El Algebra en la Enseñanza Media (*)

Por FRANCISCO MUÑOZ JUAN
(Catedrático de Matemáticas del Instituto «P. Eduardo Vitoria», de Alcoy)

Los notables progresos que en el campo de las Matemáticas, así como en el de otras Ciencias, se han realizado en los últimos tiempos, atraen poderosamente la atención.

En todas las ramas de las Matemáticas se aprecian nuevas orientaciones, siendo particularmente importantes las recientes tendencias del álgebra, que han dado lugar a una nueva rama con el nombre de *Algebra Moderna*.

Es natural que en todos los grados de la Enseñanza se procure, en la medida de lo posible, dar a conocer las nuevas conquistas de la Ciencia. De esta manera se cumple una importante finalidad de la Enseñanza y se evita que carezcan de la necesaria orientación los alumnos que han de seguir estudios superiores.

En el caso de las Matemáticas, ha sido objeto de insistentes consideraciones la cuestión de cómo deben reflejarse estas nuevas teorías en la Enseñanza Media.

El problema presenta especiales dificultades debido a que dichas teorías, en consonancia con el carácter de esta Ciencia, tienden hacia grados más elevados de abstracción.

En la Conferencia Internacional de Instrucción Pública, convocada en Ginebra en julio de 1956 por la Unesco y la Oficina Internacional de Educación, y en la que participó una Comisión española, se dieron unas recomendaciones concernientes a la enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas secundarias.

En dichas recomendaciones, y en lo relativo a los programas, se dice que "es deseable determinar, mediante ensayos pedagógicos realizados sin prejuicios, en qué medida las estructuras ampliamente polivalentes de las matemáticas modernas puedan servir para mejorar la Enseñanza secundaria".

En reuniones de Catedráticos se ha tratado de la repercusión que ha de tener en la Enseñanza Media el espíritu de las matemáticas modernas, especialmente el Algebra Moderna y la Topología.

Veamos algunos párrafos del comentario a estas reuniones aparecido en la revista *Gaceta Matemática*, núms. 4 y 5, año 1956. Decían así:

"Se encontró, en general, que son muy pocos los conceptos de las modernas disciplinas matemáticas que pueden llevarse a los cuestionarios del Bachillerato español, que, en este aspecto, se encuentra en condiciones muy

(*) Discurso pronunciado en la inauguración del curso académico 1960-61, en el Instituto de Alcoy.

diferentes a los de otros países, donde la Enseñanza Media se prolonga normalmente hasta los dieciocho o diecinueve años." Y continúa después: "Pero, en cambio, se insistió en la necesidad de que el espíritu de la matemática moderna se refleje en otras formas más sutiles en la Enseñanza Media. Es necesario que los alumnos lleguen a los estudios superiores en condiciones de asimilar las concepciones abstractas de la ciencia moderna sin sorprenderse ante ellas ni oponerles resistencia mental. Para ello es imprescindible, en primer lugar, que antes se les haya proporcionado suficiente material concreto sobre el que fundamentar las abstracciones futuras y, por otra parte, que se haya evitado la formación de hábitos mentales contra los cuales hayan de luchar más tarde. Ambas necesidades deben estar presentes en todo momento en la mente del Profesor de Matemáticas del Bachillerato, y es preciso, por lo tanto, que las ideas fundamentales de la matemática moderna entren de un modo especial en su formación..." Etc.

Al corresponderme este año, siguiendo el turno entre el Profesorado del Centro, pronunciar el discurso inaugural, quisiera hacer un breve comentario sobre algunas cuestiones de las matemáticas del Bachillerato, especialmente de Aritmética y Algebra, y destacar la relación que guardan con los conceptos elementales del Algebra Moderna.

Ruego benevolencia para mis palabras, que además han de ir afectadas de la aridez propia de un tema de Matemáticas.

* * *

En los primeros cursos del Bachillerato se estudian elementos de Aritmética.

Es bien sabido que la Aritmética estudia las operaciones con los números, y que el campo numérico se amplía sucesivamente.

El punto de partida es la sucesión de los números naturales.

Con estos números se pueden medir las cantidades que contengan un número exacto de veces a la unidad de medida.

Cuando no está contenida en un número exacto de veces, se divide la unidad en un número de partes iguales, de modo que la cantidad que queremos medir contenga un número m de dichas partes alícuotas.

La medida de la cantidad está determinada por el par de números naturales m, n, dados en este orden. Llegamos así a los números fraccionarios, como es sabido.

Estamos ante la primera ampliación del campo numérico.

No nos detenemos en recordar cómo se definen las operaciones con los nuevos números. Pero sí hemos de destacar que con ellos es siempre posible la división exacta, que en el campo de los números naturales no lo era en general.

El nuevo conjunto formado por los números naturales y los fraccionarios es el campo de números que más se maneja en la vida ordinaria.

Otra de las ampliaciones más importantes del campo numérico es la que se efectúe por adjunción de los números negativos.

De esta manera se hace posible la resta, que antes no lo era en general, y además se pueden medir aquellas cantidades que puedan tener un sentido negativo.

Con esta nueva ampliación hemos llegado a uno de los campos numéricos más importantes de la Aritmética: el de los *números racionales*.

Para nuestro objeto, no es necesario considerar nuevas ampliaciones del campo numérico.

Dentro del campo de los números racionales, hemos de destacar el conjunto de los números enteros, positivos y negativos, que forman un campo numérico importante en el que es posible la resta y al que hemos de referirnos también algunas veces.

A partir del tercer curso del Bachillerato se van estudiando las nociones fundamentales del Algebra.

Los alumnos suelen encontrar dificultades, sobre todo al principio, en el estudio de esta importante rama de las matemáticas. Los primeros pasos suelen ser difíciles.

Todo el que empieza el Bachillerato está bien familiarizado con los números enteros y fraccionarios y sabe operar con ellos, sobre todo con los enteros y decimales. Tales conocimientos se adquieren en la Primera Enseñanza, y después, en las actividades de la vida, hay necesidad de manejarlos.

Por consiguiente, en los dos primeros cursos, en los que solamente se afianzan estos conocimientos y se estudian algunas aplicaciones a cuestiones mercantiles, no suelen presentarse dificultades.

Pero al llegar al tercer curso hay que empezar a manejar cosas bastante más complicadas que los números.

Se pasa del simple número a una combinación de operaciones con números, unos conocidos y otros desconocidos, que se representan por letras. Es decir, partiendo de los números, se construyen unos nuevos entes matemáticos más complicados: los polinomios.

Con estos nuevos entes, al igual que con los números, se pueden efectuar operaciones: suma, resta, multiplicación, etc., y se comprende que operar con estos polinomios ha de ser más complicado que hacerlo con simples números.

Por otra parte, estos nuevos elementos, cuyas aplicaciones son ya más específicas, no son tan necesarios en las actividades de la vida de modo que el alumno se encuentra con algo que ya no es del dominio común.

El estudio se facilita empezando por los polinomios de una sola variable y de grado pequeño. Después pueden manejarse polinomios sencillos con dos variables. Por lo demás, en la Enseñanza Media no se emplean polinomios mucho más complicados, ni en las aplicaciones a las otras ciencias y a la técnica suelen aparecer.

Vamos a limitarnos a los polinomios con una sola variable y veremos cómo con estos elementos se pueden realizar las mismas operaciones que con los números enteros. En efecto:

Se puede realizar una suma y un producto con las propiedades conmutativa y asociativa.

En cuanto a las operaciones inversas, la resta es posible en todos los casos. Para la división ocurre lo mismo que en el caso de los números enteros, es decir, no es posible en general la división exacta. Sin embargo, es posible efectuar una *división entera*, o sea, encontrar un polinomio llamado cociente y otro llamado resto, de modo que el polinomio dividendo sea igual al producto del divisor por el cociente más el resto, siguiendo el grado del resto menor que el grado del divisor.

Observamos, pues, cómo en el conjunto de los polinomios de una variable las cosas ocurren de una manera análoga al campo de los números enteros.

Aún se nota más este parecido cuando vemos que se puede desarrollar con los polinomios una teoría de la divisibilidad análoga a la de los números enteros. En el Curso Preuniversitario se estudia la descomposición de un polinomio en factores primos y se halla el m. c. d. de dos polinomios.

Hay otros conjuntos, además de los polinomios, en los que están definidas operaciones análogas a las de los números enteros.

Por ejemplo, el conjunto de los números del tipo $a + b\sqrt{\alpha}$ siendo a y b enteros y $\sqrt{\alpha}$ irreducible, α un entero. En efecto, al sumar o multiplicar dos expresiones de este tipo se obtiene otra de la misma forma. La resta es siempre posible y la división exacta no es posible, en general, como es fácil de ver.

Otro ejemplo lo encontramos en el conjunto de los números complejos $a + bi$, en que a y b son enteros.

En el Curso Preuniversitario se estudia la teoría de los números congruentes. Se ve cómo los números enteros se clasifican en grupos de números congruentes que se llaman *clases de restos*. Como la suma y el producto de congruencias es otra congruencia, se puede definir la suma y el producto de clases de restos sumando y multiplicando sus elementos. De esta manera, y cuando el módulo es primo, dichas clases de restos constituyen otro ejemplo de un conjunto de elementos con los que se opera de modo análogo a como se hace con los números enteros.

En todos estos ejemplos se observa una estructura algebraica análoga a la de los polinomios y los números enteros.

Dicha estructura puede resumirse así: Hay una doble composición interna, es decir, para cada par de elementos está definido uno llamado suma y otro llamado producto que pertenecen también al conjunto.

La suma tiene las propiedades asociativa y conmutativa, y además, para cada elemento, existe otro, llamado opuesto, que sumado con él da cero. Esta condición hace posible la resta.

El producto tiene las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva.

El Algebra Moderna, prescindiendo de la naturaleza de los elementos y atendiendo solamente a las leyes del cálculo, estudia, en general, los conjuntos dotados de esta estructura a los que llama *dominios de integridad*.

En Aritmética, dentro del campo de los números enteros, no es posible la división exacta en todos los casos. Fue ésta una de las razones que motivaron su ampliación con los números fraccionarios.

Paralelamente, en Algebra, después de los polinomios, se estudian las fracciones algebraicas. Y de la misma manera que se definen los números fraccionarios, mediante pares de números enteros, se definen las fracciones algebraicas mediante pares de polinomios: si A y B son dos polinomios, formamos con ellos una fracción algebraica $\frac{A}{B}$.

Dos fracciones algebraicas son equivalentes si son iguales los productos cruzados. Por tanto, una fracción algebraica no se altera si se multiplican el numerador y el denominador por un mismo polinomio, o se dividen—simplificación—por un polinomio que sea divisor común.

Una fracción algebraica será irreducible si los polinomios numerador y denominador son primos entre sí, etc.

También las operaciones se realizan de la misma manera que en el caso de las fracciones numéricas y se conservan todas las propiedades del cálculo.

Vemos, pues, cómo en el conjunto de los polinomios, ampliado con las fracciones algebraicas, ocurren las cosas de la misma manera que en el campo de los números racionales.

Los mismos ejemplos que vimos antes, o sea, las expresiones $a + b\sqrt{\alpha}$ y los números complejos $a + bi$, pero en los que a y b pueden ser enteros o fraccionarios, son otros casos de conjuntos en los que las leyes del cálculo son las mismas que en el campo de los números racionales.

La estructura algebraica de estos conjuntos es la misma que la de los dominios de integridad, pero añadiendo una nueva condición: que cada elemento tenga su recíproco o inverso, es decir, que para cada elemento exista otro que multiplicado por él dé la unidad.

Esta condición se cumple en el campo de los números racionales, en el conjunto de los polinomios ampliado con las fracciones algebraicas y en los conjuntos que hemos citado si a y b pueden ser fraccionarios, como es fácil de ver. Y no se cumple, en general, en los números enteros, los polinomios, ni en el caso en que a y b han de ser enteros.

Esta nueva condición hace que siempre sea posible la división exacta, cosa que no ocurre en general en los dominios de integridad.

El Algebra moderna, lo mismo que en el caso de los dominios de integridad, estudia, en general, los conjuntos en los que se cumple la nueva condición y los designa con el nombre de *cuerpos* o *campos de racionalidad.*

* * *

En el Curso Preuniversitario se estudian las transformaciones geométricas más importantes. Especialmente las de igualdad y semejanza.

Con las transformaciones geométricas se define una operación, llamada producto, de la manera siguiente:

Sean dos transformaciones T_1 y T_2. Aplicando la transformación T_1 a una figura F obtendremos otra figura F'. Si a continuación aplicamos T_2 a F', obtendremos otra figura F''. Pues bien, la transformación que haga pasar directamente de F a F'' se llama producto de T_1 por T_2.

Puede verse fácilmente que este producto tiene la propiedad asociativa, pero en general no es conmutativo.

Tienen importancia en Geometría los conjuntos de transformaciones que contienen el producto de dos, cualesquiera de ellas y, además, la transformación recíproca o inversa de cada una. Tales conjuntos se llaman *grupos* de transformaciones.

En la Geometría elemental aparecen multitud de ejemplos de grupos, formados por traslaciones, giros, simetrías, homotecias, etc. Pero no podemos entrar en detalles, que nos llevarían demasiado tiempo.

Estos grupos de transformaciones constituyen casos particulares de la teoría general de los *grupos* que estudia el Algebra Moderna.

Por último, y para terminar, también indicaremos que la teoría de los vectores que se estudia en quinto curso nos proporciona casos particulares de la teoría general de los *espacios vectoriales* que estudia el Algebra Moderna. Otros ejemplos de esta teoría los podemos buscar en los polinomios de una variable y de un determinado grado y en las funciones o formas lineales variables.

* * *

Vemos, pues, como algunas materias del Bachillerato nos proporcionan abundantes ejemplos y modelos de conceptos elementales del Algebra Moderna.

A través de cuestiones concretas que han de manejar durante sus estudios del Bachillerato, y evitando la formación de hábitos mentales inadecuados, los alumnos quedarán preparados para, más adelante, poder abordar el estudio de las teorías abstractas sobre los grupos, dominios de integridad, cuerpos y espacios vectoriales. Sin oponerles ninguna resistencia mental y conscientes de su importancia y amplia polivalencia en el estudio de las Ciencias Exactas.