LA FUNDAMENTACION DE LA MATEMATICA (*)

MATEMATICAS

Por el Prof. JAVIER DE LORENZO

Catedrático del Instituto "Alfonso VIII", de Cuenca.

LA charla con la cual inauguramos hoy un Ciclo sobre alguno de los problemas y estado presente que algunas ciencias tienen planteados, quizá lleve un título algo pretencioso: Fundamentación de la Matemática. Vamos a precisar, de modo inmediato, que no realizaremos aquí ninguna Fundamentación, rigurosa o no, de la Matemática. Intentaremos exponer, en Panorama histórico, lo que ha supuesto, lo que ha significado y significa este tema para la Matemática. Y ello por un motivo fundamental: A todo científico le es difícil compaginar el rigor de la ciencia que cultiva con la exposición de la misma para un público que se supone no especializado en la materia. La ecuación Divulgación + Ciencia = Amenidad es de muy difícil solución. Y más si, al acotar la variable "ciencia", restringimos la ecuación anterior a Divulgación + Matemática = Amenidad, teniendo presente, además, que no es el matemático profesional de la palabra hablada.

De aquí esa preferencia por una perspectiva de carácter histórico, intentando resaltar los momentos más interesantes del proceso que ha conducido a este tema, con el consiguiente riesgo —inherente por otra parte a todo intento divulgatorio— de esquematizar excesivamente algunos problemas, algunas soluciones a los mismos y deformar, así, la riqueza conceptual que todas las teorías, indiscutiblemente, poseen.

Fundamentar una ciencia no es otra cosa que la búsqueda de un número mínimo de conceptos, de proposiciones, de formas de operar tanto con esos conceptos como con esas proposiciones, formas de operar que permitan la construcción del resto de los conceptos y proposiciones componentes del edificio de la Ciencia que se pretende fundamentar. Conceptos, proposiciones, formas de operar con ellos que resulten total, absolutamente seguros, incontestables, de tal manera que el resto de los conceptos y proposiciones obtenidos también gocen de ese carácter, no pudiendo existir, por ejemplo, dos proposiciones contradictorias como consecuencia de las que tomemos como primitivas.

He utilizado el término "edificio" y ciertamente se podría comparar la Ciencia con un edificio, en cuyo caso el problema de la Fundamentación no sería otro que el de la cimentación del mismo.

(*) Conferencia inaugural del ciclo "Perspectivas de la Ciencia en la actualidad" en la Casa de Cultura de Cuenca (21-I-1969).

1. PRECEDENTES HISTORICOS

El promleba de la Fundamentación de la Matemática, aunque no ha cobrado toda su importancia hasta el siglo XIX, por falta de una toma de conciencia de su naturaleza, se liga de modo estrecho, sin embargo, a la Matemática desde los comienzos de esta disciplina. La Matemática ha sido la primera en organizarse como ciencia, como ciencia deductiva, además, en uno de sus campos: el geométrico. Y esta organización como sistema de términos y proposiciones acerca de esos términos, consideradas las proposiciones como verdaderas, y obteniéndose unas de otras mediante un proceso deductivo, entrañaba, ya, un primer problema. No todos los términos podían ser definidos en función de los demás, porque de lo contrario se caería en un círculo vicioso; no toda proposición podía obtenerse como consecuencia lógica, deductiva, de las demás, por el mismo motivo. Sólo cabía la posibilidad de aceptar la existencia de infinitos conceptos, lo cual parecía contrario a la propia estructura racional humana. Ante ello, se admitía la existencia de unos términos primitivos, de unas proposiciones primitivas de carácter totalmente evidente, hasta el extremo de que la aprehensión de las mismas fuera inmediata, sin necesidad de ulterior explicación.

Pero en este caso la Fundamentación última de la Geometría, construida como un sistema axiomático, se encontraba en dos terrenos: por una parte, en la deducción lógica, en las leyes del pensar, y en unas proposiciones primitivas aceptadas como verdaderas, porque lo "eran" intuitivamente, porque se "adecuaban" a la realidad; por otra, en una serie de postulados que, no tan intuitivos, podían llegar a ser demostrados, a obtenerse como proposiciones demostradas.

La Geometría, de esta forma, se fundamentaba en unas reglas lógicas, en la adecuación a la realidad y en la intuición. Pero cabe preguntarse, ¿en qué tipo de intuición? ¿En la sensible? ¿En alguna otra categoría? Si aceptamos el modelo platónico, en la intuición sensible, no; pero en este caso tampoco se admiten que las proposiciones primitivas sean verdaderas en sí, sino que, una vez aceptadas, de ellas podemos obtener las demás. El sistema platónico para el razonar matemático es un sistema hipotético-deductivo, fundamentado en la previa existencia de un mundo eidético. Pero si admitimos la tradición que logra predominar tras Aristóteles, la base, el fundamento de la Matemática sí se encuentra en la intuición sensible y en las formas del razonar lógico. La Geometría surge como una abstracción de la realidad circundante y se organiza deductivamente, con todo rigor, con predomino precisamente del rigor.

Aquí tenemos, ya, una dicotomía presente en toda la evolución de la Matemática. Intuición frente a rigor. Los momentos de expansión, de creación de nuevas teorías se apoyan en un predominio de la intuición, aunque quizá no de la intuición sensible, y ello a pesar de que esta intuición, provoque fuertes aporías, incluso paradojas. Paradojas que servirán de estímulo, por el contrario, para el desarrollo de la Matemática. El creador considera que ya vendrá el tiempo de sistematización, de organización rigurosa, deductiva, de lo conseguido. Momentos de organización que no suelen ser, generalmente, de creación, de expansión.

Ahora bien, la construcción deductiva, axiomática de la Geometría no era la construcción de toda la Matemática griega. El número natural, ¿en qué se fundamentaba? Los griegos también respondieron, aunque implícitamente, por supuesto, a esta pregunta. El número natural era captado también por un proceso abstractivo de la realidad circundante, con un elemento intuitivo consiguiente. Y las primeras aporías que encuentran los pitagóricos, la inconmensurabilidad de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, o la de la diagonal de un pentágono regular respecto a los lados, que entrañaban entidades de tipo irracional como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, supusieron una dificultad que podría haber dado un fruto impresionante a la Matemática. Platón nos cuenta en un diálogo **Teeteto** cómo Teodoro, también pitagórico, parecía inclinarse por la aceptación de la existencia de estos números irracionales al contarnos cómo había estudiado desde $\sqrt{3}$ hasta $\sqrt{25}$. Pero correspondió a otro genio, ligado a la Academia platónica, Eudoxio de Cnido resolver el problema aporético al reducir este tipo de inconmensurabilidad a la teoría de la proporción de magnitudes semejantes. El problema quedaba resuelto; el rigor había logrado superar la dificultad, pero a costa de la teoría del número. El genio griego parecía preparado para el rigor deductivo, no para un tipo de intuición especial, nada sensible. Rigor, intuición: Dicotomía que cobrará fuerza clasificatoria en Pascal al reducir los espíritus a dos categorías: espíritu geométrico, espíritu de fineza. Y que siglos después, Poincaré denominará a los matemáticos como lógicos o intuitivos.

Corresponderá a espíritus de fineza el dominar una parte mucho más abstracta que la Geometría, la Aritmética. Corresponde a los hindúes y a los árabes desarrollar esta rama matemática dando paso al álgebra, al distinguir el número de la cifra que lo representa y, sobre todo, al utilizar letras, incógnitas para designar al "número cualquiera". El proceso abstractivo que este hecho supone es enorme. Pero la base en la que se apoya, fracamente débil. Y así encontramos que algunos preocupados por el rigor no aceptarán plenamente, a su tiempo, las conquistas que el álgebra y la aritmética logran. Así, Fibonacci calificará a los irracionales como "sordos"; todavía Stifel, en pleno siglo XVI califica a los enteros negativos como "absurdos" y un Vieta, nada menos que Francisco Vieta, se niega a darles cabida en la Matemática. Leibniz apostillará a los números complejos, ya utilizados en la resolución de algunos tipos de la ecuación de tercer grado, como "anfibios entre el ser y la nada". La fundamentación de todos estos elementos es precaria. Se admiten porque son útiles. Su base se acepta por un enfoque pragmático. Fundamento estrictamente racional, no existe; pero tampoco, ciertamente, una muy honda preocupación por este hecho, salvo muy contadas excepciones. Aunque quizá tengamos que precisar: el que la última fundamentación no cause profundo problema al matemático, ello no implica que éste se despreocupe del rigor demostrativo. He citado ya algún ejemplo, que implica, indudablemente, un cierto malestar en la aceptación de unos elementos, a pesar de su indiscutible utilidad, pero de no mucho rigor en su origen. En este sentido, lo que el matemático hace es avalar todo nuevo método, todo nuevo logro, mediante un contraste con el método considerado como modelo en cuanto al rigor, y que no es otro que el modelo del razonar expresado en los **Elementos** de Euclides.

Este hecho, esta falta de una fundamentación rigurosa, se nos presenta con nítida claridad en el siglo XVII, con la creación del Cálculo infinitesimal. Son los Cavalieri, Fermat, Roberval y, sobre todo, Pascal, quienes crean este edificio impresionante que, junto a la Geometría analítica, provocarán el mayor avence conocido en la Matemática en todos los tiempos. Y, sin embargo, utilizan en su demostraciones conceptos ciertamente intuitivos, pero, por ello mismo, carentes en gran medida del rigor necesario. Así, Cavalieri creará el principio de los indivisibles o principio de Cavalieri, ampliamente utilizado por Pascal, principio que todavía hoy es utilizado en nuestro Bachillerato. Es principio que puede provocar, como de hecho ha provocado y provoca, muy fuerte equivocidad. Ya que, por ejemplo, para hallar el área limitada por una curva cualquiera y una recta, se toman sobre ésta rectángulos de anchura mínima y la suma de todos estos rectángulos se quiere igual a ese área. Subyacentes se encuentran las ideas de sucesión y de límite, de las sumas de Riemann para la integral, pero únicamente subyacentes. El peligro está en identificar el rectángulo, al pretenderlo de anchura mínima, con una recta, y decir entonces que la suma de una serie de rectas da una superficie, un área, cuando la recta carece, por definición, de espesor. A los ataques que el empleo de este procedimiento provocaron contra Pascal y otros, la defensa de los mismos consistió en afirmar que todo lo logrado por el método de los indivisibles es apto para **crear,** el de los antiguos para **exponer.** La intuición, creadora; la deducción rigurosa, expositora.

A pesar de esta defensa en el sentido de ser ambos métodos únicamente lenguajes diferentes para expresar un mismo hecho, el cálculo infinitesimal carece de rigor, a pesar de su desarrollo por parte, principalmente, de Leibniz y sus discípulos, los Bernoulli. Se habla de infinitésimos, de indivisibles, de fluxiones, pero los conceptos fundamentales, como los de sucesión, límite, continuidad, criterios de convergencia para la sumación de series..., quedan en nebulosa. Por otra parte, el nuevo instrumento logra éxitos indiscutibles al permitir cuadrar áreas de curvas cualesquiera, hallar sus centros de gravedad, sus momentos de inercia, volúmenes de cuerpos cualesquiera, trayectorias de móviles, estudio de curvas con creación de geometrías nuevas como la diferencial... En esta situación también se logran, como no podía ser menos, resultados algo desastrosos. Así, Euler, uno de los más grandes algorítmicos de todos los tiempos, a pesar de su temprana ceguera, llega a utilizar series divergentes como si fueran convergentes, y llega a calcular, incluso, la suma de una serie oscilante.

2. CORRIENTES DE LA MATEMATICA EN EL SIGLO XIX

Estos hechos provocan la aparición de un nuevo espíritu entre los matemáticos con el nacimiento del siglo XIX. Frente al desarrollo algorítmico, se prefiere el desarrollo conceptual, el "saltar a pie juntillas sobre los cálculos", con frase de Evariste Galois. Corresponde a Cauchy, entre otros, el privilegio de iniciar esta vuelta al rigor, frente al predominio de la intuición, que comenzaba a mostrar su aporías. Nos encontramos con el precedente inmediato de la toma de conciencia del problema de los Fundamentos de la Matemática. Precedente que se va a manifestar por un rechazo de la intuición, principalmente de la sensible, de todos los puntos en que se encuentra. Este hecho se manifiesta, principalmente, en tres grandes corrientes que van a confluir a finales de siglo para lograr una auténtica fundamentación de la Matemática, aparentemente definitiva, aunque de modo simultáneo a su constitución se abra una crisis, aguda, denominada "crisis de los fundamentos" o de la Matemática, de gran eco en el primer tercio de nuestro siglo. Las tres corrientes, aunque este esquema y orden sea, naturalmente, arbitrario, por la interdependencia que tienen los tres entre sí, se denominan Aritmetización del Análisis; Aparición de las geometrías no-euclídeas; simbolismo lógico y matematización de la Lógica. Breve, muy esquemáticamente, vamos a esbozar las tres corrientes.

a) **Aritmetización del Análisis**

El rigor que inicia Cauchy en el análisis, en la búsqueda de unas definiciones precisas de los conceptos fundamentales exige, para no caer en el círculo vicioso de que lo definido no entre en la definición, el previo establecimiento de unos conceptos que, a su vez, estén muy claramente definidos. Estos, a su vez, otros. Así hasta llegar a fundamentar el número complejo en el real, el real en el racional, el racional en el entero, el entero en el natural. La idea de sucesión en el natural y en la de correspondencia, la de límite en la de sucesión y entorno, la de continuidad en las de límite, sucesión, entorno. Así sucesivamente. Es proceso que se convierte en necesario para el matemático. Pero con él se llega al número natural. De él decía Kronecker:

> Es necesario que todos los resultados de la más profunda investigación matemática sean expresables en las sencillas formas de las propiedades de los números naturales.

De modo efectivo Weiertrass y su escuela por un lado, por otro Dedekind, logran este objetivo. Y lo logran desterrando a la intuición sensible de manera radical. Intuición que se muestra incompatible con el rigor, ya que da paso a ideas que no parecen muy aceptables deductivamente. Así, la intuición sensible geométrica querría que toda curva continua poseyera derivada o, en lenguaje geométrico, tangente en cada uno de sus puntos; pero Weiertrass lograba encontrar curvas continuas no derivables, es decir, sin tangentes en ninguno de sus puntos. La intuición quería que una curva definida en un recinto poseyera menos puntos que los del recinto; Peano construía una curva continua que llenaba el recinto en el que estaba definida.

El rigor parecía alcanzado, al apoyar toda la Matemática en el número natural. Pero ¿y éste? A esta interrogante, el propio Kronecker responderá: "Dios creó los números naturales; el resto es obra de los hombres." Así, el proceso de aritmetización del Análisis había conducido a considerar como elementos fundamentales de la disciplina, el número natural. Y, claramente, todo lo que con él se relacionaba. Así, el concepto de sucesor, de primer elemento, de buena ordenación; así, la inducción completa como modelo del razonar matemático. Pero estas ideas, este principio del razonar matemático se consideraban como dadas sin más, sin una correlación, sin una posible explicación racional.

b) **La corriente geométrica**

Junto a la anterior corriente, que entraña como punto fundamental la supresión de la intuición en beneficio del rigor demostrativo, se une una corriente más espectacularmente tratada, y que se liga a la problemática geométrica. Ya en el XVII, los trabajos de Fermat y Descartes, con la creación de la Geometría analítica, habían reducido, realmente, la Geometría euclídea a una parcela del análisis. Siguiendo el proceso anterior, podía considerarse fundamentada, igualmente, la Geometría en la Aritmética, en el número natural.

Pero, simultáneo a la creación de la Geometría analítica, otros dos matemáticos también franceses, Desargues y Pascal, daban nacimiento a otro tipo de geometría sintética, la Geometría Proyectiva. Frente a la euclídea, que es esencialmente métrica, la Proyectiva únicamente iba a tener en cuenta las propiedades que se deducían de la posición de los distintos elementos, y sus caracteres descriptivos, sin hacer intervenir, de manera esencial, propiedades métricas. Pero Pascal es defensor del jansenismo y autor de unos muy violentos ataques a los jesuitas. Estos, en defensa propia, también consideraban atacado el patrimonio esencial geométrico. Y a Euclides, a su defensa, dedicará el jesuita Gerolamo Saccheri, ya en el siglo XVIII, una obra que, aparte el carácter vindicatorio, es de gran importancia. La obra se titula **Euclides ab naevo vindicatus.** El postulado V es el que corre mayor peligro, una vez más: habla del paralelismo que en proyectiva absoluta resulta totalmente dañado. Y Saccheri pretende demostrarlo, entonces, rigurosamente como mera consecuencia de los demás principios geométricos. Para ello, Saccheri adopta el método por reducción al absurdo admitiendo que la hipótesis del ángulo agudo puede ser verdadera, para llegar a alcanzar una contradicción, con lo que hemos de desecharla. Pero Saccheri no encuentra contradicción alguna en las consecuencias que va obteniendo. Y, vindicador de Euclides, Saccheri acaba creyendo encontrar tal contradicción apoyándose precisamente en lo que quería desterrar, la intuición sensible; Saccheri hace una llamada a la "evidencia" de la contradicción, que anula en parte todo un trabajo maravilloso.

Corresponderá a Lobatchevski, Bolyai y Gauss, en el entorno de 1830, el no detenerse en esta evidencia. Construyen la geometría hiperbólica, la misma, en el fondo, que la de Saccheri, pero sin prejuicios de ir en su defensa. Ahora bien, lo que resulta completamente dañado es, precisamente, esa evidencia, esa intuición de una geometría euclídea apoyada en la intuición de un espacio que se pretendía euclídeo. Gauss y Lobatchevski pretenden constrastar cuál de ambas geometrías es la "adecuada" a la realidad. Pero no hay "experimentum crucis". El espacio resulta que no es moldeable por una u otra geometría. Con frase de Gauss en carta a Bessel de 9-IV-1830:

> Hemos de confesar con humildad que, si bien el número es mero producto de nuestro espíritu, el espacio tiene una realidad también fuera de de nuestro espíritu, a la cual no podemos prescribir **a priori** sus leyes.

La Geometría, así, ya no trata de la realidad sensible. No puede fundamentarse en ella. Pero en este caso, ¿dónde encontrar su auténtica fundamentación? La respuesta la dará el modelo euclídeo. La geometría no será más que un inmenso edificio hipotético-deductivo construible axiomáticamente. Pero esta construcción se realizará ya a finales de siglo.

c) **Desarrollo de la lógica**

Tras la discusión entre Newton y Leibniz por la prioridad en el simbolismo adecuado para expresar el Cálculo infinitesimal, la escuela inglesa, seguidora de Newton, queda estancada en el progreso matemático. El siglo XVIII cuenta con pocas personalidades relevantes de las Islas Británicas en la Matemática. Sin embargo, a principios del siglo XIX se traduce al inglés una obra de texto de un matemático no creador, Lacroix, pero excepcionalmente sistematizador. La obra es el **Cálculo diferencial e integral,** donde se sigue la notación de Leibniz y se compendian y estructuran todos los resultados obtenidos en este campo por los matemáticos franceses del siglo XVIII, siglo de oro para la matemática francesa. El cambio de notación y la plataforma que suponía el Lacroix provocan un despertar de la Matemática inglesa. Pero el hecho de que una notación determinada pueda paralizar o por el contrario estimular el pensamiento matemático, hace que los ingleses estudien con particular atención este hecho del simbolismo, ya señalado por el propio Leibniz. Si para la Matemática el simbolismo parece una necesidad imprescindible, un simbolismo adecuado por supuesto, ¿por qué no generalizarlo también a otras disciplinas? Entre ellas, la Lógica, por su enlace tan estrecho, al servir la Lógica de soporte, en cuanto a las formas del razonar, a la Matemática. Y George Boole culmina en su trabajo con una auténtica matematización de la Lógica, de las Leyes del Pensamiento. Naturalmente, ello implica la necesidad de estudiar la estructura del lenguaje lógico, de sus notas constitutivas. Boole llega a obtener a dos columnas un cálculo proposicional con un cálculo de clases. Consigue demostrar que ambos responden a lo que después se ha denominado retículo y, por poseer las características de ser complementario, distributivo y atómico, constituyen un álgebra denominada de Boole en homenaje al matemático inglés.

Simbolismo adecuado, lo más completo posible, y estudio de los componentes fundamentales de las que se denominaban Leyes del Pensamiento, de las leyes lógicas, van a convertirse en la base de cualquier posterior estudio.

3 AXIOMATIZACION. EL NUMERO NATURAL

Uniendo las tres corrientes anteriores, se logra a finales de siglo, fundamentar la Matemática. Se tiene el número natural, por una parte; por otra, un simbolismo y un desarrollo de la Lógica bastante aceptable; finalmente, la consideración de ser la Matemática una mera construcción hipotético-deductiva. Los tres elementos conducen a considerar que la única posibilidad de dar el rigor exigido a la Matemática, estriba en una Axiomatización formal de esta disciplina. Los conceptos primitivos no pueden definirse, pero no se apoyarán en intuiciones más o menos peligrosas; serán caracterizados por un conjunto de proposiciones que, en el fondo, no constituirán más que una definición implícita de los mismos. Estas proposiciones se admiten no como verdaderas en el sentido de ser adecuadas a una realidad, sino que se admiten como meros postulados. A partir de los cuales, y mediante unas reglas de deducción claramente expresadas, obtendremos el edificio completo de la Matemática.

Corresponde a Moritz Pasch, en 1882, dar la primera axiomatización de la Geometría, ya casi enteramente satisfactoria. Inmediatamente, Peano, Pieri, Padoa dan otras axiomatizaciones en las cuales el número de términos primitivos se reduce. Pero la gran obra en este terreno, modelo sólo equiparable a los **Elementos** de Euclides, lo constituye los **Fundamentos de la Geometría** de David Hilbert de 1899, con sus 21 axiomas divididos en 5 grupos independientes entre sí, y sus tres conjuntos de elementos primitivos: puntos, rectas y planos caracterizados, precisamente, por esos 21 axiomas.

Todos estos sistemas axiomáticos son de tal tipo que no conducen a contradicción alguna. La demostración de esta no contradictoriedad o consistencia es de tipo indirecto. Se reduce a traducir la Geometría a la Aritmética. Si ésta no es contradictoria, tampoco la primera. Y corresponde a Peano el mérito de axiomatizar la aritmética. Toma como conceptos primitivos los de sucesor de un número natural;

un número particular, bien el 0, bien el 1; y el conjunto de todos los números naturales. Estos tres términos se caracterizan por nueve axiomas, de los cuales cuatro son de carácter lógico mientras que los cinco restantes son de naturaleza propiamente matemática. Los axiomas de Peano son los bien conocidos:

a) El número particular 0 es un número natural.
b) Todo sucesor de un número es un número.
c) Dos números distintos tienen sucesores también distintos.
d) El 0 no es sucesor de ningún número natural.
e) Postulado de inducción completa.

Con lo cual el sistema de Peano, además de los signos lógicos sólo utiliza tres nuevos signos propiamente matemáticos. Y además de los principios deductivos lógicos, como el "modus ponens", sólo se agrega el de inducción completa o principio que algunos denominan de Maurolico, y que es debido a Pascal, como característico del razonar matemático.

Cuando en 1894 Peano comenzaba la publicación de su **Formulario,** auténtica enciclopedia de la Lógica y de la Matemática, esta disciplina parecía haber encontrado una Fundamentación definitiva. Se habían conseguido los objetivos de hallar un número mínimo de conceptos y proposiciones primitivas, así como la formulación de las reglas deductivas requeridas para manejarlos. Se podía afirmar que el edificio matemático gozaba de plena seguridad, y que podía ser considerada la Matemática, una vez más, como la ciencia exacta por antonomasia. Unicamente quedaba por demostrar la no-contradicción intrínseca de la Aritmética, pero se tenían fundadas esperanzas de encontrarla más tarde o más temprano. La aritmética, el número natural, parecía no poder dar lugar a tales contradicciones.

4. LA TEORIA DE CONJUNTOS. LAS PARADOJAS

Y, sin embargo, para algunos espíritus, la demostración de esta no-contradictoriedad parecía esencial. Para espíritus de un rigor lógico excepcional, como el que poseía Goblot Frege. A ello dedicó toda su vida. Y para ello se apoyó en la obra de otro matemático excepcional, de los que pudieran calificarse como auténticos espíritus de fineza: George Cantor.

George Cantor, nacido en San Petersburgo el 3 de marzo de 1945 y muerto en un manicomio de Halle, Alemania, el 6 de enero de 1918, va a crear un nuevo terreno matemático, el terreno quizá más bello de toda la Matemática actual: la Teoría de conjuntos. Cantor parte del análisis. Cauchy parecía haber resuelto las dificultades que el manejo del infinitamente pequeño entrañaban. Sin embargo, tras los trabajos de Weiertrass se pudo comprobar que la base aportada por Cauchy era insuficiente. Se habían creado nuevos entes para los cuales la sistematización dada por Cauchy no bastaba. Así, el concepto de función se había llevado a las funciones reales discontinuas, la noción de curva era tan amplia que podía comprender la curva de Peano, que llenaba un recinto. Para estas generalizaciones no había otro remedio que estudiar la estructura del **conjunto** de las variables independientes y sus dominios de variación. Ello implica el manejo de conjuntos que poseen infinitos elementos. Nuevamente surge el infinito, pero no el infinitesimal precisamente. Si el infinito potencial había sido aceptado desde siempre, no ocurría lo mismo con el infinito actual. Se había "demostrado" incluso su no posibilidad. Así, Proclo, Galileo, Leibniz comprueban la imposibilidad de establecer una biyección entre un segmento v toda una recta, entre todos los naturales y todos los pares. Hecho antiintuitivo y, además, contradictorio con el principio de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes. Galileo y Leibniz se apoyan en estos ejemplos para rechazar la existencia del infinito actual. Pero Cantor parte, precisamente, de aquí, de esta existencia. Y a partir de una idea considerada como ingenua o intuitiva de lo que sea un conjunto, y de la biyección entre conjuntos, realiza una construcción espléndida, tanto en sus vertientes ordinal como cardinal de la teoría de conjuntos. Pocas veces se ha dado en la historia de la Matemática que una cierta disciplina nazca casi completamente acabada.

Apoyado en esta teoría, Goblot Frege —que alguno ha llegado a comparar con el propio Aristóteles— realiza la fundamentación del número natural en los conjuntos. Y no sólo del número natural, sino de toda la Matemática. El número natural, la única creación divina según Kronecker, se convierte en una construcción humana, ya que antes de saber **contar** puede saberse la cardinalidad o equipotencia de conjuntos. Y un número natural no va a ser más que una clase de equivalencia de conjuntos equipotentes entre sí.

Nada más realizada la construcción de la teoría de conjuntos, y con ella, la consiguiente Fundamentación de la Matemática, se produce la aparición de una serie de antinomias o **paradojas,** de proposiciones que son contradictorias consigo mismas, que parecen derrumbar todo el edificio matemático, tan laboriosamente construido. Y es su propio creador, George Cantor, quien encuentra la primera; después, la segunda. Tanto en la construcción cardinal como en la ordinal.

Inmediatamente, y de modo independiente entre sí, Burali-Forti y Russell descubren la antinomia cantoriana. Russell la envía a Frege, destrozando toda la obra de éste, hasta el punto de que a partir de este momento el gran lógico matemático alemán no volverá a ocuparse de lo que había constituido el empeño de toda su vida: fundamentar de modo riguroso la Matemática. La variante de Russell, de 1903, descubierta también por Zermelo en la misma fecha, es la encontrada por Cantor en 1899, aunque se publicara en su correspondencia del año 1932. Es paradoja que podemos enunciar de la siguiente manera:

Vamos a llamar "normal" al conjunto que no se contiene a sí mismo como elemento. Así, es conjunto normal, el conjunto de los hombres, porque no es un hombre; el de los caballos, que no es un caballo... La mayoría de los conjuntos parecen ser normales. Sin embargo, el conjunto de los conceptos abstractos también es abstracto, luego se contiene a sí mismo como elemento. Supongamos ahora que reunimos en un conjunto el conjunto de todos los conjuntos normales, y sólo de los normales. Llamemos a este conjunto N. Podemos preguntarnos ahora si N es o no normal. Sólo caben dos hipótesis: que sea normal o que no lo sea. Supongamos que N se contiene a sí mismo como elemento, es decir, suponemos N no normal. Pero en este caso el conjunto N contiene un conjunto no normal, él mismo, contra la hipótesis de que N estuviera compuesto únicamente de conjuntos normales. Esta hipótesis es, por tanto, contradictoria. Sólo cabe, por tanto, que N sea normal, es decir, que no se contenga a sí mismo como elemento. Pero en este caso, N tiene que ser elemento de N, ya que contiene a todos los conjuntos normales. Llegamos, por tanto, a una contradicción. Es, por tanto, una auténtica paradoja.

Esta antinomia puede transmitirse perfectamente a la Lógica, sencillamente tratando de conceptos predicables o impredicables; es decir, conceptos que expresan una propiedad de que goza el mismo concepto. Por ejemplo, es predicable el concepto "abstracto", pero no lo es el concepto "rojo".

Al principio pareció que las paradojas sólo afectaban a la Teoría de conjuntos, y con ella, a la Matemática. Pero ya la transcripción anterior indicaba que la propia Lógica no estaba exenta de las mismas. Y de modo efectivo aparecieron más paradojas, tanto en Matemática como en Lógica. Paradojas que pudieron ser clasificadas en dos tipos: semánticas, como la ya muy clásica de Epiménides o el mentiroso, que se encuentra también en la Epístola a Tito, 1-12, de San Pablo, o la que constituye la única aportación a esta temática que hoy tratamos por parte española, la contenida en **El Quijote.** Junto a las paradojas semánticas se encuentran las de tipo lógico, como la citada del conjunto normal. Todas ellas conducen a la crisis de los fundamentos y que envuelve en pugna, a veces no muy elegante, a los matemáticos de la primera treintena de nuestro siglo.

5. INTENTOS SUPERADORES DE LA CRISIS DE LA MATEMATICA

Para superar esta crisis, tres son las tendencias y teorías que surgen entre los matemáticos: Logicismo, Intuicionismo, Formalismo. A la primera se van a ligar, principalmente, filósofos; a las dos restantes, matemáticos profesionales. Las tres, en pugna, son los motores del desarrollo de la Matemática en lo que llevamos de siglo.

a) **Logicismo**

La primera corriente, desde un enfoque histórico, corresponde al Logicismo. Fue formulado, por vez primera, por Frege, en 1884. Esquemáticamente su lema básico: la Fundamentación de la Matemática se realiza a partir de la Lógica. La Matemática no es más que una parte de ésta. Es decir, los conceptos de la Matemática pueden ser derivados de los conceptos lógicos a través de definiciones explícitas; los teoremas pueden ser derivados desde los axiomas lógicos a través de la deducción puramente lógica. No hay signos o elementos que puedan ser considerados como estrictamente matemáticos.

Esta posición implica que deben especificarse, en primer lugar, cuáles son los conceptos primitivos de la Lógica, así como sus esquemas deductivos. El estudio de estos elementos lleva consigo tanto el desarrollo de esta disciplina como su propio esclarecimiento. Se pone de manifiesto que elementos esenciales son, por ejemplo, las conectivas proposicionales y los cuantificadores. Se admite la existencia de objetos llamados proposiciones unos; otros, predicados, que puedan ser de distintos tipos; individuos para servir como argumentos a esos predicados... Como axiomas, pueden tomarse cuatro para el cálculo proposicional y dos más para el de predicados. Como reglas de deducción, o inferencia, dos: sustitución, implicación o "modus ponens". Los predicados de la Matemática se introducen mediante definiciones explícitas y toda proposición de la Matemática puede ser traducida en una proposición que contenga únicamente los predicados y signos lógicos admitidos como primitivos. Todo el desarrollo puede realizarse de manera estrictamente simbólica, para evitar las equivocidades o ambigüedades del lenguaje ordinario.

Ahora bien, el Logicismo en su forma originaria choca con la paradoja antes citada, que entraña que "el conjunto de todos los conjuntos" es una proposición contradictoria en sí. Y de una proposición contradictoria pueden obtenerse en el sistema otra serie de contradicciones. Con lo cual, todo el edificio resulta afectado. Bertrand Russell pretende no abandonar el programa del Logicismo, de que la Matemática no es más que una parcela de la Lógica. Para ello, debe superar la paradoja. Russell observa que es antinomia que afecta a lo que después se ha demostrado axioma de comprehensión, clave de la teoría llamada ingenua o intuitiva de los primeros momentos. El axioma de comprehensión puede ser establecido en los tres pasos siguientes:

1. Las entidades matemáticas que tienen una cierta propiedad común constituyen un conjunto, del cual esas entidades son los elementos, y que está determinado por esa propiedad característica.
2. Un conjunto es una entidad matemática y puede, a su vez, presentarse en tanto que elemento de un conjunto.
3. Dos conjuntos que contienen los mismos elementos son idénticos.

Los dos primeros apartados son los que establecen, precisamente, la existencia del "conjunto de todos los conjuntos". Y aquí es donde interviene la teoría superadora de Russell, denominada Teoría de los tipos. Muy simplificada, esquematizada, equivale a decir que un conjunto cualquiera no puede ser considerado como elemento de otro conjunto cualquiera, sino sólo de un nivel o tipo inmediatamente superior. Es decir, y volvemos a la imagen del edificio: Estratificamos todos los elementos que intervienen en la Matemática como en pisos distintos. El primero estaría constituido por objetos individuales. El segundo por conjuntos constituidos únicamente por los elementos del primer piso. El tercero, por conjuntos constituidos por los conjuntos del segundo piso, pero considerados como elementos. Los del primer piso no pueden considerarse como elementos constitutivos del tercer piso ni de pisos superiores; ni los del segundo como elementos del cuarto. Así, ha de ascenderse muy lentamente, partiendo de los objetos individuales, sin saltarse piso alguno. Con lo cual suprimimos la posibilidad de emplear términos como el de "conjunto de todos los conjuntos", ya que cada elemento es conjunto respecto al piso inmediatamente inferior, pero elemento respecto al siguiente.

A pesar de esta teoría, construcción un tanto artificial, y a pesar de que esta esquema quizá sea válido únicamente para la teoría de los tipos simplificada, que no para la ramificada, ni para las teorías posteriores como la de estratificación de Quine, Russell ni el Logicismo consiguen superar la crisis. Por lo pronto la artificiosidad de esta teoría conduce a dificultades casi insuperables para fundamentar el número real, por ejemplo, y el número real es clave de la Matemática contemporánea. Y lo que se pretende es fundamentar la Matemática. Pero además, el Logicismo querido por Russell exige el empleo de otros axiomas cuyo carácter lógico es totalmente discutible. Así, el axioma de infinitud, que establece la existencia de infinitos elementos. Axioma que adoptan los matemáticos, pero como tal axioma matemático, no como lógico. Hasta el extremo de que algunos han llegado a considerar que la Matemática comienza allí donde termina la lógica. Y la frontera entre ambas es, precisamente, el manejo del infinito como característico, como propio del matemático, atribuyéndosele a las formas de razonar lógicas un carácter estrictamente finito.

Aunque no haya logrado superar, de modo completo, la crisis, y en la actualidad el Logicismo ortodoxo sea prácticamente una reliquia, ha provocado un gran desarrollo de lo Lógica. Ha conseguido exponer, por ejemplo, de un modo riguroso, el cálculo de clases, unido a la teoría cantoriana de conjuntos; ha logrado la sistematización del simbolismo; el poner de relieve el carácter relacional de la Matemática, con un desarrollo grande de la Lógica de relaciones, hoy incluida en el concepto de correspondencia o aplicación. Lógicos como Quine, como Rosser siguen el plan logicista de apoyar la Matemática, exclusivamente, en la Lógica, aunque sólo Rosser ha desarrollado algo de la Matemática con esta base. Pero por la relación de la teoría de clases con la de conjuntos, el logicismo donde quizá ha influido más dentro de la Matemática ha sido, precisamente, en esta disciplina, logrando sus primeras axiomatizaciones por obra de Zermelo, por ejemplo, y luego por el propio Quine.

Donde el Logicismo quizá haya tenido mayor influencia es en otros campos, más propiamente filosóficos. Sobre todo, tras los trabajos de Wittgenstein, con su pretendida demostración de que todas las proposiciones de la Matemática eran meras tautologías. Trabajos que permitieron fuerte desarrollo del Círculo de Viena y, consiguientemente, de la llamada Filosofía analítica, que presta atención preferente a la estructura del lenguaje.

b) **Intuicionismo**

La segunda corriente que pretende la superación de las antinomias y de la crisis de la Matemática es la denominada intuicionismo. Dos son las corrientes que se engloban bajo este nombre. En primer lugar el llamado semi-intuicionismo francés, encabezado por Poincaré y seguido por los grandes matemáticos franceses como Borel, Lebesgue, Frechet, Lusin... De los primeros en aceptar la teoría de conjuntos, donde logran resultados espectaculares, son también de los que se niegan a aceptar el papel de meros descubridores del edificio matemático y de la aceptación tautológica de las proposiciones de la Matemática. Sin embargo, y a pesar de que realizan un papel de primer orden en la Matemática, y en la crítica del movimiento logicista y de los primeros pasos del formalismo, no tienen una doctrina rigurosa, sino que son de postura criticista, principalmente.

El intuicionismo, como postura radical, es elaborado por la escuela holandesa encabezada por el matemático Brouwer, matemático de primera fila, especialmente en la topología. Para Brouwer, la Matemática se identifica con la parte exacta de nuestro pensamiento. Emplear en matemáticas tesis filosóficas o lógicas, cualesquiera que sean, como medios de demostración, constituye un círculo vicioso, porque para formular estas leyes, estas tesis es necesario suponer ya construidos los conceptos matemáticos. Pero si la Matemática carece de cualesquiera tipos de suposiciones previas, al matemático no le queda otro recurso que la intuición. Intuición ciertamente no espacial, sino una facultad de considerar separadamente ciertos conceptos y conclusiones que intervienen de modo normal en nuestro pensamiento habitual. Facultad o intuición de tipo más temporal, que capta lo que ha venido dominándose en castellano la duidad. Por ello, la enumeración de los conceptos básicos y de las proposiciones primitivas es insuficiente como fundamento de la matemática intuicionista, ya que la propia enumeración contiene ya un núcleo matemático constitutivo, y estaríamos nuevamente en un círculo vicioso. Por otra parte, parece absurdo querer encerrar el pensamiento matemático en el cuadro de unos principios de construcción fijados de antemano.

Con estas tesis iniciales el intuicionista supone que los conceptos matemáticos son obra del espíritu humano, y no meras marcas concretas como quería el formalismo, o entidades existentes en un mundo más o menos eidético como quería el logicismo. Gracias a la intuición se va, paso a paso, construyendo toda la Matemática. La técnica demostrativa es la llamada de recursividad o constructividad, negándose demostraciones del tipo por reducción al absurdo, por ejemplo, cuando encierran cuantificador universal. Pero el proceso constructivo o recursivo sólo puede ser realizado mediante procesos de carácter finito, es decir, mediante un número finito de pasos, de transformaciones y, por supuesto, manejando número finito de signos, aunque este finito pueda convertirse en un infinito, aunque siempre potencial. Ya que se rechaza, por esta exigencia de finitismo, la existencia del infinito actual.

La escuela intuicionista ha variado, perdiendo parte de su radicalismo y, fundamentalmente, adoptando un lenguaje más de acuerdo con el empleado por los matemáticos normales, con lo cual ha permitido no quedarse encerrada en el ámbito holandés, y ser más comprendida y, con ello ejercer una mayor influencia.

Heyting llegó a formalizar la Matemática intuicionista, dando una axiomática de la misma en los alrededores de 1930. Inmediatamente después, a los tres años de esta formalización, Gödel y Glivenko demostraron que la Aritmética clásica, la apoyada en la Lógica clásica y en la axiomática de Peano, era traducible en términos de la formalización intuicionista y recíprocamente, aunque esta equivalencia contuviera elementos no estrictamente finitistas en su demostración. Con lo cual la potencia de ambas formalizaciones venía a ser equivalente.

Consecuencias importantes del intuicionismo han sido, por ejemplo, la interpretación que de su sistema puede realizarse como un Cálculo de problemas; interpretación debida a Kolmogorov. Igualmente la interpretación del cálculo intuicionista en términos topológicos, debida a Tarski, uno de los más grandes representantes de la escuela polaca de lógica, y de todas las escuelas. Por otro lado, el intuicionismo allanó el camino para la construcción de lógicas no clásicas como las de Lukasiewicz y de Post, trivalentes, al haber realizado una crítica de los principios como el **tertium non datur,** considerado casi como una ley obligatoria del pensamiento. La trivalente de carácter intuicionista ha sido aplicada por Paulette Destouches-Février a la Física, mientras que Reichenbach ha desarrollado una polivalente para el Cálculo de Probabilidades, y Destouches para la Mecánica cuántica. También las polivalentes se han intentado aplicar a otros terrenos como las ciencias sociales...

Igualmente, el intuicionismo ha puesto de relieve la necesidad de emplear métodos finitistas o constructivos como fundamentales de la obra matemática, rompiendo las exigencias un tanto ortodoxas de logicistas y formalistas de los primeros momentos. Y ha vuelto a resaltar, además, que la obra de creación, de auténtica creación matemática posee un carácter intuitivo indudable, aunque tenga que ser formalizada después, en una posterior fase de trabajo. Lo que se refleja en obras de matemáticas como Jean Diendonné, que pretenden que el estudiante alcance la "intuición de lo abstracto". Y Diendonné pertenece a un grupo estrictamente formalista, como es el Bourbaki.

c) **Formalismo**

La tercera corriente, que con la intuicionista constituye uno de los pilares de la construcción matemática actual, que pretendió resolver la crisis de los fundamentos de la Matemática es la denominada Formalismo. Patrocinada por David Hilbert en los primeros momentos del siglo, recibió fuerte crítica por parte de Poincaré. Y sólo a partir de 1917 David Hilbert volvió al tema, y aunque no cita a Poincaré, acepta la posición de éste en cuanto a los métodos finitistas de demostración, así como la imperiosa necesidad de demostrar la no-contradictoriedad de las teorías formalizadas, hasta el extremo de que este problema de consistencia o no es la clave de los trabajos formalistas de los primeros momentos. Aunque el pensamiento de Hilbert ha sufrido variaciones a lo largo del tiempo, como ocurre a todo ser pensante, el formalismo parte de los supuestos filosóficos que formuló Hilbert en 1925, publicado en 1927, en su conferencia **Fundamentos de la Matemática.** Los supuestos filosóficos queridos por Hilbert son, textualmente:

> La Matemática, al igual que otra ciencia cualquiera, no puede ser fundada solamente en la Lógica; antes bien, en las ideas preliminares nos es dado algo como condición previa para la aplicación de los silogismos lógicos y para la realización de operaciones lógicas: ese algo son ciertos objetos concretos extralógicos que intuitivamente se presentan ante todo pensamiento, como inmediato producto de lo vivido. Si la conclusión lógica ha de ser cierta, necesitamos que estos objetos puedan abarcarse completamente de un solo golpe de vista por todas partes; y su presentación, su distinción o su seriación consecutiva están dadas con carácter intuitivo inmediato al mismo tiempo que los objetos, como algo que ni puede ni hay necesidad de reducir a otro algo... En especial, en la Matemática son objetos a considerar los propios signos concretos cuya figura, según nuestro punto de partida, es inmediatamente clara y recognoscible.

David Hilbert rechaza la teoría logicista de la reducción de la Matemática a la Lógica, pero también la tesis intuicionista extrema de no necesitar, el matemático, objeto concreto alguno y utilizar únicamente la intuición. Esta opera con los objetos concretos, materiales, pero a partir de aquí, la intuición debe quedar desterrada. El matemático, como cualquier ser pensante, necesita, para ejercer ese pensamiento, para pensar, de la previa existencia de objetos concretos, materiales. Ahora bien, en la Matemática, esos objetos, esas marcas, van a ser meros signos materiales, concretos. Pero todo signo posee, al menos, dos sentidos o contenidos: uno, eidético; otro, operacional. Es decir, dentro de un sistema, un signo "significa" algo, designa algo; todo signo posee una carga semántica dentro del sistema, ya que, en general, cuando se utiliza un signo es para comunicar algo a alguien, pero esta comunicación entraña el contenido eidético del signo. Por otro lado un signo posee contenido operacional en el sentido de que sabemos cómo puede ser utilizado.

El formalismo pretende desterrar del signo su contenido eidético, aceptar únicamente su contenido operacional. Hay que desterrar del signo cualquier carga semántica, quedando el signo solamente como elemento gráfico. Lo que se requiere es de modo exclusivo saber operar con el signo, sin saber lo que significa. Sólo después de haber realizado una construcción formal, de haber operado con los signos cabe darles una interpretación, un contenido. Y en este caso pueden darse varias interpretaciones, consideradas cada una como una realización, como un modelo de ese cálculo formalizado.

El empleo de este procedimiento puramente operacional, evita muchos errores, al impedir dejarse llevar por la intuición sensible, por ejemplo, en el razonar. Por otra parte una demostración en un cálculo así desarrollado sólo es posible cuando tanto los signos de los que se parte, como las proposiciones que se toman como primitivas y que no son más que fórmulas o sucesiones de signos, como las reglas para operar con esos signos y esas proposiciones o fórmulas de partida estén totalmente, explícitamente expresadas, con lo cual no cabe la posibilidad de utilizar otros axiomas implícitos, como ocurre, por ejemplo, en los **Elementos** de Euclides, donde se utilizan axiomas que no han sido formulados previamente.

De aquí que la teoría de la demostración hilbertiana, la construcción de un Cálculo formal, tenga como tareas esenciales las siguientes:

1. Enumerar todos los signos usados, que van a ser utilizados en la Matemática y en la Lógica. Estos signos se denominan signos primitivos.

Hay que observar, a este respecto, que un formalismo pretende desarrollar, justificar una cierta disciplina, la Matemática. De aquí que la artificiosidad del lenguaje no exista. Aunque, de hecho, puedan construirse lenguajes formalizados con signos enteramente arbitrarios, tengan o no una posterior realización o modelo.

2. Caracterizar de manera no ambigua todas las combinaciones de esos signos que representan proposiciones clasificadas como "significativas" y que se denominan "fórmulas". Son las llamadas Reglas de formación de fórmulas.

3. Completar un proceso de construcción que establezca la construcción sucesiva de todas las fórmulas que corresponden a las proposiciones demostrables de la Matemática. Es un proceso dominado "demostración".

En este punto hay que observar que estas reglas de construcción, que permiten obtener a partir de unas fórmulas otras, no pueden expresarse en el mismo lenguaje que el que corresponde a los signos. Estas reglas de construcción o derivación han de ser entendidas, intuitivamente, por quien va a desarrollar el cálculo formal. Si éste puede decirse que permanece en un plano enteramente sintáctico, las reglas de derivación van a corresponder a un nivel más elevado, a un lenguaje, denominado respecto al primero metalenguaje. Es idea semejante, la de los distintos niveles lingüísticos, a la teoría de los tipos desarrollada por Russell. La formulación rigurosa de las reglas de derivación exigidas por el formalismo no es nada fácil. En general hay dos: el "modus ponens" y la de sustitución. Pero ésta última encierra muy fuertes dificultades cuando se refiere a Cálculos formales que pretendan fundamentar, por ejemplo, el cálculo de predicados de segundo orden. Y ello es tan cierto que la primera formulación de esta regla dada por Hilbert en 1928, y mantenida en la segunda edición de 1938, estaba equivocada, demostrando este hecho Church ya en la década de los años cuarenta, exactamente 1944.

4. Demostrar (mediante un proceso combinatorio o recurrente finito) que las fórmulas que corresponden a las proposiciones de la Matemática clásica que pueden ser verificadas por métodos aritméticos finitos pueden ser demostradas, es decir, constituidas por el proceso descrito en el apartado

> anterior si y sólo si la verificación de las proposiciones correspondientes demuestra ser verdadera.

Esta última es una exigencia excesivamente fuerte, pero clave de la teoría de la demostración de Hilbert. Contra ella han sido los teoremas que se han venido denominando Limitaciones internas de los formalismos, quedando relegada como tal exigencia a un plano meramente histórico. Lo que no ocurre con los tres apartados anteriores que constituyen el proceso de toda exposición matemática. Exposición que suele contar, cuando va formalizada, de los pasos siguientes: axiomatización completa de la teoría; formulación o traducción al lenguaje simbólico de todos sus axiomas, convertidos en meras fórmulas de las cuales no puede hablarse de verdaderas o falsas, sino de bien o mal construidas, ya que nada se dice acerca de su significado, que no existe. Por último, exposición rigurosa de las reglas de derivación. El rigor matemático es óptimo con este método. La Matemática formalizada es exacta, en el sentido querido por el intuicionista Brouwer cuando al hablar del formalismo señala que la

> exactitud matemática no reside más que en el desarrollo de la sucesión de relaciones, y es independiente de la significación que se le podría querer dar a esas relaciones o a las entidades que ellas relacionan.

La carencia de contenido eidético en el desarrollo de un Cálculo formal se ha exagerado queriendo ver en el método formalista, por ejemplo, un mero juego de signos, del tipo del ajedrez —con el que se ha comparado de manera constante—, en el cual lo que importa, aparte de las fichas y de su posición inicial, son las reglas del juego. Sin embargo, todo Cálculo formal se construye, en general, teniendo presente una ulterior interpretación o realización.

Pero la idea de Hilbert de construir un formalismo perfecto estaba orientada a resolver un cierto problema: estaba orientada a superar la crisis en los Fundamentos de la Matemática. Y si cada una de las teorías podían ser formalizadas rigurosamente, había que demostrar, en cada una de estas construcciones, su no contradicción. El problema de consistencia es clave para el formalismo. Existen dos tipos de demostración de la consistencia de una teoría. Uno es el indirecto, utilizado a finales de siglo, como ya hemos indicado. La Aritmética, por ejemplo, se convierte en modelo de cada una de esas construcciones. Si suponemos que la Aritmética es no contradictoria, en este caso la teoría original, de la que es isomorfa, también será no contradictoria. Pero el problema central está en demostrar la no contradictoriedad de la Aritmética. Hilbert lo pretendía realizar con métodos estrictamente finitistas, que es lo requerido en el punto 4 antes citado. Gentzen, en 1930, conseguía demostrar el problema, pero utilizando métodos transfinitos, con lo cual el problema seguía en pie. Pero Gödel, en un famoso teorema que hoy lleva su nombre, como algunos otros, consiguió demostrar, en 1930 también, y teniendo 25 años, que la Aritmética no puede demostrarse que sea consistente en un lenguaje mínimo que la contenga, por métodos finitistas. El programa hilbertiano recibía un golpe mortal, en cuanto a esta pretensión, pero también lograba un éxito indiscutible, ya que Gödel realizó su demostración de una manera estrictamente formal, apoyándose estrictamente en los 4 puntos antes señalados. El formalismo era un instrumento de tal fuerza que permitía señalar sus propias limitaciones.

Pero no sólo el problema de consistencia es importante para el formalismo. Junto a él existen otros como el de la **independencia de los axiomas** o fórmulas utilizadas como primitivas, y que puede demostrarse mediante modelos en los cuales no se cumpla el axioma o fórmula que se quiere demostrar que es independiente. Técnica demostrativa que ha cobrado un desarrollo grande y que ha conducido a toda una nueva teoría llamada Teoría de modelos.

También el formalismo tiene planteado otro problema, de trascendental importancia: el de la **decibilidad.** Es decir, si dada una fórmula que por las reglas de construcción parece correcta, comprobar si es o no derivable dentro del sistema formal. La respuesta afirmativa implicaría que una máquina podía reemplazar al matemático, ya que no existirían problemas a resolver, porque la máquina, a partir de las fórmulas primitivas encontraría, en número finito de pasos, la derivación de esta fórmula. Sin embargo, los teoremas de Türing, Gödel, Church, Rosser, etc., consiguieron demostrar que los cálculos formales son, todo, indecidibles. Todos los suficientemente amplios como para poder desarrollar la Matemática, por supuesto.

Un tercer problema se refiere a la **completitud** de un sistema axiomático o de fórmulas primitivas. Gödel ha conseguido demostrar, también, y con él algunos otros, teoremas que demuestran la incompletitud de todo cálculo formal excesivamente amplio, aunque también Gödel demostrara la completitud del cálculo restringido de predicados. Todos estos problemas, junto a otros como de definir el concepto "verdad", por ejemplo, concepto que hemos citado reiteradamente, constituyen toda una nueva disciplina que se ha venido en llamar Metalógica o metamatemática.

La importancia de los trabajos de la escuela formalista es verdaderamente impresionante. Ha cambiado el estilo del pensar matemático con su influencia. A pesar de que no ha logrado el éxito completo en cuanto a la Fundamentación de la Matemática, su intento ha dado lugar a una serie de estudios y nuevas disciplinas como la anteriormente citada de Metalógica. Pero en la propia matemática su influencia es total, hasta el extremo de que hoy puede ser definida esta disciplina como la ciencia de los sistemas formales, de las estructuras. Ya que a partir de la teoría de conjuntos que puede ser axiomatizada formalmente, se pueden desarrollar cada uno de los capítulos de la Matemática teniendo en cuenta, principalmente, sistemas de carácter axiomático. Sistemas que se engloban en tres tipos: de orden, algebraico y topológico. Y los tres tienen, subyacentes, las estructuras definidas axiomáticamente de grupo, anillo, cuerpo, etc.

En otros terrenos, la influencia del formalismo se ha dejado sentir igualmente, como en el lenguaje, que puede ser formalizado actualmente. Y no sólo formalizado, sino algebrizado, llegándose a una nueva Algebra de la Lógica y del lenguaje, o incluso estudiado topológicamente mediante una teoría de modelos continua. Terrenos estos últimos de estudio reciente, actualísimo. Y que permiten una vuelta al problema de la Fundamentación, con un enfoque naturalmente axiomático y formal, pudiendo estudiarse desde dos puntos de vista complementarios uno de otro: enfoque semántico, que parte de la teoría de conjuntos, y enfoque combinatorio, que parte de signos más cercanos al número natural, y siguen procesos recursivos o combinatorios del tipo de los algoritmos de Markov. Pero estos desarrollos nos llevarían excesivamente lejos y son, por otra parte, casi imposibles de desarrollar en charla que ya va siendo excesivamente larga.