DISTRIBUCIÓNS DE MOSTRAS. UNHA PROPOSTA DE TRABALLO PARA O BACHARELATO LOXSE

José Luis Valcarce Gómez
Instituto Pontepedriña
Santiago de Compostela

A LOXSE establece unha reforma do sistema educativo en dúas vertentes: estructural e curricular. No plano curricular e en referencia á área de Matemáticas, un dos cambios máis notables é a ganancia de peso da Estatística ó longo de tódolos niveis educativos. En particular, hai que destaca-la aparición por primeira vez no ensino non universitario dunha introducción á inferencia estatística. Este tema figura no currículo da materia propia de modalidade Matemáticas aplicadas ás Ciencias Sociais (Bacharelato de Humanidades e Ciencias Sociais) e tamén no da materia optativa Métodos estatísticos e numéricos (Bacharelato de Ciencias da Natureza e da Saúde e Bacharelato de Tecnoloxía).

Outra das novidades ten que ver coa liña metodolóxica adoptada pola reforma que está baseada nunha serie de principios psicopedagóxicos que tratan de analiza-las variables das que depende a capacidade de aprendizaxe dun individuo ante un novo contido. Basicamente postúlase que é o propio individuo quen debe construí-lo novo coñecemento a partir do que xa coñece en interacción co profesor e os seus compañeiros. Parece demostrado que os alumnos aprenden mellor na acción que por medio dunha exposición verbal (o que non significa que en moitas ocasións non sexa necesario utilizala). Por iso se propón unha metodoloxía experimental, na que partindo do estudio de situacións variadas, os alumnos traballen sobre obxectos coñecidos (matemáticas ou non) e poidan ir construíndo ideas intuitivas sobre os novos contidos.

O inconveniente que se acostuma aducir para non aplicar esta metodoloxía é o excesivo tempo que consume. Este feito ten unha gran repercusión naquelas materias que son obxecto da proba de acceso á universidade, posto que os programas son demasiado amplos e existe a necesidade ineludible de rematalos. Este é o caso da materia Matemáticas aplicadas ás ciencias sociais, pero non dos Métodos estatísticos e numéricos. Por primeira vez tense a posibilidade de encara-lo desenvolvemento dos contidos dunha materia do último curso de bacharelato sen necesidade de convertelo case nun adestramento dos estudiantes na resolución de exercicios estándar para a superación dunha proba. O profesor pode presentar diversas situacións nas que, partindo do concreto, contextualizado e simple, e a través de actividades adecuadas, os estudiantes sexan capaces de inducir formulacións xerais de propiedades matemáticas, o que constitúe un primeiro paso para chegar ó abstracto, descontextualizado e complexo. Desta maneira favorécese unha continuidade e unha progresión na aprendizaxe dos alumnos.

A experiencia que se presenta levouse a cabo no IES Pontepedriña de Santiago de Compostela no curso 1996-97. Forma parte do desenvolvemento dun curso dado a un grupo de 16 estudiantes da materia Métodos estatísticos e numéricos. Mostraranse unha serie de actividades dirixidas a que os estudiantes induzan e comprendan o teorema fundamental no que se basea a inferencia estatística que se ve neste curso: o teorema central do límite. Dada a complexidade deste tipo de contidos, faise necesaria a súa adaptación ás capacidades e ós coñecementos previos dos alumnos de bacharelato. Como exemplo, formúlanse a continuación tres diferentes enunciados deste teorema, extraídos de tres libros.

- "Sexa $\{X_n\}$ unha sucesión de variables aleatorias independentes e identicamente distribuídas. Se teñen común e finita unha esperanza μ e unha variancia σ^2, e se chamamos $Y_n = X_1 + \ldots + X_n - n\mu) / \sigma\sqrt{n}$, resulta:

$$F_{Y_n}(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{t^2}{2})dt$$

para $n \to \infty$ uniformemente en x." [Tucker, 1966, 112].

- "Se se sacan mostras de tamaño n dunha extensa poboación (hipoteticamente infinita) que teña unha media μ e unha desviación típica σ, entón a distribución de mostras teórica de $\bar{x}$ ten unha medida μ e unha desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. "..." A distribución de mostras teórica de $\bar{x}$ pódese aproximar coa correspondente curva normal se n é grande abondo. Se a poboación orixinal é normal, entón x é unha curva normal, calquera que sexa o valor de n." [Turner, 1986, 260, 262].

- "A outra lei que quero esbozar aquí chámase teorema central do límite, e di que a media ou a suma dunha gran colección de medidas dunha magnitude dada calquera é descrita por unha distribución ou curva normal en forma de campá. Isto ocorre aínda que a propia distribución das medidas individuais non sexa normal" [Paulos, 1993, 93].

As tres formulacións expresan a mesma idea. Tratan de establecer unha relación entre unha poboación X e as medias das mostras de tamaño n extraídas a partir dela, $\bar{x}$. Difiren unicamente na linguaxe utilizada, que é máis técnica no primeiro caso, un pouco menos no segundo e coloquial no último. Hai que destacar que en ningún dos textos se demostra o teorema debido ás dificultades técnicas que presenta. Nesta proposta de traballo tampouco se persegue a súa demostración, só tratamos de amosa-lo significado do teorema nun contexto sinxelo. Para isto presentaranse unha serie de situacións cun grao de dificultade axeitado ó que os estudiantes son capaces de facer coa axuda do profesor. A tarefa encadrouse dentro dunha unidade didáctica que incluía tamén unha introducción á mostraxe. Suponse que os estudiantes abordan estes novos contidos logo de chegar a ter certo grao de competencia nos seguintes: distribucións de probabilidade de variables aleatorias discretas, distribución binomial, distribución normal. A continuación descríbese a secuencia de actividades que se realizaron.

REPRESENTATIVIDADE

A) Os estudiantes coñecen a distinción entre poboación e mostra, pero aínda non teñen a suficiente experiencia para detectaren os problemas da representatividade das mostras. Tratamos de responder á pregunta: ¿calquera mostra representa unha poboación? Desta xorden outras dúas: ¿cantos individuos son necesarios nunha mostra para que esta represente a poboación?, ¿como se seleccionan? A primeira pregunta é case a última que se pode contestar nun curso de estatística e a súa resposta depende, desde o punto de vista estrictamente matemático, do que esteamos dispostos a perder en confianza e en precisión (na práctica moitas veces priman tamén consideracións económicas: tomar mostras non é barato). Para intentar responder á segunda pregunta propoñemos algunha lectura sobre problemas que xorden nas investigacións cando as mostras se toman de maneira inadecuada. A modo de exemplo reproduzo a seguinte:

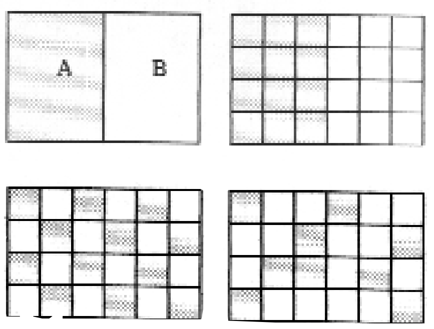
Supoñamos que unha nave espacial do planeta Marte chega por primeira vez á Terra e vai dar por casualidade no centro de África. Despois de aterrar nun claro da selva, os marcianos recollen mostras da vexetación que os rodea, toman nota da constitución, a temperatura, a presión e a humidade do ambiente e capturan como mostra tres nenos pigmeos. Volven a Marte, pasan varias semanas analizando os datos recollidos e fan logo o informe para os seus superiores. Este dá a entender que a Terra está cuberta de selva, envolta nun ambiente de aire quente e húmido e poboada dunha xente de pel negra e case sen roupa, de estatura media non superior a un metro [Turner, 1986, 245]. Esta caricatura de mostraxe ilustra ben os dous tipos de problemas que debemos resolver: tamaño da mostra e selección.

B) A continuación propuxéronselles ós estudiantes varios exemplos de mostraxe para detectar posibles nesgos. Algúns foron os seguintes:

• Na poboación de Santiago de Compostela preténdese determina-la popularidade de certo candidato a alcalde. Para isto, durante unha semana, detense a toda persoa que entre as 12 h. e as 13 h. entre na Catedral e pídeselle que conteste unha pregunta.

• Na poboación dos estudiantes da Universidade de Santiago quérese determinar se están satisfeitos coa forma en que se lles dá as Matemáticas. Para isto, un profesor do Departamento de Matemáticas pregunta a unha de cada dez persoas que saen das clases.

• Un investigador pretende estudiar comparativamente a eficacia de dous fertilizantes A e B, para o que dispón dun terreo de experimentación. Seleccione entre os seguintes a estructura do campo de experimentación que lle pareza máis axeitada:



C) A seguinte actividade consistiu en propoñer investigacións sobre algunha característica do contorno dos estudiantes: estatura, peso, pulsacións, proporción de fumadores, idade de inicio no consumo de tabaco, proporción de lectores de xornais, etc. Os estudiantes deben indica-la poboación de estudio e a técnica de mostraxe que utilizarían para, a continuación, discutir sobre posibles nesgos.

MOSTRAXE ALEATORIA SIMPLE

Os exemplos deben servir para establecer que un dos principios básicos para seleccionar unha mostra representativa dunha poboación é que cada individuo dela teña a mesma probabilidade de ser elixido. Unha mostra deste tipo chámase mostra aleatoria simple. As seguintes actividades tratan sobre cómo obter mostras deste tipo.

A) Sorteos. Cando a poboación é pequena pode organizarse un sorteo para elixir unha mostra. Numéranse os individuos da poboación, introdúcense nunha urna papeletas ou bólas cos números e selecciónanse tantas papeletas coma individuos desexemos que teña a mostra.

B) Táboa de números aleatorios. Máis axeitado cá utilización dunha urna e as papeletas é o emprego dunha táboa de números aleatorios. A poboación debe estar numerada pero non necesitamos nin papeletas nin urna para elixi-la mostra.

Unha táboa de números aleatorios é unha lista de cifras (do 0 ó 9) colocadas de tal forma que se se elixe unha posición da lista ó chou cada cifra ten a mesma probabilidade de ser seleccionada. Para seleccionar unha mostra de 10 individuos extraída dunha poboación de tamaño menor ca 1000 e maior ca 100 eliximos unha posición da táboa, lémo-la cifra que está nesa posición e as dúas cifras seguintes (por filas ou columnas). Obtemos un número de tres cifras (pode empezar en 0) que se corresponde cun dos individuos da poboación. Para toma-los 9 individuos restantes lemos cifras de tres en tres ó longo da táboa (por filas ou columnas), partindo desde a posición seleccionada ó principio.

C) Uso da calculadora. As calculadoras proporcionan números pseudoaleatorios que poden utilizarse na mesma forma cós que se obteñen na táboa de números aleatorios.

Nunha situación de aula non é doado atopar moitos exemplos nos que sexa factible tomar mostras aleatorias simples. Sen saírmos da aula podemos utilizar como poboación calquera das que se deduzan de medir ou observar algunha característica dos alumnos: a poboación das estaturas, dos pesos, do perímetro cranial, etc., ou se se trata de variables cualitativas: distribución de sexos, proporción dos que precisan lentes, etc. Outros exemplos que utilizamos para extraer mostras aleatorias simples sen saírmos da aula foron os seguintes:

a) Estudia-la proporción de números primos que hai entre 1 e 10000. Seleccionar unha mostra de 20 números utilizando unha táboa de números aleatorios. Comprobar se son ou non primos e calcula-la proporción de primos na mostra.

b) Estudia-lo número de palabras por frase empregadas nunha novela. Seleccionar unha mostra de 20 frases. Para isto, anota-lo número de páxinas da novela, seleccionar vinte páxinas utilizando a táboa de números aleatorios; en cada páxina seleccionar unha liña empregando números aleatorios, elixi-la frase da que a liña forma parte ou a primeira frase que teña como palabra de comezo a que está na dita liña. Conta-lo número de palabras de cada unha das 20 frases seleccionadas. Calcula-la súa medida e a súa desviación típica.

c) Repeti-lo estudio anterior variando o tipo de texto (ensaio, poesía, etc.), a época, o país, etc. Cada estudiante debe realiza-la actividade sobre un texto diferente.

Ademais de practica-la obtención dunha mostra aleatoria simple e de repasar cómo se obteñen medias, desviacións típicas e proporcións, os exercicios anteriores móstrannos claramente cáles son os obxectivos da estatística inferencial: estimar valores (estaturas, pesos, proporción de números primos, número medio de palabras por frase, etc.) ou contrastar hipóteses (¿as frases na novela A teñen máis palabras ca na novela B?, etc.). Para acadar estes obxectivos cómpre coñecer qué relación existe entre unha poboación e as mostras que se poden extraer dela.

RELACIÓN ENTRE POBOACIÓN E MOSTRA

Para estudiar esta relación examinaremos tódalas mostras que se poden extraer dunha poboación dada. A poboación ha ser sinxela e as mostras pequenas se se desexa que os estudiantes realicen tódalas operacións á man. Cando se gañe en complexidade de cálculo (non en dificultade conceptual) utilizarán a calculadora ou o ordenador. O que segue é unha descrición do traballo dos estudiantes.

• Poboación.

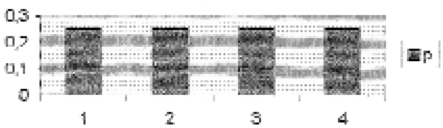
A poboación de partida será a obtida ó tirar un dado de catro caras numeradas do 1 ó 4 e observa-lo resultado. Os posibles resultados da variable aleatoria X e as súas probabilidades respectivas veñen dados na seguinte táboa:

x	1	2	3	4
p	0.25	0.25	0.25	0.25

A esperanza e a variancia desta distribución son:

E (X)=μ=2.5 e Var (X)=σ^2=1.25

Distribución de probabilidade da variable X



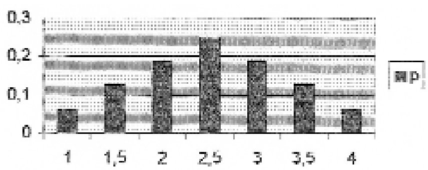
• Distribución de mostras de medias de mostras de tamaño 2.

Se se tira o dado dúas veces, os posibles resultados correspóndense coas posibles mostras de tamaño 2 extraídas da poboación orixinal X: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), ..., (4,4). As medias destas mostras son: 1, 1.5, 2, 2.5, 1.5, ..., 4. Tódalas posibles mostras coas súas respectivas medias están recollidas na seguinte táboa:

$\overline{X}$	1	2	3	4
1	1	1.5	2	2.5
2	1.5	2	2.5	3
3	2	2.5	3	3.5
4	2.5	3	3.5	4

A distribución de probabilidade desta variable *X*, que recolle as medias das mostras de tamaño 2, chámase distribución de mostras de medias de mostras de tamaño 2. A seguinte táboa amosa esta distribución. Tamén se amosa a súa gráfica, a súa esperanza e a súa variancia.

Distribución de probabilidade de $\overline{X}$



E ($\overline{X}$) =2.5 e Var ($\overline{X}$) =0.625

$\overline{X}$	p
1	$\frac{1}{16}$
1.5	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{3}{16}$
2.5	$\frac{4}{16}$
3	$\frac{3}{16}$
3.5	$\frac{2}{16}$
4	$\frac{1}{16}$

• Distribución de mostras de medias de mostras de tamaño 3.

Os estudiantes teñen agora que obter tódalas mostras de tamaño 3 con substitución. O número de mostras empézase a volver inmanexable para un só estudiante xa que son 64. O que se pode facer para realiza-lo traballo aínda cun lapis e papel é repartilo. Algúns estudiantes dedícanse a obte--las mostras que empezan por 1, outros as que empezan por 2, por 3, por 4. Os resultados xunto coas medidas respectivas tabúlanse:

— Mostras que empezan por 1. Por exemplo, a media da mostra (1, 2, 3) está representada na táboa na cela sombreada. Os elementos desa mostra son o 1, o número 2 da primeira columna e o número 3 da primeira fila.

$\overline{X}$	1	2	3	4
1	1	4/3	5/3	2
2	4/3	5/3	2	7/3
3	5/3	2	7/3	8/3
4	2	7/3	8/3	3

— Mostras que empezan por 2.

$\overline{X}$	1	2	3	4
1	4/3	5/3	2	7/3
2	5/3	2	7/3	8/3
3	2	7/3	8/3	3
4	7/3	8/3	3	10/3

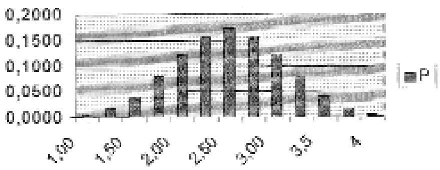
— De forma análoga, tabúlanse as medias das mostras que empezan por 3 e por 4.

A distribución de probabilidade desta variable *X*, que recolle as medias das mostras de tamaño 3, é a distribución de mostras de medias de mostras de tamaño 3. A seguinte táboa amosa esta distribución. Tamén se mostra a súa gráfica, a súa esperanza e a súa variancia.

$\overline{X}$	F	P
1.00	1	0.0039
1.25	4	0.0156
1.50	10	0.0391
1.75	20	0.0781
2.00	31	0.1211
2.25	40	0.1563
2.50	44	0.1719
2.75	40	0.1563
3.00	31	0.1211
3.25	20	0.0781
3.5	10	0.0391
3.75	4	0.0156
4	1	0.0039

$E(\overline{X})=2.5$ e $Var(\overline{X})=0.416$

Distribución de probabilidade de $\overline{X}$



Ata aquí é razoable face-lo estudio das distribucións de mostras á man. Non leva demasiado tempo e para os alumnos é unha boa oportunidade de achegarse ó concepto de distribución de mostras mediante a súa construcción. Tomar tódalas mostras de tamaño 4 con substitución da poboación coa que estamos a tratar e calcula-la media de cada unha delas supón obter 256 mostras e as súas medias. Para esta tarefa usouse un programa propio implementado na calculadora TI-92. A esta calculadora pódeselle encaixar unha pantalla de cristal líquido que, situada sobre un retroproxector, permite facer presentacións de aula. O programa xera distribucións de mostras de medias de mostras de tamaños 2, 3 e 4 extraídas dunha poboación discreta definida por unha variable aleaoria rectangular. Como exemplo presentámo-la distribución de medias de mostras de tamaño 4 obtida con este programa a partir da poboación que estamos estudiando, na que E $(X) = 2.5$ e Var $(X) = 0.3125$.

Os resultados das diferentes distribucións de mostras tabúlanse para poder analizalos mellor:

	Tamaño da mostra	Media	Variancia
Poboación	**1**	**2,5**	**1,25**
Distribución da mostra de medias	**2**	**2,5**	**0,625**
Distribución da mostra de medias	**3**	**2,5**	**0,416**
Distribución da mostra de medias	**4**	**2,5**	**0,3125**

As conclusións obtidas desta pequena investigación levada a cabo polos alumnos son:

• As medias das distribucións das mostras coinciden coa da poboación orixinal. Non dependen do tamaño da mostra.

• As variancias das distribucións das mostras dependen da variancia da poboación orixinal e mais do tamaño da mostra. Como se pode comprobar, esta variancia é igual a $\frac{1.25}{n}$, onde n toma os valores 2, 3 ou 4.

• Aínda que a poboación orixinal non é normal, parece que as medias das mostras se distribúen segundo unha curva de aspecto parecido ó da curva normal, como amosan as gráficas das súas funcións de probabilidade.

Estas son as tres afirmacións do teorema central do límite. Os estudiantes poden agora comprobar estes resultados noutros exemplos. Algúns realizámolos utilizando a calculadora TI92 e o programa antes citado e outro (só un) fixérono os estudiantes á man (construcción da distribución de mostras de medias de mostras de tamaño 2 extraídas da poboación obtida ó lanzar un dado cúbico).

Outra alternativa que se pode utilizar, se non se dispón nin de calculadora nin do programa, é a folla de cálculo EXCEL. Debe estar instalada a opción 'análise de datos'. Este comando permite, entre outras moitas posibilidades, obte-lo número de mostras que se desexe, de calquera tamaño, a partir dunha variable discreta definida polo usuario ou a partir dunha variable continua. A continuación describirémo-lo procedemento para: *a*) obter, por exemplo, 100 mostras de tamaño 30 da poboación que se obtén ó lanzar un dado cúbico; *b*) calcula-la media de cada mostra; *c*) obte-la súa distribución.

1. Defini-la poboación mediante unha variable discreta **X** e a súa función de probabilidade **p** nas columnas A e B dunha folla de cálculo (ver ilustración 1).

2. No menú Ferramentas, executa-lo comando Análise de datos e, a continuación, elixi-la opción Xeración de números aleatorios. O significado das entradas no cadro de diálogo que se abre a continuación (ver ilustración 1) é o seguinte:

— Número de variables = Número de mostras que desexamos obter.

— Cantidade de números aleatorios = Tamaño das mostras.

— Distribución = Tipo de distribución do que quero obter mostras.

— Rango de entrada de valores e probabilidades =. Situación dos datos da distribución para o caso de distribucións discretas definidas polo usuario (coma neste exemplo).

— Iniciar con = É un valor opcional a partir da cal se xerarán números aleatorios. Poderá volver utilizar este valor para xera-los mesmos

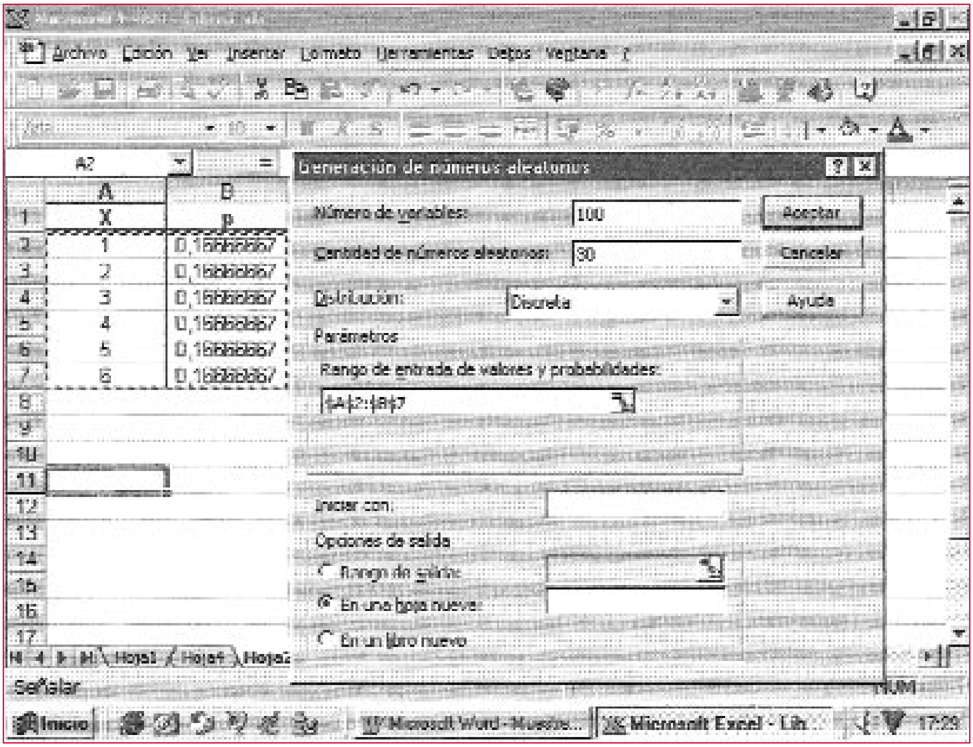


Ilustración 1: Xeración de mostras a partir dunha variable discreta.

números aleatorios máis adiante. Non é necesario especificalo.

— Opcións de saída = Onde queremos almacena-las mostras obtidas.

Ó executa-lo comando cos parámetros que indica a ilustración 1, obtéñense as 100 mostras aleatorias de tamaño 30 nunha folla nova a partir da posición A1. Aparecen 100 columnas de 30 números cada unha.

3. Calcula-la media de cada mostra. En A31 introduci-la fórmula =MEDIA (A1:A30) para calcula-la media da primeira mostra. Copiar esta fórmula nas demais columnas: desde B31 ata CV31.

4. Estudia-la distribución destas medias. Para isto, executar Histograma da opción Análise de datos do menú Ferramentas. Aparece un cadro de diálogo (ilustración 2). Debemos da-la seguinte información (isto permítenos ve-la forma da distribución):

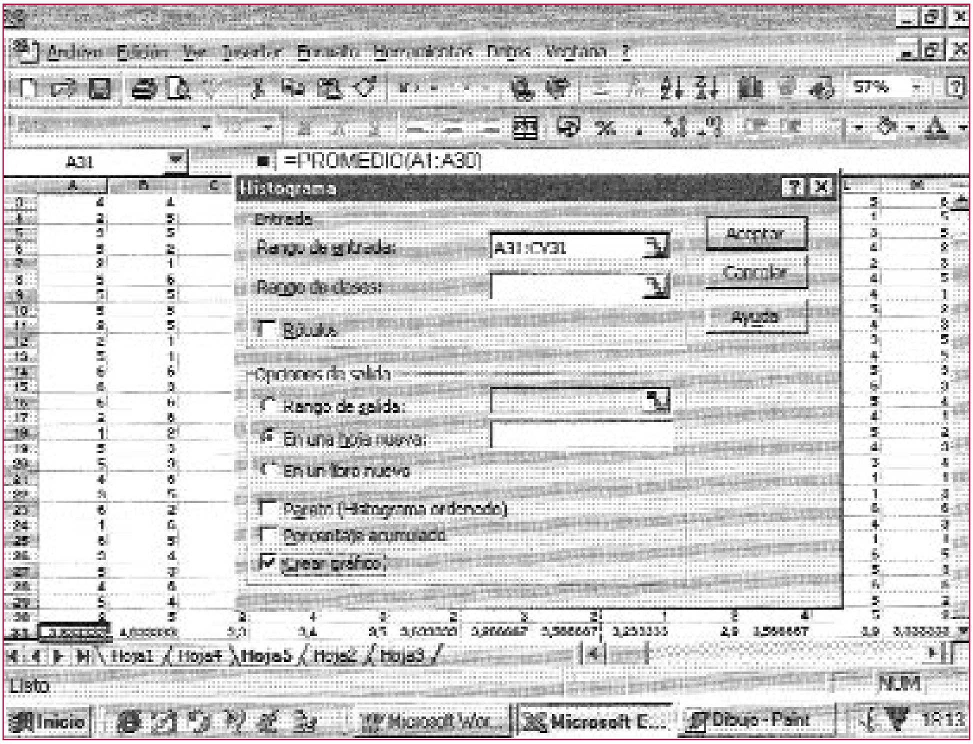


Ilustración 2: Xeración da distribución de mostras de medias.

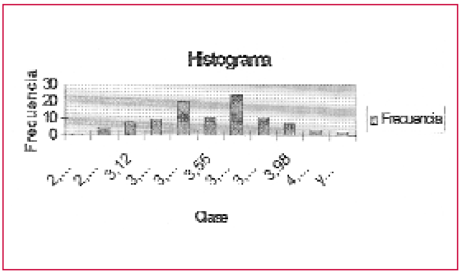
— Rango de entrada = Rango no que están os datos. No noso caso as 100 medias calculadas antes.

— Nunha folla nova = Habilitar esta opción para que o resultado do comando se coloque nunha folla nova.

— Habilita-la opción Crear gráfico para que ademais da distribución se xere un gráfico.

5. Calcula-la media e a variancia das medias das mostras utilizando as funcións MEDIA (A31:CV31) e VAR (A31:CV31).

O resultado dos dous últimos puntos móstrase a continuación:



Clase	Frecuencia
2,83333333	1
2,97666667	4
3,12	8
3,26333333	9
3,40666667	20
3,55	11
3,69333333	24
3,83666667	11
3,98	7
4,12333333	3
e maior	2

Media= 3,48733333

Variancia= 0,09166734

A distribución orixinal ten unha media e unha variancia iguais a: μ=3,5 e σ^2=2,91666667. O teorema central do límite asegura que a distribución de medias de mostras de tamaño 30 extraída desta poboación ten unha media igual á da poboación orixinal, 3,5 e unha variancia de 2,91666667:30=0,09722. Os alumnos poderían pensar que o teorema non é valido ou que realizaron mal os cálculos posto que hai unha discrepancia entre os resultados teóricos e os experimentais. Deben caer na conta de que co procedemento seguido utilizando a folla de cálculo non se obtén a distribución da mostra de medias de mostras de tamaño 30, senón que só se obteñen 100 desas mostras. De tódalas formas poden comprobar que con só esas 100 mostras, a distribución que se obtén, tanto nos seus parámetros coma na súa gráfica, se aproxima ó resultado teórico.

A utilización do ordenador permite repetir esta experiencia as veces que se desexe, sen case custo ningún de tempo. Os estudiantes deben cambia-la distribución orixinal, o tamaño da mostra e o número de mostras, e analizar en cada caso os resultados obtidos.

EXCEL tamén permite obter mostras a partir dunha distribución normal de media e desviación típica introducidas polo usuario. Os alumnos tamén poden xerar mostras de diferentes tamaños partindo dunha distribución normal e estudia-la distribución de mostras de medias. Poden repeti-lo exercicio varias veces cambiando os parámetros da poboación, o número de mostras e o tamaño da mostra e analiza-la concordancia dos resultados obtidos co que afirma o teorema central do límite.

No bacharelato non podemos nin debemos facer máis que este traballo de laboratorio matemático para dar algunha razón que amose por qué o teorema é certo e cál é o seu significado. Este farase máis patente cando se aplique a diversas situacións. En principio, este teorema establece a relación que existe entre a distribución dunha poboación X e a das medias das mostras que se extraen dela e, polo tanto, proporciónanos un camiño para dicir algo verbo dunha poboación se coñecémo-las súas mostras.

O desenvolvemento da unidade onde se enmarcaron esta serie de actividades continuou coa realización de diferentes exercicios de aplicacións do teorema á asignación de probabilidades a sucesos, para pasar logo a estudia-las dúas aplicacións máis importantes: estimación por intervalos de confianza e contraste de hipóteses.

BIBLIOGRAFÍA

Escaño, J., e M. Gil, *Principios psicopedagóxicos,* Santiago de Compostela, Xunta de Galicia, 1995.

Mode, E. B., *Elementos de probabilidad y estadística,* Barcelona, Reverté, 1990.

Paulos, J. A., *Más allá de los números. Meditaciones de un matemático,* Barcelona, Tusquets Editores, 1993.

Perry, P. I., e outros, *Matemáticas, azar y sociedad. Conceptos básicos de estadística,* México D. F. , Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

Tucker, H. G., *Introducción a la teoría matemática de las probabilidades y a la estadística,* Barcelona, Editorial Vicens-Vives, 1966.

Turner, J. C., *Matemática moderna aplicada. Probabilidades, estadística e investigación operativa,* Madrid, Alianza Editorial, 1986.