sivamente cantidades de disoluciones E y D. Predecir los resultados. Realizar y justificar los resultados obtenidos.

e) A una pequeña cantidad de disolución C añadimos gota a gota disolución E. Observar que inicialmente aparece un precipitado blanco en *disolución amarilla, que luego al* añadir más disolución E el precipitado blanco cambia a rojo. Justificar los resultados obtenidos.

BIBLIOGRAFIA

Apuntes Curso «Química de las disoluciones», del Profesor S. Vicente Pérez. Universidad de Santander.
Unidades didácticas de Química Analítica: UNED.
Cours de Chimie: M. Garric. Ed. Dunod.

CALCULOS DE COMPROBACION

PUNTO A

$(I^-) = 10^{-2}M$ $\quad (Ag^+) = 10^{-14}$ $\quad pAg = 14$

PUNTO B

$(Cl^-) = 10^{-2}$ M $\quad (Ag^+) = 10^{-7,8} = 1{,}58 \cdot 10^{-8}$ $\quad pAg = 7{,}8$

PUNTO C

$(CrO_4^{2-}) = 10^{-2}$ M $\quad (Ag^+) = \sqrt{\dfrac{10^{-11,9}}{10^{-2}}} = \sqrt{10^{-9,9}} = 10^{-4,95}$ $\quad pAg = 4{,}95$

PUNTO E

$(Ag^+) = 10^{-4,95}$ $\quad (Cl^-) = \dfrac{10^{-9,8}}{10^{-4,95}} = 10^{-4,8}$; $\log (Cl^-) = -4{,}8$

PUNTO D

$PAg = 7{,}8$ $\quad (Ag^+) = 10^{-7,8}$ $\quad (I^-) = \dfrac{10^{-16}}{10^{-7,8}} = 10^{-8,2}$ $\quad \log (I^-) = -8{,}2$

PUNTO F

$PAg = 4{,}95$ $\quad (Ag^+) = 10^{-4,95}$ $\quad (I^-) = \dfrac{10^{-16}}{10^{-4,95}} = 10^{-11,05}$ $\quad \log (I^-) = -11{,}05$

PUNTO G

$pAg = 2{,}1$ $\quad (Ag^+) = 10^{-2,1}$

$$(Cl^-) = \frac{10^{-9,8}}{10^{-2,1}} = 10^{-7,7}$$

$$(CrO_4^{2-}) = \frac{10^{-11,9}}{(10^{-2,1})^2} = 10^{-7,7}$$

$$(Cl^-) = (CrO_4^{2-})$$

4 Algunos fenómenos físicos y sus interpretaciones matemáticas

Por Juan B. ROMERO MARQUEZ (*)

1. En Física, en diferentes partes de la misma que van desde la mecánica clásica, pasando por la teoría de la relatividad, surgen numerosos problemas y teorías, cuyas ecuaciones están dadas por fórmulas entre medias. Esto es, que las magnitudes soluciones del fenómeno son medias de magnitudes de la misma especie. Nosotros aquí vamos a ver una interpretación de estos hechos a nivel de bachillerato.

(*) Catedrático de Matemáticas del I. B. «Isabel de Castilla» de Avila.

2. Antes de dar algunos ejemplos de tales fenómenos, precisemos el lenguaje matemático que vamos a utilizar, así como algunos resultados elementales.

DEF. 2.1: Sean $x_i \in R^+$, $i = 1, \ldots n$, $p \in R$, llamamos media de orden p al número real $M_p = \sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$. En particular si $p = 1$, obtenemos la media aritmética; si $p = 2$, la media cuadrática; si $p = -1$, la media armónica; la media geométrica $Mg = e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} \log x}{N}}$

Teorema 2.2: Si a, $b \in R^+$, $o < a < b$ y si designamos $H(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ media armónica, $G(a, b) = \sqrt{a, b}$ media geométrica, $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ media aritmética, $C(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ media cuadrática, entonces $a < H(a, b) < G(a, b) < A(a, b) < C(a, b) < b$.

Observaciones:

1) La comprobación del teorema se hace de forma directa.

2) Si $n \geq 3$, se tiene un resultado análogo, pero su comprobación es más complicada.

3) El significado geométrico de $H(a, b)$, $G(a, b)$, $A(a, b)$, $C(a, b)$ y su representación es un buen ejercicio.

DEF. 2.3: Sea $\varphi : [a, b] \to R$, $\varphi > 0$, continua, se define la media aritmética, geométrica, armónica y cuadrática de la variable continua x, respectivamente por:

$$M_1 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

$$Mg = e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log \varphi(x)\,dx}$$

$$M_{-1} = \frac{b-a}{\int_a^b \frac{dx}{\varphi(x)}}$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi^2(x)\,dx}.$$

Todas estas medias son caso particular de la media general: $\forall p \in R$, $Mp = \sqrt[p]{\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi^p(x)\,dx}$.

Se tienen resultados e interpretaciones similares a los del teorema 2.2.

3. Algunos fenómenos físicos que se interpretan como medias entre magnitudes de la misma especie.

a) Los conceptos de centro de gravedad, centro de masa, etc., se pueden considerar como medias aritméticas ponderadas y son puntos ficticios donde se considera la equivalencia del sistema respecto a una propiedad física que estamos observando.

b) Los problemas de la máquina de Atwood, el oscilador de dos cuerpos, el movimiento de un sistema de dos partículas sujetas sólo a su interacción, aparece el concepto de masa reducida μ de dos masas m_1, m_2 y que se define así: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. En el choque elástico entre partículas también se da este hecho. Así, dicho concepto lleva implícito el concepto de masa armónica y a todos estos fenómenos físicos les llamaremos fenómenos armónicos, mientras que a los fenómenos de a) les llamamos aritméticos.

También son fenómenos aritméticos: dos resortes S_1, S_2 en serie; dos capacidades en paralelo; dos resistencias en serie, etc...

Mientras que podemos considerar como fenómenos armónicos: dos resortes S_1, S_2, de masa despreciable y constantes mecánicas respectivas K_1, K_2, situados en paralelo y soportando una masa m; dos capacidades C_1, C_2 en serie; dos resistencias R_1, R_2 situadas en paralelo; dos bobinas en paralelo con autoinducción respectivamente L_1, L_2; dos impedancias Z_1, Z_2 en paralelo; un condensador con dos dieléctricos K_1, K_2 situados en serie, dos lentes delgadas de distancias focales f_1, f_2 en contacto, es equivalente a una sola lente delgada cuya distancia focal es $f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2}$.

De todo esto surgen las siguientes preguntas:

b1) Dadas dos magnitudes físicas positivas de la misma especie, cuando ambas se combinan dando un único efecto, ¿es aritmético o armónico?

b2) ¿Dada una magnitud física positiva, presenta la dualidad de ser aritmética o armónica? En caso afirmativo, ¿tiene existencia real el fenómeno aritmético o armónico asociado a la magnitud?

Nosotros pensamos que a lo largo de toda la física, las preguntas b1) y b2) tienen en muchos casos respuestas concretas y afirmativas y, por todo ello, cuando dos magnitudes físicas de la misma especie se superponen, lo hacen de tal forma que el efecto conjunto de ambas es un efecto medio, de los dos efectos producidos por cada una de las magnitudes si éstas actuasen por separado.

Este efecto conjunto, aritmético, armónico, cuadrático, etc..., dependerá de la magnitud que estamos tratando.

c) En la teoría cinética de los gases perfectos, como en toda la física estadística, así como en el estudio de las corrientes alternas, entre otras situaciones, aparece de forma natural la media cuadrática, adquiriendo ésta los nombres de velocidad cuadrática media del gas, respectivamente el valor eficaz de la corriente alterna. En estos casos la variable se toma continua.

d) Veamos otras situaciones, que no caen dentro de a), b) y c).

Una balanza está hecha de una barra rígida que puede girar alrededor de un punto que no está en el centro de la barra. Está equilibrada por platillos de peso desigual en cada extremo de la barra. Cuando se coloca una masa m desconocida en el platillo de la izquierda, se equilibra con una masa m_1 colocada en el platillo de la derecha y análogo, cuando la masa m se coloca en el platillo de la derecha se equilibra con una masa m_2 en el platillo de la izquierda, entonces se prueba que $m = \sqrt{m_1\, m_2}$.

Sea el campo gravitatorio resultante de dos campos gravitatorios creados por las masas m_1, m_2 situadas a la distancia r, entonces la fuerza F de atracción de dichas masas es: $F = G\,\frac{m_1\, m_2}{r^2}$. Esta fórmula de Newton en términos de medias se interpreta así: sea $m = \sqrt{m_1 \cdot m_2}$, entonces $F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = G\,\frac{m^2}{r^2}$ y esta fuerza F es la misma con la que se atraen dos masas iguales m situadas a una distancia r.

Estas situaciones aparecen también en electricidad y en electromagnetismo y por todo ello a estos fenómenos físicos, les llamaremos fenómenos geométricos, lo mismo que a los fenómenos descritos en c) les llamamos cuadráticos.

e) Veamos un último ejemplo en la teoría de la relatividad.

Dadas dos velocidades v_1, $v_2 \in [-c, c]$, donde c es la velocidad de la luz, la fórmula de composición o superposición de dichas velocidades es, según Einstein, $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}$; esta fórmula se prueba utilizando la transformación de Lorentz.

Si hacemos el cambio de variable $z = \frac{v}{c}$, $\frac{v_1}{c} = x$, $\frac{v_2}{c} = y$, entonces la fórmula de composición es ahora: $z = \frac{x + y}{1 + xy}$, x, y, $z \in [-1, 1]$. Podemos comparar esta expresión con la fórmula de la trigonometría hiperbólica: $\text{th}(u + v) = \frac{\text{thu} + \text{thv}}{1 + \text{thu} \cdot \text{thv}}$ como similar a ella.

Veamos que si $x, y > 0$, entonces $z = A\left[H\left(x, \frac{1}{y}\right),\right.$

$H\left(\frac{1}{x}, y\right)\Big]$, es decir, z es la media aritmética de dos medias armónicas ya que:

$$A\left[H\left(x, \frac{1}{y}\right), H\left(\frac{1}{x}, y\right)\right] =$$

$$= \frac{H\left(x, \frac{1}{y}\right) + H\left(\frac{1}{x}, y\right)}{2} =$$

$$= \frac{\dfrac{2}{\frac{1}{x} + y} + \dfrac{2}{x + \frac{1}{y}}}{2} =$$

$$\frac{\dfrac{2x}{1 + xy} + \dfrac{2y}{1 + xy}}{2} = \frac{x + y}{1 + xy}$$

4. De todo lo dicho anteriormente se nos plantean las siguientes preguntas:

¿Todas las magnitudes físicas escalares, cuando intervienen en forma conjunta de dos o más, su fónemeno físico equivalente en la superposición es aritmético, armónico, geométrico, cuadrático, etc.?

¿En el fenómeno resultante, llamado también fenómeno medio o de equilibrio, el carácter geométrico, armónico, etc., identifica a la magnitud física que estamos considerando?

¿Tiene existencia real el hecho de ser un fenómeno físico, armónico, geométrico, aritmétrico, etc.?

5 La marginación de la estadística en Bachillerato

Por María José RIVERA ORTUN (*)

He leído con agrado el cuaderno monográfico núm. 5 de esta revista dedicado a las Matemáticas, porque a través de tres artículos se pone de relieve uno de los problemas más graves que en estos momentos tiene planteados el estudio de las Matemáticas, tanto en EGB como de Bachillerato y también a nivel superior. Este es, claro está, el de la Geometría. Incluso se llega a hablar de la muerte de la Geometría, o de la marginación de la Geometría, o de la dificultad de establecer un programa aceptable de Geometría.

A través de estas líneas, me voy a ocupar de otro caso igualmente lamentable, pero al que, por el contrario, no se le presta apenas atención: el de la Estadística en BUP.

El problema de la Estadística parte, en primer lugar, de que es una ciencia cuya fecha de nacimiento como tal es muy reciente (mediados del siglo XIX), a pesar de que el conocimiento vulgar que puso las bases para su posterior desarrollo se inició hace muchos muchos años. Recuérdese, por ejemplo, que ya los griegos conocían la distinción existente entre los fenómenos deterministas y los de azar. También, importadas de los chinos, tenían nociones de Combinatoria, que más tarde sería elemento indispensable para el descubrimiento de regularidades en los juegos de azar, que potenciarían después los estudios de Pascal, Fermat, Bernouilli y Laplace.

Desde siempre se ha distinguido entre el saber científico y el saber vulgar. El saber científico se inicia con la percepción de que el saber vulgar obtenido mediante la experiencia, no es suficiente para resolver un determinado número de problemas; pero, indudablemente, el saber vulgar ha sido una componente indispensable del saber científico, como móvil y base del mismo.

En toda ciencia encontramos tres elementos esenciales: su esencia u objeto de estudio, su finalidad y su método. A partir de cada uno de estos tres componentes, se han hecho distintas clasificaciones de las ciencias. Sin embargo, resulta una simplificación sin razón encasillar a una determinada ciencia en uno u otro bloque; puede participar sin que exista contradicción simultáneamente de varias vertientes, formal y factual, teorética y experimental, pura y aplicada. Este es el caso de la Estadística, a pesar de que sea más factual que formal, más experimental que teorética y más aplicada que pura.

Estudiando por separado cada uno de sus elementos, encontramos que:

— *Su esencia u objeto de estudio son los fenómenos aleatorios o de azar, en contraposición con las llamadas Ciencias de la Naturaleza, que dirigen sus esfuerzos hacia el conocimiento y comprensión de los fenómenos deterministas.*

— *Su objetivo es el de posibilitar la utilización de los resultados obtenidos por las Matemáticas, en la investigación de ciertos problemas que se plantean en el uso de la experimentación tanto dentro de las Ciencias de la Naturaleza como en las Ciencias Sociales.*

— *Su método, elemento fundamental, es, sin duda, modelo entre los utilizados en la investigación científica, hasta el punto de convertirla en una ciencia metodológica por excelencia. A grandes rasgos el método estadístico consiste en lo siguiente: se trata de analizar un hecho ocurrido a través de la realización de un experimento. Para ello se construye un modelo matemático simplificado de la realidad, para sacar una serie de conclusiones, que habrán de ser posteriormente contrastadas mediante nuevas experiencias.*

Los dos tipos de fenómenos, deterministas y de azar, estimularon a los estudiosos en dos direcciones opuestas: las regularidades de aquéllos propiciaron su estudio, mientras que éstos fueron confiados al horóscopo. Había otro camino por el cual podía haber continuado el desarrollo de la Estadística; debido a la necesidad que tienen los gobernantes de saber de sus gobernados, se elaboran los primeros cómputos de población con fines fundamentalmente militares y tributarios. De ahí su nombre, que hace referencia al Estado, al servicio del cual estaba. Ahora bien, la obtención de datos, es decir, las estadísticas, no son más que el primer paso del método estadístico. La introducción en fechas recientes de la idea de muestreo, el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad y la Inferencia Estadística, configuraron a finales del siglo pasado y comienzos de éste el despegue de una ciencia que, ayudada por el desarrollo formidable de la Informática,

(*) Catedrática de Matemáticas. I. B. Mixto de Carcagente (Valencia).