

$H\left(\frac{1}{x}, y\right)$ , es decir,  $z$  es la media aritmética de dos medias armónicas ya que:

$$\begin{aligned} A\left[H\left(x, \frac{1}{y}\right), H\left(\frac{1}{x}, y\right)\right] &= \\ &= \frac{H\left(x, \frac{1}{y}\right) + H\left(\frac{1}{x}, y\right)}{2} = \\ &= \frac{\frac{2}{\frac{1}{x} + y} + \frac{2}{x + \frac{1}{y}}}{2} = \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{2x}{1+xy} + \frac{2y}{1+xy}}{2} = \frac{x+y}{1+xy}$$

4. De todo lo dicho anteriormente se nos plantean las siguientes preguntas:

¿Todas las magnitudes físicas escalares, cuando intervienen en forma conjunta de dos o más, su fenómeno físico equivalente en la superposición es aritmético, armónico, geométrico, cuadrático, etc.?

¿En el fenómeno resultante, llamado también fenómeno medio o de equilibrio, el carácter geométrico, armónico, etc., identifica a la magnitud física que estamos considerando?

¿Tiene existencia real el hecho de ser un fenómeno físico, armónico, geométrico, aritmético, etc.?

## 5 La marginación de la estadística en Bachillerato

Por María José RIVERA ORTUN (\*)

He leído con agrado el cuaderno monográfico núm. 5 de esta revista dedicado a las Matemáticas, porque a través de tres artículos se pone de relieve uno de los problemas más graves que en estos momentos tiene planteados el estudio de las Matemáticas, tanto en EGB como de Bachillerato y también a nivel superior. Este es, claro está, el de la Geometría. Incluso se llega a hablar de la muerte de la Geometría, o de la marginación de la Geometría, o de la dificultad de establecer un programa aceptable de Geometría.

A través de estas líneas, me voy a ocupar de otro caso igualmente lamentable, pero al que, por el contrario, no se le presta apenas atención: el de la Estadística en BUP.

El problema de la Estadística parte, en primer lugar, de que es una ciencia cuya fecha de nacimiento como tal es muy reciente (mediados del siglo XIX), a pesar de que el conocimiento vulgar que puso las bases para su posterior desarrollo se inició hace muchos muchos años. Recuérdese, por ejemplo, que ya los griegos conocían la distinción existente entre los fenómenos deterministas y los de azar. También, importadas de los chinos, tenían nociones de Combinatoria, que más tarde sería elemento indispensable para el descubrimiento de regularidades en los juegos de azar, que potenciarían después los estudios de Pascal, Fermat, Bernouilli y Laplace.

Desde siempre se ha distinguido entre el saber científico y el saber vulgar. El saber científico se inicia con la percepción de que el saber vulgar obtenido mediante la experiencia, no es suficiente para resolver un determinado número de problemas; pero, indudablemente, el saber vulgar ha sido una componente indispensable del saber científico, como móvil y base del mismo.

En toda ciencia encontramos tres elementos esenciales: su esencia u objeto de estudio, su finalidad y su método. A partir de cada uno de estos tres componentes, se han hecho distintas clasificaciones de las ciencias. Sin embargo, resulta una simplificación sin razón encasillar a una determinada ciencia en uno u otro bloque; puede participar sin que exista contradicción simultáneamente de varias vertientes, formal y factual, teórica y experimental, pura y aplicada. Este es el caso de la Estadística, a pesar de que sea más factual que formal, más experimental que teórica y más aplicada que pura.

Estudiando por separado cada uno de sus elementos, encontramos que:

- Su esencia u objeto de estudio son los fenómenos aleatorios o de azar, en contraposición con las llamadas Ciencias de la Naturaleza, que dirigen sus esfuerzos hacia el conocimiento y comprensión de los fenómenos deterministas.
- Su objetivo es el de posibilitar la utilización de los resultados obtenidos por las Matemáticas, en la investigación de ciertos problemas que se plantean en el uso de la experimentación tanto dentro de las Ciencias de la Naturaleza como en las Ciencias Sociales.
- Su método, elemento fundamental, es, sin duda, modelo entre los utilizados en la investigación científica, hasta el punto de convertirla en una ciencia metodológica por excelencia. A grandes rasgos el método estadístico consiste en lo siguiente: se trata de analizar un hecho ocurrido a través de la realización de un experimento. Para ello se construye un modelo matemático simplificado de la realidad, para sacar una serie de conclusiones, que habrán de ser posteriormente contrastadas mediante nuevas experiencias.

Los dos tipos de fenómenos, deterministas y de azar, estimularon a los estudiosos en dos direcciones opuestas: las regularidades de aquéllos propiciaron su estudio, mientras que éstos fueron confiados al horóscopo. Había otro camino por el cual podía haber continuado el desarrollo de la Estadística; debido a la necesidad que tienen los gobernantes de saber de sus gobernados, se elaboran los primeros cómputos de población con fines fundamentalmente militares y tributarios. De ahí su nombre, que hace referencia al Estado, al servicio del cual estaba. Ahora bien, la obtención de datos, es decir, las estadísticas, no son más que el primer paso del método estadístico. La introducción en fechas recientes de la idea de muestreo, el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad y la Inferencia Estadística, configuraron a finales del siglo pasado y comienzos de éste el despegue de una ciencia que, ayudada por el desarrollo formidable de la Informática,

(\*) Catedrática de Matemáticas. I. B. Mixto de Carcagente (Valencia).

a la que a su vez empuja mediante el planteamiento de cálculos cada vez más complejos, tiene ante sí un brillante futuro.

Después de que las viejas concepciones filosóficas deterministas han sido superadas y es posible hablar de un conocimiento en profundidad basado en la percepción, cuando los científicos son conscientes de la aleatoriedad inherente en sus procedimientos de medición, la Estadística puede considerarse como el más valioso de los métodos de investigación científica. Recientemente la mayoría de las ciencias se valen de modelos, que no son más que aproximaciones simplificadas de la realidad, con el fin de obtener sus objetivos. Para poder realizar un planteamiento adecuado de los mismos se precisa contar con muchos datos, a los que, naturalmente, hay que saber analizar. La Estadística proporciona métodos aptos para poder realizar estos análisis.

Pero los matemáticos han sido los últimos en darse cuenta del papel preponderante a que está llamada a jugar esta nueva ciencia, a pesar de que el método estadístico, al incluir el estudio de un modelo matemático, utiliza y desarrolla construcciones puramente matemáticas, como son la Teoría de la Probabilidad y las Distribuciones. Además, la mayor parte de las técnicas estadísticas necesitan el apoyo de una fuerte base matemática.

Más aún, casi puede decirse que el crecimiento de la Estadística ha tenido lugar a pesar de la reticencia que en su día tuvieron y aún están teniendo muchos matemáticos de los llamados «puros», que miran con desprecio e incluso ignoran a aquellos otros calificados de «aplicados», haciendo referencia a las dos actitudes que puede adoptar el matemático de cara a su trabajo.

Fueron otras ciencias, Biología, Sociología, Psicología y Economía quienes con sus constantes insistencias, obligaron a potenciar el desarrollo de la Estadística, e incluso despertaron a los matemáticos de su irrazonable sueño.

La Estadística se configura hoy día como instrumento indispensable para todos los estudios en el campo de las Ciencias Experimentales. A nivel de la enseñanza universitaria este reconocimiento está confirmado a través de su presencia en los planes de estudios. Pareció razonable incluirla dentro del Bachillerato, y por afinidad o por competitividad del profesorado supongo, se puso dentro de los programas de Matemáticas.

Sin embargo, a menudo me asalta una duda: ¿fue el convencimiento profundo de su condición de indispensable lo que movió a pensar en ella para BUP, o fue quizás una consecuencia más de la fiebre renovadora que sacudió la década de los sesenta, con el triunfo de lo que no tardó en llamarse Matemática Moderna?

Sobre el papel, en Bachillerato debe estudiarse: una pequeña parte de Estadística descriptiva que incluye tablas de frecuencias, representación de datos, medidas de centralización y de dispersión, regresión, correlación; una pequeña introducción a la Teoría de la Probabilidad y, muy superficialmente, algunas de las distribuciones más importantes. No está mal. Pero la realidad es muy otra. A la hora de la verdad, la Estadística es la primera sacrificada cuando surgen problemas de tiempo, es decir, casi siempre. Y se da la contradicción de que esta parte del programa, una de las de mayor utilidad para casi todos los estudiantes, se imparte con desgana, sin convencimiento, sin tiempo. Además, no debemos olvidar la enorme influencia que ejerce la actitud del profesor sobre la predisposición básica del alumno hacia una determinada materia.

Puede ser que la formación de la mayor parte de los enseñantes de Matemáticas en Bachillerato haya sido fundamentalmente de la llamada «pura», pero es preciso mirar más lejos. Por una parte, debe considerarse que las enseñanzas primaria y secundaria están orientadas, o al menos tendrían que estarlo, hacia la consecución de la formación integral de la persona por medio, entre otras cosas, de la búsqueda de una visión global del mundo que nos rodea, con el fin de introducirse en él a través de una determinada actividad. Por otra parte, los avances científicos y tecnológicos que se suceden día a día a pesar de las dificultades, el progreso en una palabra, que va mucho más allá, están configurando la realidad de un modo muy distinto a como era hace una o dos décadas. Hay que pensar que los enseñantes de hoy, y mucho más los estudiantes de hoy, pertenecen ya a ese fu-

turo. La Estadística se configura como elemento indispensable para la formación de los integrantes de ese inmediato porvenir, y este es un hecho que hay que conocer, admitir y asimilar para obrar en consecuencia.

Las Matemáticas son imprescindibles a la hora de iniciar la comprensión de las Ciencias de la Naturaleza, sobre todo la Física y la Química. Se habla mucho cuando se aborda la integración interdisciplinar, de si los alumnos reciben una adecuada formación matemática en cuanto a contenidos, que les permita introducirse en el conocimiento de estas otras materias con soltura: sobre Cálculo Infinitesimal e Integral, Trigonometría, Teoría de Funciones, Álgebra Lineal o Geometría Afín, Vectorial y Euclídea, o sobre la adquisición del dominio de los automatismos del cálculo. Sin embargo, a pesar de que las Ciencias de la Naturaleza hacen uso de la experimentación, con objeto de descubrir regularidades en el comportamiento de los fenómenos estudiados, no se las provee desde el punto de vista cuantitativo o matemático, en sentido amplio, de una metodología científica adecuada y capaz de abordar estos problemas, hasta la etapa universitaria.

Por ejemplo, a nivel elemental en las sencillas experiencias de laboratorio que se llevan a cabo dentro de la enseñanza de la Física en Bachillerato, se puede poner de relieve el interés de la Estadística Descriptiva en BUP. Pondré dos casos de aplicación imprescindible (existencia de aleatoriedad) de la Regresión Lineal y de la Correlación Lineal, estudiadas desde el punto de vista teórico en 3.º de BUP (1).

#### Ejemplo I

Cálculo de la resistencia de un circuito eléctrico cerrado.— La Ley de Ohm se enuncia:  $\varepsilon = R \cdot I$ , siendo  $\varepsilon$  la fuerza electromotriz,  $I$  la intensidad de la corriente y  $R$  la resistencia. La práctica de laboratorio consiste en, al ir variando la fuerza electromotriz del generador, obtener distintos valores de la intensidad de la corriente. Si no existieran errores de medida, el cociente entre el valor de  $\varepsilon$  y el de  $I$  correspondiente, debería ser constante e igual al valor de  $R$  buscado. Pero la experiencia nos dice que tenemos que rechazar esta hipótesis, por lo que debemos contar no con una relación funcional exacta sino con una de tipo aleatorio, que exige un tratamiento estadístico. Desde este punto de vista, el problema consiste en averiguar los parámetros de la ecuación lineal que liga a  $\varepsilon$  con  $I$ , es decir, los de una regresión lineal. En ella  $\varepsilon$  hace el papel de variable independiente e  $I$  el de variable dependiente; por tanto, se trata de la regresión de  $I$  sobre  $\varepsilon$ . La pendiente de dicha recta de regresión será la estimación del valor de  $\frac{1}{R}$ , de donde se halla la de  $R$ . La bondad de la medición de  $R$  puede obtenerse a partir del coeficiente de correlación.

#### Ejemplo II

Cálculo de la aceleración de la gravedad mediante un péndulo.—Sabemos que el periodo  $T$  de un péndulo matemático

de longitud  $L$  viene dado por la expresión  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ ,

siendo  $g$  la aceleración de la gravedad. La experiencia consiste en observar los valores de  $T$  obtenidos mediante distintos valores de  $L$ . La imposibilidad de construir en la práctica un péndulo matemático y los errores de medida, hacen que al sustituir en la fórmula distintos pares de valores de  $L$  y  $T$  correspondientes, el valor de  $g$  obtenido no sea constante. La relación entre las dos variables  $L$  y  $T$  es, por tanto, no exacta sino aleatoria, y necesita un tratamiento como tal. En este caso  $L$  aparece como variable independiente y  $T$  como dependiente; pero la relación funcional no es de tipo lineal. Ahora bien, elevando al cuadrado ambos

(1) En este punto, he contado con la inapreciable colaboración del Dr. don Antonio Durá Domenech, Catedrático de Física y Química del I. B. «Jaime II» de Alicante, sin cuya ayuda todo hubiera sido más difícil.

miembros de la ecuación del movimiento armónico simple, se tendrá  $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$ , y considerando a  $T^2$  nueva variable dependiente, se observa que entre ella y  $L$  existe una relación de este tipo lineal, por lo que volvemos otra vez a tener la necesidad de hallar una recta de regresión, esta vez la de  $T^2$  sobre  $L$ . La pendiente de esta recta será el valor estimado de  $\frac{4\pi^2}{g}$ , y de ahí se obtendrá  $g$  (podría haberse abordado tam-

bién el problema considerando a  $\sqrt{L}$  como nueva variable, y observando que entre ella y  $T$  existe una relación de tipo lineal). Otra vez para estudiar la bondad del ajuste, se recurrirá al coeficiente de Correlación lineal.

Existen muchos ejemplos donde el tratamiento estadístico, el método estadístico, se hace indispensable; incluso pueden encontrarse en Bachillerato, donde tan pocas veces se ve la aplicabilidad de los conocimientos adquiridos.

## 6 IX Concurso-exposición de pintura de personal adscrito al Ministerio de Educación y Ciencia

En Madrid, a las dieciocho horas del día 27 de mayo de 1981, en las dependencias del Programa de Actividades Culturales y Recreativas del Ministerio de Educación y Ciencia, se reúne el jurado que ha de otorgar los premios del IX Concurso-exposición de pintura entre el personal adscrito al Ministerio de Educación y Ciencia, integrado por las autoridades que a continuación se relacionan y que ha quedado constituido de la siguiente forma:

*Presidente:*

- D. ANTONIO COBOS SOTO, crítico de Arte.

*Vocales:*

- D.ª CONSUELO DE LA GANDARA, crítico de Arte.
- D. MANUEL SANTIAGO LUDEÑA, pintor y Subdirector de la Escuela Central de Artes Aplicadas y Oficios Artísticos.
- D. FLORENCIO ARNAN LOMBARTE, Vicepresidente de la Asociación de Críticos de Arte.
- D. JOAQUIN GARCIA DONAIRE, pintor y escultor. Catedrático de la Facultad de Bellas Artes.

*Secretario:*

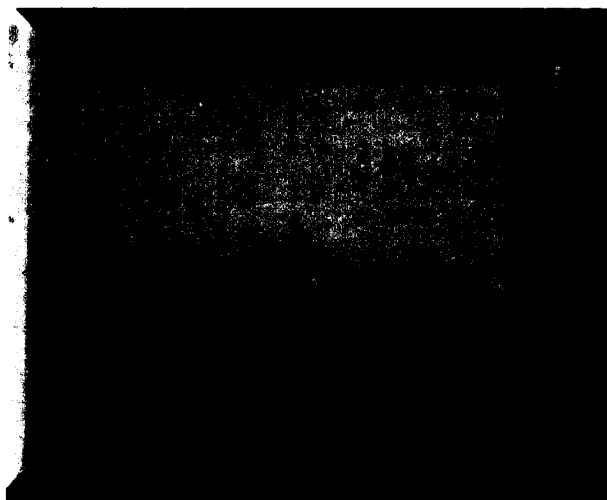
- D.ª MARIA TERESA BALBIN LOPEZ, Directora del Programa de Actividades Culturales y Recreativas (Dirección General de Personal) del Departamento.

Una vez analizadas todas las obras presentadas a concurso, el jurado, utilizando el criterio de superior calidad artística, ha decidido otorgar los premios y menciones, que han recaído en las siguientes obras:

### SECCION PRIMERA

*Primer Premio:*

- A la obra presentada con el lema «San Francisco el Grande» y registrada con el número 21. Se procede a la apertura de la plica correspondiente, resultando ser su autor D. GONZALO JIMENEZ RODRIGUEZ, Maestro de Primera Enseñanza, jubilado, con domicilio en Madrid.



*Segundo Premio:*

- A la obra presentada con el lema «Otoño», título «Primeros de noviembre», registrada con el número 9. Se procede a la apertura de la plica correspondiente y a su lectura, resultando ser su autor D. RAFAEL AGUILERA BAENA, Profesor Agregado de Dibujo del I. B. de CABRA (CORDOBA).

*Menciones:*

- A la obra presentada con el lema «Armonía», título «Hombre arando», registrada con el número 14. Se procede a la apertura de la plica correspondiente y a su lectura, resultando ser su autor D. ISIDRO LOPEZ MURIAS, Profesor de Término de la Escuela de Artes Aplicada y Oficios Artísticos de VALENCIA.
- A la obra presentada con el lema «Oasis», título «Metamorfosis», registrada con el número 23. Se procede a la apertura de la plica correspondiente y a su lectura, resultando ser su autor D. CARLOS DOMINGUEZ BAJO, Catedrático del I. B. «Illescas» de TOLEDO.