visto que la fuerza con que el Sol atrae al planeta de masa $m_1$, que dista $r_1$ de él será:

$$F = -K_s\,\frac{m_1}{r_1^2}$$

Por otra parte el planeta ejercerá sobre el Sol la fuerza:

$$F = -K_1\,\frac{m_s}{r_1^2}$$

donde $m_s$ es la masa del Sol.

Por el principio de la acción y reacción, ambas fuerzas son iguales:

$$\frac{K_s\,m_1}{r_1^2} = \frac{K_1\,m_s}{r_1^2} \qquad \frac{K_s}{m_s} = \frac{K_1}{m_1}$$

Para otros planetas de masas $m_2$, $m_3$, ... obtendríamos:

$$\frac{K_s}{m_s} = \frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} = \frac{K_3}{m_3} = \ldots = G$$

de donde:

$$K_s = G \cdot m_s$$

y sustituyendo en [9] quedaría en valor absoluto:

$$\boxed{F = G \frac{m_s \cdot m_1}{r_1^2}} \qquad [10]$$

BIBLIOGRAFIA

G. Bruhat: *Mecanique.* Sixième edition. Ed. Masson Paris.
Palacios: *Mecánica.*
Cabrera: *Mecánica.*
Catalá: *Fisica General.*