3 Tratamiento matricial de la Optica Geométrica. I Determinación de los elementos básicos de la teoría

Por Leopoldo VALVERDE GARCIA DE LAS HIJAS (*)

RESUMEN

La teoría matricial de la Optica puede aplicarse para obtener y analizar las imágenes producidas por sistemas ópticos centrados (S. O. C) desde un punto de vista geométrico, asociando una matriz al sistema óptico, que denominaremos matriz característica, de dimensión (2 × 2) y cuyos elementos dependen de las características geométricas como de las características ópticas de los medios separados por superficies-frontera o superficies de discontinuidad que se consideraran idealmente delgadas.

Matemáticamente la matriz característica transforma todo elemento perteneciente al denominado Espacio Objeto en un elemento que pertenece al Espacio Imagen, siendo dicha transformación biunívoca al tener en cuenta el principio de retorno de la luz.

Para obtener la matriz característica tendremos que representar en forma matricial ciertas leyes de la luz, tales como la propagación rectilínea y la refracción de la luz. Dichas matrices se denominarán matriz de traslación y de refracción (elementos básicos), cuya obtención será motivo de este artículo.

La teoría matricial fue iniciada por Sampson en 1913.

1. INTRODUCCION

Los resultados que obtendremos serán válidos en las siguientes aproximaciones:

a) La primera de ellas representa la consideración clásica de la óptica geométrica. La longitud de onda de la luz visible es lo suficientemente pequeña para despreciar su valor finito. Este hecho introduce el concepto de «rayo luminoso», que en un lenguaje electromagnético representa la dirección de propagación de la energía luminosa y que también pueden definirse con el lenguaje geométrico como la dirección del gradiente a las superficies equiconales.

b) La segunda aproximación es que se usaran rayos paraxiales, es decir, usaremos aproximaciones de primer orden en nuestras expresiones y razonamientos teóricos a lo largo del artículo.

Representación matricial del rayo luminoso. Consideremos un rayo luminoso propagándose en un medio de índice de refracción n, figura 1, comprendido entre los dos planos paralelos H y H': Veamos qué forma tiene la matriz representativa del rayo luminoso.

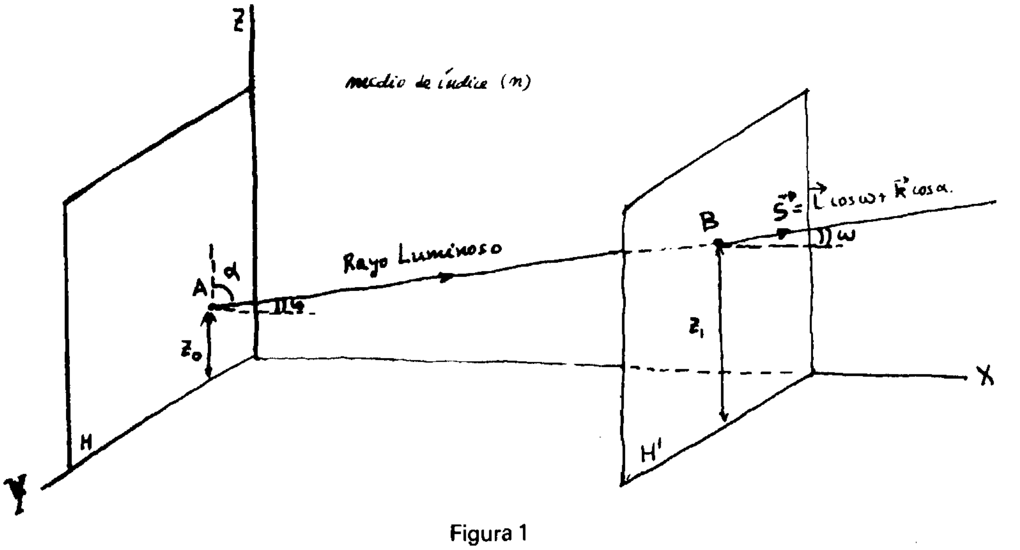

Figura 1

Sea A el punto intersección del rayo luminoso con el plano H y B el punto de intersección con el plano H'. La dirección rectilínea del rayo viene dada por el vector unitario $\vec{s}=\vec{i}\cos w+\vec{k}\cos\alpha$, siendo w el ángulo que forma el rayo con el eje Y.

De la figura 1 se tiene:

$$z_1=z_0+\overline{AB}\cdot \operatorname{sen} w=z_0+(\overline{AB}/n)\,.\,(n\,.\,\operatorname{sen} w)=$$
$$=z_0+D\,.\,\Lambda_{H'} \qquad (1\text{-}1)$$

siendo:

$D=(\overline{AB}/n)$ la «distancia óptica reducida»

y $\Lambda=n\cdot \operatorname{sen} w$ la «dirección óptica de la luz»

Al ser el índice n constante (medio homogéneo e isótropo) entonces la dirección óptica del rayo resplecto del plano H coincidirá con la dirección óptica respecto del plano H', teniendo en cuenta la propagación rectilínea de la luz cuando n = cte. Es decir:

$$(\Lambda)\text{ referido al plano } H'=(\Lambda)\text{ ref. al plano } H \qquad (2\text{-}1)$$

Los simples resultados (1-1) y (2-1) puede expresarse en forma matricial

$$\begin{pmatrix}\Lambda\\ z_1\end{pmatrix}\text{ plano } H'=\begin{pmatrix}1&0\\ D&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Lambda\\ zo\end{pmatrix}\text{ plano } H \qquad (3\text{-}1)$$

Observamos que la matriz-columna $\begin{pmatrix}\Lambda\\ z\end{pmatrix}$ referida al plano H o al plano H' puede representar al rayo luminoso en el medio n, ya que considera la propagación rectilínea de la luz en el medio homogéneo e isótropo mediante el elemento 1.1 o dirección óptica (independiente del plano de referencia), mientras que el elemento 2.1 representa la distancia de un punto de la recta representativa del rayo respecto del plano XY, y que depende del plano de referencia H considerado.

La matriz $\begin{pmatrix}1&0\\ D&1\end{pmatrix}$ transforma un punto del rayo perteneciente a un cierto plano de referencia en otro punto del mismo rayo, pero perteneciente a otro plano paralelo al anterior.

2. OBTENCION DE LOS ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DE LA TEORIA

2.1. Matriz de Refracción

La matriz de refracción representa uno de los elementos básicos para construir la Teoría Matricial de la Optica Geométrica. Dicha matriz representa en un lenguaje formal una situación de naturaleza Física como es el comportamiento de la luz en la superficie de separación de dos medios materiales de naturaleza electromagnética (no ferromagnéticos) diferentes y a la vez homogéneos e isótropos.

Para determinar dicha matriz consideremos una superficie frontera S esférica de centro C y de radio R, que separa dos medios de índices n_1 y n_2 (figura 2), siendo OC el eje de revolución o eje óptico.

Consideremos el rayo incidente (AB), siendo B el punto de incidencia en la superficie frontera S y (BD) la dirección del rayo refractado.

La luz recorrerá en ambos medios las distancias geométricas AB en el medio 1 y BD en el medio 2. Se considera también la prolongación (BA') del rayo incidente en el medio 2 (sin existencia Física). Sean ϕ; ϕ' el ángulo de incidencia y de refracción, respectivamente.

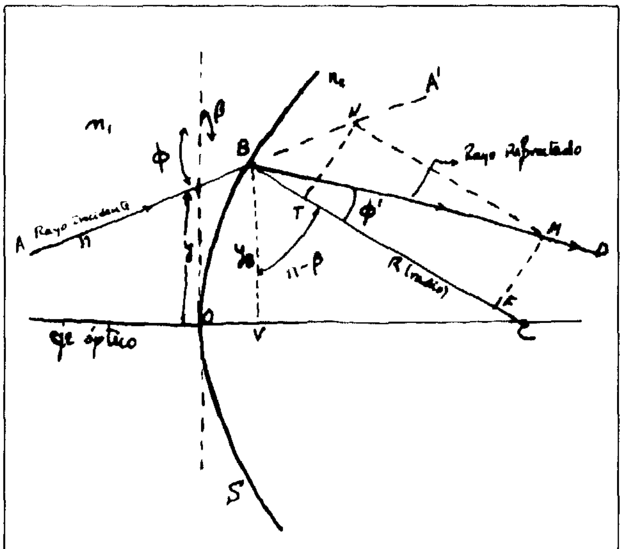

Figura 2

A lo largo de la dirección (BA') tomaremos el segmento $\overline{BM}$, tal que

$$\overline{BN}=K\,.\,n_1$$

En donde K es una constante.

Del extremo de N, trazamos la normal a $\overline{BC}$, sea T el punto de intersección. En el triángulo $\widehat{BTN}$, se verifica:

$$\overline{NT}=\overline{BN}\,.\,\operatorname{sen}\phi=K\,.\,n_1\,.\,\operatorname{sen}\phi$$

siendo ϕ el ángulo de incidencia (figura 2).

A lo largo de la dirección (BD) tomemos el segmento $\overline{BM}$, tal que:

$$\overline{BM}=K\,.\,n_2$$

Del extremo M trazamos la normal a $\overline{BC}$. Sea F el punto de intersección. En el triángulo $\widehat{BMF}$ se cumple:

$$\overline{MF}=\overline{BM}\,.\,\operatorname{sen}\phi'=K\,.\,n_2\,.\,\operatorname{sen}\phi'$$

Teniendo en cuenta la ley de Snell.

$$n_1\,.\,\operatorname{sen}\phi=n_2\,.\,\operatorname{sen}\phi'$$

obtenemos

$$\overline{NT}=\overline{MF}$$

la figura TFMN es un paralelogramo, siendo, naturalmente $\overline{NM}$ paralelo a $\overline{TF}$.

Cuando la constante K tome el valor unidad, entonces:

$$\overline{NT}=n_1\,.\,\operatorname{sen}\phi$$
$$\overline{MF}=n_2\,.\,\operatorname{sen}\phi'$$

siendo

$$\overline{BN}=n_1 \qquad \overline{BM}>\overline{BN}\quad\text{cuando } n_2>n_1$$
$$\overline{BM}=n_2$$

Sea la figura 3 en donde hemos representado únicamente el triángulo $\widehat{BNM}$, en el caso donde K = 1. Proyectemos los lados de este triángulo sobre el eje Y.

Tendremos:

$$pr_Y(\overline{NM})=pr_Y(\overline{BM})+pr_Y(\overline{BN})$$

o bien

$$\overline{LW}=\overline{LQ}+\overline{QW},$$

(*) Seminario de Fisica y Quimica. I.B. «El Greco». Toledo.

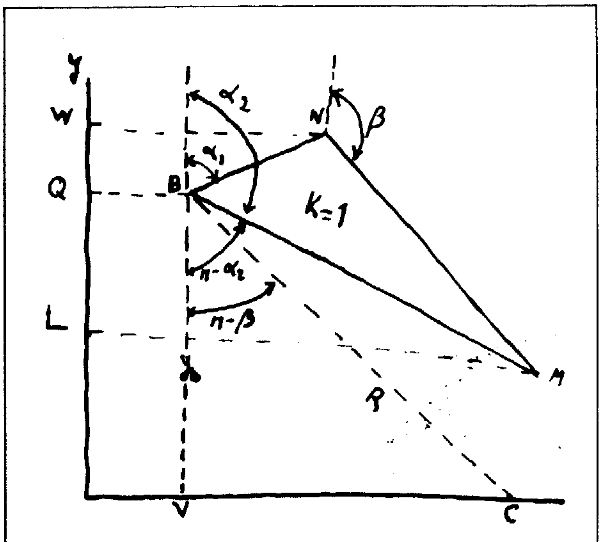

Figura 3

siguiendo con la figura 3 tendremos:

$$\overline{QW} = n_1 \,.\, \cos\alpha_1 = n_1 \,.\, 1_1,$$
$$\overline{LQ} = n_2 \,.\, \cos(\pi-\alpha_2) = -n_2 \cdot \cos\alpha_2 = -n_2 \,.\, 1_2$$
$$\overline{LW} = \overline{NM} \,.\, \cos(\pi-\beta) = -\overline{NM} \,.\, \cos\beta$$

siendo β el ángulo que forma $\overline{NM}$ con el eje Y. Teniendo ahora en cuenta la relación de las proyecciones, tendremos:

$$-\overline{NM} \,.\, \cos\beta = n_1 \,.\, \cos\alpha_1 - n_2 \,.\, \cos\alpha_2 = n_1 \,.\, 1_1 - n_2 \,.\, 1_2$$

o también

$$\overline{NM} \,.\, \cos(\pi-\beta) = n_1 \,.\, \cos\alpha_1 - n_2 \cdot \cos\alpha_2$$

teniendo en cuenta el triángulo $\widehat{BCV}$, entonces:

$$\cos(\pi-\beta) = y_b / R$$

siendo y_b la ordenada del punto de incidencia B.

Tendremos, por tanto, la siguiente ecuación:

$$n_2 \,.\, \cos\alpha_2 = n_1 \,.\, \cos\alpha_1 - \overline{NM} \,.\, (y_b/R) \qquad (1\text{-}2.1)$$

Ecuación que nos da la dirección del rayo refractado en función del rayo incidente y de la ordenada del punto de incidencia B respecto del eje óptico.

Volviendo a la figura 2, y teniendo en cuenta el paralelogramo TFMN, tendremos:

$$NM = TF = BF - BT = \overline{BM} \,.\, \cos\Phi' - \overline{BN} \,.\, \cos\phi =$$
$$= K \,.\, (n_2 \,.\, \cos\phi' - n_1 \,.\, \cos\phi) \qquad (2\text{-}2.1)$$

y si damos a K el valor unidad, entonces:

$$\overline{NM} = n_2 \,.\, \cos\phi' - n_1 \,.\, \cos\phi$$

Sustituyendo en la ecuación que nos da la dirección del rayo refractado:

$$\begin{aligned} n_2 \,.\, \cos\alpha_2 &= \\ &= n_1 \,.\, \cos\alpha_1 - y_b \,.\, \left(\frac{n_2 \,.\, \cos\phi' - n_1 \,.\, \cos\phi}{R} \right) \end{aligned} \qquad (3\text{-}2.1)$$

Al factor encerrado entre el paréntesis se denominará «poder refractante de la superficie frontera S» y se expresará por «P_s».

Pudiendo escribir entonces,

$$n_2 \,.\, \cos\alpha_2 = n_1 \,.\, \cos\alpha_1 - y_b \,.\, P_s \qquad (4\text{-}2.1)$$

Lo vectores unitarios que definen la dirección del rayo incidente y del rayo refractado están expresados, respectivamente, por:

$$\vec{s_1} = \vec{i}\cos\omega_1 + \vec{j}\cos\alpha_1 \qquad \text{siendo: } \omega_1 + \alpha_1 = 90^\circ$$
$$\vec{s_2} = \vec{i}\cos\omega_2 + \vec{j}\cos\alpha_2 \qquad \text{siendo: } \omega_2 + \alpha_2 = 90^\circ$$

por lo tanto:

$n_2 \,.\, \cos\alpha_2 = n_2 \,.\, \mathrm{sen}\,\omega_2$, representa la dirección óptica del rayo refractado y $n_1 \,.\, \cos\alpha_1 = n_1 \,.\, \mathrm{sen}\,\omega_1$, la dirección óptica del rayo incidente, es decir:

$$\begin{aligned} n_1 \,.\, \cos\alpha_1 &= \Lambda_1 \\ n_2 \cdot \cos\alpha_2 &= \Lambda_2 \end{aligned} \qquad (5\text{-}2.1)$$

y la ecuación que nos da la dirección del rayo en el medio 2 nos resultará, en definitiva, de la forma siguiente:

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 - y_b \,.\, P_s \qquad (6\text{-}2.1)$$

Nuestra superficie-frontera se considera idealmente delgada; esto trae como consecuencia un cambio brusco en el valor del índice de refracción, lo que implica que la luz cambie bruscamente de dirección, en otras palabras:

$$y_b)_1 = y_b)_2 = y_b$$

Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_2 &= \Lambda_1 - y_b \,.\, P_s \\ y_b)1 &= y_b)2 \end{aligned} \right\} \qquad (7\text{-}2.1)$$

que lo podemos representar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_2 \\ y_{b)_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -P_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ y_{b)_1} \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}2.1)$$

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -P_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R$, se denominará matriz de refracción, siendo el elemento $R_{1,2}$ en valor absoluto el poder refractante de la superficie-frontera.

La expresión matricial nos indica lo siguiente:

Si al rayo incidente, caracterizado por la matriz columna $\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ y_b)_1 \end{pmatrix}$ se le multiplica por la denominada matriz de refracción R, se transforma en el rayo refractado caracterizado por la matriz columna $\begin{pmatrix} \Lambda_2 \\ y_b)_2 \end{pmatrix}$, por tanto, la matriz R representa el fenómeno físico de la refracción de la luz. Mediante este lenguaje este fenómeno luminoso puede presentarse en forma operacional:

$$(r.r) = \underset{\smile}{R}\,(r.i) \text{ o bien } (r.i) \xrightarrow{\underset{\smile}{R}} (r.r)$$

«Al actuar el operador $\underset{\smile}{R}$ sobre un rayo luminoso (r.i), propagándose en un medio de índice n, lo transforma en el rayo luminoso (r.r), propagándose en el medio de índice n_2. Siendo $\underset{\smile}{R}$, en definitiva, el operador que caracterizará la acción de una superficie de discontinuidad sobre la propagación luminosa.

Naturalmente, cuando la superficie de discontinuidad no exista, $n_2 = n_1$, con $\phi = \phi'$, el operador $\underset{\smile}{R}$ se transforma en el operador identidad $\underset{\smile}{I}$ (siendo la matriz representativa la matriz unidad I), tal que al actuar sobre un rayo luminoso lo transforma en sí mismo, resultando el siguiente hecho conocido:

«En un medio de n = cte la luz no experimenta cambios en la dirección de propagación.»

Hay que advertir que existe un caso en donde al actuar el operador unitario sobre un rayo luminoso éste sufre el fenómeno de la refracción, este resultado es debido a una situación trivial, ya que ocurre cuando la superficie-frontera es un plano (radio infinito). En estas condiciones tendremos:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_2 \\ y_b)_2 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ y_b)_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Operando:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Lambda_2 = \Lambda_1 & \text{(a)} \\ y_b)_2 = y_1)_1 & \text{(b)} \end{array} \right.$$

De (b) se obtiene que la superficie-frontera plana tiene un espesor infinitesimal, dando así lugar a un cambio brusco en el índice de refracción.

De (a) obtendremos la ley de Snell.

En efecto:

$$\Lambda_2 = n_2 \cdot \cos\alpha_2; \; \Lambda_1 = n_1 \cdot \cos\alpha_1$$

siendo α_2 el ángulo que forma el rayo refractado con el eje Y y α_1 el ángulo que forma el rayo incidente con dicho eje.

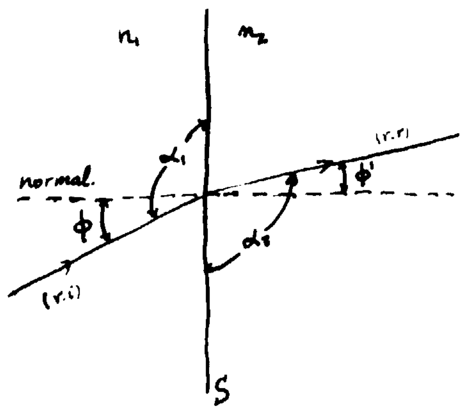

Figura 4

En la figura 4 se tiene:

$$n_2 \cdot \cos\alpha_2 = n_1 \cdot \cos\alpha_1$$

y al tener en cuenta (a), siendo:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = \phi + 90 \\ \alpha_2 = \phi' + 90 \end{array}$$

y, por tanto:

$$n_2 \cdot \cos(90 + \phi') = n_1 \cdot \cos(90 + \phi)$$

es decir:

$$n_2 \cdot \text{sen}\, \phi' = n_1 \cdot \text{sen}\, \phi \qquad \text{c.q.d}$$

2.2. Matriz traslacional

Obtenida la matriz de refracción vamos a continuación a expresar en forma matricial otro fenómeno que ocurre en los sistemas ópticos.

Este fenómeno es la traslación del rayo luminoso entre dos superficies-frontera consecutivas.

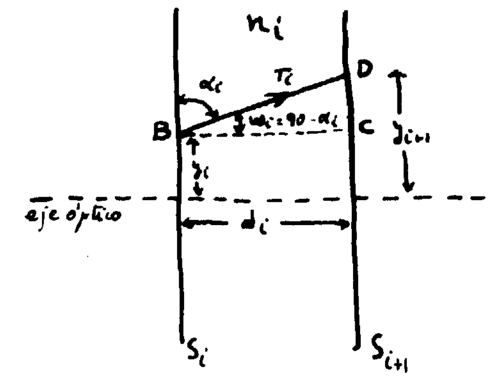

Figura 5

Sean dos superficies refractantes consecutivas S_i; S_{i+1} separadas una distancia d_i, siendo n_i el valor de índice de refracción del medio existente entre dichas superficies.

Una vez que el rayo luminoso ha sufrido la refracción en la superficie S_i, emerge de ella formando un cierto ángulo α_i con el eje Y. Como n_i = cte no existirá ningún cambio en la dirección de la luz hasta que llega a la superficie S_{i+1}, donde se producirá una nueva refracción. Nos interesa representar en forma matricial lo que ocurre a la luz entre dichas superficies. Sea $\overline{BD} = T_i$ la distancia recorrida por la luz entre S_i y S_{i+1}.

De la figura 5 obtenemos:

$$y_{i+1} - y_i = \overline{BD} \cdot \text{sen}\,(90 - \alpha_i) = T_i \cdot \cos\alpha_i,$$

siendo y_i la ordenada del punto de incidencia B, y_{i+1} la ordenada del punto de incidencia D, respecto del eje óptico que le hacemos coincidir con el eje X. La ordenada del punto de incidencia D vale:

$$y_{i+1} = y_i + T_i \cdot \cos\alpha_i \qquad (1\text{-}2.2)$$

El rayo emergente de la superficie S_i puede interpretarse que se transforma en el rayo incidente sobre la superficie S_{i+1}, con la condición de que la dirección óptica se conserva:

$$\Lambda_i = \Lambda_{i+1} = n_i \cdot \cos\alpha_i \qquad (2\text{-}2.2)$$

y, por tanto:

$$y_{i+1} = y_i + T_i(\Lambda_i/n_i = y_i + \Lambda_i \cdot (T_i/n_i) \qquad (3\text{-}2.2)$$

en donde T_i/n_i se denominará distancia óptica reducida.

Nuestro sistema de ecuaciones es:

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda_{i+1} = \Lambda_i \\ y_{i+1} = y_i + \Lambda_i \cdot (T_i/n_i) \end{array} \right\} \qquad (4\text{-}2.2)$$

en donde la primera ecuación representa la propagación rectilínea de la luz en un medio homogéneo e isótropo, la segunda ecuación nos indica el fenómeno de traslación del rayo luminoso.

El sistema de ecuaciones anterior se podrá expresar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i/n_i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_i \\ y_i \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}2\text{-}2.)$$

en donde las matrices-columna $\begin{pmatrix} \Lambda_i \\ y_i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \Lambda_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ caracterizan al rayo que emerge de la superficie S_i e incide en la superficie S_{i+1}, respectivamente.

A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i/n_i & 1 \end{pmatrix} = T$ se denominará matriz traslacional, puesto que caracteriza dicho fenómeno.

Y que en forma operacional

$$(i+1) = \underset{\smile}{T}\,(i);\ (i) \xrightarrow{\underset{\smile}{T}} (i+1)$$

Y nos expresa lo siguiente: «Al actuar el operador $\underset{\smile}{T}$ sobre el rayo emergente de una superficie-frontera S_i le transforma en el rayo incidente para la superficie-frontera consecutiva S_{i+1}».

3. SITUACION PARAXIAL

Estudiemos las matrices obtenidas R y T.
La matriz de refracción R es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -P_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}3)$$

siendo $P_s = \dfrac{n_2 \cdot \cos\phi' - n_1 \cdot \cos\phi}{R}$ el poder refractante de la superficie de discontinuidad S, como $P_s = F\,(n_1, n_2, R, \phi, \phi')$, entonces la matriz de refracción no sólo depende de la geometría de la superficie y de los índices de refracción de los medios que dicha superficie separa, sino que también depende de la incidencia del rayo incidente. Por tanto, tendremos diferentes matrices R para los distintos rayos que constituyen el haz luminoso incidente. Luego la matriz R no es única.

Lo que nos preocupa ahora es obtener una única matriz de refracción característica del sistema óptico y al mismo tiempo al fenómeno físico.

Para ciertos ángulos de incidencia P_s, así como la matriz R, son independientes del ángulo de incidencia. Los valores de estos ángulos de incidencia serán aquellos para los cuales se verifique la siguiente condición:

$$\cos\phi \rightarrow 1 \text{ y } \cos\phi' \rightarrow 1$$

luego la incidencia será rasante: $\phi \rightarrow 0$ e implica $\phi' \rightarrow 0$

Para esta situación:

$$P \text{ tiende a } P' = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\text{y la matriz R tiende a } R' = \begin{pmatrix} 1 & -\left(\dfrac{n_2 - n_1}{R}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}3)$$

A R' la denominaremos «matriz de refracción paraxial». En esta aproximación, véase figura 2, se observa que la ordenada y punto de corte del rayo incidente con el eje Y y la ordenada y y punto de corte del rayo incidente con la superficie de discontinuidad S tienden a confundirse y en estas condiciones:

$$\overline{OV} \rightarrow 0$$

La matriz de traslación obtenida es:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i/n_i & 1 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}3)$$

veamos como nuestra matriz T es en la aproximación paraxial: Volvamos para ello a la figura 5, en donde

$$\omega_i = 90 - \alpha_i$$

por tanto:

$$T_i = \overline{BD} = \frac{d_i}{\cos(90 - \alpha_i)} = \frac{d_i}{\cos\omega_i}$$

que tiende a d_i, ya que en la aproximación paraxial $\omega_i \rightarrow 0$, lo que implica que $\cos\omega_i \rightarrow 1$.

La matriz T tiende a la matriz T', tal que:

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d_i/n_i & 1 \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}3)$$

que denominaremos matriz traslacional paraxial.

Siendo d_i la distancia entre las dos superficies-frontera consecutivas S_i, S_{i+1}, medida sobre el eje óptico.

Veamos ahora cómo quedan las matrices-columnas que caracterizan a los rayos luminosos en la aproximación paraxial.

Rayo incidente

$$\Lambda_1 = n_1 \cdot \cos\alpha_1 = n_1 \cdot \cos(90 - \omega_1) = n_1 \cdot \operatorname{sen}\omega_1$$

como

$$\omega_1 \rightarrow 0$$

tal que

$$\operatorname{sen}\omega_1 \rightarrow \omega_1$$

entonces

$$\Lambda_1 = n_1 \cdot \operatorname{sen}\omega \rightarrow n_1 \cdot \omega_1 = \lambda_1$$

en donde ω_1 es el ángulo que forma el rayo incidente con el eje óptico.

Por otra parte,

$$y_b)_1 \rightarrow y_1 = h_1$$

por tanto, la matriz-columna que caracteriza ahora al rayo incidente es:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ y_b)_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \cdot \omega_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}3)$$

Rayo refractado:

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, el rayo refractado vendrá caracterizado por la siguiente matriz-columna:

$$\begin{pmatrix} n_2 \cdot \omega_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad 6\text{-}3)$$

siendo ω_2 el ángulo que forma el rayo refractado con el eje óptico. Y $h_2 = h_1$.

La ecuación matricial que representa la transformación del rayo incidente en el rayo refractado en la zona paraxial es:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(n_2-n_1)/R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \qquad (7\text{-}3)$$

El fenómeno de traslación en la zona paraxial viene dado por:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i+1} \\ \lambda_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d_i/n_i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_i \\ hi \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}3)$$

con: $\lambda_{i+1} = \lambda_i$