PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL. PLANO Y ESPACIO EUCLIDEOS. EL GRUPO EQUIFORME EN EL PLANO

Por JOSE JAVIER ETAYO
(Catedrático de la Universidad de Madrid)

Todo el estudio del plano y del espacio vectorial que se ha hecho hasta aquí hace referencia exclusivamente a propiedades de tipo lineal, es decir, basadas en la estructura misma de espacio vectorial. Así, únicamente cabe estudiar problemas de incidencia o alineación de puntos y de intersecciones de rectas y planos y, por tanto, de paralelismo. Así, también, el único grupo de transformaciones que se ha podido estudiar es el de las traslaciones, que no necesita de más conceptos que el de la suma de vectores (*).

Queda, en cambio, todavía una amplia gama de movimientos y transformaciones que precisan de una nueva noción aún no introducida en los espacios vectoriales: la noción de *métrica*. En todas las transformaciones que hemos de estudiar ahora va a aparecer la necesidad de medir distancias y ángulos, trazar perpendiculares, etc. Todo esto no podemos hacerlo si no conocemos más operaciones entre vectores que las de suma de vectores y producto de vectores por números. Por eso vamos a introducir una nueva operación, el producto escalar, que nos permite establecer una métrica en un espacio vectorial. Con el producto escalar se pueden resolver todos los problemas de tipo métrico; no obstante, parece también conveniente estudiar el producto vectorial, no porque sea imprescindible, sino porque facilita grandemente en ocasiones el tratamiento de algunas cuestiones métricas del espacio.

PRODUCTO ESCALAR

La definición y propiedades del producto escalar son idénticas, tanto si se trata de vectores libres del plano como si son del espacio. Por comodidad de formulación y de manejo lo estudiaremos en el plano, dejando su generalización al espacio como ejercicio trivial para el lector.

Definición.—Dados dos vectores libres, a y b, se llama *producto escalar* de ambos, y lo representaremos por ab, al producto de los

(*) Estas lecciones, de un cursillo para Profesores de Preuniversitario, habían sido precedidas de otras del Prof. Abellanas sobre espacios vectoriales y afines.

módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

$$\bar{ab} = |a|\ |b| \cos (\bar{a}, b).$$

Como se ve, esta definición implica los dos conceptos de medición de distancias, por los módulos de los vectores, y de ángulos.

El módulo de un vector $\bar{a}$ lo podemos ahora calcular así: multiplicándolo escalarmente por sí mismo se obtiene:

$$aa = |a|\ |a| \cos (\bar{a}, a) = |a|^2 \cos 0 = |a|^2;$$

luego

$$|a| = \sqrt{aa}.$$

Al producto escalar $\bar{aa}$ se le suele representar por a^2, pero este cuadrado no tiene el sentido ordinario de cuadrado de un número al multiplicarlo por sí mismo, sino de cuadrado de un vector al multiplicarlo "escalarmente" por sí mismo. Esto hay que tenerlo muy en cuenta, porque $\bar{a}^2$ es un número y, entonces, en la expresión anterior,

$$|a| = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$$

no debemos caer nunca en el error de simplificar en $\sqrt{a^2}$ la raíz con el cuadrado, puesto que llegaríamos al resultado contradictorio de que un número $|a|$ es igual a un vector a.

Del mismo modo, si queremos hallar el ángulo de dos vectores a y $\bar{b}$ utilizaremos la expresión:

$$\cos (a, b) = \frac{a\bar{b}}{|a|\ |b|},$$

deducida de la definición de producto escalar. La condición de perpendicularidad de dos vectores será entonces $ab = 0$, para que su coseno sea cero.

Propiedades del producto escalar:

1. El producto escalar es conmutativo, ya que

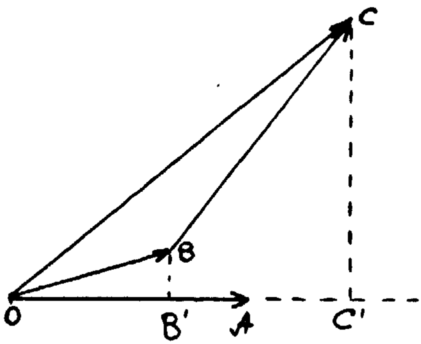
$$b\bar{a} = |b|\ |a| \cos (b, a) = |a|\ |b| \cos (a, b) = ab,$$

puesto que los ángulos (a, b) y (b, a) son iguales y opuestos y, por lo tanto, tienen el mismo coseno, y el producto de módulos es un producto de números y, por ello, conmutativo.

2. El producto escalar no es asociativo: $(\bar{a}\bar{b})\bar{c}$ es un vector obtenido multiplicando el $\bar{c}$ por el número $\bar{a}\bar{b}$, luego paralelo a $\bar{c}$, mientras que $\bar{a}(\bar{b}\bar{c})$ es, por la misma razón, un vector paralelo al $\bar{a}$.

3. Es distributivo: $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$. En efecto, tomando los representantes $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, de los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$, el vector $\overrightarrow{OC}$ será un representante de $\bar{b}+\bar{c}$. Proyectando B y C sobre la recta OA según los puntos B′ y C′ se sabe que para distancias orientadas se verifica:

$$OC' = OB' + B'C'.$$



De la figura resulta inmediatamente:

$$OC' = OC \cos AOC = |\bar{b}+\bar{c}| \cos(\bar{a}, \bar{b}+\bar{c})$$
$$OB' = OB \cos(AOB) = |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})$$
$$B'C' = BC \cos(OA, BC) = |\bar{c}| \cos(\bar{a}, \bar{c});$$

luego

$$|\bar{b}+\bar{c}| \cos(\bar{a}, \bar{b}+\bar{c}) = |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) + |\bar{c}| \cos(\bar{a}, \bar{c}).$$

Multiplicando ambos miembros por $|\bar{a}|$ queda:

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}.$$

4. Para un número cualquiera $\lambda \neq 0$ se verifica:

$$(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b}).$$

En efecto, si

$$\lambda > 0, \qquad |\lambda\bar{a}| = \lambda|\bar{a}| \qquad \text{y} \qquad \cos(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \cos(\bar{a}, \bar{b}),$$

ya que $\lambda \bar{a}$ tiene la misma dirección y sentido que $\bar{a}$; luego:

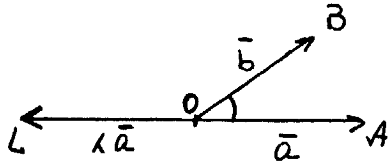
$$|\lambda \bar{a}|\ |\bar{b}| \cos (\lambda \bar{a}, \bar{b}) = \lambda\ |\bar{a}|\ |\bar{b}| \cos (\bar{a}, \bar{b}) = \lambda (\bar{a} \bar{b}).$$

Pero si $\lambda < 0$, su valor absoluto

$$|\lambda| = -\lambda \quad \text{y} \quad \cos (\lambda \bar{a}, \bar{b}) = -\cos (\bar{a}, \bar{b}),$$

ya que $\lambda \bar{a}$ tiene sentido opuesto a $\bar{a}$; entonces:

$$|\lambda \bar{a}|\ |\bar{b}| \cos (\lambda \bar{a}, \bar{b}) = |\lambda|\ |\bar{a}|\ |\bar{b}| \cos (\lambda \bar{a}, \bar{b}) =$$
$$= -\lambda\ |\bar{a}|\ |\bar{b}|\ [-\cos (a, \bar{b})] = \lambda\ |\bar{a}|\ |\bar{b}| \cos (\bar{a}, \bar{b}) = \lambda\ (\bar{a}\bar{b}).$$



Por la misma razón se tiene:

$$(\lambda \bar{a}) \bar{b} = \bar{a} (\lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a} \bar{b}).$$

Aplicaciones.—Todos los problemas métricos del plano y espacio vectoriales se pueden resolver ya mediante el producto escalar. Propongámonos alguno como nuevo ejemplo.

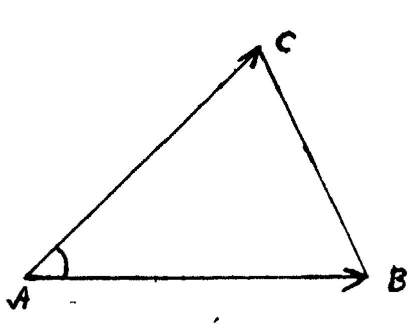
1. Demostrar la fórmula clásica del cuadrado del lado de un triángulo. Llamemos

$$c = \{\overrightarrow{AB}\}, \quad b = \{\overrightarrow{AC}\};$$

evidentemente, $\{\overrightarrow{BC}\} = b - c$.

Por la propiedad distributiva del producto escalar se tiene:

$$(\bar{b} - c)\ (\bar{b} - c) = bb + \bar{c}\bar{c} - 2bc = |b|^2 + |c|^2 - 2\ |b|\ |c| \cos (b, c).$$



Pero

$$(\bar{b} - \bar{c})\,(\bar{b} - \bar{c}) = |\bar{b} - \bar{c}|^2 = |\mathrm{BC}|^2$$

$$|\bar{b}|^2 = |\mathrm{AC}|^2, \qquad |\bar{c}|^2 = |\mathrm{AB}|^2,$$

y

$$\cos\,(\bar{b},\, \bar{c}) = \cos \mathrm{BAC},$$

luego

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2 \cdot \mathrm{AC} \cdot \mathrm{AB} \cdot \cos \mathrm{BAC}.$$

2. Demostrar que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Llamemos

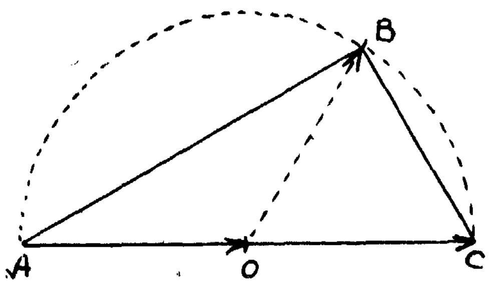
$$b = \{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}, \qquad a = \{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\} = \{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}.$$

Entonces,

$$\{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\} = a + b, \qquad \{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\} = a - b.$$

De aquí:

$$\{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\} \cdot \{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\} = (a + b)\,(a - c) = \overline{aa} - \overline{bb} = |a|^2 - |b|^2.$$



Pero $|a| = \mathrm{AO}$ y $|b| = \mathrm{OB}$, y como ambos son radios de la circunferencia, serán iguales, así que el producto escalar $\{\mathrm{AB}\} \cdot \{\mathrm{BC}\} = 0$, luego AB es perpendicular a BC.

3. Dados cuatro puntos cualesquiera del espacio, O, A, B, C, se puede demostrar que

$$\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\}\,\{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\} + \{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\,\{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\} + \{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\,\{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\} = 0.$$

En efecto, llamando

$$a = \{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\}, \qquad b = \{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}, \qquad c = \{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\},$$

se tiene:

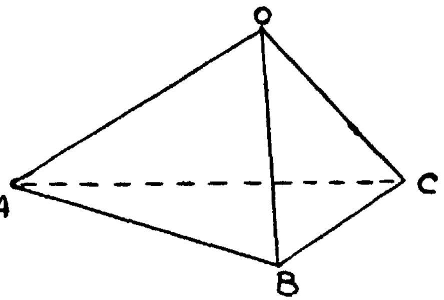
$$\{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\} = c - b, \qquad \{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\} = a - c, \qquad \{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\} = b - a.$$

Entonces el primer miembro de esa igualdad resulta igual a:

$$\bar{a}(\bar{c}-\bar{b})+\bar{b}(\bar{a}-\bar{c})+\bar{c}(\bar{b}-\bar{a})=\bar{a}\bar{c}-\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{a}-\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{b}-\bar{c}\bar{a}=0,$$

sin más que aplicar las propiedades distributiva y conmutativa.

Esta expresión la podemos aplicar a los dos siguientes problemas:



4. Si en un tetraedro dos pares de aristas opuestas están formadas por aristas perpendiculares, lo mismo le sucede al tercer par.

En efecto, si en el tetraedro del dibujo son OA $\perp$ BC y OB $\perp$ AC, entonces,

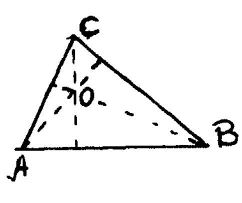
$$\{\overrightarrow{OA}\}\ \{\overrightarrow{BC}\}=0, \qquad \{\overrightarrow{OB}\}\ \{\overrightarrow{AC}\}=0;$$

sustituyendo en la igualdad anterior resulta:

$$\{\overrightarrow{OC}\}\ \{\overrightarrow{AB}\}=0,$$

lo que nos dice que OC $\perp$ AB, c. q. d.

5. Demostrar que las alturas de un triángulo son concurrentes. Tracemos dos alturas, CO y BO, que se cortan en O; vamos a ver que si unimos O con A obtenemos la tercera altura. Basta aplicar la expresión anterior siguiendo el mismo razonamiento que en el problema número 4.

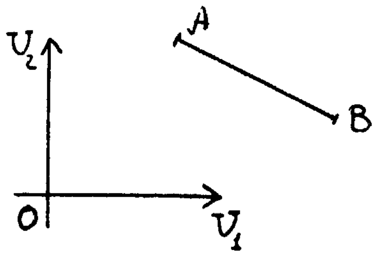


6. Demostrar que la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales de un paralelepipedo es igual a la suma de los cuadrados de las doce aristas. Llamando

$$\{\overrightarrow{OA}\}=a, \qquad \{\overrightarrow{OB}\}=b, \qquad \{\overrightarrow{OC}\}=c,$$

pecto del sistema de referencia $\{0, \bar{u}_1, \bar{u}_2\}$, donde $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es una base métrica del plano vectorial, la distancia entre ambos puntos será el módulo del vector AB. Pero, siendo:

$$\{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\} = (b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2) - (a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2) =$$
$$= (b_1 - a_1)\bar{u}_1 + (b_2 - a_2)\bar{u}_2,$$



resultará que el vector $\{\overrightarrow{AB}\}$ tiene, respecto de la base $\{u_1, u_2\}$, las coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$; luego

$$\text{dist. (A, B)} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

De modo análogo, dadas dos rectas $x = a + \lambda t$, $x = b + \mu s$, es decir, la primera pasa por el punto A, tal que $\{\overrightarrow{OA}\} = a$ y tiene la dirección del vector $t = \{\overrightarrow{AT}\}$, y la segunda pasa por B, tal que $\{\overrightarrow{OB}\} = b$ y tiene la dirección del vector $s = \{\overrightarrow{BS}\}$; entonces el ángulo que forman ambas rectas es igual al que forman los vectores t y s, de modo que:

$$\cos(r, r') = \cos(\bar{t}, s) = \frac{\bar{t}\bar{s}}{|t|\,|s|},$$

con lo que queda definido el ángulo de dos rectas.

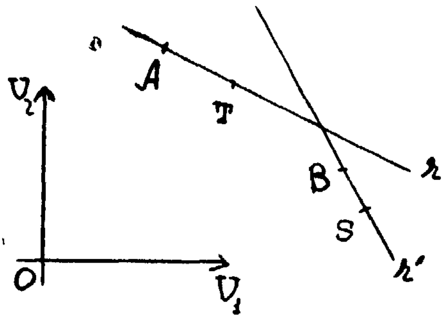
Si llamamos (a_1a_2) a las coordenadas de A y (t_1t_2) a las del vector t respecto de la base métrica $\{u_1, u_2\}$, resultará, como se sabe por el estudio del plano afín, que la ecuación de la recta r se puede escribir en la forma:

$$\frac{x_1 - a_1}{t_1} = \frac{x_2 - a_2}{t_2},$$

o bien:

$$t_2x_1 - t_1x_2 + (t_1a_2 - t_2a_1) = 0.$$

A partir de esta ecuación podemos observar que el vector $(t_2, -t_1)$, cuyas componentes son los coeficientes de x_1 y x_2 en la ecuación car-



tesiana, es perpendicular al (t_1, t_2), que es el vector de dirección de la recta, ya que:

$$(t_2, -t_1)\,(t_1, t_2) = t_2t_1 + (-t_1)t_2 = 0.$$

Resulta, entonces, que dada la ecuación cartesiana de una recta respecto de un sistema de referencia métrico, el vector de componentes los coeficientes de las dos variables tiene una dirección perpendicular a la recta dada. Así que si la recta r tiene la ecuación cartesiana $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$ y la recta r' es de ecuación

$$u'_1x_1 + u'_2x_2 + u'_3 = 0;$$

los vectores (u_1u_2), $(u'_1u'_2)$ son, respectivamente, perpendiculares a r y r', por lo que:

$$\cos\,(r, r') = \cos\,[(u_1u_2),\ (u'_1u'_2)] = \frac{u_1u'_1 + u_2u'_2}{\sqrt{u^2_1 + u^2_2}\,\sqrt{u'^2_1 + u'^2_2}}.$$

La condición de perpendicularidad de ambas rectas será:

$$u_1u'_1 + u_2u'_2 = 0.$$

Análogamente, en el espacio, si un plano tiene por ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0,$$

respecto de un sistema de referencia métrico, el vector $(a_1a_2a_3)$ es

tivamente, aplicando las anteriores propiedades del producto vectorial, se tendrá:

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = (a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3) \wedge (b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 + b_3\bar{u}_3) =$$
$$= a_1b_1(\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_1) + a_1b_2(\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2) + a_1b_3(\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_3) +$$
$$+ a_2b_1(\bar{u}_2 \wedge \bar{u}_1) + a_2b_2(\bar{u}_2 \wedge \bar{u}_2) + a_2b_3(\bar{u}_2 \wedge \bar{u}_3) +$$
$$+ a_3b_1(\bar{u}_3 \wedge \bar{u}_1) + a_3b_2(\bar{u}_3 \wedge \bar{u}_2) + a_3b_3(\bar{u}_3 \wedge \bar{u}_3) =$$
$$= a_1b_2\bar{u}_3 - a_1b_3\bar{u}_2 - a_2b_1\bar{u}_3 + a_2b_3\bar{u}_1 + a_3b_1\bar{u}_2 - a_3b_2\bar{u}_1 =$$
$$\begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix} \bar{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ b_3b_1 \end{vmatrix} \bar{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix} \bar{u}_3,$$

Así que el vector $\bar{a} \wedge \bar{b}$ tiene por coordenadas:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ b_3b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix} \right)$$

muy fáciles de recordar.

Si el vector c $(c_1c_2c_3)$ se multiplica escalarmente por $\bar{a} \wedge b$, se tiene:

$$c(a \wedge b) = c_1 \begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ b_3b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1c_2c_3 \\ a_1a_2a_3 \\ b_1b_2b_3 \end{vmatrix}$$

A este número se le llama *producto mixto* de los vectores c, a y $\bar{b}$. Evidentemente,

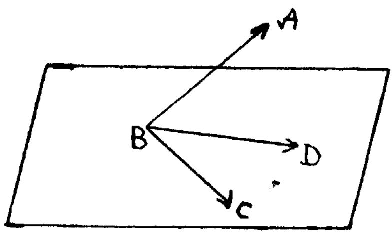
$$c(a \wedge b) = a(b \wedge c) = b(c \wedge a) = -c(b \wedge a) = -a(c \wedge b) =$$
$$= -b(a \wedge c).$$

Aplicaciones.—Veamos, a título de muestra, algunos ejemplos en los que se pone de manifiesto la sencillez del cálculo vectorial en la resolución de problemas geométricos.

1. Hallar la distancia de un punto a un plano.

Sea el punto A y el plano definido por los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

El vector $v = \{\overrightarrow{BC}\} \wedge \{\overrightarrow{BD}\}$ es perpendicular a ese plano y el $\dfrac{\bar{v}}{|v|}$ es un vector unitario en esa dirección. Entonces, si multiplicamos escalarmente $\dfrac{\overline{v}}{|\overline{v}|}$ por el vector $\{\overrightarrow{BA}\}$, el valor absoluto de su producto escalar es la distancia de A al plano BCD.



Ejemplo: Sea A(1, —2, 1), B(2, 4, 1), C(—1, 0, 1), D(—1, 4, 2). En este caso,

$$\{\overrightarrow{BC}\} = (-3,\ -4,\ 0),\quad \{\overrightarrow{BD}\} = (-3,\ 0,\ 1),\quad \overline{v} = (-4,\ 3,\ -12),$$

$$\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{(-4,\ 3,\ -12)}{13},\quad \{\overrightarrow{AB}\} = (1,\ 6,\ 0),\quad \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}\{\overrightarrow{AB}\} = \frac{14}{13},$$

que es la distancia pedida.

2. Hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan.

Sean AB y CD esas rectas. El vector $v = \{\overrightarrow{AB}\} \wedge \{\overrightarrow{CD}\}$ es perpendicular a ambas. Si multiplicamos escalarmente el vector unitario $\dfrac{v}{|\overline{v}|}$ por un vector cualquiera con extremos en una y otra recta, $\{\overrightarrow{AC}\}$, por ejemplo, el valor absoluto de su producto escalar es la distancia pedida.

Ejemplo: A(1, —2, —1), B(4, 0, —3), C(1, 2, —1), D(2, —4, —5).

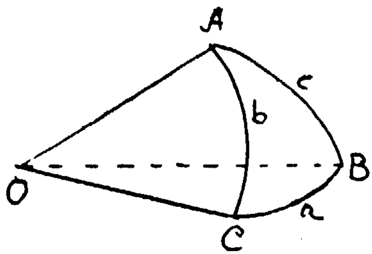
$$\{\overrightarrow{AB}\} = (3,\ 2,\ -2),\quad \{\overrightarrow{CD}\} = (1,\ -6,\ -4),\quad v = (-20,\ 10,\ -20),$$

$$\frac{v}{|\overline{v}|} = \frac{1}{3}(-2,\ 1,\ -2),\quad \{\overrightarrow{AC}\} = (0,\ 4,\ 0);\quad d = \frac{v}{|v|}\{AC\} = \frac{4}{3}.$$

3. Demostrar las fórmulas de la trigonometría plana.

mamos a los diedros con las mismas letras que los vértices, $\hat{A}$, $\hat{B}$, ..., y a los lados opuestos con $\hat{a}$, $\hat{b}$, ... Representaremos también por

$$\bar{a} = \{\overrightarrow{OA}\}, \quad \bar{b} = \{\overrightarrow{OB}\}, \quad c = \{\overrightarrow{OC}\}, \quad a' = \{\overrightarrow{OA'}\}, \quad b' = \{\overrightarrow{OB'}\}, \quad \bar{c}' = \{\overrightarrow{OC'}\},$$



todos ellos vectores unitarios. Se tiene entonces:

$$ab = \cos \hat{c}, \quad ac = \cos \hat{b}, \quad bc = \cos \hat{a},$$

$$a \wedge b = c' \operatorname{sen} \hat{c}, \quad c \wedge a = b' \operatorname{sen} \hat{b}, \quad b \wedge c = a' \operatorname{sen} \hat{a}$$

$$a'b' = \cos \hat{c}', \quad a'c' = \cos \hat{b}', \quad b'c' = \cos \hat{a}',$$

$$a' \wedge b' = c \operatorname{sen} \hat{c}', \quad c' \wedge a' = b \operatorname{sen} \hat{b}', \quad b' \wedge c' = a \operatorname{sen} \hat{a}'.$$

De todo ello:

$$a(b \wedge c) = b(c \wedge a) = c(a \wedge b) = aa' \operatorname{sen} \hat{a} = bb' \operatorname{sen} \hat{b} = cc' \operatorname{sen} \hat{c}.$$

$$a'(b' \wedge c') = b'(c' \wedge a') = c'(a' \wedge b') = a'a \operatorname{sen} \hat{a}' = b'b \operatorname{sen} \hat{b}' = c'c \operatorname{sen} \hat{c}',$$

y dividiendo esas expresiones:

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{a}}{\operatorname{sen} \hat{a}'} = \frac{\operatorname{sen} \hat{b}}{\operatorname{sen} \hat{b}'} = \frac{\operatorname{sen} \hat{c}}{\operatorname{sen} \hat{c}'}.$$

Pero como

$$\hat{a}' = \pi - \hat{A}, \quad \hat{b}' = \pi - \hat{B}, \quad \hat{c}' = \pi - \hat{C},$$

queda:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} \hat{a}}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{\operatorname{sen} \hat{b}}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{\operatorname{sen} \hat{c}}{\operatorname{sen} \hat{C}}}$$

Para la primera fórmula se parte de la siguiente identidad que puede comprobarse como ejercicio:

$$(a \wedge b)(c \wedge d) = (ac)(bd) - (ad)(bc),$$

llamada *identidad de Lagrange,* para cualesquiera vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$.

En nuestro caso la aplicamos a:

$$(c \wedge a)(a \wedge b) = (ca)(ab) - (ba)(aa),$$

y, sustituyendo ambos miembros por sus valores ya detallados antes, queda:

$$\operatorname{sen} \hat{b} \operatorname{sen} \hat{c}(b'c') = (ca)(ab) - (bc),$$

ya que $aa = 1$;

$$\operatorname{sen} \hat{b} \operatorname{sen} \hat{c} \cos \hat{a}' = \cos \hat{b} \cos \hat{c} - \cos \hat{a};$$

luego

$$\boxed{\cos \hat{a} = \cos \hat{b} \cos \hat{c} + \operatorname{sen} \hat{b} \operatorname{sen} \hat{c} \cos \hat{A}}$$

ya que

$$\cos \hat{a} = -\cos(\pi - \hat{a}) = -\cos \hat{A}.$$

Y análogamente las restantes.

EL GRUPO DE LOS MOVIMIENTOS

Todos los movimientos, del plano y del espacio, los vamos a introducir a través de la simetría respecto de una recta. El estudio vectorial de las simetrías es análogo, tanto si lo hacemos en el plano como en el espacio. Por ello, y por razones de comodidad, lo haremos en el plano, pero la traducción al espacio es inmediata.

Definición.—Se llama *simetría* respecto de una recta r a la trans-

2. Los puntos de r son invariantes por la simetría y solamente ellos.

En efecto, un punto cualquiera de r, $\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{v}$, se transforma en el punto

$$\bar{x}' = 2\bar{a} + 2[(\bar{a} + \lambda\bar{v})\bar{v}]\bar{v} - (\bar{a} + \lambda\bar{v}) = 2\bar{a} + 2[\bar{a}\bar{v} + \lambda\bar{v}\bar{v}]\bar{v} - \bar{a} - \lambda\bar{v} =$$
$$= \bar{a} + \lambda\bar{v} = \bar{x},$$

sin más que operar teniendo en cuenta [1] y [2]. Recíprocamente, si $\bar{x}$ se transforma en sí mismo será:

$$\bar{x} = 2\bar{a} + 2(\bar{x}\bar{v})\bar{v} - \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \bar{a} + (\bar{x}\bar{v})\bar{v},$$

luego $\bar{x}$ es un punto de r, el dado por el valor $\lambda = \bar{x}\bar{v}$.

3. La figura transformada de una recta es otra recta.

Sea la recta $\bar{x} = \bar{b} + \mu\bar{t}$ y vamos a ver en qué se transforma mediante la simetría. Cada punto $\bar{x}$ de la recta se transformará en el

$$\bar{x}' = 2\bar{a} + 2[(\bar{b} + \mu\bar{t})\bar{v}]\bar{v} - (\bar{b} + \mu\bar{t}) = 2\bar{a} + 2[\bar{b}\bar{v} + \mu\bar{t}\bar{v}]\bar{v} - \bar{b} - \mu\bar{t} =$$
$$= 2\bar{a} + 2(\bar{b}\bar{v})\bar{v} + 2\mu(\bar{t}\bar{v})\bar{v} - \bar{b} - \mu\bar{t} = 2\bar{a} + 2(\bar{b}\bar{v})\bar{v} - \bar{b} +$$
$$+ \mu[2(\bar{t}\bar{v})\bar{v} - \bar{t}],$$

de donde, si llamamos

$$\bar{c} = 2\bar{a} + 2(\bar{b}\bar{v})\bar{v} - \bar{b}, \qquad \bar{s} = 2(\bar{t}\bar{v})\bar{v} - \bar{t},$$

resultará que la recta $\bar{x} = \bar{b} + \mu\bar{t}$ se ha transformado mediante la simetría en la $\bar{x}' = \bar{c} + \mu\bar{s}$.

4. Un segmento MN se transforma en otro M'N' de la misma longitud.

En efecto, si

$$\bar{m} = \{\overrightarrow{OM}\}, \quad \bar{n} = \{\overrightarrow{ON}\}, \quad \bar{m}' = \{\overrightarrow{OM'}\}, \quad \bar{n}' = \{\overrightarrow{ON'}\},$$

se tendrá que las longitudes respectivas son:

$$|MN| = |\bar{n} - \bar{m}|, \quad |M'N'| = |\bar{n}' - \bar{m}'|.$$

Pero

$$\bar{m}' = 2\bar{a} + 2(\bar{m}\bar{v})\bar{v} - \bar{m}, \quad \bar{n}' = 2\bar{a} + 2(\bar{n}\bar{v})\bar{v} - \bar{n};$$

luego

$$\bar{n}' - \bar{m}' = 2[(\bar{n}\bar{v}) - (\bar{m}\bar{v})]\bar{v} - (\bar{n} - \bar{m}) = 2[(\bar{n} - \bar{m})\bar{v}]\bar{v} - (\bar{n} - \bar{m});$$

$$(\bar{n}' - \bar{m}')(\bar{n}' - \bar{m}') = 4[(\bar{n} - \bar{m})\bar{v}]^2 + (\bar{n} - \bar{m})^2 -$$

$$-4[(\bar{n} - \bar{m})\bar{v}]\bar{v}(\bar{n} - \bar{m}) = 4[(\bar{n} - \bar{m})\bar{v}]^2 + (\bar{n} - \bar{m})^2 - 4[(\bar{n} - \bar{m})\bar{v}]^2 =$$

$$= (\bar{n} - \bar{m})^2;$$

luego

$$|\bar{n}' - \bar{m}'| = \sqrt{(\bar{n}' - \bar{m}')^2} = \sqrt{(\bar{n} - \bar{m})^2} = |\bar{n} - \bar{m}|.$$

5. Las simetrías conservan los ángulos.

Sean dos rectas, $x = b + \mu t$, $x = c + \rho s$. El ángulo que forman es

$$\cos(t, s) = \frac{ts}{|t|\,|s|}.$$

Sus transformadas, según la propiedad 3, tienen, respectivamente, la dirección de los vectores

$$t_1 = 2(tv)v - t, \qquad s_1 = 2(sv)v - s.$$

El coseno del ángulo de estos vectores será:

$$\cos(t_1, s_1) = \frac{t_1 s_1}{|t_1|\,|s_1|}.$$

Pero

$$t_1 s_1 = [2(tv)v - t]\,[2(sv)v - s] = 4[(tv)(sv)]v^2 + ts - 2(tv)vs -$$

$$-2(sv)vt = 4[(tv)(sv)] - 4(tv)(sv) + ts = ts;$$

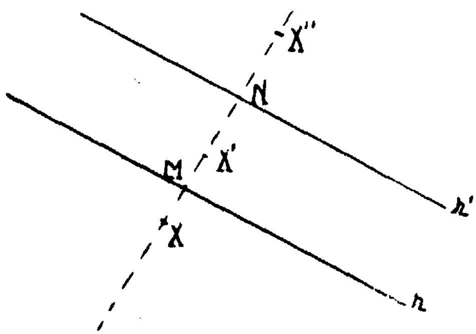
$$|t_1|^2 = 4(tv)^2v^2 + t^2 - 4(tv)vt = 4(tv)^2 + t^2 - 4(tv)^2 =$$

$$= t^2 = |t|^2 \Rightarrow |t_1| = |t|,$$

y lo mismo $|s_1| = |s|$, luego $\cos(t_1, s_1) = \cos(t, s)$.

6. Dejamos sin demostrar, por comodidad, la propiedad bien conocida de que la simetría respecto de una recta cambia la orientación del plano.

Producto de simetrías en el plano.—De la propiedad 1 resulta que el producto de dos simetrías respecto de la misma recta es la identidad. Queda por ver el producto de dos simetrías según que sus ejes sean paralelos o se corten.



a) Si los ejes son paralelos, el punto X se transforma en el X' mediante la simetría respecto de r y el X' en el X'' mediante la de eje r', luego, en el producto de ambas simetrías, X se transforma en X''. Pero

$$XX' \perp r, \qquad X'X'' \perp r',$$

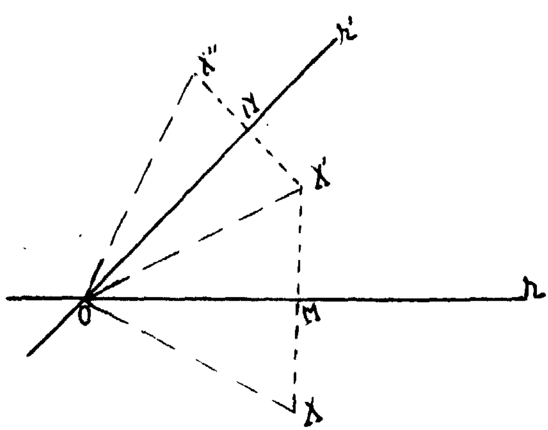
y como $r \parallel r'$ será $XX' \parallel X'X''$, o sea, X, X', X'' están alineados. Resulta así que XX'' es una recta perpendicular a r y a r', es decir, tiene una dirección fija para cualquier X. Por otra parte,

$$XM = MX' \qquad X'N = NX'';$$

luego

$$XX'' = XM + MX' + X'N + NX'' = 2MX' + 2X'N =$$
$$= 2(MX' + X'N) = 2MN;$$

luego el segmento XX'', cualquiera que sea X, tiene una longitud fija, igual al doble de la distancia de r a r'. Finalmente, el sentido de X a X'' es el mismo que el de M a N, es decir, de r a r'. En con-



secuencia: el producto de dos simetrías respecto de dos rectas paralelas es una traslación definida por el vector $\{XX'\}$ de módulo doble de la distancia entre r y r'; dirección, la perpendicular a estas rectas, y sentido, el que va de la primera recta a la segunda.

b) Si los ejes se cortan en un punto O, el punto X se transforma en X′ mediante la simetría de eje r, y el X′ en X″ mediante la de eje r'. ¿Qué relación hay entre el punto X y el punto X″, transformado suyo por el producto de las dos simetrías? De la igualdad de los triángulos rectángulos OXM y OX′M y de los OX′N y OX″N, que tienen respectivamente iguales los catetos, se deduce:

$$OX = OX', \qquad OX' = OX'' \Rightarrow OX = OX'';$$

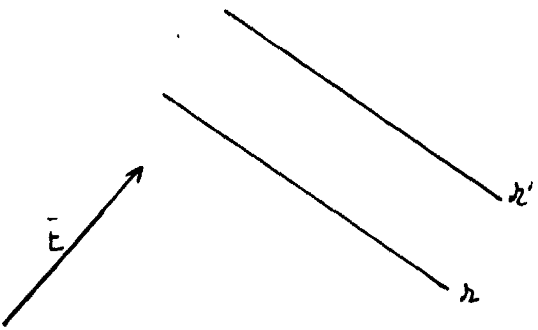
$$X\hat{O}X'' = X\hat{O}M + M\hat{O}X' + X'\hat{O}N + N\hat{O}X'' = 2(M\hat{O}X' + X'\hat{O}N) =$$

$$= 2M\hat{O}N = 2 \text{ áng. } (r, r').$$

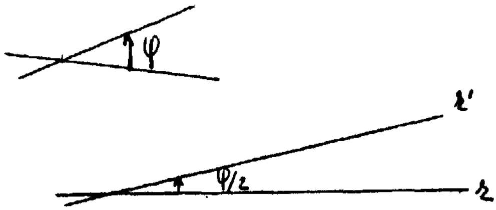
Se tiene, entonces, que pasamos del punto X al punto X″, de manera que $OX = OX''$ y el ángulo $X\hat{O}X''$ es un ángulo fijo, cualquiera que sea X, e igual al doble del ángulo de r con r'. A una transformación de este tipo se le llama un *giro* de centro O y ángulo $2(r, r')$. Resulta, pues: el producto de dos simetrías planas respecto de dos ejes que se cortan es igual a un giro de centro el punto de intersección de ambos ejes y ángulo duplo del que forman éstos y dirigido en el mismo sentido que va del primer eje al segundo.

Cuestión recíproca.—Vamos a ver ahora que, recíprocamente, toda traslación y todo giro en el plano puede descomponerse en producto de dos simetrías.

a) Sea la traslación definida por un cierto vector t, y vamos a descomponerla en el producto de dos simetrías, $S_r, S_{r'}$, respecto de los

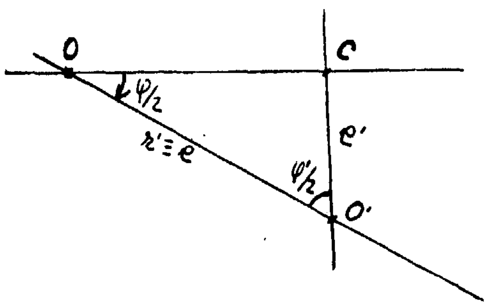


ejes r y r'. Podemos tomar uno de los ejes arbitrariamente, sin otra condición que la de ser perpendicular a la dirección de $\vec{t}$; por ejemplo, el eje r; entonces, el r' será una recta paralela a r, a una distancia de ella igual a $\frac{1}{2}|\vec{t}|$, y de modo que el sentido de r a r' sea igual al de $\vec{t}$; entonces, por la parte *a)* del párrafo anterior se verifica el resultado que se buscaba. Igual sucedería si hubiéramos elegido r' sin otra condición que la de ser perpendicular a t y construyendo r a partir de ella.



b) Si se trata de un giro de centro O y ángulo orientado φ, se toma uno de los ejes, r por ejemplo, sin otra condición que la de pasar por O, y el r' quedará entonces determinado de manera que pasa por O y que el ángulo (r, r') sea igual a $\frac{1}{2}\varphi$ y dirigido en el mismo sentido.

El grupo de los movimientos del plano.—Ya se vió en la parte lineal que el conjunto de todas las traslaciones del plano formaba un



grupo. Vamos a ver ahora que el conjunto de todas las traslaciones, giros y simetrías del plano forman a su vez un grupo que contiene al de las traslaciones. Después de lo que hemos visto en el producto de simetrías, bastaría con probar que el producto de dos giros o de un giro por una traslación o de una traslación por un giro es o una traslación o un giro.

Sean dos giros de centros O y O′ y ángulos φ y φ', respectivamente, a los que denominaremos $G_{O,\varphi}$, $G_{O',\varphi'}$. Descompondremos cada uno de ellos en producto de dos simetrías:

$$G_{O,\varphi} = S_{r'} S_r, \quad G_{O',\varphi'} = S_{e'} S_e,$$

eligiendo los ejes del siguiente modo: el eje r' es la recta OO′, con lo que r queda completamente determinado, según el párrafo anterior; el eje e es el mismo r' y así determinamos e'. Entonces:

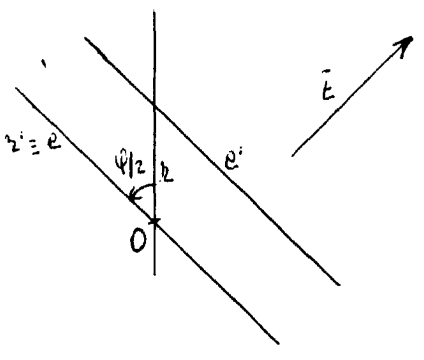
$$G_{O',\varphi'} = (S_{e'} S_e)(S_{r'} S_r) = S_{e'}(S_e S_{r'}) S_r;$$

pero $S_e S_{r'}$ es la identidad, por ser el producto de dos simetrías respecto del mismo eje, luego

$$G_{O',\varphi'} G_{O,\varphi} = S_{e'} S_r,$$

y el producto de estas dos simetrías será una traslación o un giro según que e' y r sean paralelas o se corten (en la figura será un giro de centro C y ángulo el doble de r con e').

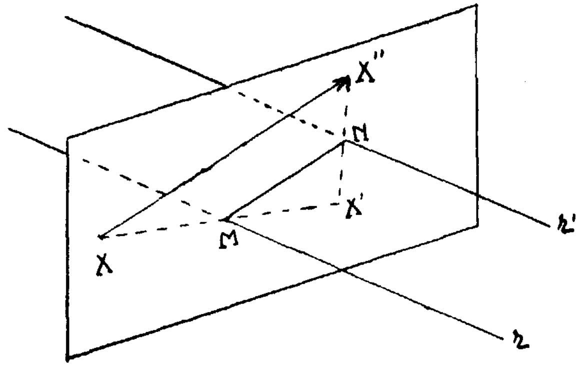
Si fuera el producto de un giro de centro O y ángulo φ, $G_{O,\varphi}$ por una traslación de vector t, se eligen r y r' para el giro de modo que r' pase por O y sea perpendicular a t, con lo que r está ya dado; y el eje e para la traslación, que coincide con r', con lo que queda dado e'. Razonando como antes, resultará que el producto del giro por la traslación es igual al producto de dos simetrías, luego será igual a un giro o a una traslación. Y lo mismo si se trata del producto de una traslación por un giro.



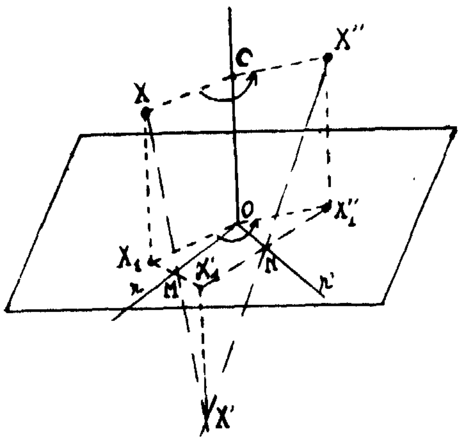
Como, además, en el conjunto de traslaciones, giros, simetrías y sus productos está contenida la identidad (traslación de vector O, o giro de ángulo 2π, o producto de dos simetrías respecto de la misma recta), y la inversa de cada transformación (traslación de vector opuesto, giro de igual centro y ángulo opuesto, o la misma simetría, que es inversa de ella misma) resultará que ese conjunto de transformaciones constituye un grupo llamado el *grupo de los movimien-*

tos del plano. Por las propiedades 4 y 5 de las simetrías resulta que los movimientos conservan las distancias y los ángulos, es decir, conservan la forma y dimensiones de las figuras. Dos figuras en estas condiciones de igualdad de forma y de dimensiones se dice que son congruentes. Por eso, a los movimientos se les llama también *transformaciones de congruencia.*

El grupo de los movimientos del espacio.—De un modo análogo al caso del plano se demuestra que el producto de dos simetrías res-



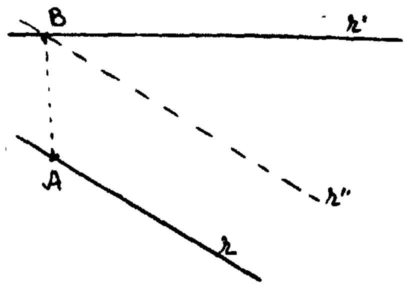
pecto de dos rectas paralelas, r y r', del espacio es una traslación definida por un vector de módulo doble de la distancia entre ambas rectas, dirección perpendicular a ellas y sentido el de la primera recta a la segunda. Basta ver que $|XX''| = 2\ |MN| = 2$ dist. $(r,\ r')$, por ser, en el triángulo $XX'X''$, M y N los puntos medios de los lados XX' y $X'X''$, respectivamente, y lo mismo las demás condiciones.



Si las rectas se cortaran en un punto O, y por él trazamos la perpendicular OC al plano definido por ellas, resulta que el transformado de un punto cualquiera **X** pertenece al plano trazado desde este punto y que sea paralelo al de r y r', el cual corta a la recta anterior en el punto C; y se pasa de **X** a **X''** mediante un giro alrededor de C análogo al que transforma la proyección del primero, X_1, en el X''_1, proyección de X'', mediante el producto de las dos simetrías, como se desprende del dibujo.

Ahora bien, se llama giro de ángulo φ alrededor de una recta e a la transformación siguiente: dado un punto Y del espacio, por él se traza un plano perpendicular a e, al que cortará en un punto E; el giro en ese plano con centro E y ángulo φ transformará Y en Y'; diremos que Y' es el transformado de Y en el giro de ángulo φ y eje e.

Así que, según esto, el producto de dos simetrías respecto de dos rectas que se cortan en el espacio es un giro de eje la perpendicular común a las dos rectas en su punto de intersección, ángulo doble del formado por las dos rectas y sentido el que va de la primera recta a la segunda.



Si las rectas r y r' se cruzan y es AB la perpendicular común, por el punto B de r' se traza una paralela r'' a r; entonces, para el producto de las dos simetrías se tiene:

$$S_{r'} S_r = S_{r'} (S_{r''} S_{r''}) S_{r'} = (S_{r'} S_{r''}) (S_{r''} S_r).$$

Por ser $S_{r''} S_{r''}$ la identidad y por la propiedad asociativa del producto de transformaciones. Pero $S_{r''} S_r$ es una traslación de vector $2\{\overrightarrow{AB}\}$ y $S_{r'} S_{r''}$ es un giro alrededor de AB con ángulo $2(r'', r')$, de modo que: el producto de dos simetrías respecto de dos rectas que se cruzan es igual al producto de una traslación cuyo vector tiene módulo doble de la distancia entre ambas rectas, dirección perpendicular a ellas y sentido de la primera recta a la segunda, seguida de un giro de eje la perpendicular común a las dos rectas, ángulo doble del que ellas forman y sentido de la primera recta a la segunda. Una transformación de este tipo se llama un *movimiento helicoidal*. En particular, una traslación puede considerarse como un movimiento helicoidal de giro nulo y un giro es un movimiento helicoidal cuya traslación está definida por el vector cero. Entonces, el conjunto de todas las traslaciones, giros y simetrías y movimientos helicoidales del espacio y sus productos constituyen un grupo llamado el *grupo de los movimientos del espacio*. Análogamente a como ocurría en el plano y por las mismas razones, los movimientos del espacio son transformaciones de congruencia.

EL GRUPO EQUIFORME EN EL PLANO

La transformación que vamos a definir a continuación puede estudiarse también en el plano y en el espacio, pero esta vez vamos a reducirnos a estudiarla exclusivamente en el plano.

Definición.—Dado un punto fijo C del plano y un número fijo $k \neq 0$, se llama *homotecia* de centro C y razón k a la transformación que hace pasar de cada punto X del plano a otro punto X′, tal que verifique:

$$\{\overrightarrow{CX'}\} = k\{\overrightarrow{CX}\}.$$

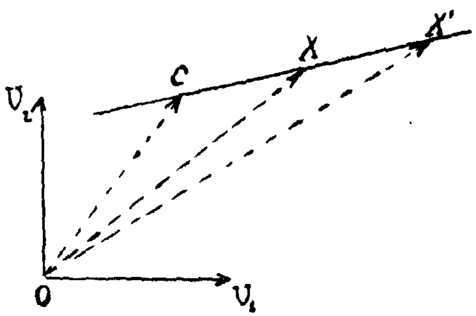
Según esto, los puntos C, X y X′ estarán alineados y, además, C estará o no entre X y X′, según que $k < 0$ o $k > 0$.

Ecuación y propiedades de la homotecia.—Sea $\{O;\ u_1,\ u_2\}$ un sistema de referencia métrico del plano,

$$c = \{\overrightarrow{OC}\}, \quad x = \{\overrightarrow{OX}\} \quad \text{y} \quad x' = \{\overrightarrow{OX'}\}.$$

Se verifica entonces:

$$\{\overrightarrow{CX}\} = x - c, \qquad \{\overrightarrow{CX'}\} = x' - c.$$



Luego, de acuerdo con la definición, se obtendrá para la homotecia la siguiente ecuación vectorial:

$$x' - c = k(x - c),$$

o sea:

$$x' = (1 - k)c + kx.$$

Entonces, a cada vector x, que representará un punto X del plano, corresponderá el punto X′ dado por el vector x' obtenido mediante la ecuación anterior. De ella resultan las siguientes propiedades:

1. La homotecia es una correspondencia biunívoca. En efecto, el vector x determina unívocamente al vector x' y, recíprocamente,

dado x' le corresponde un único vector original:

$$x = \frac{1}{k} x' - \frac{1-k}{k} c.$$

2. El punto C es el único punto invariante por una homotecia de razón $k \neq 1$. En efecto, el transformado de c será:

$$c' = (1-k)c + kc = c.$$

Y, recíprocamente, si hacemos $x' = x$ para obtener los puntos invariantes, se tendrá:

$$x = (1-k)c + kx \Rightarrow (1-k)x = (1-k)c \Rightarrow x = c,$$

siempre que $1 - k \neq 0$.

3. La homotecia de razón $k = 1$ es la identidad. Basta ver que

$$x' = (1-1)c + 1 \cdot x = x,$$

para todo x.

4. La homotecia transforma una recta en otra recta paralela.

Dada la recta $x = a + \lambda t$, que tiene la dirección del vector t, su transformada será:

$$x' = (1-k)c + k(a + \lambda t) = [(1-k)c + ka] + k\lambda t,$$

donde, al ser λ parámetro variable, y, por tanto, $k\lambda$, nos resulta la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1-k)c + ka$ y tiene la dirección del vector t, como habíamos dicho. Las homotecias son, pues, colineaciones.

5. La razón entre dos segmentos cualesquiera M'N' y MN, transformado el primero del segundo, es constante e igual a k. En efecto, si m y n son los vectores que definen los puntos M y N, los de M' y N' serán, respectivamente:

$$m' = (1-k)c + km, \qquad n' = (1-k)c + kn.$$

Ahora bien, las longitudes de esos segmentos las obtendremos mediante:

$$\mathrm{MN} = |n - m|$$

$$\mathrm{M'N'} = |n' - m'| = |[(1-k)c + kn] - [(1-k)c + km]| =$$
$$= |kn - km| = k|n - m|,$$

luego

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{k|\bar{n} - \bar{m}|}{|\bar{n} - \bar{m}|} = k.$$

6. Las homotecias conservan los ángulos. Basta recordar que transforman cada recta en otra paralela, según la propiedad 4, luego el ángulo que forman dos rectas será igual al de sus transformadas, por tener los lados paralelos.

7. Por las propiedades 5 y 6 resultará que las homotecias transforman cualquier figura, y en particular un triángulo, en otra que tenga iguales los ángulos y los lados proporcionales, es decir, en otra figura semejante.

Producto de homotecias.—Sean dos homotecias de centros C y C' y razones k y k', respectivamente. Sus ecuaciones serán, pues:

$$x' = (1 - k)c + kx, \qquad x' = (1 - k')c' + k'x.$$

Mediante su producto, un punto dado por el vector x se transformará en el

$$x' = (1 - k)c + kx,$$

por la primera homotecia y éste en el

$$x'' = (1 - k')c' + k'x'$$

por la segunda, luego el producto equivaldrá a la transformación:

$$x'' = (1 - k')c' + k'[(1 - k)c + kx] = (1 - k')c' + k'(1 - k)c + k'kx.$$

Pueden ocurrir dos casos:

a) $kk' = 1$.

La transformación está dada entonces por la ecuación:

$$x'' = (1 - k')c' + k'c - k'kc + k'kx = (1 - k)(c' - c) + x,$$

que es la ecuación de una traslación definida por el vector

$$(1 - k)(c' - c).$$

Ahora bien, $c' - c = \{\overrightarrow{CC'}\}$, luego el vector de la traslación es

$$(1 - k)\{\overrightarrow{CC'}\}.$$

Resulta así que el producto de dos homotecias cuyas razones son inversas una de la otra es una traslación definida por un vector paralelo a la recta que une los centros de ambas homotecias.

b) $kk' \neq 1$.

En este caso queda simplemente:

$$x'' = (1 - k')c' + k'(1 - k)c + k'kx,$$

que es la ecuación de una homotecia de razón kk'. Si llamamos C″ a su centro y c'' al vector que lo representa se podría escribir la anterior ecuación en la forma:

$$x'' = (1 - kk')c'' + kk'x;$$

luego

$$(1 - kk')c'' = (1 - k')c' + k'(1 - k)c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'' = \frac{1 - k'}{1 - kk'}c' + \frac{k'(1 - k)}{1 - kk'}c.$$

Vamos a ver que este centro está alineado con C y C′. Bastará con que veamos que los vectores $\{\overrightarrow{CC'}\} = c' - c$ y $\{\overrightarrow{CC''}\} = c'' - c$ son proporcionales:

$$c'' - c = \frac{1 - k'}{1 - kk'}c' + \frac{k'(1 - k)}{1 - kk'}c - c =$$

$$= \frac{1 - k'}{1 - kk'}c' + \frac{k' - k'k}{1 - kk'}c - \frac{1 - k'k}{1 - kk'}c =$$

$$= \frac{1 - k'}{1 - kk'}c' + \frac{k' - 1}{1 - kk'}c = \frac{1 - k'}{1 - kk'}(c' - c),$$

luego

$$\{\overrightarrow{CC''}\} = \frac{1 - k'}{1 - kk'}\{\overrightarrow{CC'}\} \text{ c. q. d.}$$

Así que el producto de dos homotecias, cuando $kk' \neq 1$ es otra homotecia de razón el producto de las razones de las homotecias dadas y cuyo centro está alineado con los de éstas.

El grupo equiforme.—Resulta de aquí que el conjunto de todas las homotecias del plano no forman grupo, ya que el producto de dos de ellas puede no ser una homotecia, sino una traslación, pero si consideramos el conjunto de todos los movimientos del plano, todas las homotecias y los productos de homotecias entre sí y de homotecias por movimientos, ese conjunto sí que constituye un grupo, como es inmediato probar.

A tal grupo lo denominamos *grupo de las semejanzas* o *grupo equiforme.*

La razón de estas denominaciones se debe a que si transformamos una figura del plano por un elemento de este grupo se transformará, como vimos, en otra igual a ella si sólo intervienen movimientos o en otra semejante si entran también las homotecias. Es decir, cualquier figura se transforma mediante un elemento de este grupo en otra semejante, y por eso se llaman semejanzas a las transformaciones pertenecientes a este grupo. Como, por otra parte, las semejanzas conservan la forma de las figuras, aunque no siempre sus dimensiones, se llama por eso también al grupo que forman el grupo equiforme.