Algunas reflexiones sobre un tema de Bachillerato: introducción del logaritmo y del número e

Por José Miguel PACHECO CASTELAO (*)

1. PRELIMINARES

Una de las mayores dificultades de la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato es la motivación de los temas presentados. En esta nota pretendemos aclarar algunas nociones, referentes a los cursos 1.° y 2.°, que tal vez resulten de utilidad a los colegas.

El programa de 1.° tiene, aparte de la natural obligación de adquirir soltura en los cálculos, una línea conductora clara: extensiones sucesivas del concepto de número. Paralelamente a esta guía aparecen los cálculos combinatorios, los polinomios y las progresiones. La aplicación que se hace de las progresiones consiste en algunas nociones de cálculo comercial. Creemos que la utilidad de éstas es mínima y que debería prestárseles menos atención, para dedicársela a cuestiones matemáticas más puras, que entroncan con el desarrollo histórico de esta ciencia, motivando así lo que veremos a continuación.

Es costumbre, ahora, explicar las nociones de grupo y homomorfismo con gran lujo de detalles, pero raras veces proveemos a los alumnos de ejemplos con entidad suficiente para motivar nuestras explicaciones. En efecto: tras estudiar en detalle las propiedades de la suma de enteros, o de polinomios, se acaba triunfalmente con «tenemos así un grupo conmutativo». Al alumno esto no sólo no le dice nada, sino que añade algo que deberá recordar, con el inconveniente de que nunca utilizará propiedad alguna del grupo para obtener algún resultado concreto. Lo que ocurre después es de todos conocido.

Se trata aquí de presentar, basado en la noción de homomorfismo, el concepto de logaritmo, pues así es como se expresó por vez primera para las aplicaciones al cálculo práctico por Neper, Briggs, Bürgi (a quien se debe, al parecer, la primera tabla de logaritmos), y otros.

También, a partir de esta definición, invitaremos a la construcción de una tabla de logaritmos al estilo de los geómetras del siglo XVII e introduciremos, del modo más natural posible (justificando así esa denominación) el número *e* como base de los logaritmos naturales.

Todas estas cuestiones pueden ser explicadas en dos fases, en los cursos 1.° y 2.° de nuestro Bachillerato, sin tener que recurrir al concepto de función inversa de la exponencial, cuya construcción, por hacer uso de propiedades finas de la estructura de la recta real, suele ser inalcanzable para los alumnos.

2. LOGARITMOS

Sean dos progresiones de números reales, una aritmética y otra geométrica, cuyos primeros términos respectivos son 0 y 1. Llamaremos b y a a las respectivas razones:

$$\begin{array}{llll} 1, & a, & a^2, & a^3, \ldots \\ 0, & b, & 2b, & 3b, \ldots \end{array}$$

A esta pareja de progresiones la llamaremos *sistema de logaritmos*. Los elementos de la progresión de abajo (la aritmética) son los logaritmos de los términos de la progresión geométrica, y escribiremos:

$$\log\ (a^n) = nb.$$

Teorema fundamental

«El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.» En efecto: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, al cual corresponde $(n+m)\ b = nb + mb$.

Aquí nos aparece ya la importante noción de homomorfismo entre los grupos aditivo y multiplicativo de **R**. Las leyes de cálculo de los logaritmos se deducen fácilmente del teorema fundamental.

Los números reales contenidos entre dos potencias consecutivas de a pueden dotarse de logaritmos mediante el procedimiento de interpolación de medios geométricos en la progresión de arriba: si entre a^r y a^s se intercalan n medios, ello equivale a formar una nueva pareja de progresiones: la geométrica con razón $a1^{/(n+1)}$, y la aritmética con razón $b/(n+1)$. Estas nuevas progresiones contienen a las de partida como subsucesiones y permiten el cálculo aproximado de logaritmos para números cualesquiera.

En la práctica, para obviar este proceso de cálculo, tomaremos en la progresión geométrica una razón $l + z$, siendo c un número «muy pequeño». De esta forma, el crecimiento de la parte geométrica es muy lento y la pareja de progresiones es ya una tabla con muchos logaritmos.

(*) Catedrático de Matemáticas del Instituto Nacional de Bachillerato «San Cristóbal de los Ángeles» de Madrid.

Un refinamiento del proceso consiste en tomar la siguiente pareja de «progresiones»:

$$\begin{cases} 1 \vdots, K, K(1+c), K(1+c)^2 \dots \\ 0 \vdots, 1, \quad 2 \quad , \quad 3 \quad \dots \end{cases}$$

donde K es una potencia grande de 10, por ejemplo 10^3, y $c = 1/K$. Para ilustrarlo construimos una pequeña tabla al estilo de la de Bürgui:

	N.º (p.g.)	log (p.a.)
	1	0
	1000	1
$1000\,(1+1/(1000)) =$	1001	2
...	1002,001	3
...	1003,003	4
...	1004,006	5
...	1005,01	6
...	1006,015	7
...	1007,02	8
⋮	⋮	⋮

La ventaja de este tipo de construcción estriba en que se arrastran pocos decimales. Debido a que se desprecian las unidades de orden superior a la milésima, siempre se comete un error por exceso al tomar estos logaritmos.

Conviene ya dar la siguiente.

Definición:

Llamaremos *base* del sistema de logaritmos dado por la pareja de progresiones:

$$\begin{matrix} 1, & a, & a^2, & \dots \\ 0, & b, & 2\,b, & \dots \end{matrix}$$

a aquel número real cuyo logaritmo sea 1.

A partir de esta definición, podemos reconstruir sin dificultad alguna la exposición habitual de la teoría de los logaritmos.

3. EL NÚMERO e

La idea radica en la interpolación de que hablábamos al principio del párrafo 2. Consideremos el sistema de logaritmos:

$$\begin{matrix} 1, & (1+c), & (1+c)^2, & \dots \\ 0, & b \quad , & 2\,b \quad , & \dots \end{matrix}$$

Al ir interpolando, lo que ocurre es que $1+c \to 1$ y $b \to 0$, o, lo que es lo mismo, que $c \to 0$ y $b \to 0$.

La idea de Neper es la siguiente: Para caracterizar un sistema de logaritmos se toma el cociente b/c, y al límite de este cociente cuando numerador y denominador tiendan a 0 se le llama *módulo* del sistema de logaritmos. Por lo tanto, *parece natural tomar el sistema cuyo módulo sea el más sencillo posible, esto es, 1.* Si no hacemos interpolación, llamaremos módulo al cociente b/c, con lo cual podemos poner $b = c$ y nos quedará:

$$\begin{cases} 1, & (1+b), & (1+b)^2, & \dots \\ 0, & b \quad , & 2\,b \quad , & \dots \end{cases}$$

Ahora vamos a hallar la base de este sistema de logaritmos que, según lo dicho más arriba, es aquel número cuyo logaritmo es 1. Pueden darse dos casos:

a) Hay algún término en la progresión aritmética igual a 1. Entonces $1 = nb$, o bien $b = 1/n$, y la base será: base $= (1+b)^n = (1+(1/n))^n$, donde el lector reconoce el aspecto familiar de la sucesión definidora del número e.

b) Ocurre lo contrario. En tal caso, para algún n será:

$$nb < \text{base} < (n+1)\,b,$$

ENCUENTROS DE PROFESORES DE MATEMATICAS Y FISICA Y QUIMICA DE BACHILLERATO

El Colegio de Doctores y Licenciados de Valladolid viene organizando unos ENCUENTROS DE PROFESORES DE MATEMATICAS, cuya coordinación corre a cargo de M.ª Ascensión López Chamorro, catedrática de Instituto.

En el primer ENCUENTRO, que tuvo lugar en noviembre de 1977, se desarrollaron los puntos siguientes: 1) Estudio comparativo de los resultados de los dos últimos cursos. 2) Estudio del rendimiento de los alumnos. Causas. 3) Matemática moderna y tradicional. 4) Estudio de los programas. 5) Orientación bibliográfica. 6) Criterios evaluativos. 7) Orientación profesional del alumno. 8) Conclusiones.

En el segundo ENCUENTRO, celebrado en el mes de mayo, se trataron los temas siguientes: 1) Estudio del programa de 3.º de Bachillerato. 2) Criterios evaluativos. 3) Análisis del programa de C.O.U. 4) Posible olimpiada matemática entre alumnos de 3.º de Bachillerato.

Un grupo de profesores de Física y Química de Valladolid proyecta organizar un ENCUENTRO DE PROFESORES DE FISICA Y QUIMICA DE BACHILLERATO Y COU para el mes de febrero de 1979, con objeto de estudiar la didáctica de la asignatura en su vertiente experimental.

Todos aquellos profesores que deseen colaborar pueden enviar iniciativas y sugerencias que se tendrán en cuenta al redactar el programa. También se pide la colaboración de editoriales en este sentido, o con una exposición de libros de carácter experimental sobre la asignatura.

La dirección y coordinación estará en el Colegio de Doctores y Licenciados de Valladolid. Plaza de España, 13-5.º, indicando en el sobre «para el Encuentro de profesores de Física y Química».

de donde

$$1/(n+1) < b < 1/n,$$

y también $(1+b)^n < \text{base} < (1+b)^{n+1}$, así que podemos poner, por consideraciones inmediatas:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \text{base} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

o bien:

$$\left(\frac{1}{1+1/(n+1)}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \text{base} <$$

$$< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

de donde, tomando límites para $n \to \infty$, lo cual equivale al proceso de interpolación antes citado, nos dará: base $= \lim (1 + (1/n))^n = e$.

Creemos, con razón, que estas ideas deben ser conocidas del alumno antes de pasar al estudio profundo del número *e*.

4. REFERENCIAS

Obviamente, las referencias para este tipo de cuestiones han de ser clásicas. Ante la dificultad de encontrar las fuentes en directo, citaremos sólo:

Bourdon: «Arithmétique», París, 1827.

Briot: «Álgebra superior», Barcelona, 1874.

Toeplitz: «Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung», Berlín, 1949.

Las calculadoras en el aula

Por Ricardo AGUADO MUÑOZ y Ricardo ZAMARREÑO (*)

1. INTRODUCCIÓN

En este curso académico nos hemos propuesto actuar de manera sistemática con objeto de sacar partido de las calculadoras que tienen los alumnos. Los trabajos que vamos a reseñar han sido realizados en las clases de matemáticas del Instituto Piloto «Cardenal Herrera Oria».

Las calculadoras de los alumnos representan una amplia gama de marcas y modelos. Sin embargo, características comunes a todas ellas son que trabajan en cadena y que usan la notación algebraica normal. Estas coincidencias son suficientes para que el profesor, haciendo abstracción de modelos y marcas, pueda dirigirse a la clase hablando simplemente de «la calculadora».

Queremos advertir que casi la totalidad de los trabajos que vamos a exponer a continuación se pueden realizar con la calculadora más modesta; es decir, con la que únicamente posee las cuatro operaciones aritméticas fundamentales.

2. CÁLCULO APROXIMADO DE LA RAÍZ *n*-ÉSIMA

2.1. Raíz cuadrada

Empezamos por la raíz cuadrada. El cálculo de un valor aproximado de la raíz cuadrada de un número positivo tiene un triple interés: primero, sirve para dotar a la calculadora del alumno de la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ (caso de que no la tuviera); segundo, muestra un buen ejemplo de algoritmo repetitivo, que da pie para introducir los conceptos de *programa* y *organigrama;* tercero, permite generalizar el método para calcular raíces cúbicas, cuartas, etc.

En otro artículo [1], hemos expuesto detalladamente la metodología empleada para abordar este problema, por lo que aquí vamos a resumir:

Calcular la raíz cuadrada de un número positivo Q es lo mismo que hallar el lado de un cuadrado de área Q. Un método de aproximación consiste en construir una sucesión de rectángulos de área Q cada vez «más cuadrados». Eligiendo una base x_1 para el primer rectángulo, la altura será $\frac{Q}{x_1}$. Como base del segundo rectángulo, tomamos la media aritmética de las dimensiones del primero:

$$\boxed{x_2 = \left(\frac{Q}{x} + x_1\right) : 2}.$$

Y así sucesivamente:

La sucesión de las bases $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se aproxima a $\sqrt{Q}$.

2.2. Generalización

Hallar la raíz cúbica de un número positivo Q significa obtener las dimensiones de un cubo de volumen Q. Por analogía con el caso de la raíz cuadrada, construimos una sucesión de ortoedros de volumen Q cada vez «más cúbicos». Para simplificar el problema, imponemos la condición de que todos los ortoedros sean de base cuadrada. Eligiendo x_1 para el lado del cuadrado de la primera base, la altura es $\frac{Q}{x_1^2}$. Un lado adecuado para la base del segundo ortoedro es la media aritmética de las dimensiones del primer ortoedro, es decir:

(*) Catedrático y profesor agregado de Matemáticas respectivamente del Instituto Nacional de Bachillerato «Herrera Oria» de Madrid.