

2

Optica paraxial de la lente gruesa

Por José SIRVENT MIQUEL (*)

Una lente está formada por dos dioptrios esféricos separados entre sí por una distancia, e , contada entre sus polos. Supondremos que a su izquierda se tiene un medio transmisor de la luz cuyo índice de refracción es n , a su derecha existe otro medio de índice n'' , y el material que la forma tiene como índice n' . Los radios de curvatura de ambos dioptrios son, respectivamente, r_1 y r_2 .

Cada uno de los dioptrios tiene un foco imagen paraxial donde se concentran los rayos que proceden del infinito siendo paralelos al eje. Para su cálculo utilizaremos el invariante de Abbe:

$$n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right)$$

donde la distancia de entrada, s , se sustituirá por infinito:

$$\frac{n}{r} = \frac{n'}{r} - \frac{n'}{f'}$$

y la de salida, s' , será la posición del foco imagen, designado por f' . Despejando en la fórmula anterior se obtiene:

$$f' = \frac{n' r}{n' - n}$$

Igualmente existe un foco objeto, f , de donde parten rayos que, después de atravesar el dioptrio, salen paralelos al eje dirigiéndose al infinito. Del mismo invariante de Abbe, se obtiene:

$$\frac{n}{r} - \frac{n}{f} = \frac{n'}{r}$$

$$f = \frac{n r}{n - n'}$$

En función de los dos índices de refracción se obtiene la relación entre ambas distancias focales:

$$\frac{f'}{f} = - \frac{n'}{n}$$

La aplicación reiterada del invariante de Abbe a ambas superficies esféricas puede llevarnos a obtener la posición de la imagen de un objeto cualquiera situado sobre el eje de la lente. En este caso debe tenerse en cuenta el espesor de la lente que modi-

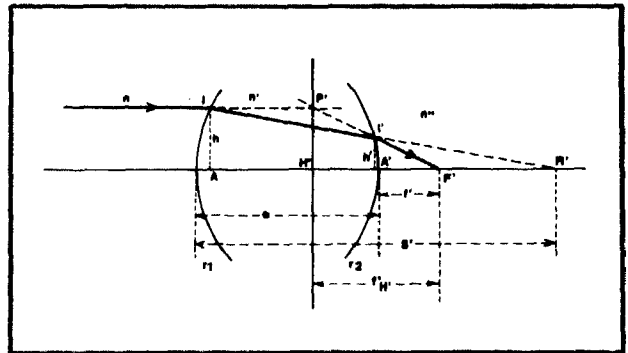


FIG. 1

ficará la distancia de entrada al segundo dioptrio. Plantearemos el sistema de ecuaciones:

$$n \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s'} \right)$$

$$n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s' - e} \right) = n'' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s''} \right)$$

Este sistema es, generalmente, de engorroso cálculo debido a que se opera con fracciones. Puede obtenerse una simplificación en el tratamiento si se calculan previamente los planos principales de la lente.

La posición del plano principal imagen se determina por consideraciones geométricas. Un rayo paralelo al eje (fig. 1) incide sobre la primera superficie refringente de radio r_1 en el punto I y se refracta dirigiéndose hacia el punto R' donde se halla situado el foco imagen de este primer dioptrio. Antes de alcanzarlo experimenta una segunda refracción en la superficie de radio r_2 que le lleva al punto F' que será el foco imagen del sistema.

Considerando los triángulos semejantes IAR' e $I'A'R'$, podemos escribir:

$$\frac{h}{h'} = \frac{f_1}{f_1 - e}$$

Prolongando los rayos incidente y emergente determinamos el punto P' que define el plano principal $P'H'$, perpendicular el eje. La distancia desde F' hasta el segundo dioptrio será designada por f' y la

(*) Catedrático de Física y Química del Instituto Nacional de Bachillerato «J. Vicens Vives» de Gerona.

distancia desde este mismo punto F' hasta el plano principal imagen se tomará como distancia focal del sistema y se designará por f'_H . En la misma figura se observan otro par de triángulos semejantes: $P'H'F'$ e $I'A'F'$, entre cuyos lados se puede escribir:

$$\frac{h}{h'} = \frac{f'_H}{f'}$$

con lo que por eliminación de las alturas h y h' de incidencia y emergencia del rayo, resulta:

$$f'_H = f' \frac{f'_1}{f'_1 - e} \quad (I)$$

lo que nos localiza la posición del foco imagen del sistema con relación al plano principal imagen.

Un estudio análogo sobre la figura 2 nos lleva a la localización del plano principal objeto:

$$f_H = f \frac{f_2}{f_2 + e} \quad (II)$$

Téngase presente que la distancia designada con s' en la figura 1 es la posición del foco imagen del primer dioptrio, f'_1 , mientras que la misma s' en la figura 2 designa al foco objeto de la segunda superficie, f_2 .

Para efectuar cálculos centrémonos en un ejemplo concreto. Supóngase que un vidrio de índice 1,5 (n') se ha tallado con una distancia entre vértices de 20 cm. bajo los radios de 40 y -60 cm. A la izquierda de la lente se extiende un medio de índice $n = 1$ y a su derecha otro con $n'' = 1,2$. Los focos de ambos dioptrios ocupan las posiciones:

$$f'_1 = 120 \text{ cm.} \quad f_1 = -80 \text{ cm.}$$

$$f'_2 = 240 \text{ cm.} \quad f_2 = -300 \text{ cm.}$$

con relación a sus respectivos vértices.

Hallemos la posición de la imagen que da el segundo dioptrio del punto f'_1 :

$$\frac{n'}{r_2} - \frac{n'}{f'_1 - e} = \frac{n''}{r_2} - \frac{n''}{f'}$$

de donde:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n'' - n'}{n'' r_2} + \frac{n'}{n'' (f'_1 - e)} = \frac{1}{f'_2} + \frac{n'}{n'' (f'_1 - e)}$$

Por sustitución de los valores numéricos para el ejemplo tratado:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{240} + \frac{1,5}{1,2 \cdot 100} + \frac{1}{60}$$

es decir,

$$f' = 60 \text{ cm.}$$

Aplicando (I), resulta como distancia focal desde el plano principal imagen:

$$f'_H = 60 \frac{120}{100} = 72 \text{ cm.}$$

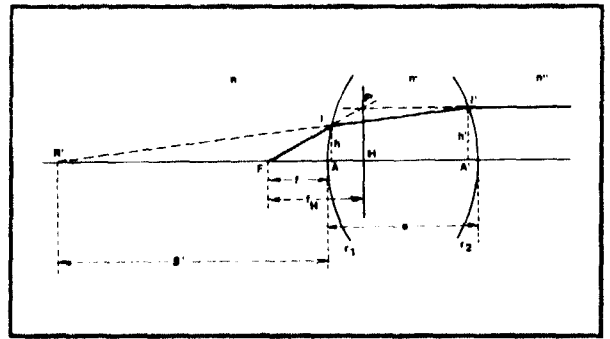


FIG. 2

En función de las distancias focales de los dioptrios y del espesor de la lente, podemos obtener una fórmula (III), que puede sustituir a la (I):

$$\frac{1}{f'_H} = \frac{1}{f'} \frac{f'_1 - e}{f'_1} = \left[\frac{1}{f'_2} + \frac{n'}{n'' (f'_1 - e)} \right] \frac{f'_1 - e}{f'_1}$$

$$\frac{1}{f'_H} = \frac{n'}{n'' f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} \quad (III)$$

Para situar el foco objeto del sistema debemos considerar que es el punto cuya imagen se proyecta al infinito, luego será el punto f , cuya imagen en el primer dioptrio aparece sobre el punto f'_2 :

$$\frac{n}{r_1} - \frac{n}{f} = \frac{n'}{r_1} - \frac{n'}{f_2 + e}$$

de donde:

$$\frac{1}{f} = \frac{n - n'}{n r_1} + \frac{n'}{n (f_2 + e)} = \frac{1}{f_1} + \frac{n'}{n (f_2 + e)}$$

Sustituyendo los valores numéricos para nuestro ejemplo, resulta:

$$f = -56 \text{ cm.}$$

Y, desde el plano principal objeto:

$$f_H = -56 \frac{(-300)}{(-280)} = -60 \text{ cm.}$$

La fórmula (II) se puede sustituir por la alternativa (IV) cuya deducción exponemos a continuación:

$$\frac{1}{f_H} = \frac{1}{f} \frac{f_2 + e}{f_2} = \left[\frac{1}{f_1} + \frac{n'}{n (f_2 + e)} \right] \frac{f_2 + e}{f_2}$$

y, finalmente:

$$\frac{1}{f_H} = \frac{1}{f_1} + \frac{n'}{n f_2} + \frac{e}{f_1 f_2} \quad (IV)$$

En la figura 3 pueden observarse las posiciones de los focos y planos principales obtenidos para el caso estudiado.

Invirtiendo términos en la fórmula (III),

$$f'_H = \frac{n'' f_1 f_2}{n'' f_1 + n' f_2 - n'' e}$$

y efectuando el producto por la (IV) obtenemos el cociente entre las distancias focales:

$$\frac{f'_H}{f_H} = \frac{n'' f_1 f_2}{n'' f_1 + n' f_2 - n'' e} \frac{n' f_1 + n f_2 + n e}{n f_1 f_2}$$

Si tenemos en cuenta el valor de los cocientes f'/f :

$$\frac{f'_H}{f_H} = \left(\frac{n''}{n}\right)^2 \frac{n' f_1 + n f_2 + n e}{n'' f_1 + n' f_2 - n'' e}$$

Poniendo en el numerador las distancias focales imagen f' en lugar de las objeto, f :

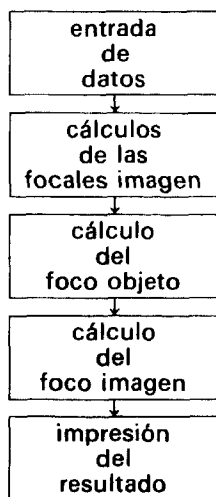
$$\frac{f'_H}{f_H} = \left(\frac{n''}{n}\right)^2 \frac{n}{n''} \frac{n'' e - n'' f'_1 - n' f'_2}{n'' f'_1 + n' f'_2 - n'' e}$$

Con lo que obtenemos una relación fundamental entre ambas distancias focales:

$$\frac{f'_H}{f_H} = -\frac{n''}{n} \quad (V)$$

El objeto de este trabajo no es la deducción de las fórmulas de las lentes gruesas, sino que lo que pretendemos es confeccionar un programa de cálculo de los elementos fundamentales de una lente gruesa con las máquinas de calcular programables que, hoy día, deberían ser de uso normal en los Centros docentes. Su empleo ahorra tiempo perdido en cálculos con lo que la clase presta mayor atención al problema fundamental que el profesor se esfuerza en exponer, mientras que una pizarra llena de fórmulas y operaciones termina por ocultarlo. Al mismo tiempo se elimina el riesgo de error en los resultados numéricos. Para la confección del programa de cálculo se ha elegido la máquina Hewlett-Packard tipo 97 que dispone de 224 pasos de programa y 25 registros en los que se pueden almacenar datos.

El programa se realiza en los siguientes grandes bloques:



Mediante el primer bloque del programa se almacenarán en los registros los datos a partir de los cuales se efectuarán los cálculos, esto es: los tres índices de refracción, los dos radios y el espesor de la lente. Se utilizarán los siguientes registros:

Dato:	n	n'	n''	r ₁	r ₂	e
Núm. registro:	0	1	3	2	4	5

El programa se realizará en los siguientes pasos:

- 001 LBLA
- 002 CLRG (borrado de datos anteriores)
- 003 STO 0 (se almacena n en el registro 0)
- 004 R↓ (baja n' a nivel de pantalla)
- 005 STO 1 (entra n' en el registro 1)
- 006 R↓ (baja r₁ a nivel de pantalla)
- 007 1/x (se halla en valor inverso de r₁)
- 008 STO 2 (entra 1/r₁ en el registro 2)
- 009 STO 8 (se almacena el mismo valor en el registro 8)
- 010 R/S (se para la máquina esperando los nuevos datos)

Una vez grabada esta sección del programa, se pulsarán los datos en este orden:

r₁ Enter n' Enter n A

con lo cual la máquina avanzará hasta el paso 010 mostrando en la pantalla el valor inverso del radio r₁.

- 011 STO 3 (entra n'' en el registro 3)
- 012 R↓ (baja r₂ a nivel de pantalla)
- 013 1/x (se halla el valor inverso de r₂)
- 014 STO 4 (se almacena en el registro 4, 1/r₂)
- 015 STO 9 (igualmente lo hace en el registro 9)
- 016 R (baja a nivel de pantalla el espesor e)
- 017 STO 5 (se almacena el espesor en el registro 5)

Para esta segunda etapa de entrada de datos, se pulsarán en este orden:

e Enter r₂ Enter n'' R/S

con lo cual el programa se realiza hasta su final.

Antes de entrar propiamente en el segundo bloque de cálculo debe hacerse una preparación tendente a evitar divisiones por cero con el consiguiente resultado de «Error» en la pantalla de la máquina y detención del cálculo. Cuando alguna de las dos superficies sea plana, se introducirá un radio infinito para ella pulsando sucesivamente: 90 TAN (en pantalla aparece 9.999999999 99, equivalente al infinito de máquina), en este caso debe omitirse pulsar la tecla Enter a continuación.

- 018 RCL 8
 - 019 x = 0 ?
 - 020 GTO 0
 - 021 RCL 9
 - 022 x = 0 ?
 - 023 SF 2
- Mediante estos pasos se consigue que el cálculo se transfiera al paso encabezado por LBL 0 en el caso en que 1/r₁ sea nulo. A continuación se procede a marcar mediante la señal SF 2 el caso en que 1/r₂ sea nulo. No se prevé el caso en el que ambas

superficies sean planas ya que no estaríamos ante una lente.

024 RCL 1 Se comienza el cálculo de la posición del foco imagen del primer dioptrio, para ello se desarrolla la fórmula:

$$f'_1 = \frac{n' r_1}{n' - n}$$

025 RCL 0

026 —

027 RCL 2

028 x

029 RCL 1

030 ÷

031 STO 8 Una vez terminado el proceso, se almacenará el valor hallado en el registro 8 y se comenzará el cálculo de la posición de f'_2 , focal imagen del segundo dioptrio.

032 F 2 ? Si se puso la señal SF 2 (paso 023) se pasará directamente al paso 043 omitiendo este cálculo, para el que se emplea la fórmula:

$$f'_2 = \frac{n'' r_2}{n'' - n'}$$

033 GTO 1

034 LBL 0

035 RCL 3

036 RCL 1

037 —

038 RCL 4

039 x

040 RCL 3

041 ÷

042 STO 9 El valor hallado se almacena en el registro 9. En ambos casos se habrán registrado los valores inversos de las distancias focales lo que resultará más práctico para los cálculos posteriores.

043 LBL 1 Para esta etapa se aplica la fórmula:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n}{n'' (f'_1 - e)} + \frac{1}{f'_2}$$

044 RCL 8

045 x = 0 ?

046 GTO 2

047 1/x

048 RCL 5

049 —

050 ENT ↑

051 x = 0 ?

052 GTO 2

053 RCL 3

054 x

055 1/x

056 RCL 1

057 X

058 RCL 9

059 +

060 x = 0 ? Mediante este test se detiene el cálculo en el caso de que resulte una distancia focal infinita. De no ser así, se prosigue y se introduce la posición del foco imagen, con origen sobre el segundo dioptrio, en el registro A.

061 GTO 3

062 ENT ↑

063 LBL 2

064 R

065 1/x

066 STO A

067 RCL 1 A continuación se procede a calcular la distancia focal imagen, con origen sobre el plano principal imagen, por aplicación de la fórmula:

$$\frac{1}{f'_H} = \frac{n'}{n'' f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}$$

068 RCL 3

069 —

070 RCL 8

071 x

072 RCL 9

073 +

074 RCL 5

075 RCL 8

076 x

077 RCL 9

078 x

079 —

080 1/x cuyo valor se almacena en el registro B.

081 STO B

082 RCL 0 Calcularemos, ahora, la distancia focal objeto, con origen sobre el plano principal objeto, mediante la fórmula:

083 x

084 RCL 3

085 ÷

086 CHS

087 STO C

$$f'_H = -f'_H \frac{n}{n'}$$

cuyo valor se almacena en el registro C.

088 SF 2 Pasamos a situar la posición del foco objeto respecto de la primera superficie. Para ello realizaremos una serie de pasos previos que orienten el desarrollo de los cálculos en el caso en que la segunda superficie fuera plana.

089 RCL 9

090 x = 0 ?

091 F 2 ?

092 x = 0 ?

093 GTO 4

094 RCL 1

095 RCL 9

096 ÷

097 RCL 3

098 ÷

099 CHS

100 RCL 5

101 +

102 x = 0 ? Igualmente debe tantearse la posibilidad de que este punto estuviera situado sobre la primera superficie.

103 GTO 5

104 1/x

105 CHS

106 LBL 4 La fórmula desarrollada en este proceso es:

107 RCL 8

108 F 2 ?

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{n'}{n (f'_2 + e)}$$

109 +

110 CHS

111 RCL 1

112 x

113 RCL 0

114 ÷

115 1/x

116 LBL 5 almacenando el resultado en el registro D.

117 STO D

118 RCL C

119 RCL B

120 RCL A

121 PRST

122 RTN

123 LBL 3

124 9

125 0

126 TAN

127 RTN

A continuación se reclaman los otros tres valores calculados anteriormente y se pide el resultado impreso, con lo que el proceso habrá terminado. Las cuatro distancias quedan, además, almacenadas en los registros A, B, C y D.

Para efectuar el cálculo en el problema tomado como ejemplo, pulsamos:

Al detenerse la máquina, pulsamos:

y, tras unos momentos, imprime:

— 56,00 T
— 60,00 Z
72,00 Y
60,00 X

Las posiciones relativas de los cuatro puntos con relación a las superficies que limitan la lente se ilustran en la figura 3. Los planos principales se encuentran situados en el interior de la lente.

Problema: Calcular las distancias focales de una lente gruesa formada por una superficie plana y otra convexa de 5 cm. de radio. El espesor de la lente es de 1,5 cm. y el índice de refracción del vidrio utilizado es 1,578. La lente está rodeada de aire. Situar igualmente sus planos principales.

Pulsamos:

90 TAN 1,578 Enter 1 A

a continuación:

1,5 Enter 5 CHS Enter 1 R/S

Imprime:

- 7,70 T
- 8,65 Z
8,65 Y
8,65 X

El resultado se ilustra en la figura 4. Es de destacar que el plano principal imagen está situado sobre la superficie convexa, mientras que el plano principal objeto se encuentra en el interior de la lente.

Señalaremos a continuación dos casos interesantes.

1.º Lente formada por dos superficies esféricas concéntricas. Este caso se ilustra en la figura 5. Con un mismo centro, se han trazado las dos superficies de radios -25 y -30 cm. El espesor de la lente en su eje será de 5 cm. y supondremos que el índice de refracción es 1,5. A ambos lados de la misma tenemos aire.

Entramos los datos en la forma:

2 5 CHS Enter 1,5 Enter 1 A

seguidos por:

5 Enter 30 CHS Enter 1 R/S

El resultado obtenidos es:

425,00 T
450,00 Z
- 450,00 Y
- 480,00 X

siendo, por tanto, divergente.

FIG. 3

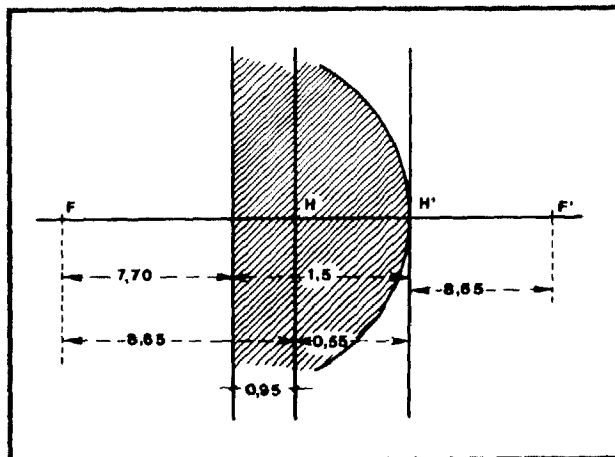
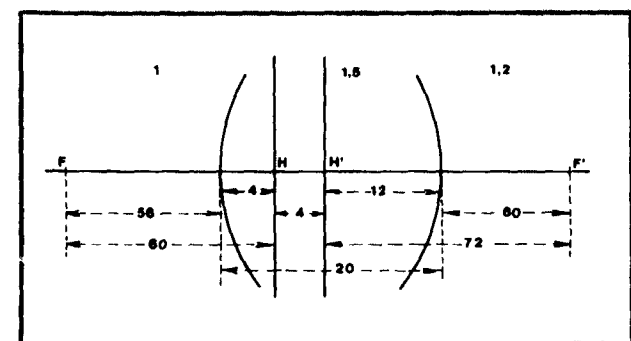


FIG. 4

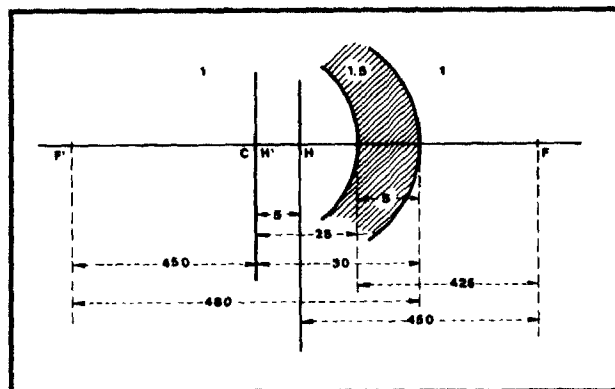


FIG. 5

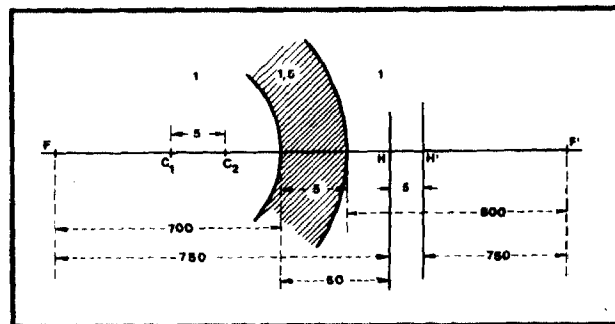


FIG. 6

2.º Lente formada por dos superficies de igual radio separadas por una distancia.

Se toma como ejemplo (fig. 6) dos superficies de 25 cm. de radio situadas sus centros a 5 cm. de distancia. Se supone un índice de 1,5 y la presencia del aire alrededor del sistema. Introducidos los datos, se obtiene:

- 700,00 T
- 750,00 Z
750,00 Y
800,00 X

siendo, por tanto, una lente convergente.