

Introducción analógica al estudio del movimiento armónico simple

Por Enrique PORTO ARCEO (*)

RESUMEN

El estudio del movimiento armónico simple en los niveles de Bachillerato y C. O. U. presenta serias dificultades debido fundamentalmente a dos factores. El Primero, la falta de conocimientos matemáticos, por parte del alumno, que impiden afrontar su estudio por un procedimiento deductivo a partir de la ecuación de la aceleración del movimiento. Para salvar esta deficiencia, la mayoría de los autores lo estudian por medio de las proyecciones sucesivas sobre un eje de las posiciones que adopta una partícula que describe un movimiento circular uniforme.

El segundo factor, ya más de fondo que de forma, se encuentra en la necesidad de introducir y cuantificar nuevos conceptos como son: elongación, frecuencia, fase, etc.

El presente trabajo aborda el estudio del movimiento armónico simple de forma inductiva por comparación analógica de las representaciones gráficas de la elongación frente al tiempo, con las funciones seno y coseno. Con él se ha tratado de evitar la asociación de este movimiento con el circular uniforme, que tan frecuentemente lleva al alumno a confusión. Asimismo, se busca introducir de la forma más clara posible el concepto de fase, y por último establecer una clara relación entre la ecuación matemática y el movimiento.

La fuerza exterior deformadora necesaria para producir un alargamiento, x , en un muelle (fig. 1) es directamente proporcional a éste; si suponemos las magnitudes vectoriales positivas cuando son medidas de izquierda a derecha, dicha fuerza viene dada por la expresión:

$$F_d = k \cdot x$$

siendo k una constante de proporcionalidad denominada constante elástica. Esta expresión constituye la ley de Hooke (es fácilmente comprobable en una

sencilla experiencia de cátedra mediante un dinamómetro).

La fuerza efectuada en sentido contrario por el dinamómetro se denomina «fuerza recuperadora», y es: $F_r = -F_d$, por tanto:

$$F_r = -k \cdot x$$

Supongamos ahora que sobre un muelle que se encuentra en su estado de equilibrio natural, y al que se ha unido en su extremo una masa, m , (fig. 2a), actúa una fuerza exterior deformadora, F_d , produciendo un alargamiento A , (fig. 2b). En esta posición se alcanza una situación de equilibrio entre F_d y F_r .

El trabajo realizado por la fuerza variable F_d al desplazarse a lo largo del espacio A ha quedado en su totalidad almacenado, en forma de energía potencial, en la deformación del muelle, ya que no existen otras fuerzas exteriores actuando sobre el sistema.

Si cesa F_d , esto es, si dejamos en libertad el sistema, la masa m quedará sólo bajo la acción recuperadora del muelle, F_r , iniciándose el movimiento de ésta hacia la posición de equilibrio con una aceleración, de la misma dirección que la fuerza, y de valor proporcional a esta.

A medida que el cuerpo se aleja de la posición A , y se acerca a la posición de equilibrio, F_r se hace menor (Ley de Hooke), y por tanto disminuye el valor de la aceleración ($F = m \cdot a$), no obstante su velocidad aumenta en valor absoluto debido a la existencia de la aceleración. Durante este trayecto la energía potencial almacenada en la deformación del muelle se transforma en energía cinética que es puesta de manifiesto por el aumento de velocidad de la masa m .

Quando se alcanza la posición de equilibrio se hace cero el alargamiento, x , cesa por tanto F_r y como consecuencia la aceleración. No obstante y aprovechando la energía cinética que posee el cuerpo se inicia de nuevo la deformación del muelle, que en este caso es un acortamiento de su longitud inicial,

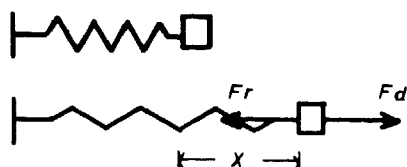


Figura 1

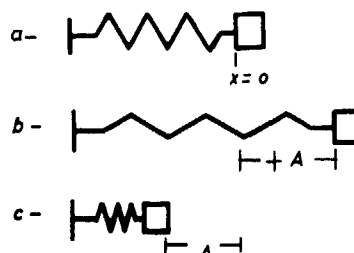


Figura 2

(*) Profesor agregado de Física y Química del I. B. Polígono de Coya (Vigo).

CUADRO 1

x	F_r		a		v		Energía potencial	Energía cinética
	signo	valor absol.	signo	valor absol.	signo	valor absol.		
A	neg.	máximo	neg.	máximo	—	cero	máxima	cero
entre A y O	neg.	decrece	neg.	decrece	neg.	crece	decrece	crece
O	—	cero	—	cero	neg.	máxima	cero	máxima
entre O y -A	pos.	crece	pos.	crece	neg.	decrece	crece	decrece
-A	pos.	máxima	pos.	máximo	—	cero	máxima	cero
entre -A y O	pos.	decrece	pos.	decrece	pos.	crece	decrece	crece
O	—	cero	—	cero	pos.	máxima	cero	máxima
entre O y A	neg.	crece	neg.	crece	pos.	decrece	crece	decrece

(Téngase en cuenta el convenio de signos fijado al principio)

transformándose, a medida que se produce ésta, la energía cinética en potencial, almacenada en dicho acortamiento.

A medida que el muelle se comprime nace de nuevo la fuerza recuperadora, pero en este caso dirigida de izquierda a derecha. Aparece como consecuencia una aceleración en el mismo sentido y que crece a medida que aumenta F_r , por tanto, a medida que aumenta la deformación. A causa de esta aceleración (dirigida de izq. a drcha.) la velocidad disminuye paulatinamente, llegando a ser cero cuando el cuerpo alcance la posición $-A$, (fig. 2c). En este momento toda la energía cinética se ha vuelto a transformar en energía potencial, y se inicia de nuevo el recorrido desde la posición $-A$ a la $+A$, repitiéndose, si no existen fuerzas exteriores, el proceso indefinidamente.

En el cuadro 1 se estudia la variación de la fuerza, aceleración, velocidad y energías cinética y potencial con la distancia, x , desde el cuerpo a la posición de equilibrio.

Tanto la teoría como la experiencia demuestran que el movimiento tiene un alcance $\pm A$ a cada lado de la posición de equilibrio y que cada movimiento de ida y vuelta se efectúa en el mismo tiempo. Cualquier tipo de movimiento que se repita, con todas sus constantes, en intervalos de tiempos iguales se denomina «periódico», y si se efectúa hacia adelante y hacia atrás sobre la misma trayectoria, se denomina «oscilatorio».

Este tipo de movimiento, de trayectoria rectilínea, donde de no haber pérdidas exteriores de energía por rozamiento continuaría indefinidamente, y que se realiza bajo la acción de una fuerza recuperadora elástica proporcional al desplazamiento del móvil con respecto a un punto de equilibrio y dirigida hacia este punto se denomina «Movimiento Armónico Simple», y se designa abreviadamente por M. A. S.

Nos encontramos pues ante un movimiento donde se recorre periódicamente el mismo espacio, de $+A$ a $-A$, bajo la acción de una fuerza, y con velocidad y aceleración todas ellas variables, cuyos valores se repiten periódicamente. Por ello, y a diferencia de otros movimientos no es tan importante conocer el espacio recorrido en un tiempo determinado, el tiempo transcurrido desde el comienzo del movimiento, o los valores alcanzados por la velocidad y aceleración en ese tiempo, como la posición, la velocidad y la aceleración del móvil en un determinado instante de la vibración. Todo ello nos obliga a introducir los siguientes conceptos y magnitudes nuevos con respecto a otros movimientos:

La elongación, x , es la distancia desde cualquier posición que ocupe el móvil en su oscilación a la posición de equilibrio. Puede tomar valores positivos y negativos.

La amplitud, A , es la elongación máxima. La distancia entre las dos posiciones extremas es, por tanto, $2A$.

Fase es el estado de la vibración en que se encuentra el móvil. Queda determinada por la elongación y la velocidad o aceleración. No es posible fijarla solamente por la elongación debido a que a cada valor de ésta corresponden dos, de la misma magnitud y distinto signo, para la velocidad y aceleración.

Oscilación, vibración completa o ciclo es el espacio recorrido por el móvil entre que éste adopta dos fases iguales de la vibración.

El período del movimiento, T , es el tiempo invertido en realizar una oscilación completa.

La frecuencia, f , es el número de oscilaciones completas que se efectúan en la unidad de tiempo; se mide en ciclos/seg., y esta unidad se denomina Hertz.

Evidentemente la frecuencia es inversa del período:

$$f = 1/T$$

Hemos de encontrar ahora una ecuación matemática que nos permita el cálculo de la elongación, x , en cualquier instante t :

$$x = F(t)$$

Supongamos un movimiento armónico simple de período T segundos y amplitud A unidades de longitud. Como el movimiento es periódico e indefinido hemos de fijar el origen del tiempo, y lo hacemos, de forma arbitraria tomando $t = 0$, cuando $x = A$ (más adelante se tratará este problema con mayor profundidad).

Si fotografiamos, en exposición, el sistema de la figura 2 iluminado por una luz estroboscópica de frecuencia $20/T$ destellos por segundo (la relación entre la frecuencia de la luz y el período del M. A. S. es fácil de establecer una vez conocidos ambos), podemos obtener, del análisis de la fotografía, la siguiente tabla de valores:

t(s)	$T/20$	$2T/20$	$3T/20$	$4T/20$	$5T/20$
x	0,95A	0,8A	0,59A	0,30A	0
t(s)	$6T/20$	$7T/20$	$8T/20$	$9T/20$	$10T/20$
x	-0,30A	-0,59A	-0,80A	-0,95A	-A

representando gráficamente estos datos obtenemos en la gráfica 1 de la figura 3 el intervalo correspondiente a los valores del tiempo comprendidos entre 0 y $T/2$. El resto de la representación gráfica se obtiene por simetría.

Representemos ahora, paralelamente y haciendo coincidir los orígenes, la función $y = \cos x$ frente al ángulo x expresado en radianes, tomando sobre el eje de abscisas la misma longitud para un tiempo de T segundos que para un ángulo de 2π radianes (gráfica 2, fig. 3).

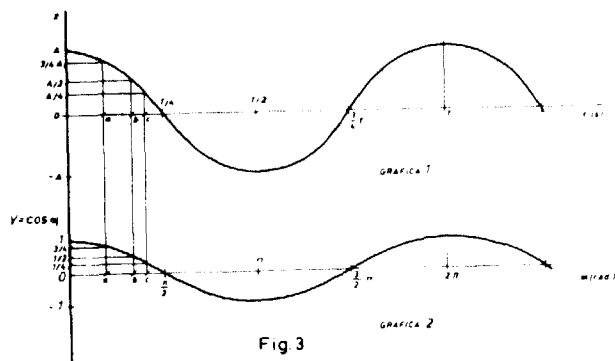


Fig 3

Trataremos de encontrar la ecuación a la que responde la línea representada en la gráfica 1 estudiando las analogías que presenta con la gráfica 2, cuya ecuación es conocida.

Si observamos detenidamente ambas representaciones notaremos que la 1 tiene la misma forma que la 2, por lo que ha de tratarse también de una función cosenoidal con las diferencias:

a) Las ordenadas de la gráfica 1 oscilan entre $\pm A$ mientras que las de la 2 lo hacen entre ± 1 .

b) $F(t)$ no puede ser una función trigonométrica directa del tiempo, del tipo $\cos(t)$, ya que para adoptar esta función todo el espectro de valores correspondiente a la circunferencia trigonométrica, tiene t que adoptar todos los valores comprendidos entre 0 y 360 s. Mientras que la elongación recorre todos los valores correspondientes a una oscilación completa en T segundos.

Hemos pues de introducir en la ecuación correspondiente a la gráfica 2 estas dos correcciones, y para ello planteamos una ecuación del tipo:

$$x = \psi \cos \varphi(t)$$

donde quedan introducidas por medio de las funciones correctoras ψ y φ .

Consideremos la primera de ellas, y veamos la analogía existente entre las ordenadas de ambas gráficas. Para ello estudiaremos las ordenadas que corresponden a una misma longitud sobre el eje de abscisas:

Longitud de abscisa	Ordenada de la gráfica 1 (x)	Ordenada de la gráfica 2 (y)
a		
3/4	3/4 A	3/4
b	A/2	1/2
c	A/4	1/4

según esta tabla de valores la relación existente entre ambas es:

$$x = A \cdot y$$

esto es, para una misma longitud de abscisa en la gráfica 1 corresponde una ordenada A veces mayor que en la gráfica 2.

Por analogía podemos concluir que el valor de la elongación nos viene dado por el producto de la amplitud, A , y el coseno de la función que nos establezca la relación analógica entre abscisas:

$$x = a \cdot \cos \varphi(t)$$

Tratemos ahora de encontrar la función $x(t)$.

Mientras en la gráfica 1 la abscisa varía de 0 a T , esto es, el tiempo que tarda el móvil en dar una oscilación completa, en la gráfica 2 lo hace de 2 a 2π (una circunferencia completa expresada en radianes). Podemos establecer entre ambas la correlación siguiente: «Una oscilación completa en la gráfica 1 corresponde por analogía a 2π radianes en la 2.» Ahora bien, interesa para su aplicación general extender la analogía a un número cualquiera de oscilaciones.

El número total de oscilaciones dadas por un móvil en un intervalo de tiempo t , durante un M. A. S., viene dado por el producto de la frecuencia, f (ciclos/s.), y t expresado en s. Así, si a una oscilación completa corresponden analógicamente 2π radianes, y a dos oscilaciones 4π , a un número cualquiera de oscilaciones, $f \cdot t$, corresponden $2 \cdot \pi \cdot f \cdot t$ radianes, y la función analógica, por tanto, que nos introduce la segunda de las correcciones es:

$$(t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t$$

De todo ello deducimos que la ecuación matemática a la que corresponde la representación gráfica 1 de la figura 3 es:

$$x = A \cdot \cos(2\pi f t)$$

ecuación que nos permite conocer la posición, x , de un móvil que sufre un M. A. S. en función de un intervalo de tiempo t , cuyo origen, como decíamos al principio, fijábamos arbitrariamente en función de la posición del móvil (figura 4).

Estudiemos ahora sobre la gráfica de la figura 4 (donde en abscisas hemos representado a la vez $t(s)$ y (rad)), una serie de puntos que representan distintas fases del movimiento, las cuales vienen determinadas por la elongación y velocidad del móvil:

Punto a: El móvil posee una elongación $x = A$, y velocidad cero. Se encuentra a punto de iniciar el movimiento de retroceso hacia la posición de equilibrio.

Punto b: La elongación es x_1 y la velocidad tiene un valor v_b dirigida hacia la posición de equilibrio.

Punto c: La elongación es cero, el móvil se encuentra en la posición de equilibrio, la velocidad alcanza su valor absoluto máximo y está dirigida hacia $-A$.

Punto d: La elongación es $-x_2$, la velocidad v_d dirigida hacia $-A$.

Punto e: La elongación se hace aquí igual a $-A$, la velocidad es cero. En este punto cambia el sentido del movimiento.

Punto f: La elongación vale $-x_2$, igual que en el punto d, su velocidad es también v_d , pero en este caso dirigida hacia $+A$.

La determinación de la fase mediante la elongación y velocidad del móvil resulta poco cómodo y menos práctico, pero si nos fijamos en la figura 4, cada una de las distintas fases estudiadas tiene una correspondencia analógica con un número, y sólo

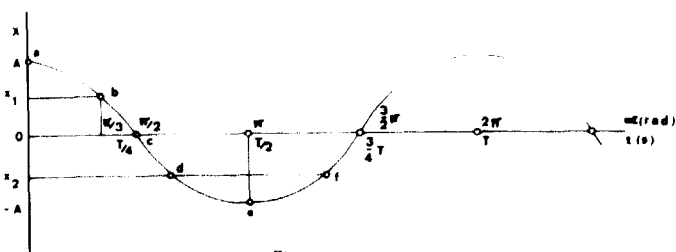


Figura 4

uno, determinado de radianes, que son los que corresponderían al número de oscilaciones dadas según la expresión $2\pi ft$. De esta forma es posible fijar la fase de la vibración por el número total de radianes correspondidos.

La expresión $2\pi ft$, en donde:

2π : representa el número de radianes que corresponden a una oscilación completa.

f : número de ciclos completos dados en unidad de tiempo (s), y

t : tiempo transcurrido.

representa el número total de radianes (análogos) que corresponden a las oscilaciones recorridas en el tiempo t .

Por tanto la fase de la vibración nos queda dada por la expresión matemática $2\pi ft$, y podemos de esta forma medirla en radianes. Así la fase del punto «c» serán $\pi/2$ radianes, y la del «e», π radianes.

Anteriormente y de forma arbitraria fijamos el origen del tiempo cuando $x = A$ (gráfica 2, fig. 5), supongamos que tomamos ahora $t = 0$ cuando $x = 0$, y el móvil se dirige hacia $+A$. La representación gráfica del movimiento, considerando este origen del tiempo, es la dada en la figura 5, gráfica 1. Esta gráfica es de tipo sinusoidal, por tanto un razonamiento similar al anterior nos daría una ecuación general para el movimiento del tipo:

$$x = A \cdot \text{sen}(2\pi ft)$$

Comparando ambas gráficas obtenemos la siguiente relación de valores:

t	x_1 en gráf. 1	x_2 en gráf. 2
0	0	A
$T/4$	A	0
$T/2$	0	-A
$3/4T$	-A	0

Observamos que la elongación, x_1 de la gráfica 1 toma los mismos valores que x_2 en la gráfica 2 un tiempo de $1/4T$ segundos después, esto es, va retrasada un cuarto de período o de oscilación, por tanto, análogamente $\pi/2$ radianes. Podemos pues decir que hemos tomado el origen de tiempos $\pi/2$ radianes desfasado con respecto al origen anterior.

Supongamos ahora que las gráficas 1 y 2 de la figura 5 corresponden a dos M. A. S. diferentes, que poseen el mismo período, T , y la misma amplitud, A , a los que denominaremos movimientos 1 y 2 respectivamente. Las ecuaciones generales de ambos son:

$$1) \quad x_1 = A \cdot \text{sen}(2\pi ft) \quad 2) \quad x_2 = A \cdot \cos(2\pi ft)$$

para poder comparar las dos ecuaciones consideremos que:

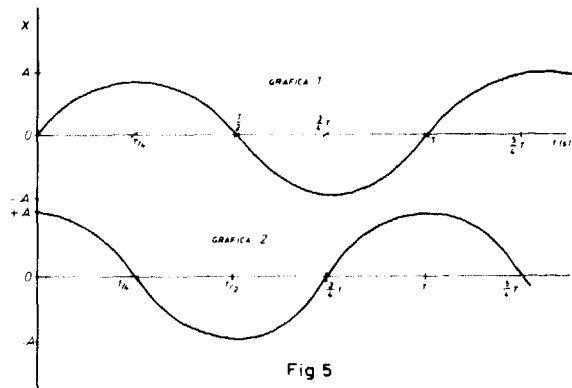


Fig 5

$$\cos(2\pi ft) = \text{sen}(2\pi ft + \pi/2)$$

de donde,

$$x_1 = A \cdot \text{sen}(2\pi ft) \quad \text{y} \quad x_2 = A \cdot \text{sen}(2\pi ft + \pi/2)$$

vemos, pues, que la fase del movimiento 2 es $\pi/2$ radianes mayor que la del 1. Diremos por tanto que va desfasado y adelantado $\pi/2$ radianes con respecto al movimiento 1.

Comprobamos así que la forma de la ecuación general del movimiento depende de la fase donde se fija el origen del tiempo. Para generalizar escribamos la ecuación general de la forma:

$$x = A \cdot \cos(2\pi ft + \varphi_0)$$

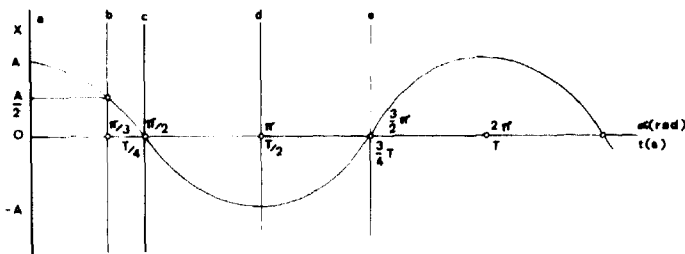


Figura 6

en donde a φ_0 se le denomina fase inicial del movimiento, y es el número de radianes que corresponden a la diferencia entre la fase que tomamos como origen del tiempo y la dada por $x = A$ y $v = 0$.

En el cuadro 2 se estudian las distintas ecuaciones generales que corresponderían a cinco M. A. S. del mismo T y A , cuyas fases iniciales para el instante $t = 0$ vienen indicadas en la figura 6.

Las expresiones de la velocidad y aceleración pueden obtenerse ahora por derivación de la ecuación de la elongación:

$$v = \frac{dx}{dt} = -2fA \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi^2 f^2 A \cdot \cos(2\pi ft + \varphi_0) = 4\pi^2 f^2 x$$

CUADRO 2

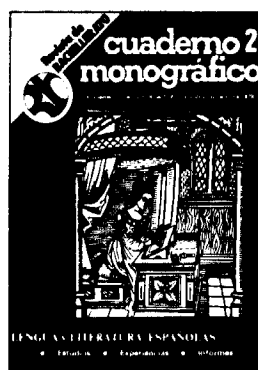
	t	x inicial	ϕ_0	Ecuación general
a	0	A	0	$x = A \cdot \cos(2\pi ft)$
b	0	A/2 (hacia -A)	$\pi/3$	$x = A \cdot \cos(2\pi ft + \pi/3)$
c	0	0 (hacia -A)	$\pi/2$	$x = A \cdot \cos(2\pi ft + \pi/2)$
d	0	-A	π	$x = A \cdot \cos(2\pi ft + \pi)$
e	0	0 (hacia A)	$3/2\pi$	$x = A \cdot \cos(2\pi ft + 3/2\pi)$

CUADERNOS MONOGRAFICOS DE LA "REVISTA DE BACHILLERATO"



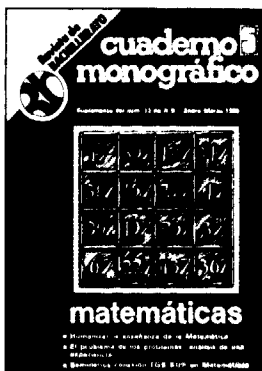
Número 1
Geografía
e Historia

Número 2.
Lengua y literatura
españolas.



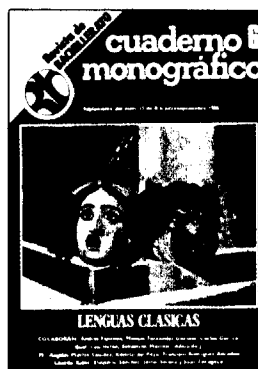
Número 3.
Ciencias
de la Naturaleza

Número 4.
Filosofía



Número 5.
Matemáticas

Número 6.
Lenguas clásicas



Precio de cada ejemplar: 160 ptas.
Suscripción a la «Revista de Bachillerato» (4 números normales
y 2 monográficos: 800 ptas).

Edita: SERVICIO DE PUBLICACIONES DEL MINISTERIO DE EDUCACION

Venta en: Planta baja del Ministerio de Educación. Alcalá, 34. Madrid-14.
Paseo del Prado, 28. Madrid-14.

Edificio del Servicio de Publicaciones. Ciudad Universitaria, s/n; teléfono 449 77 00. Madrid-3.