ESTUDIOS

Humanizar la enseñanza de la Matemática

Por Willy SERVAIS

WILLY SERVAIS

Nota biográfica

Cuando gentilmente el profesor Servais nos hizo entrega del presente trabajo —original de la conferencia pronunciada por él en las Jornadas Nacionales de A.P.M.E.P., Rennes 1976— para su traducción y posterior publicación en la «Revista de Bachilletato», ¡qué lejos estábamos de sospechar que estas líneas de obligada presentación —a la vez que de gratitud— del autor, estarían teñidas de tristeza!

Willy Servais, el ilustre profesor belga, durante tantos años profesor y prefecto de estudios del Ateneo del Centro (Morlanwelz) y Profesor de Lógica en la Universidad de Mons, falleció súbitamente en Budapest el 25 de agosto de 1979.

Había asistido al XXXI Encuentro de la C.I.E.A.E.M., de la que casi desde su fundación era Secretario, que acababa de tener lugar en Vésprem. En esta reunión, sin cuidar de su fatiga, con total entrega, había participado activamente tanto en su organización —con la ayuda abnegada de su esposa Renée— como en el curso de los debates. En estos había hecho brillar, como siempre, la claridad de sus concepciones pedagógicas y la ponderación de sus juicios.

Pionero en los movimientos de reforma en la enseñanza de la matemática, la presencia del Profesor Servais era solicitada como imprescindible en cuantas reuniones y congresos se han celebrado en el mundo entero durante las últimas décadas. En cuatro ocasiones estuvo en España, a la que —nos consta— amaba profundamente.

Sus trabajos en el campo de la pedagogía matemática vieron la luz en todas las revistas especializadas. Señalemos únicamente su participación con los profesores Puig Adam (con quien le unía fraternal amistad) y Ana S. Krygowska, en las Recomendaciones sobre la Enseñanza de las Matemáticas, *formuladas conjuntamente por el B.I.E. y la U.N.E.S.C.O, así como en la publicación por este último organismo, de la obra* Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática.

De su impresionante humanidad, mejor que lo que nosotros pudieramos decir, juzgará el lector por el trabajo que hoy tenemos el honor de publicar.

Sirvan estas líneas, que bien hubieramos querido evitar, para expresar nuestro dolor por la pérdida, y honrar la memoria de uno de los hombres más admirables que vivieron intensamente consagrados a una gran obra como fin único: Willy Servais.

J. R. Pascual IBARRA

1) Entre todas las Ciencias, la Matemática se sitúa en una posición singular y paradójica.

Sin duda, es la obra más elaborada por las propias fuerzas del espíritu humano, y, por ello, la que mejor refleja su estructura funcional.

Mas, por sorprendente contraste, resulta ser ajena a un número demasiado grande de inteligencias.

Sucede, pues, que una creación de lo más humana en su esencia se presenta para tantas y tantas personas como inhumana y hasta deshumanizante.

La ficción, o la realidad de los hechos, hace creer que los que poseen una predisposición para las matemáticas, todos los elegidos para entrar en su reino, llevan su frente marcada con el signo de la inteligencia.

Para los no predestinados, en cambio, no hay más promesa que un trabajo sin alegría, un hartazo de amarguras, una frustracción sin remedio, una injusticia congénita.

2) De todas las ramas enseñadas, el estudio de la matemática es quizá el más jalonado de lágrimas y de rechinar de dientes.

Para demasiados alumnos y demasiadas familias, las matemáticas son el aguafiestas, motivo de enconadas reuniones familiares, la causa de las vacaciones frustradas.

¡Y, sin embargo!

3) Sin la matemática no se puede comprender el mundo natural, ni hay posibilidad de sacar partido de él.

En el mundo cultural y técnico no hay construcción, cualquiera que sea, que no deba a la matemática su forma, su belleza y su eficacia funcional.

La matemática es una componente señera del poder creador y realizador de los hombres. Como tal es un bien y un derecho de todos, pues constituye una de las dimensiones necesarias para su realización personal.

4) Desde que se reconoció la potencia de comprensión y acción de la matemática, esto es, desde la

aurora de las civilizaciones, se ha venido haciendo un esfuerzo incesante, cada vez más amplio y más consciente, para promover su conocimiento y su utilización.

Los resultados logrados, en su aspecto general, y quizá también en las adquisiciones relevantes, ¿han correspondido a los esfuerzos realizados?.

Ni siquiera los más optimistas se atreverían a responder afirmativamente.

He aquí, pues, las cuestiones planteadas: «sería posible mejorar este rendimiento y aproximarlo al nivel de nuestros anhelos? ¿Cómo podríamos intentar hacerlo?

Si no en su totalidad, al menos en su mayoría, los esfuerzos dirigidos a mejorar la enseñanza se han consagrado siempre a una mejor puesta a punto del contenido matemático y de su presentación pedagógica específica. Vía de progreso evidente, y, al parecer, inmediata por su relevancia, ¿es la única cuando de lo que se trata es de introducir a jóvenes inteligencias en la actividad matemática habituándolas a ella, hacérsela familiar, a fin de que sea mejor asimilada y más eficaz?

5) De una manera general, el lado psicológico, afectivo y, en definitiva, humano, ha sido descuidado cuando no inexistente.

Nuestro propósito es examinar la cuestión juntos precisamente con este enfoque; querría hacerlo sobre la base de nuestras experiencias cotidianas, y con todo el impulso de nuestros mejores deseos. Nuestra reflexión discurrirá por cinco apartados, cuyos títulos son ya por sí mismos una crítica y un programa:

La disciplina matemática; los maestros; los alumnos; los profesores; la educación matemática abierta.

I. LA DISCIPLINA MATEMATICA

1) En los diversos sentidos de la palabra disciplina, la matemática es, entre todas las ramas científicas, la que más posee este carácter.

Primero es un conjunto de conocimientos y de métodos que se aprenden bajo un maestro, para más adelante, si uno puede, llegar a ser artesano de su desarrollo.

En el sentido corriente, es un conjunto de reglas de conducta normalmentete acompañadas de sanciones impuestas a los miembros de una misma colectividad.

Por extensión, puede llegar a ser un marco de vida que se imponga uno a sí mismo (1).

La matemática es una disciplina exigente. Lo es incluso para los que la practican con soltura. Y mucho más todavía —¿será necesario decirlo?— para aquellos que la sufren como una tarea impuesta y a la que permanecen ajenos.

2) El carácter coactivo de la matemática es el resultado de un haz de propiedades que posee en mayor grado que las otras ciencias.

La Matemática es la más abstracta de las actividades mentales, la más virtual respecto a lo concreto

Es la más lógica, la más relacional, vacía de contenido.

La más esquemática, la más formal, por sus figuras, sus diagramas, su formalismo, sus algoritmos.

La más sistemática y más organizada de forma hipotético deductiva, a partir de las axiomáticas que definen sus estructuras.

Todas estas propiedades superlativas hacen de la matemática, a pesar de ser tan abierta a la creación intelectual, una fortaleza cerrada, severa y temible.

El terror matemático

3) Tanto los alumnos como sus familias consideran a la matemática como la rama más apremiante y más exigente.

Opinión que viene reforzada por el papel de criba selectiva que se le adjudica. Se presta bien la matemática a este servicio por el carácter de objetividad de sus pruebas, y por exigir, además, cualidades de inteligencia racional, principalmente la de dominar una vasta materia fuertemente organizada.

4) La matemática es la rama más acumulativa que existe. En las otras ciencias, digamos en física, es posible conocer una parte, la calorimetría, ignorando, por ejemplo, la óptica.

En la matemática todo se sostiene y, desde sus elementos, es indispensable un esfuerzo de memoria sintética.

Este carácter global y acumulativo viene acentuado aún más por la presentación moderna y más estructurada de las materias, tratamiento que confiere a la matemática una sólida unidad. Por otro lado, si bien esta fuerte conexión de las partes entre sí, asegurada por las nociones fundamentales de conjuntos, relaciones y funciones, es una ayuda para dominar mejor la abundancia de los hechos, ¡es necesario también haber alcanzado un cierto nivel desde el que sea posible una visión sinóptica!

5) Muchos alumnos, por carencia de memoria, por incapacidad de organización racional, o por falta de tiempo y ejercicio, se ven desbordados y muy pronto perdidos en la abundancia de la matemática.

Es bien conocido el pánico de los alumnos que sienten el vacío abierto bajo sus pies ([1] p. 67). Jaques NIMIER *Mathématique et affectivité.*

— En «quatrième», después de recuperar mis lagunas en matemáticas, bien o mal, he podido seguir. Reconozco que he intentado trabajar en «Troisième». Mis padres me han hecho dar clases particulares, que no me han servido para recuperar todos mis fallos, y, ahora, ya en «seconde», estoy convencido de que me voy a encontrar con dificultades en los problemas de física, debido a mis lagunas en álgebra...

— Tengo lagunas en matemáticas que jamás llegaré a recuperar, porque sí, en matemáticas se tienen casi tres anos con defectos, es imposible rehacer todo eso...

El problema puede no ser cuestión de trabajo y buena voluntad ([1] p. 58):

— El ano pasado, ciertamente, estaba desorientado. Y este ano, por eso, todavía más, porque lo entiendo bien en clase, sí, lo comprendo todo, pero después cuando se trata de rehacerlo, siento como un vacío y ya no consigo reconstruirlo.

6) No es lo mismo en las otras ramas; con algo de parloteo se puede inflar lo que se dice. Además, en estas materias no pasa lo que en matemáticas, en las que un error siempre se propaga y una falta de cálculo o de razonamiento compromete todo el desarrollo ulterior ([1] p. 69):

— Te equivocas en una minucia ¡y se acabó! todo queda en el aire.

---

(1) Ver diccionario de la lengua filosófica de P. FOULQUE y R. SAINT-JEAN.

Al alumno poco seguro, el éxito le parece un golpe de suerte ([1] p. 71):

— Por ejemplo, estoy ante un ejercicio de matemáticas que debo resolver... ¡pues bien!, inmediatamente tengo la impresión de que no lo lograré, y, que si lo logro, será por pura casualidad.

7) En las letras, en las artes, las obras llevan la marca del artista, que son testimonio de su personalidad subjetiva.

Las ciencias positivas, en cambio, exigen de sus practicantes la renuncia voluntaria a toda subjetividad, deberán olvidarse de sí mismos.

Por eso, la matemática es para la mayoría la disciplina más alienante de todas.

Lo es así porque procede por abstracción y esquematización sucesivas. Se llega a cada nivel por abandono del contenido del nivel inferior.

Por pérdida progresiva de contenido, las nociones, en una especie de ascesis, se depuran, se multiplican, se vacían de contenido semántico para acceder a un estadio lógico que puede reducirse a una sintaxis.

He aquí cómo se expresa esto: ([1] p. 59).

A.—*Pienso que mejor que estudiar una materia como las matemáticas, que nos turban la mente, debería uno instruirse en las lenguas.*

N.—*¿Por qué las matemáticas son perturbadoras?*

A.—*Sí, perturban porque las matemáticas no son más que lógica. Hay que tener lógica. En tanto que en las lenguas, para aprender las lenguas, se necesita tener una cierta sensibilidad, es decir, que la mente va mejor con las lenguas, lo que no sucede con las matemáticas... Por eso digo que terminan perturbando la mente.*

8) En el caso de un alumno flojo, el formalismo, lejos de contribuir a poner mayor claridad y concisión y a favorecer los cálculos, es fuente de incomprensión ([1] p. 52).

— Pues no lo sé, pero me parece que se podría muy bien escribir la matemática en nuestra lengua en vez de poner signos, y creo que si se hiciera así las comprenderían muchos más. Son muchos los que se equivocan después de aprender montones de signos y de expresiones matemáticas.

9) ¿Qué le pasa al muchacho asediado por la selva de signos, cuando estos en lugar de introducirse con una significación precisa, se convierten en una tipografía en la que el automatismo de las manipulaciones ha sustituido a la misión de comprender el sentido de las operaciones algebraicas?

¡Escuchad! ([1] p. 47).

— En matemáticas todo es repetición, verdaderamente es un lavado del cerebro.

— Era más bien una especie de mecánica, era necesario hacer un deber y había que hacerlo.

— Sí, lo hacía mecánicamente.

— Y además, en las matemáticas, si he encontrado una especie de poesía, no lo sé, pero, si Vd. lo quiere, habrá sido en todo caso la poesía de las... máquinas.

— Cuando se trata de un problema, aprendo mis teoremas y todo eso. Ya los sé, sé mis definiciones, pero mi problema lo hago como una máquina.

— En matemáticas se hace todo como una máquina.

10) La matemática aisla del mundo y de los demás ([1] p. 55).

— Y además la prueba de que las matemáticas nos separan del mundo, es que ahora que ya trabajo, las matemáticas no me sirven de nada; de las ideas que retengo de otras cuestiones puedo hablar con cualquiera. Si hablase en la oficina con una chica de la suprayectividad ni ella ni yo veríamos en ello ningún interés, y más bien tendríamos la impresión de habernos hecho unos tontos, por hablar de esto. ¡Es la pura verdad!

— Por ejemplo, al compararlas con la literatura, puedes referirte a las obras o a los personajes de novela o a los autores que puedan... no sé... animarte, digamos... sostenernos, pero, con las matemáticas no hay nadie, uno está sólo.

11) El rigor disciplinario de la matemática, la deshumanización alienante de su abstracción, la mecanización de los ejercicios y de las clases, el vacío de su objetividad despersonalizante, sobre todo sufridos por los alumnos más vulnerables, aquellos que poseen una afectividad inclinada a la ternura y con capacidades lógicas reducidas. Tiemblan y se llenan de pánico ante ella que les acosa como una pesadilla. Como dice Jacques NIMIER ([1], p. 63).

Las presentaciones más rigurosas, más claras, de tal teorema ¿qué podrán cambiar en la comprensión de aquellos para quienes las matemáticas están asociadas a un fantasma de destrucción y de muerte?

Las defensas contra las matemáticas

12) No todos los alumnos incapaces de hincar el diente a la matemática parecen sufrir por ello. Algunos tienen mecanismos psicológicos de defensa.

Olvidar y dejar de lado es una manera de guardar las distancias ([1], pp. 80, 82, 83).

— Por ejemplo, lo que ahora estamos haciendo: los conjuntos, los entiendo, los hago, es así. Pienso en las matemáticas, en el tema en general y después, ¡puf!, se acabó.

— Es como si hubiera una cortina que me separa de lo que hay... lo que veo... no lo veo... está lejos. He tenido esta misma sensación... evidentemente enseguida esto me ha recordado las matemáticas.

— Me estudiaba la lección la víspera del examen y después se acabó. A veces iba mejor y después, al final de «troisième», me encontré en una situación de desinterés completo. Había abandonado las matemáticas totalmente.

13) Tomar partido es también una protección ([1], p. 109, p. 113):

— Eso está muy lejos, pasa a tres millas de mí.

— Para mí, las matemáticas, verdaderamente pertenecen a otro mundo; siempre me han desbordado.

— Considero a la matemática, además, como algo superfluo; no es porque yo sienta un poco de admiración por los que las hacen por lo que yo vaya a decir que también, para parecerme a ellos, me voy a dedicar más a las matemáticas, no, no lo creo. Sinceramente no valgo para ellas, pero eso no me deprime. El no saberlas no me importa, no me causa el menor malestar... eso depende.

14) Un buen remedio es la compensación ([1], página 83).

Incluso se llega a un cierto orgullo.

— Soy malo en matemáticas y eso me causa una cierta satisfacción. Por ejemplo me digo: Yo soy para las letras y las abandono completamente.

— A los que no les gustan las matemáticas, las rechazan. No vale la pena obligarles, las desprecian.

5) La mejor compensación es infravalorar la matemática para no sentir su carencia ([1], p. 107):

— Nunca he conseguido hacerme a la idea de que esto pudiera ser algo importante.

— A mí lo que me gusta es el francés, y, desde un punto de vista ideológico, pienso que hay problemas

mucho más importante que las matemáticas. En clase de literatura puedes hablar de muchas cosas; no sé cómo podrías hacer lo mismo en las matemá ticas.

Es cierto, que en nuestra enseñanza, la matemática no se utiliza para estudiar importantes problemas vitales. Este hecho conduce a los alumnos a opiniones radicales ([1], p. 107).

— *Para mí las x y las y no representan nada; son algo totalmente abstracto.*

— *Era preciso copiar teoremas completamente estúpidos.*

Se llega hasta el ataque personal ([1], p. 108).

— *Vd. como profesor de matemáticas, ¿cree de verdad en ellas, en todos estos teoremas?*

16) La agresividad hacia las matemáticas no es cosa de hoy. Sin duda es mayor en nuestra sociedad tecnológica, porque los padres alaban hasta la exageración los méritos, el prestigio y la potencia de la reina de las Ciencias ([1], p. 110).

— *Mis padres piensan que es una asignatura importante. Más aún, cuando se dice las matemáticas se las considera, en general, como la más importante, a la que se debe uno dedicar con preferencia. Además, se imaginan que la matemática es la materia más difícil, la más ambiciosa, la que más se desea.*

— *Cuando se sabe de alguien que es bueno en matemáticas se dice: ese sí que es bueno en matemáticas. Debido a que se piensa que en ellas está el porvenir de la época de los ordenadores; por eso los padres «¡qué pena que no seas bueno en matemáticas!», ¿qué tienen de particular para que tú no las comprendas?*

En este clima de prestigiar las matemáticas, ser negado para ellas, viene a ser una tara ([1], p. 142):

— *Siempre... Desde la escuela primaria, siempre lo mismo: siempre marcado, nulo en matemáticas, inepto...* y más lejos ([1], p. 147):

A.—*Justamente el peligro es que tengo miedo, me he acostumbrado... es un estado de ánimo que dura ya años. Tengo confianza en francés y en lenguas; pero en matemáticas nunca me siento seguro..., vivo en un clima de inseguridad: y no me hago a la idea de que esto pueda cambiar; si me siento un poco más confiado, ¿qué va a pasar?, ¿qué sucede?, eso...*

N.—*Entonces, ¿cuál es el peligro?*

A.—*Pues eso precisamente, que tengo miedo de perder...».*

La alegría matemática

17) Hasta ahora, hemos abierto todo el gran pliego de cargos de la disciplina matemática. Era necesario para probar toda la carga soportada por los alumnos que la sufren. Por razón de equidad, es justo hacer oír también la voz de los alumnos que son buenos en matemáticas.

Este testimonio servirá para alivio de los profesores de matemáticas; algunos de ellos podrían no tener quizá buena conciencia de sí mismos. Se sentirán felices al oír alabar las alegrías que las matemáticas suscitan ([1], p. 90).

A.—*En el fondo no se crea un problema, se crea la solución. O sea, nace de nosotros, son como objetos que uno hace.*

N.—*En el fondo construís algo.*

A.—*Sí, en las matemáticas se construye algo. Entonces por eso me gustan. A todo el mundo le gusta crear algo, digo yo... Porque si no llegáramos a construir ese algo, o sea, a encontrar... a encontrar la paz, a tener la satisfacción de haber hecho algo, creo que lo dejaría (lo dejaría, en fin, creo... o por los menos intentaría dejarlo).*

Si no se consigue encontrar algo es que a uno no le gustan y se las deja, porque uno se encuentra atrapado sin saber qué hacer. Y es enervante, molesto. Es preferible hacer algo en lo que uno se sienta realizado. Si uno solo no encuentra la solución tiene que pedírsela a los demás.

N.—*Tenéis la sensación de construir, pero algo que surge de vosotros.*

A.—*Ah, sí, sí surge de nosotros, como algo en lo que se ha pensado, que uno ha encontrado, que luego ha expuesto. Porque un razonamiento matemático se expone, yo creo. Entonces, algo que se ha expuesto, que ha sido hecho por nosotros... Sí, porque un problema, naturalmente, tiene un enunciado que se nos dá, pero después, lo más importante lo tenemos que hacer nosotros. Eso es lo que nos dá la satisfacción personal de haber hecho algo.*

Semejante testimonio, con la espontaneidad del lenguaje hablado que se afana por expresarse mejor describe en forma maravillosa la satisfacción del que «al hacer algo» se afirma uno ante sí mismo y ante los demás.

La alegría narcisista del creador no está en la cosa creada. Radica en la creación del yo.

18) No se trata aquí de amar, de manera contemplativa y platónica la matemática hecha, sino de querer el quehacer de la matemática. En realidad, el móvil psicológico profundo ¿no es, como en todas las cosas, amarse a través de la obra bien hecha?

Como lo subraya J. NIMIER, la matemática proporciona muchas alegrías ([1], p. 126):

Alegría de ver claro.

— *Ayer llegué a comprender un capítulo del que antes no entendía nada. Ahora sí ahora lo comprendo... hasta ayer, no, es decir, había sobre todo un punto oscuro, y he logrado, por mí mismo, ponerlo en claro. Me ha producido esta satisfacción.*

Alegría de lo imprevisto, orgullo de superarse.

— *Sí, de lo imprevisto. Porque no sabía si lo iba a lograr. No se sabe si se va a encontrar. Por eso, cuando se ha llegado viene la alegría..., poder decir que uno lo ha hecho, poder explicárselo a los otros... Esto es lo que empuja, lo que impulsa a la acción. En fin, eso es lo que se nos exige, superarse y clarificar las ideas.*

19) Para aquellos alumnos a los que su capacidad hace combativos, la matemática ya no es una amenaza, un peligro, una barrera. Es sí un obstáculo, un adversario al que hay que vencer ([1], pp. 86-87).

— *Hay dos posibilidades: se hace o no se hace. Es una cuestión temperamental. Si no lo hago me siento verdaderamente vencido, hasta desgraciado; sí, ciertamente desgraciado por no haber logrado la solución. Pero, si consigo encontrarla, entonces me considero verdadero vencedor... Cuando resuelvo un problema... lo que es, por lo demás, bastante normal... un problema con alguna dificultad que he conseguido superar, es evidente que tengo derecho a sentirme como un vencedor.*

El mismo grito de triunfo:

— *Me siento vencedor verdaderamente cuando he encontrado... Cuando os proponéis un objetivo y llegáis a alcanzarlo, es prácticamente evidente que encontrais una cierta felicidad... Si triunfo al hacerlo, verdaderamente me siento dichoso.*

II LOS MAESTROS

Una maestría difícil de adquirir

1) Son tales la variedad y la abundancia de la proliferación matemática que es humanamente imposible dominar con suficiente profundidad los numerosos campos de su creación.

Tener una cultura matemática puesta al día exige un esfuerzo considerable. Es más asequible, al precio de un esfuerzo huamanamente posible, tener una buena información y un dominio razonable de las materias del nivel secundario.

Tal esfuerzo es sobre todo rentable gracias a las estructuras fundamentales que aseguran al conjunto de estas materias la mayor unidad, la cohesión, y, como consecuencia, la inteligibilidad.

Es sabido que la enseñanza matemática no está siempre garantizada por un número sufiente de profesores con la formación adecuada.

De cualquier manera, el maestro, cualquier maestro, debería haber tenido ocasión de realizar el esfuerzo para la adquisición de su bagaje de matemática moderna, y también el necesario para poder estar suficientemente próximo al alumno que aborda

Desgraciadamente no es siempre así.

2) Sabemos que uno de los rasgos de carácter del que enseña es el narcisismo, que nos conduce a hacer lo mejor que podamos nuestras clases. Si somos conscientes de este hecho, podremos limitar sus efectos al evitar la consideración de las deficiencias o las ignorancias de los alumnos como si fueran injurias personales.

La imposición de los maestros

3) Quedan, empero, adultos que hacen pesar sobre sus alumnos su superioridad matemática.

Escuchad este testimonio ([1], p. 53).

— *Llega un muchacho con las manos en los bolsillos, plantea en el tablero un problema de veinte líneas y lo resuelve como si nada en cinco minutos; para nosotros..., en cambio, nos deja pegados durante horas, lo que me hace pensar en el juego del gato y el ratón. El gato es el «profe» y ¡yo el otro!... ¡Muy bien chavales! Hay chicos que lo han resuelto enseguida y vosotros ¿qué? ¡no hacéis nada!... En fin, esto no es así generalmente. Pero, yo, en todo caso, esa es la experiencia matemática que tengo ¿no es así?*

¿Qué pensar también de esta confidencia? ([1], página 70).

— *Una cosa me sorprendió: había una muchacha que al comienzo del curso tenía buenas notas, pero después, más adelante, ya no se destacaba. Entonces el «profe» le dijo: ¡Te creía inteligente y resulta que no lo eres, pequeña! A esto reaccioné: Si la matemática es la inteligencia, entonces la mía no debe ser mucha. Por el momento me sentía un poco descorazonada, pero despuées me dije: «Si voy bien en francés, en lenguas, esto no tiene razón de ser, debe de haber varias clases de inteligencia.*

Caso feliz el de una muchacha que encuentra en ella misma la compensación necesaria frente a un juicio sobre su inteligencia, que podría dejarla marcada de una manera definitiva.

4) Se sabe toda la importancia de una buena relación afectiva entre un alumno y su maestro, y cómo un lazo de simpatía con el profesor puede hacerle amar la materia, trabajarla con convicción y llegar a conocerla.

La autoridad en matemáticas

5) En matemáticas, cuando se produzca una situación de protesta a propósito de una propiedad o de una demostración, es la matemática misma la que debe ser y decidir como árbitro. No tiene derecho el maestro a erigirse como autoridad para hacer prevalecer su punto de vista. Y, todavía más, es menester que tenga la sencillez y la prudencia de reconocer, en su caso, que es el alumno el que tiene razón.

6) Hay profesores que, en lugar de habituar al alumno a recurrir a las propiedades matemáticas, se limitan a responderse a sí mismos a multiplicidad de preguntas.

— *¿Se puede hacer esto? ¿Se debe hacer aquello?* El conocimiento de la matemática se convierte así en un código de obligaciones, de autorizaciones y de prohibiciones.

Por ejemplo, la distributividad de la multiplicación sobre la adición que se puede expresar: cualesquiera que sean los números *a, b, c,* se tiene:

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

se traduce en estilo de *obligación:*

—Para multiplicar una suma por un número, se multiplica cada uno de los términos de la suma y se hace la suma de los productos obtenidos.

Regla imperativa que es una tontería, como lo muestra el ejemplo siguiente:

$$(47 + 53) \times 7 = 100 \times 7 = 700$$

Un enunciado en forma de *autorización:*

— *Para multiplicar una suma por un número, se puede multiplicar cada término de la suma por ese número y sumar los productos obtenidos.*

No es falso, pero esta regla polariza la lectura de izquierda a derecha de la igualdad simétrica.

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

Silencia la lectura de derecha a izquierda, relativa a la posibilidad de sacar factor común *a*. ¿Por qué no enunciar simplemente la distributividad, no como una regla, sino como una proposición lógica?:

— *El producto de una suma por un factor es igual a la suma de los productos, por este factor de los términos de la suma inicial.*

7) En lugar de interponer entre el alumno y la matemática, su propia barrera autoritaria, el profesor debe mostrar al alumno que él mismo está sometido a la autoridad de la matemática. De esta forma, a la vez que evita al alumno el impacto de su dominación de adulto, se coloca de su lado ante la jurisdicción matemática.

8) Si bien no se debe mecanizar al aprendiz matemático mediante un sistema teledirigido de órdenes y de prohibiciones, tampoco conviene abandonarle a sí mismo, solo y sin ayuda, frente a la matemática, cuando la tarea es demasiado pesada para una inteligencia joven.

Los maestros que tienen un contacto pedagógico y humano adaptado a cada alumno, saben intuitivamente lo que conviene decir, a uno para darle seguridad, a otro para estimularle, a un tercero para desafiarle, a un último para sostenerle en su esfuerzo que hasta el momento ha sido poco provechoso.

Los maestros del pensar

9) Los verdaderos maestros de matemáticas son, cada uno a su manera, con los medios que les dan su ciencia y su personalidad, maestros del aprendizaje de pensar. Cercanos a sus jóvenes discípulos, saben guiarles cordialmente y hacerles descubrir cómo se busca, cómo se plantean cuestiones, cómo se adivina, cómo se comprueba, cómo se construye una demostración o se resuelve un problema.

Su saber-hacer, su arte, está mucho más hecho de psicología, de contacto humano, que de matemática y de lógica.

10) Que cada uno de nosotros se remonte al recuerdo de sus profesores y maestros.

Ahora, mientras os hablo, estoy viendo emocionado sus rostros desfilando en mi memoria, reencontrándome con ellos como si aún estuvieran vivos. Son recuerdos muy antiguos.

11) El primero, el más digno de lástima suscita siempre la misma conmiseración. Preparaba cuidadosamente sus clases. Tenía un encerado modelo en el que, durante los recreos, dibujaba las figuras en colores. Desencadenaba un alboroto épico y despiadado por parte de los alumnos alborotadores, por su falta de autoridad. En ocasiones el tumulto cesaba de repente ante la aparición del prefecto de estudios que aplicaba un castigo general. Este profesor pretendía haber descubierto una demostración del postulado de Euclides y jamás comprendió que no valía nada.

12) Nuestro profesor de la sección científica era la humanidad sonriente, de una elegancia innata moral, matemática y hasta en su atuendo. Trabajabamos todos juntos en un debate, que sabia guiar con tal soltura natural que pasaba inadvertida. Admiraba la belleza de ciertas propiedades y nos hacía compartir la alegría de comprenderlas. Para indagar si lo habíamos comprendido bien no hacia preguntas. Nos iba mirando a cada uno, sin abandonar su luminosa sonrisa designándonos avanzando la barbilla al tiempo que dejaba oir un afectuoso carraspeo de asentimiento; después nos preguntaba: «¿Y, ahora?» La respuesta, establecida como un ceremonial, era: «Ahora, señor, hay que recordarlo.» Con frecuencia, al recordarlo, me hace pensar en la frase de Pascal: ***Después de habérseme dado la alegría de comprender, tengo que tomarme el trabajo de aprenderlo.***

13) En la Universidad los profesores eran muy diferentes unos de otros. Nuestro «gran maestro» nos quería tanto como amaba la matemática. Durante cuatro años nos hizo exponer a nosotros mismos todas sus clases: geometría analítica, mecánica, geometría proyectiva, geometría diferencial. Permitía la crítica, una crítica afectuosa, ¡pero sin piedad! Nos enseñó el arte de presentar y demostrar las proposiciones matemáticas.

Nuestros maestros del rigor fueron dos: el de análisis y un lógico metido en las controversias de Brouwer. Los profesores de física eran dos sabios; uno tenía la precisión propia del experimentador, el otro, el entusiasmo sonriente y comunicativo de su convicción einsteniana.

14) Los maestros de «stage», muy diferentes entre sí, nos marcaron todos muy fuertemente, cada uno a su manera. Uno de ellos, un tipo jovial «bon vivant» nos mostraba los enlaces entre la matemática y la física y la manera de llevar con convicción y firmeza una clase de «quatrième» correspondiente a la edad de la pubertad. El segundo hacia la clase ataviado con una levita negra y cuello de puntas redondas. Tan limpio de espíritu como de moral y de físico, era a la vez amado y temido de sus jóvenes discípulos. Solía encontrarse con ellos en el campus del ateneo, vistiendo un «short» como un «master scout» inglés, y les ayudaba con mano firme a montar una tienda o a vadear un arroyo. El último flaqueaba un poco, pero tenía una inteligencia brillante, una bella voz atrayente y una cultura más vasta que la de un profesor de letras.

15) Si me he permitido evocar a los maestros que tuve la buena fortuna de tener, no ha sido sólo para expresar la gratitud que les debo, sino más bien para mostrar cuán diferentes eran en su humanidad. Porque más que las matemáticas que me enseñaron, el verdadero mensaje que recogí de ellos fue el de su humanidad tan diversa.

III. LOS ALUMNOS

Conocimiento de los alumnos

1) Frente a la matemática, frente al maestro, frente al entorno, frente a nuestro mundo, los alumnos son a menudo niños desamparados.

Muchachos que nos preocupan o nos alegran, nos aburren o nos consuelan, nos desesperan o nos conforman.

Sus hechos y sus gestos, sin inquietudes, sus alegrías, su desorientación, su confianza, sus problemas, todos surgen de los nuestros. Ellos no hacen, por lo general, más que expresarlos y reflejarlos ante nosotros.

Hasta tal punto son producto de nuestra sociedad y de nosotros mismos, que únicamente a ellos los tenemos como depositarios de nuestras esperanzas.

¡A nosotros nos toca consagrarles, para su bien, todo el aliento que nos quede!

2) Nuestra misión es la de hacerles adquirir, al mayor número posible, el instrumento incomparable de pensamiento y de acción que es la matemática.

Pero nuestro saber científico, por vasto y sólido que sea, será vano si no conocemos suficientemente a los alumnos, que son nuestros compañeros de trabajo.

Nuestra enseñanza no se dirige al alumno, concepto abstracto, sino a los alumnos, niños o adolescentes concretos, presentes en una clase.

Necesitamos un conocimiento plástico que se modele bien sobre cada muchacho, que nos permita entrar en relación con él, ganar su confianza, tener un intercambio humano.

Es ahí donde la pedagogía se revela como un arte en el que la intuición, como siempre, parece el único recurso. La intuición pedagógica no es, segumente, la cosa del mundo mejor repartida. Hay que contar con los errores de apreciación del profesor que, con toda su buena fe, no ve hasta qué punto juzga de la personalidad de un alumno a través de la suya propia. Proyección de la que muchas veces no es consciente. Sabe, sin embargo, que casi siempre las reacciones de un mismo alumno respecto a diferentes maestros distan mucho de ser semejantes.

La caracteriología

3) Para ayuda del profesor en sus relaciones personales con un alumno, es menester, además del conocimiento de las funciones comunes a la psico-

logía de todos los hombres, en general, el conocimiento de lo que caracteriza la psicología de un alumno considerado en particular. Bien seguro, no se trata de seguir los mil detalles de la psicología individual, sino de investigar el carácter, es decir, por definición, el conjunto de las maneras habituales de sentir, obrar y pensar de un individuo [2].

4) Desde siempre, los caracteres humanos han sido observados y descritos con arte por los moralistas, los dramaturgos y los novelistas.

Para que el conocimiento de los caracteres llegara a ser una ciencia, la caracteriología, fue preciso que tomara una forma metódica, objetiva y positiva.

La caracteriología ha dado lugar a varias corrientes de estudios:

a) Determinación de algunas propiedades suficientemente generales de las conductas humanas capaces de permitir la caracterización en su conjunto de la conducta individual.

b) Estudio de las relaciones entre los diferentes rasgos del carácter.

c) Investigación de las causas constitucionales o psicológicas que provocan las conductas individuales.

5) La escuela francesa de caracteriología de Le Senne ha escrito una serie de obras destinadas a los profesores; esta caracteriología se interesa, en efecto, por el estudio de los caracteres generales de las conductas observables directamente en la vida corriente, en particular, en una clase, lo cual permite a los profesores aprovecharse de ella para comprender y prever los comportamientos de sus alumnos.

Otras caracteriologías, que pretenden mayor profundidad, exigen exámenes más penetrantes del psicólogo y del psicoanalista.

6) En su tratado de caracteriología, R. Le Senne distingue entre carácter y personalidad. Según él, el carácter es el esqueleto permanente de las disposiciones congénitas que constituye la estructura mental de un hombre. La personalidad es la totalidad psicológica, la cual comprende, además del carácter innato, todos los elementos adquiridos en el curso de la existencia [3].

Esta distinción de un núcleo caracterial invariable en el seno de una personalidad evolutiva, muy clara en su aspecto conceptual, no puede hacerse en la práctica por los métodos usuales de análisis del carácter.

Las encuestas caracteriológicas que hemos realizado durante años, sucesivamente con los alumnos de las clases superiores del Ateneo del Centro (Morlanwelz), han revelado una variabilidad de los rasgos caracteriales. Esta variación, más sensible en el curso de la pubertad, se atenúa en los dos años superiores, sobre todo en el último. En la mayoría de los casos, presenta una evolución hacia la estabilidad.

De hecho, por una parte, los caracteres aparecen suficientemente permanentes como para que se pueda fundamentar sobre ellos una relativa fijación de las conductas previsibles, mas, por otra parte, ofrecen en la infancia y adolescencia, una plasticidad suficiente para permitir una acción educativa.

De una manera general, si bien puede decirse que el carácter condiciona las conductas, el afirmar que las determina de una manera absoluta no dejaría de ser una extrapolación gratuita.

Los factores caracteriales de estructura

7) Los trabajos de la Escuela francesa se hicieron tomando como punto de partida las investigaciones emprendidas por el psicólogo G. HEYMANS y el psiquiatra E. WIERSMA de Groeningen.

Estos dos científicos holandeses formularon un cuestionario en relación con la presencia o ausencia de múltiples aspectos caracteriales, cuestionario que sirvió de base para dos encuestas:

a) Una encuesta estadística enviada a tres mil médicos holandeses y alemanes, a los que se les pidió respuestas obtenidas por la observación de una familia, padres e hijos, sobre diferentes preguntas.

b) Otra biográfica, consistente en poner de relieve los rasgos de carácter de las biografías de ciento diez personas, de uno u otro sexo, y de diversas nacionalidades.

Los resultados pusieron de manifiesto que los múltiples rasgos de carácter no están distribuidos al azar en un individuo. Presentan entre sí ciertas afinidades, que permiten agruparlos bajo un rasgo más general o factor caracterial de estructura. Los tres factores fundamentales de estructura revelados por las encuestas son: la emotividad, la actividad y la repercusión de las representaciones.

Para los que no conozcan la cuestión, me voy a permitir recordar sus grandes líneas. Puede serviros, con espíritu crítico, para contrastar vuestro propio carácter.

8) La emotividad

Todo acontecer del que tomamos conciencia produce en nosotros una emoción más o menos fuerte. La intensidad de esta turbación en razón al objeto que produce permite tener una referencia de la mayor o menor emotividad.

Un emotivo, es, en determinadas circunstancias, más violentamente afectado que la media. Se turbará por motivos banales que no afectan a la mayoría de los hombres, y es él mismo el primero en saber que no valdría la pena preocuparse por ellos. Las reacciones exteriores del emotivo son frecuentemente muy vivas (gritos, lágrimas, explosiones de alegría, rubores, palidez, agitación). El emotivo se entusiasma o se indigna por cualquier cosa, pasa fácilmente de la alegría a la tristeza, frecuentemente tiene el sentimiento de ser desgraciado; es susceptible, fácilmente vulnerable. Obsesionado por la duda a propósito de actos irrelevantes, se siente angustiado frente a una tarea nueva. La timidez, el miedo, pueden inhibirle completamente.

Los emotivos están fuertemente ligados al medio que los rodea. Es tal su permeabilidad, y consiguiente vulnerabilidad, que lo mismo pueden encontrar en él una fuente de energía que resentirse dolorosamente.

El no emotivo, por el contrario, se mantiene en calma, sólo se turba por sucesos realmente graves; acepta con tranquilidad las cosas como son; de humor constante, es más razonable. Está más aislado de la realidad, más resguardado, más autónomo.

La emotividad se atenúa en el transcurrir de la vida, o, por lo menos, reduce sus manifestaciones. La mayoría de los adolescentes son emotivos. Es justamente su emotividad el origen de sus impulsos y de sus entusiasmos. Sin embargo, sobre todo, es la causa de que por su sensibilidad sean más vulnerables. Sin excepción, los estudiantes que han respondido a mis encuentros, incluidos los no emotivos, deseaban ver disminuida su emotividad. Seguramente hay que ver en ello el deseo de llegar a ser más dueños de sí mismos, como el adulto.

¿No es también la emotividad, cuyo papel dinámico es tan importante en la investigación, la que los hace muy sensibles a la menor perturbación, impidiéndoles concentrarse con facilidad?

9) La actividad

La actividad aparente es el comportamiento del que actúa y se agita en demasía; debe distinguirse con cuidado de la actividad en el sentido caracteriológico. Esta es la natural disposición para obrar con soltura por si mismo.

El activo vive para hacer; el inactivo obra de mal grado. No hay que confundirse: el inactivo caracterial, si es emotivo, podrá tener una actividad exterior desbordante impulsada por su emotividad; pero, a continuación de su esfuerzo, quedará abatido, incapaz de reaccionar durante largo tiempo. El activo, por el contrario, se recupera prontamente, tiene un sueño tranquilo, reparador, puede estar en vigilia sin gran fatiga: la acción no le es costosa. Siempre está ocupado, sin más obligación que su necesidad de obrar; controla el trabajo que encarga hacer a otro. Le estimulan las dificultades, toma inmediatamente decisiones que ejecuta sobre la marcha. Ver trabajar a otro le estimula a pasar a la acción.

En el inactivo, las formas más agradables de emplear su tiempo son la ensoñación, la distracción pasiva, la contemplación inmóvil del trabajo de los demás. Pasar de la decisión a la ejecución le resulta penoso. Se siente empujado a diferir lo que tiene que hacer. Se desilusiona fácilmente a la menor dificultad.

¿Será necesario decirlo? La actividad caracteriológica es una disposición preciosa, una garantía de éxito en los estudios, y, especialmente, en el estudio de las matemáticas. Los que no la posean deberán aportar un esfuerzo enorme para obtener un pobre resultado. Frecuentemente, se trata de alumnos que trabajan mucho, pero sin fruto; esos, cuyos padres, dejándose llevar por las apariencias, dicen: *¡Si supiera usted, señor, cuánto trabaja; no sale jamás!*

10) Repercusión de las representaciones

Todas nuestras representaciones y nuestras impresiones ejercen sobre nosotros dos acciones. Una inmediata, que tiene lugar mientras que las representaciones están efectivamente presentes con claridad en nuestra conciencia; es su función primaria. Otra acción diferida o secundaria que se prolonga cuando las representaciones han desaparecido ya del campo de la conciencia.

Estas dos funciones se llaman, respectivamente, la primariedad y la secundariedad. Según que un individuo se mueva, principalmente por una u otra, será primario o secundario.

El primario, ante un dato mental actualmente presente, rechaza los efectos de los datos pasados. Vive intensamente el instante presente. Es espontáneo, sin rencor, rápido y superficial. Sus alegrías, sus penas, sus cóleras, sus buenas resoluciones son todas pasajeras, exteriores y sin continuidad.

En el secundario, hay remanencia del dato mental. Realiza su acción presente en el pasado y la proyecta en el futuro. Es hombre de recuerdos y de precisiones, olvida difícilmente lo mismo las injurias que los beneficios, elabora planes y programas. Sus emociones, canalizadas al instante, son más interiores y se escalonan en el tiempo. Sus reacciones son lentas, profundas y organizadas.

La primariedad, ligada a la actividad, proporciona alumnos reactivos, brillantes, rápidos en las respuestas, dispuestos siempre para intervenir, a tomar la palabra, lo mismo para decir una tontería que para proponer una buena idea.

En matemáticas, son los primarios caracteriales los que animan las clases inferiores por la vivacidad de sus respuestas.

La secundariedad, sobre todo en ausencia de la emotividad, hace alumnos reflexivos, que se callan, se concentran y se quedan como mirando la cuestión planteada, con gesto firme. Sus conocimientos están bien organizados y guardados por una memoria fiel. Si su actividad es suficiente, saben desarrollar una idea, seguir el hilo de una demostración sin perder de vista los datos, lo que se pide, lo que se ha adquirido, lo que queda por hacer.

El primario puede tener, en momentos felices, un buen golpe de vista, pronto y seguro, pero más raramente tendrá el arte de explotar los hallazgos, en tanto que el secundario sacará buen partido de sus recuerdos con la intención de seguir adelante. Esto explica, al parecer, que al pasar de las clases inferiores a las superiores, alumnos primarios que ocupaban los primeros puestos se queden rezagados. Tanto más, por que las motivaciones pasadas, la consideración del porvenir y de la carrera, que actúan sobre los secundarios, a ellos les dejan indiferentes.

Un secundario no olvida un estímulo o una advertencia. Debemos saber que las palabras del maestro serán bien guardadas en su interior y que, por ello, es necesario ni incrementarlas ni repetirlas; en tanto que el primario precisa de pacientes repeticiones. Sin poner en ello la malicia que el profesor imagina, se desliga a veces de toda promesa, olvida los consejos, deja de lado los trabajos cuya realización puede esperar. Los estudios, sobre todo los de las matemáticas, desarrollan una secundariedad adquirida, mas sin hacer desaparecer la primariedad esencial.

Siempre recuerdo a esos alumnos, bohemios de las matemáticas, que, a pesar de todos mis esfuerzos y estímulos, jamás llegaron a gozar de un descubrimiento.

11) Los tipos fundamentales

Cada uno de los factores caracteriales: emotividad, actividad, retención, puede presentar grados de mayor o menor intensidad. Todo individuo es, en cierto grado, primario o secundario.

Si consideramos solamente los extremos, estos factores no presentarán más que dos intensidades:

Emotivo:	E	No emotivo:	nE
Activo:	A	No activo:	nA
Secundario:	S	Primario:	P

Si asociamos de todas las maneras posibles, una intensidad extrema de un factor con cada una de las intensidades de los otros dos, obtenemos ocho casos:

Emotivo, activo, secundario:	EAS
Emotivo, activo, primario:	EAP
Emotivo, no activo, secundario:	EnAS
Emotivo, no activo, primario:	EnAP
No emotivo, activo, secundario:	nEAS
No emotivo, activo, primario:	nEAP
No emotivo, no activo, secundario:	nEnAS
No emotivo, no activo, primario:	nEnAP

A cada una de estas asociaciones corresponde un tipo de carácter perfectamente definido. Tipos caracteriales que son conceptos abstractos, resultantes de una clasificación dicotómica. No hay que esperar encontrarlos realizados rigurosamente por individuos concretos. De hecho, estos pueden situarse relativamente respecto de aquéllos, que constituyen, por tanto, un sistema de referencia para representar los caracteres reales.

El sistema de tipos de HEYMANS, WIERSMA se muestra en la práctica como una referencia cómoda. Para facilitar el lenguaje, los autores han introducido denominaciones particulares. Son éstas:

Apasionado:	EAS
Colérico:	EAP
Sentimental:	EnAS
Nervioso:	EnAP
Flemático:	nEAS
Sanguíneo:	nEAP
Apático:	nEnAS
Amorfo:	nEnAP

Las fórmulas caracteriales precedentes son, pues, las definiciones de los nombres empleados. De esta suerte, estos adquieren un sentido preciso, que puede ser bastante diferente del significado confuso que las mismas palabras tienen en el uso corriente. Por ejemplo, un colérico caracterial (EAP) no es necesariamente pronto a la cólera, un sanguíneo (nEAP) no es forzosamente apoplético, no se debe confundir un apático (nEnAS) con un amorfo (nEnAP). A cada designación no se debe asociar ninguna connotación peyorativa: muchas personas complacientes y que tienen «buen carácter» son amorfos. Para evitar los malentendidos será suficiente, como aconseja Pascal, reemplazar cada palabra por su definición.

12) Para representar comodamente las componentes de la referencia psicológica constituida por los ocho tipos fundamentales, podemos recurrir a una configuración geométrica.

Sobre las tres aristas de un cubo, concurrentes en uno de sus vértices, situamos los ejes correspondientes, respectivamente, a los tres factores E, A, S. Convenimos en que el vértice origen representa el amorfo, nE nA P, y que los segundos vértices sobre los ejes E, A, S, corresponden, respectivamente, a E nAP (nervioso), nE A P (sanguíneo), nE nA S (apático). En los extremos de una misma diagonal del cubo, colocamos los carácteres antagónicos, esto es, que son opuestos en cada uno de los factores, tales como:

EAS	(apasionado)	y	nEnAP	(amorfo)
EAP	(colérico)	y	nEnAS	(apático)
nEAS	(flemático)	y	EnAP	(nervioso)
nEAP	(sanguíneo)	y	EnAS	(sentimental)

En este modelo, debido a la significación cualitativa atribuida a los factores, no hay que considerar evidentemente más que relaciones topológicas.

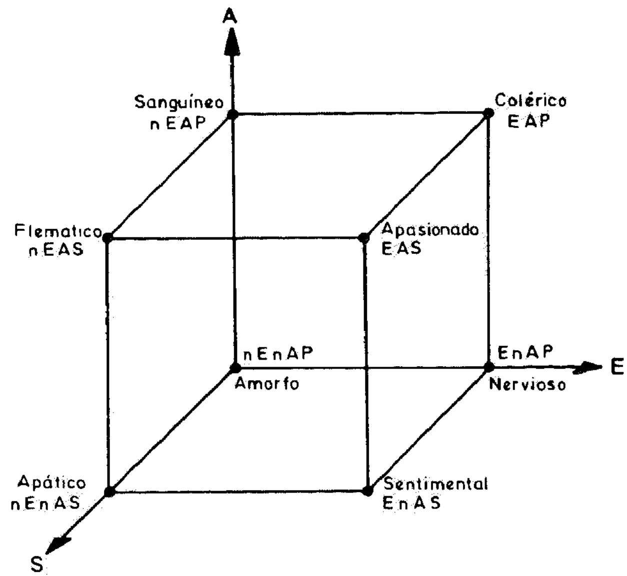

Fig. 1

Los pares de caras opuestas corresponden a las intensidades extremas de cada uno de los factores:

E y nE A y nA S y P

En cada par de vértices opuestos del cubo se representan un tipo caracterial, y su antagónico. En menor grado lo son los situados en vértices opuestos de las caras. Los tipos situados en los extremos de cada arista se dicen contiguos. Entre dos caracteres contiguos se sitúa un tipo mixto, representado por el punto medio de la arista correspondiente. Por ejemplo, un activo secundario con emotividad media será un apasionado flemático. Evidentemente, hay doce carácteres mixtos.

Un individuo concreto, cuyos factores E, A, S, presentan, en escalas cualitativas dadas, intensidades determinadas, vendrá representado por un punto del cubo. De esta suerte, puede verse cómo se sitúa respecto a los tipos de referencia.

13) El estudio de la correlación entre los rasgos del carácter, ha permitido determinar cuales son más frecuentes en cada tipo, y ha suministrado una base estadística para el diagnóstico de cada uno.

La escuela francesa de caracteriología ha establecido estos diagnósticos con mucho cuidado, de forma tal que es directamente utilizable por el profesor. Varias obras de caracteriología relativas a la educación revelan hasta qué punto son precisos los conocimientos de esta materia para comprender a los alumnos y sus problemas ([4], [5], [6] y [7]).

14) Predisposición para las matemáticas

Después de la descripción de la actividad y de la secundariedad, se comprende que son los factores caracteriales cuya posesión proporciona inteligencias con mayor inclinación natural para hacer la matemática con facilidad y éxito.

Es interesante que los profesores de matemáticas que se consideren dotados para esta ciencia, examinen con objetividad en qué medida poseen estos dos factores. Podríamos también releer, con este mismo objeto, las declaraciones hechas por los alumnos.

De hecho, los dos tipos caracteriales en que se encuentran la mayoría de los matemáticos son los apasionados y los flemáticos ([2]).

Daremos constancia de ello ([10]).

15) **Los apasionados (EAS)**

La conjunción de la emotividad y de la actividad da al carácter una tensión máxima, potencia que se prolonga en vida interior por la secundariedad.

Los apasionados acentuados poseen los tres factores con la mayor intensidad: Son carácteres fuertes. Ambiciosos, dominadores, aptos para el mando, tienen el sentido profundo de la grandeza. Entre ellos se encuentran la mayor parte de los hombres célebres que vivieron intensamente consagrados a una gran obra como fin único:

Richelieu, Napoleón, Foch;
Miguel Angel, Dante, Racine, Corneille, Molière;
Goethe, Tolstoy, Nietsche, Flaubert, Zola, Claudel;
Pascal, Descartes, Newton, Ampère, Cuvier, Pasteur.

Los apasionados acentuados son escasos. Por el contrario, los apasionados medios o reflexivos son más corrientes. Si bien no alcanzan las cotas de intensidad de los ejemplos históricos, son siempre carácteres notables, llenos de cualidades.

Desde el final de su infancia, el apasionado manifiesta ya un conjunto de rasgos: impresiones fuertes, dotes de observación, acción decidida y vigorosa, constancia, amor a la independencia y gusto por la puntualidad, ausencia de vanidad no reñida con una fuerte estimación de sí mismo, buena fe, espíritu de servicio, bondad para los débiles, amistad para los animales, amor a la familia y a la patria.

Llegado a la adolescencia, el apasionado tiene una actividad que anima su razón, y una razón rectora de sus actos elegidos libremente, guiado por el sentido de la rectitud y de la justicia.

Bien adaptado, casi siempre, a sus condiscípulos y al maestro, puede, de manera reflexiva y sin ostentación, por una causa noble, lo mismo oponerse a un grupo de alborotadores que mantenerse firme frente a la autoridad.

La rapidez y el vigor de su inteligencia, su sentido de lo concreto, su reflexión, su memoria organizada hacen de él un buen alumno, a menudo un excelente estudiante en las letras, las ciencias naturales y las matemáticas. Trabaja concienzudamente y gusta de hacerlo solo para experimentar el placer de poner en juego sus juveniles fuerzas. Le gusta la geometría que satisface su gusto por el concreto y porque le exige usar tanto de la imaginación como de la lógica.

16) **Los flemáticos (nEAS)**

La emotividad no es ya un elemento motor. La actividad sólo está animada por la secundariedad.

El flemático es apto para la reflexión. Relarivamente aislado de la realidad, tiende al pensamiento abstracto. Es, por inclinación natural, teórico o pensador.

En la historia, los flemáticos han dado:

— *filósofos y moralistas* Bergson, Hamelin, Hume, Kant, lucke, Condillac, Montaigne;
— *historiadores-pensadores*: Renan, Taine;
— *hombres de Estado* Turgot, Franklin, Washington;
— *matemáticos filósofos* Leibniz, d'Alembert, Condorcet, Gauss;
— *grandes naturalistas*: Darwin, Buffon.

El joven flemático muestra bastante pronto su capacidad para razonar. Su inteligencia es conceptual, metódica, a veces un poco lenta, pero segura. Su sentido del orden, su puntualidad, sus hábitos metódicos hacen del flemático el más escolar de los alumnos: regular, dócil y trabajador. Muy objetivo, desprovisto de afectación, digno de confianza, dotado del sentido del humor, y con humor constante. Lleno de paciencia y tenacidad. Gusta de los sistemas abstractos, de los principios de las reglas y de las leyes. Coge las matemáticas con verdadero placer. Su sentido moral es elevado, su civismo profundo. Si bien la docilidad del flemático sea para los profesores un buen motivo de satisfacción, conviene, no obstante, que no se olviden de cultivar su débil emotividad a fin de evitar que se atasque en las tareas escolares.

17) **La oposición a la matemática**

Los caracteres más naturalmente cerrados, si no hostiles, a la matemática son: en general, los amorfos (nE, nA,P) y los nerviosos (E,nA,P), carentes a la vez de actividad y de secundariedad. Los coléricos (E,A,P) y los sentimentales (E,nA,S) suelen mostrar poco gusto natural, porque su emotividad no está servida por la primariedad, en los coléricos, y por la falta de actividad en los segundos.

Por último, entre los sanguíneos (nE,A,P) y los apáticos (nE,nA,S), cuya emotividad es débil, se encuentran algunos alumnos que manifiestan cierta disposición para las matemáticas, sobre todo en las

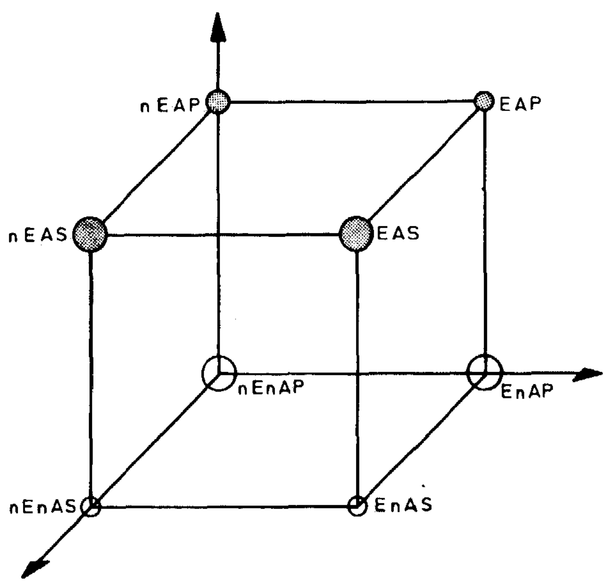

Fig. 2

clases inferiores. Pero en las siguientes, la falta de secundariedad en los sanguíneos, y de actividad en los apáticos, no les permite mantener las promesas de los primeros años.

Hemos señalado en la figura las disposiciones caracteriales para las matemáticas por discos colocados en los vértices del cubo de referencia, estos discos (grandes o pequeños) indican, respectivamente, una mayor o menor disposición

La figura 2 muestra claramente cómo juega la oposición de los caracteres antagónicos.

18) Capacidad para aprender la matemática

La caracteriología confirma la existencia de tipos más capaces para la matemática y acredita así la existencia de la disposición congénita.

No se puede concluir por ello que la capacidad de aprenderla le sea negada a los que no la posean. Nuestro sistema de enseñanza dedica, en general, el mismo tiempo a todos para adquirir el mismo volumen de conocimientos. Si un alumno se descuelga y fracasa, repite el curso con el mismo programa, y al mismo ritmo, práctica que no favorece y humilla a los alumnos más lentos. ¿Son, sin embargo, menos reflexivos y menos inteligentes? Recuerdo, a este propósito, al más lógico de mis maestros. Era incapaz de responder inmediatamente a una objeción. La anotaba cuidadosamente y, al día siguiente, nos traía una respuesta escrita, definitiva.

Un psicólogo y educador americano, John Carrol, sugirió, hace algunos años, la idea de no admitir que la falta de habilidad matemática, o su debilidad, impidan a muchos estudiantes aprenderla con igual profundidad que aquellos mejor dotados en los comienzos.

Adelantó la hipótesis de que todos, o por lo menos casi todos, pueden ser llevados al mismo grado de conocimientos en cualquier rama, pero que la cantidad de instrucción necesaria para que un estudiante alcance un nivel señalado deberá variar de un estudiante a otro.

Con este objeto, la School Mathematics Study Group, organizó una experiencia que confirmó la hipótesis ([8], p. 105).

Se formaron dos grupos de estudiantes, uno experimental y otro de control, de séptimo año (12-13 años), y otros dos del noveno (14-15 años).

Los dos grupos experimentales tenían una habilidad por debajo de la media (del 25° al 50° percentil), mientras que los de control la tenían por encima (50°, 75° percentil). En ambos casos el grupo experimental y el de control tuvieron el mismo programa de matemática y utilizaron el mismo libro. La única diferencia fue que los grupos experimentales dispusieron de dos años para estudiar la misma materia que lo grupos de control cubrieron en un año en la forma habitual, comenzando estos últimos un año después que los grupos experimentales.

Al final de la experiencia, los resultados de los tests realizados mostraron que, en séptimo año, los estudiantes del grupo experimental respondían casi, pero no totalmente, tan bien como los estudiantes del grupo de control. Pero, además, se comprobó que los estudiantes del grupo experimental habían aprendido mucho más en dos años de lo que habrían logrado en un año ordinario.—

En la batería final de tests, los estudiantes del grupo experimental del noveno año tuvieron mejores calificaciones que los del grupo de control.

La experiencia revela, por tanto, cómo es posible que un alumno flojo alcance un buen nivel, siempre que se le permita consagrar, para un programa previsto para un año, los dos que él necesita. Este sistema de dos años de estudio en lugar de uno, es más eficaz que el sistema de repetición del curso, que humilla al alumno al obligarle a recomenzar, al mismo ritmo, todas las materias.

IV. LOS PROFESORES

El compromiso con el alumno

1) Enseñar la matemática no es presentarla a un auditorio en lecciones, por magistrales que sean.

Enseñar la matemática es comprometerse con los alumnos en su aprendizaje, guiándoles y estimulándoles en las mejores condiciones posibles.

2) Se sabe que las condiciones materiales: programas, horarios, número de alumnos en la clase, material didáctico, locales... con frecuencia no son los ideales, y, hasta en ocasiones ¡están muy lejos de serlo!

¿Qué hacer?, ¿cruzarse de brazos?, ¿elaborar un repertorio de críticas y de quejas, desde luego fundadas, para transferir a otro la responsabilidad de una situación desfavorable desde el principio?

A pesar de todo, ¿no será mejor hacerla frente, pensando en el porvenir de los alumnos? Ellos, como nosotros, padecen igualmente la situación presente. ¿Tendrán que vivir una vida hipotecada ya por su causa?

3) Cualesquiera que sean las medidas adoptadas fuera de la escuela para ponerla a la altura de sus responsabilidades, quedará siempre para cada uno de nosotros, en nuestra clase, la obligación de cumplir el compromiso contraído con nuestros alumnos, mucho más todavía que con la sociedad.

Dicho compromiso nos obliga a tomarlos de la mano en el lugar en que se encuentren, y, con humanidad, esforzarnos en caminar juntos, como puedan, lo más lejos posible, por la vía de su formación de hombre.

Rendimiento del profesor

4. Cómo apreciar nuestro rendimiento como profesor de matemática. Esta evaluación no es nada fácil ([8]).

¿Es suficiente observar a un profesor en acción, desde el fondo de la clase? Este juicio fragmentario podrá ser muy diferente si se hace por un director, un inspector o un colega.

Además, la presencia de un observador extraño es un elemento de perturbación en el comportamiento de los alumnos y en el del profesor.

Sin embargo, la eficacia de un profesor es una cuestión capital, pues en ella reposan, o deberían reposar muchas de las decisiones referentes a su formación, empleo, promoción y «recyclaje», sin hablar de la puesta a punto de los programas, de la utilización de los manuales, etc....

5) Debido a la importancia del problema, la la School Mathematics Study Group, uno de los equipos que en Estados Unidos ha desplegado más

medios para la modernización de la enseñanza, llevó a cabo desde 1962 una vasta encuesta durante cinco años ([8]).

Puesto que los juicios sobre la eficacia de un profesor hay que tomarlos con cautela, se decidió medir esta eficacia únicamente a través de las adquisiciones demostradas por los alumnos, y apreciarlas sólo sobre dos puntos: la capacidad para el cálculo y la comprensión de conceptos matemáticos.

Estos elementos —hay que decirlo— aún siendo fundamentales, no constituyen más que una pequeña parte de los objetivos de una enseñanza de la matemática.

6) Las comparaciones se llevaron de acuerdo con todas las reglas del «testing» a la americana.

¡Sus resultados fueron decepcionantes!

En cada caso, hubo diferencias significativas y, en la mayor parte de ellas, fuertes variaciones en la eficacia de los profesores. Sobre cada uno de ellos se había recogido previamente una gran cantidad de información, proveniente de dos fuentes. La primera, formada por datos reales; edad, sexo, experiencia en la enseñanza, formación superior al mínimo requerido para la función docente, «recyclaje» reciente, etc.

La segunda, que no tenía en cuenta el rendimiento de los alumnos, recogía informaciones sobre la personalidad del profesor y sus actitudes frente a la enseñanza de *la matemática y a los alumnos*. Esta última información, se obtuvo como resultado de las preguntas dadas por el profesor a extensos cuestionarios.

El análisis de la regresión mostró, que, en todos los casos, esta amplia información relativa a los profesores, intervenía muy debilmente en la varianza, menos del 10 por 100 en la mayoría, con relación a la eficacia de un profesor.

7) Hay que hacer constar que los resultados decepcionantes de esta amplia encuesta, obtenidos con la ayuda de medios considerables, sólo se referían a la habilidad de los alumnos en el cálculo y a la comprensión de conceptos matemáticos.

Ahora bien, los objetivos de la enseñanza son mucho más vastos, pues abarcan toda la formación en los conocimientos y en los métodos de la matemática propiamente dicha, y también en las capacidades de aplicación de los modelos matemáticos al mundo real. Además, por encima de los objetivos precedentes que le son específicos, la matemática participa de manera importante en los objetivos generales de la educación, esto es, concernientes a la formación intelectual, estética y moral de la juventud.

De todos estos numerosos y variados objetivos, únicamente los más primarios pueden ser objeto de una prueba de control: exámenes o tests. Los demás objetivos, más complejos y más elevados, no se dejan captar con una vara de medir tan rudimentaria. Su evaluación, esencialmente cualitativa, requiere un plazo más largo.

Los buenos jueces

8) ¿Quién puede ser buen juez del rendimiento y de la calidad de una enseñanza? En primer lugar, el propio profesor, supuesto que tenga, en su trabajo, suficiente espíritu crítico, sentido común, exigencia y conciencia para no engañarse a sí mismo.

9) Los mejores jueces son siempre nuestros alumnos: siempre bajo su mirada inquisitiva, tanto en nuestros días buenos como en los malos, saben descubrir, con su intuición de niño, a veces implacable, al hombre —o a la mujer— que realmente somos. En lo que a mí concierne —«el yo detestable»— cuando era profesor de las clases de «scientifique», con un horario de siete, ocho y hasta diez horas de clase por semana, para hacer honor a un programa torrencial de preparación para las «Grandes Ecoles» me preguntaba por el mote que me habrían otrorgado mis discípulos. Supe que no tenía ninguno, pero que según los días y el clima de la clase, era designado por tres apelaciones diferentes y significativas. Al terminar algunas clases era, un tanto secamente «Servais». En mejores ocasiones se me llamaba «Willy». Y, después, llegué a ser «el padre», con todo el afecto y sentido psicoanalítico que puede tener este nombre en la cabeza de un adolescente. He procurado siempre, lo mejor que he podido, ser las más de las veces «el padre».

El juicio sobre nosotros mismos y sobre nuestra acción educativa se precisará y se fijará en el espíritu de nuestros alumnos cuando, en su día, lleguen a ser adultos. Entonces su apreciación será definitiva, como lo son ahora nuestras opiniones sobre los que fueron nuestros maestros.

Testigos del hombre

10) Enseñar es un oficio difícil, tal vez despiadado, pues no podemos dar a nuestros alumnos lo que nosotros no somos.

Lo mejor de nuestra enseñanza es, en fin de cuentas, la humanidad que haya en nosotros.

Si no proponemos nada humano, nuestro papel es irrisorio.

Pero mejor escuchad: ([1] p. 50).

A.—*Por ejemplo el señor x..., para mí no es el señor x..., es un libro. Me gustaría conocerlo mejor, fuera de la clase, de su trozo de tiza y de su bata blanca...*

N.—*¿Y quién te lo impide?*

A.—*Pues bien, es que tiene que ser así el hecho de que le considere como un libro, creo yo, es que ha llegado a ser sólo eso. He borrado la personalidad que pudiera haber detrás del libro. Para mí es un libro ambulante, y nada más.*

11) Para enseñar la matemática es menester ciertamente conocerla bien. Pero esta condición necesaria está lejos de ser suficiente, cuando se quiere aportar a la enseñanza la humanidad, sin la cual, sólo se puede hecer un trabajo seco, esterilizante e improductivo.

Sentido de adaptación

12) Sobre el plano del contenido mismo de la enseñanza, es necesario ser bastante psicólogo para adaptar lo que se hace a las capacidades reales de los alumnos. Veamos lo que dicen las instrucciones pedagógicas belgas: ([9]).

El profesor tiene, y deberá sacar partido de ella, libertad para organizar las materias en el orden que mejor se preste a la adquisición conceptual y práctica de las nociones matemáticas.

Cuidará de mostrar, mediante aplicaciones bien elegidas, el interés y el alcance de la teoría. En lo que a ésta se refiere, aunque las posibilidades de abstracción de los alumnos sean mayores que en los años precedentes, el profesor matizará sus exigencias *en cuanto al conocimiento de las demostraciones. Algunas pueden ser encontradas por los alumnos; otras, más sútiles, aún siendo comprensibles, no deben ser memorizadas, y otros desarrollos teóricos, que el profesor desearía presentar para tranquilizar sus escrúpulos matemáticos, serán reemplazados con mayor utilidad por trabajos en que la actividad de los alumnos lleve la mejor parte.*

Tales precauciones psicológicas han sido tomadas para evitar que determinados profesores, por narcisismo, cometan en sus clases «el pecado teórico» al perder de vista que la matemática es, en primer lugar, un saber-hacer, que sólo se adquiere por compromiso personal.

La formación psicológica

13) Es indispensable que los profesores, en particular los responsables de la matemática, tengan una formación psicológica adaptada a su función y a su responsabilidad.

En primer lugar, pondríamos unas nociones suficientes de psicología general, pero, sobre todo, de psicología diferencial. La primera permite comprender el desarrollo genético de los adolescentes, desde el punto de vista afectivo, intelectual y moral, en tanto que la segunda proporciona conocimientos caracteriales necesarios para el acercamiento y la comprensión humana de los seres en su propia individualidad.

La caracteriología

14) ¿Será necesario resaltar el interés del estudio del carácter en el ejercicio cotidiano de la enseñanza?

En primer lugar, importa que el profesor conozca su propio carácter. Esto le permitirá precisar la parte de subjetividad psicológica que se manifiesta en todos los juicios emitidos sobre los alumnos y sobre las materias enseñadas.

Basta asistir a una junta de evaluación para poder observar hasta qué punto las apreciaciones relativas a un mismo alumno varían de un profesor a otro. Es verdad que las disciplinas enseñadas pueden revevelar aspectos diferentes, pero hay que contar la parte importante que, en toda apreciación, juega la proyección del carácter del profesor sobre el alumno.

Imaginad una profesora de francés, colérica, uno de matemáticas, flemático, y otro de música, nervioso. Veamos cómo juzgan del mismo alumno.

— *Alumno inteligente, concienzudo, pero más bien aniñado, infantil en sus comentarios de texto, por falta de temperamento.*

— *Alumno muy dotado para la matemática, con un espíritu lógico superior a su edad, muy abierto a la abstracción. De natural dulce, apenas le gusta ser jefe del equipo.*

— *Alumno vulgar, incoloro, que no lleva nada dentro.*

Estos tres juicios de los profesores podría explicarlos quien conociera el perfil completo del alumno en cuestión (2) pues vería de hecho la parte con que cada uno de ellos supervalora en el carácter del muchacho, los rasgos que son coincidentes con el suyo personal y rechaza los otros.

(2) Perfil que comprende, además de los tres factores fundamentales E, A, S, seis factores complementarios: amplitud del campo de la consciencia, pasión intelectual, polaridad ternura, interés sensorial, avidez (10).

15) En el conjunto de los profesores de matemáticas predominan naturalmente, desde el punto de vista caracteriológico, los apasionados y los flemáticos; hay algunos sanguíneos y otros pocos coléricos y apáticos, profesores que están en oposición con los alumnos nerviosos, amorfos o sentimentales. Este hecho explica buen número de las tensiones en las clases. Tanto más, porque la mayoría de los profesores fueron buenos alumnos en matemáticas, y, por ello, no están en la mejor disposición para comprender sin esfuerzo a aquellos alumnos que no tienen las mismas disposiciones naturales.

Adaptación de las conductas

16) El profesor debe conocerse y conocer individualmente al alumno, con objeto de adaptarse mejor a él en busca de un mejor rendimiento. Una observación, un estímulo, como se sabe, no deben ser los mismos para todos los alumnos.

Un sentimental y un flemático son sensibles a una amonestación o a un estímulo de orden moral, que, debido a su secundariedad, meditarán largamente.

Un colérico preferirá ser alentado por una observación más viva.

Un nervioso necesita ser estimulado constantemente; podrá endurecerse bajo una avalancha de reproches; si llega a estar contento y seguro de sí mismo, puede llegar al enfrentamiento revistiéndose de un cierto prestigio a los ojos de toda la clase. En las mismas circunstancias, el amorfo permanecerá impasible y sonreirá dulcemente. A éste habrá que hablarle de notas y de resultados.

Adaptación en los grupos

17) La misma diversidad que en el comportamiento individual se revela en la senseñanza colectiva.

Los flemáticos y los sentimentales, lo mismo que los apáticos, trabajan y juegan aislados.

Los coléricos y los amorfos gustan de los equipos, los primeros para ser sus guías, los segundos para compararse en una corriente que los lleve.

Los apasionados pueden, según las ocasiones, ser solitarios o dominadores.

Los sanguíneos, buenos oportunitas, secarán partido de todos.

Adaptación de las pruebas

18) Según su naturaleza, nuestros métodos de apreciación favorecen a uno o a otro tipo.

Los flemáticos y los amorfos tienen la paciencia necesaria para los exámenes escritos, en tanto que los apasionados tienen que refrenarse y los nerviosos habrán de ser llamados al orden.

Los coléricos y los sanguíneos destacarán por su soltura en los exámenes orales, exámenes que para los sentimentales constituyen sesiones de tortura.

Los tests, deconcertantes para algunos flemáticos por su novedad, constituirán para los nerviosos un juego original al que podrán aplicarse por poco tiempo. Se comprende, pues, que, independientemente de las aptitudes, los tests, las pruebas escritas, los exámenes orales, no pueden dar resultados concordantes.

Pronósticos caracteriales

19) Los tests de aptitudes intelectuales, en la medida en que detectan la mera inteligencia, no

pueden suministrar más que pronósticos aventurados. puesto que, en el trabajo intelectual, se trata siempre de la inteligencia vinculada a un carácter y subordinada a él. En esta perspectiva, P. GRIEGER ha descubierto correlacciones significativas entre la inteligencia y el carácter [6].

La caracteriología permite, quizá, un pronóstico más seguro, por cuanto está basado sobre maneras de *sentir, de obrar* y *de reflexionar*, actitudes que están profundamente enraizadas en el individuo.

20) El Psicoanálisis

Más profunda que la descripción caracteriológica de las maneras habituales de comportarse un individuo es la explicación psicoanalítica de este comportamiento.

En este campo, el profesor debe tener también una información adecuada que le explique las raíces subconscientes de actitudes, a veces extrañas, de bastantes alumnos.

En las ciencias positivas, sobre todo en las matemáticas, una forma de higiene racional consiste en dejar de lado, conscientemente, los aspectos psicológicos y afectivos. Pero tal actitud excluyente, de gran comodidad metodológica aparente, no elimina los elementos perturbadores: los relega en las profundidades del subconsciente.

Principalmente en matemáticas, como lo señala J. NIMIER [1], no puede dejarse de prestar atención a estos aspectos, si se quiere descubrir algunas de las razones de los fracasos, los rechazos y los odios.

Por la naturaleza apremienta e impersonal de la matemática, algunos individuos la ven como una disciplina alienante y dominadora, que alimenta en ellos los fantasmas de lo imaginario.

21) Los profesores de matemáticas, que, como los alumnos bien dotados, han regulado bastante pronto los problemas subconscientes, creen con frecuencia que su disciplina se sitúa enteramente al nivel de la consciencia, a la luz de la razón.

Sin embargo, meras cuestiones de vocabulario, generan ya impulsos subconscientes.

Algún profesor se siente relajado cuando habla de «factorizar un polinomio». Y lo prefiere a «descomponor en factores». La descomposición tiene en él una reminiscencia macabra.

¡Qué decir de la voracidad de los elementos absorbentes, que provoca este sentimiento en los alumnos!

Término tan apacible como el de elemento neutro de una operación, ¿no conlleva en la acción del verbo neutralizar una connotación homicida parecida a liquidar?

En la resolución de ecuaciones, se puede observar la agresividad con que los alumnos tachan un término en uno de sus miembros neutralizándolo por la adición del opuesto en ambos miembros de la ecuación. Igualmente neutralizan un factor, no nulo, multiplicando ambos miembros por el inverso de este factor. (No es infrecuente todavía oír; términos opuestos se «destruyen» N. del T.).

Al hacerlo así, esta neutralización es más negativa y menos mecánica que el pasar un término de un miembro a otro con cambio de signo.

Es conveniente que los profesores de matemáticas estén advertidos de los juegos subterráneos del subconsciente, pero la cuestión no es hacerlos psicoanalistas aficionados, lo que equivaldría a transformarlos en «aprendices de brujo».

22) De igual manera que los elementos de psicología diferencial, de las técnicas de grupo, no se enfocan para convertirlos en psicólogos de vía estrecha.

Lo que sí es conveniente es proporcionarles informaciones prácticas, utilizables en su oficio.

Lo que importa realmente es que los útiles psicológicos que se pongan a su disposición-de los cuales algunos son potentes instrumentos de condicionamiento y manipulación— usados con pureza y generosidad, puedan servir para bien de la juventud, sin olvidar el respeto a las personalidades en devenir a su cargo.

23) Psicología de la inteligencia

En este vasto campo, lo más importante para el profesor de matemáticas es la parte más relacionada con su disciplina.

La obra de PIAGET, de BRUNER y otros aporta elementos útiles ([11], [12], [13]).

Los trabajos hechos a partir de la matemática, en heurística por G. GLAESER ([14] y en lenguaje matemático por J. ADDA ([15]), son directamente utilizables.

Y también, las investigaciones sobre el problema de reeducación en matemáticas realizado por F. JAULIN-MAMONI ([16]) han puesto de relieve toda la importancia del inconsciente lógico-cognoscitivo. Explican cómo se borra el proceso que el sujeto ha seguido para llegar a la comprensión de una estructura, cuando ésta ha sido ya instaurada. Por eso, el profesor que ha comprendido una noción olvida el camino recorrido. Y este olvido es la causa de que no sepa cómo el niño puede acceder a comprenderla.

V. EDUCACION MATEMATICA ABIERTA

1) Todo lo que acabamos de ver debe convencernos de una verdad evidente: la enseñanza de la matemática tiene mucho que ganar si se hace más humana.

2) La enseñanza, sea tradicional o moderna, sufre la misma indigencia: se reduce a proponer una matemática descarnada, encerrada en sí misma.

Sus programas son puramente internos, que hay que dar completos ignorando casi siempre a los niños.

El profesor se ve obligado así a condicionarlos lo más deprrisa posible sin tener en cuenta su afectividad y su desarrollo personal.

¿Cómo mejorar semejante situación, que no puede satisfacernos?

3) El cambio no vendrá por nuevas reformas. Sólo puede venir de los profesores, de nuestra propia naturaleza de hombres y mujeres que somos.

Debemos ante todo, contar con todos y cada uno de nosotros.

Nuestro único y generoso querer puede hacer la revolución.

Ante nosotros tenemos las grandes líneas de progreso. Las veis en vosotros mismos, en todo lo que podéis hacer y cambiar en vuestra acción de cada día.

Indicaré algunas. Vuestra reflexión os revelará otras.

Tener un buen contacto psicológico adaptado a cada alumno

4) La matemática hecha es un edificio lógico. El aprendizaje de la matemática y su enseñanza son, en primer lugar, cuestión de psicología.

El profesor, como adulto, debe ser consciente de su carácter y del de sus alumnos.

Debe superar las oposiciones caracteriales, sin dejarse seducir por concordancias agradables y no comportarse como un adolescente atrasado en medio de jóvenes púberes en crecimiento.

5) Su madurez debe permitirle darse cuanta de las reacciones afectivas de sus alumnos, de sus precipitaciones, de sus temores y de sus rechazos. Debe acoger y respetar las personalidades en formación de sus alumnos. Sin llegar a ser un protector, debe saber darles la seguridad que pueda ayudarles a alcanzar, en lo posible, las más altas cotas.

Debe poner el mayor afecto para hacerles compartir la matemática como un bien ofrecido a todos los jóvenes. Sabiendo que el amor a la matemática radica en la alegría de hacerla, que no es posible imponerla por la fuerza, pondrá todo el cuidado que pueda para presentir los bloqueos afectivos e intentar desvelarlos.

6) Pero —me diréis— no hay que ser ingenuos e idealizar demasiado la realidad de nuestros alumnos, entre los cuales los hay que desbordan todos los límites.

Es cierto, los tiempos han cambiado y los alumnos también. Los profesores, como la matemática, están en tela de juicio.

Los adolescentes rebeldes, los que protestan por todo, y aún sin motivo, desesperadamente hasta el absurdo, ¿no son en su mayoría alumnos faltos de cariño?

¿No es demasiado rudimentario y demasiado brutal afrontarlos con una represión coactiva cuando muchos lo que están pidiendo y deseando es que se les escuche acogedoramente, de forma abierta, sin crítica, sin idea de recuperación para el sistema?

¿Tan maltratados han sido ya por la vida que han llegado a franquear para siempre esas rejas sin retorno que hacen imposible todo diálogo y todo entendimiento en el futuro?

Debemos escuchar para comprender y correr el riesgo de pecar, en ocasiones, de cándidos, para no ser, con toda seguridad, inhumanos.

La comprensión asegura el aprendizaje

7) Es necesario que la matemática sea para cada alumno una construcción personal vivida.

La matemática no es como otras ciencias un conjunto de conocimientos exteriores organizados; es un sistema de pensamiento coherente que se construye en sí.

Hay necesidad, por tanto, de distinguir bien entre actividad matemática exterior y comprensión.

Escuchad este vehemente testimonio ([1], p. 31).

—Yo estudiaba mis matemáticas porque había que estudiarlas. No las entendía; tampoco trataba de hacerlo; simplemente las estudiaba. Bueno, pues bien, Tenía buenas notas. Aprendía mis lecciones, hacía mis deberes, obtenía buenos resultados y esto bastaba. Pero, al final, no entiendo nada.

Eso es lo que no admito. No admito que otros alumnos puedan hacer lo mismo que yo hago, es decir, que hagan cosas sin tener idea de lo que se hace.

Hacía eso porque era lo que hacía habitualmente.

Se hacían enormidad de ejercicios, y a esto se reducía todo, pero no entendía nada. Y me rebelo contra eso.

8) La enseñanza que sustituye la comprensión real, profunda, por reflejos rutinarios obtenidos por condicionamiento, es considerada por R. SKEMP ([16], p. 117) como una injuria a la inteligencia.

— El hecho de intentar la comprensión de algo implica la acomodación de nuestros esquemas. Cuando en cierta medida la comunicación recibida no es inteligible, el receptor intenta acomodar sus esquemas para poder asimilar algo para él desprovisto de sentido. Hacer esto equivaldría a la destrucción de los propios esquemas, es decir, el equivalente mental de una injuria corporal.

Visto de esta manera, se comienza a comprender por qué ciertos estudiantes experimentan, no una falta de entusiasmo por la matemática, sino una auténtica repulsión. Lo más significativo, en estas circunstancias, es que tienen toda la razón para obrar de esta forma, toda vez que una de sus más elevadas facultades, su inteligencia en desarrollo, está expuesta a una influencia perniciosa.

Hay alumnos que se acomodan perfectamente al hecho de no entender en profundidad lo que hacen en matemáticas. Para ellos es más fácil, y más económico, atenerse a la aplicación mecánica de las reglas.

Durante cierto tiempo pueden dar el pego al profesor, hasta que éste no arañe bajo el barníz de las palabras. Sin embargo, cuando las materias se complican, la memoria y la ciega reproducción ya no bastan. Es entonces cuando se descubren las incomprensiones reales, y tan extensas que hacen ya imposible recuperar los fallos.

10) La matemática hay que comprenderla en profundidad.

No puede uno contentarse con escuchar atentamente lo que dice, ni simplemente con aprender lo que está ya hecho, es imprescindible saber por qué se dice así y se hace de esta manera.

Esto es lo que dice un alumno ([1], p. 128):

—Era igual. La segunda vez tampoco se le entendía, pero tampoco él se daba cuenta de ello. Decía pués es fácil, y ¡hay que saberlo!

— Puede ser que uno trate de profundizar en una cuestión en la que se dice que es como es, y que no hay lugar para intentar entenderla no es más que un símbolo. Pero, de todas formas, uno quería saber algo más. Uno quiere saber el porqué de su introducción. ¿Por qué es necesario decir eso? ¡Porque se nos dice! ¡Pues quizá no sea verdad!

—¿Cómo se puede demostrar? A esto, siempre nos respondía: Pues es así, porque sí, y hay que aceptarlo como és. Esto entonces nos bastaba, pero ahora ya no. ¿Por qué tiene que ser así? ¿por qué es así? Eso me fastidia... No poder buscar el origen de las cosas, no se puede. Es decir, en clase, se podría quizá profundizar, buscar la verdad, ¡pero habría que remontarse demasiado lejos! Pero te dicen: esta es la fórmula, hay que aceptarla... ¡nada se nos dice de dónde ha salido la tal fórmula!

El ejemplo del comportamiento de este profesor, ¿es raro? ¿es excepcional?

¿No comprende lo que hay que comprender? ¿Habrá llegado a un nivel en el que no se recuerda ya el camino que se ha tenido que recorrer?

¿Podría la clase ofrecer ocasión de mostrar la necesidad de que no se puede remontar indefinidamente y que es preciso admitir algunos axiomas como puntos de partida?

11) ¡Nadie piensa que los alumnos, al reconstruir la matemática, vayan a rehacer por si mismos el trabajo de dos mil años!

Pero los profesores, bien pertrechados con las armas aportadas por las modernas ideas clarificadoras, pueden guiarles en la comprensión de la matemática «por dentro».

12) Desde este punto de vista, los cursos, tradicionales o nuevos, contienen demasiadas definiciones y demostraciones «parachutadas», esto es, presentaciones «ex-abrupto», que, seguramente correctas en su aspecto lógico, no son, al mismo tiempo, inteligibles en el contexto de una construcción matemática que no da ninguna razón para hacerla comprensible.

Bastaría recordar la antigua presentación de los logaritmos con la ayuda de las progresiones aritméticas y geométricas, sorprendentemente introducidas. Todo allí era misterio y magia. ¡Qué decir de la nueva

$$\int_1^x \frac{K}{t}\, dt \text{ caída del cielo!}$$

Y sin embargo, es posible llegar a esta integral buscando un isomorfismo entre los grupos $(R_0^+,\cdot)$ y $(R,+)$.

Nosotros hemos mostrado cómo, en el seno de la teoría matemática elemental, pueden tratarse de una forma natural estas y otras nociones ([18]).

Querríamos considerar aquí sólo un ejemplo, el de los casos de isometría de los triángulos.

Los famosos «casos de igualdad» han sido tan desprestigiados, tan ridiculizados, que muchos programas no se atreven ya ni siquiera a mencionar.

Pues bien, en las isomrtrías del plano, tienen una profunda significación.

Se sabe, en efecto, que una isometría está determinada cuando se dan los vértices de un triángulo y sus respectivas imágenes, y que, por otra parte, cualquier triángulo no es isométrico a otro cualquiera.

Es, pues, perfectamente natural preguntarse en qué condiciones un triángulo es isométrico con otro. Los casos de isometría responden a la cuestión con la ayuda de los invariantes fundamentales: longitudes y ángulos.

Los casos de semejanza corresponden a una cuestión análoga respecto al grupo de las semejanzas del plano [19] II y III.

En las afinidades del plano, dos triángulos cualesquiera son equivalentes, y la cuestión no tiene interés.

En todas las situaciones en que intervenga un caso de isometría o de semejanza de triángulos, éste puede eludirse mediante la construcción, con la ayuda de traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias, de la transformación que sea necesaria. Es un agradable juego de composición. Pero los físicos no tienen ni tiempo ni gusto para dedicárselo a él, y es por esta razón, quizá, por la cual emplean el útil sencillo y cómo que les ofrecen los «casos» y, por tanto, la necesidad de preparárselos.

Sacar partido favorable del error

13) Aprendemos, sobre todo, por nuestros errores: nos obligan a reflexionar.

¡Somos tan indulgentes en lo tocante a nuestros errores, cualquiera que sea su precio!

¿Por qué no serlo también respecto a los errores de nuestros alumnos? Si lo hiciéramos, frecuentemente sabríamos disculpar a los más vulnerables y más escrupulosos.

Hay una pedagogía, bien intencionada, que pretende obtener siempre una respuesta exacta y segura del alumno a toda pregunta que se le haga. El error es acechado, para ser denunciado, borrado, extirpado, lo más rápidamente posible, como una falta impura.

Sucede que este culto por la buena respuesta conduce a un condicionamiento que es un verdadero adiestramiento. En matemática, no es suficiente disponer, bajo un estímulo, de una respuesta exacta; es necesario también comprender la razón de la respuesta que se da.

14) Hasta que un alumno no nos ponga en guardia por una respuesta equivocada, sólo tenemos la presunción de que su comprensión es la correcta.

Respuestas o afirmaciones inexactas pueden provenir simplemente de que el alumno dice cualquier cosa, lo primero que le ha pasado por la cabeza; pero puede suceder también que tales afirmaciones se deban a que el alumno tiene una forma de comprensión, un marco de pensamiento, diferentes de los nuestros. En este caso, captar el porqué de lo que ha dicho es comprender cómo ha pensado.

15) Desde muy pronto, me he servido de los errores de los alumnos para llegar a un mejor conocimiento de ellos y de mí mismo.

He aquí algunos ejemplos:

1.º) En una discusión, un alumno dijo, plenamente convencido y con toda tranquilidad: *cero no es un número*.

Ante esto, uno se puede quedar estupefacto, alzarse de hombros, considerar su afirmación como una burrada, reprochársela y sancionarle con una mala nota.

Es más útil explotar el error.

La manera de proceder en estos casos era bien conocida por mis alumnos.

—*¿Habéis oído lo que ha dicho vuestro camarada?*

Tomad una hoja de papel y escribid la pregunta ¿cero es un número? Reflexionad sobre ello, y en *los próximos días traedme escrito lo que penséis sobre esta cuestión... Si queréis, podéis anotar vuestros datos personales nombre, edad y la clase en que estáis.*

Bien sabían lo que yo quería. Les tenía dicho: *mi intención es tratar de mejorar la enseñanza matemática. Podéis ayudarme si me explicáis libremente lo que vosotros pensáis de verdad. No es un deber escrito para poner notas. Todo queda entre nosotros.*

Llegado el día, les leía las respuestas una por una ante toda la clase, sin citar los autores, aunque todos habían firmado.

¡Habíamos aprendido muchas cosas!

A propósito del cero, por ejemplo, toda una patología:

— *Desde muy pequeño se me ha dicho: Cero no es absolutamenta nada.*

— *Cuando se añade cero a un número es como si no se añadiera nada.*

— *Cuando se multiplica un número por cero, es cero.*

— *No se puede dividir por cero.*

— *Cero sobre cero no quiere decir nada.*

Después les interrogué: *¿Qué quiere decir la pregunta, cero es un número? ¿cómo se demostraría si lo es realmente o si no lo es?*

Después de discutirlo: *Calculando con él y con los otros números.*

La conclusión fue: *cero es un número, pero un número raro.*

2.°) Otro día la curiosidad me llevó a preguntarles:

— *Cuando en la clase de geometría, yo pronuncio la palabra espacio ¿De qué creéis que hablo?*

El inventario de las respuestas fue asombroso.

— *El espacio con sus estrellas y las nebulosas.*

— *El interior de la clase.*

— *Algo que uno piensa en su cabeza.*

3.°) Una vez descubierto y convenido que se trataba del espacio abstracto inventado a partir del espacio físico, estudiamos la traslación.

Nueva cuestión: *¿Se puede hacer una traslación del espacio?*

El espacio sideral, con su cortejo de nebulosas, hizo por breve tiempo su reaparición en escena.

Un alumno excelente, buen lógico, me dijo categóricamente, *Es imposible.* Le argumenté: *dada una traslación.*

1. *Si tomo un punto del espacio, ¿su imagen por la traslación es un punto del espacio?*
2. *Si tomo un punto del espacio, ¿es la imagen, por la traslación, de un punto del espacio?*

Me interrumpió inmediatamente *ya veo, me dijo, lo que Vd. quiere es meterme en los lugares geométricos.*

Le entiendo, pero no creo en ello.

En una recta, la cosa funciona, puedo hacerlo así.

Puso sus índices uno junto a otro, y los separó después manteniéndolos paralelos. *Pero si lo hago así,* añadió, haciendo deslizar sus dedos uno contra el otro, *¿Qué pasa en el infinito?*

Reanudó las operaciones con planos, valiéndose de las palmas de sus manos, primero separándolas y después deslizando una sobre la otra.

— *Pero en el espacio, no tengo sitio para separar. ¿Qué es lo que pasa en el infinito?*

Entonces le propuse:

—*¿Cómo se puede demostrar la posibilidad de hacer una traslación del espacio abstracto?*

Se quedó sin decir nada y se marchó con el ceño fruncido.

Al día siguiente sonreía: *Ya lo he entendido.*

16) Una respuesta de un alumno, una pregunta de otro, que nos dejan desconcertados, raramente son tontas.

Fue un joven alumno quien me hizo comprender que la definición del triángulo isósceles no era buena.

Cuando le pregunté: *¿un triángulo equilátero es isósceles?* la respuesta fue rotunda: *no.* —*¿Por qué?*— *Porque tiene los tres lados iguales.*

En consecuencia, adopté la definición: *un triánulo isósceles es un triángulo que tiene, por lo menos, dos lados iguales* —como se decía ya en aquel tiempo.

Desde entonces me gusta la definición: *Un triángulo es isósceles si, por lo menos, tiene un eje de simetría.*

Habría mucho que decir sobre nuestra manera de expresarnos, a pesar de que nuestros alumnos nos entienden.

Construir un triángulo, conociendo los tres lados, ¡pero entonces el triángulo ya está dado!

Dosificación equilibrada de la matemática

17) La matemática, gracias a los puntos de vista modernos, puede ser presentada de una manera unificada y clara.

No es necesario perderse en mil detalles para introducir y utilizar las ideas claves concernientes a los métodos y a las estructuras.

Cada alumno, en la medida de toda su capacidad de asimilación, debe recibir un alimento matemático sopesado. Es el mejor método para que cada uno encuentre así lo que le agrade y mejor convenga a su tipo de inteligencia.

A veces, bien por seguir las instrucciones o por sus propios gustos personales, hay profesores que dan una materia demasiado algebráica, demasiado geométrica o demasiado numérica; excesivamente lógica o intuitiva en demasía.

Al perder de vista la unidad fundamental de la matemática, se llegará a romper, a causa de una presentación unilateral, la simbiosis entre el álgebra y la geometría, bien por hacer de ésta un juego de imágenes o bien por presentarla exclusivamente bajo el aspecto vectorial o analítico.

Pueden así instalarse carencias, con las consiguientes lagunas, orígenes de repulsiones y hastíos.

A los alumnos no se le debe enseñar solamente a reproducir y buscar demostraciones de los teoremas, a enseñarles definiciones y a resolver problemas totalmente elaborados.

Para que tengan un papel más creador, es importante que aprendan también a encontrar los enunciados de las proposiciones, a expresar las definiciones, a descubrir y formular problemas. El profesor marchará con sus alumnos por el camino de la exploración matemática, para que aprendan a experimentar sobre ejemplos, a construir un contraejemplo en los casos de enunciados dudosos.

Abandonando las experiencias rectilíneas, el maestro inculcará a sus discípulos el gusto por la caminata a través de la selva de la matemática, como el cazador que sabe cobrar una pieza después de varios rodeos.

Las fuentes: manuales y obras de consulta deben ser variados, con objeto de que les permitan elegir y hacer comparaciones.

19) Cada programa debe ser apropiado y con la debida ponderación de los diversos componentes indispensables. En este punto de vista, conviene anotar que los programas de las secciones superiores, con horario reducido, tienen que dar cabida a los elementos de análisis y de las probabilidades.

Sobre la base de un esquema de los temas importantes, los programas deben dejarse con cierta flexibilidad. Son guías y no anteojeras ni obstáculos para la enseñanza.

He aquí lo que a este propósito dice un alumno ([1], p. 93).

— *Hay una palabra que no me gusta absolutamente nada: es la palabra «programa». Muchos profesores dicen: bueno, esto está en el programa, y eso no lo está. Ahí está la barrera, donde uno se detiene.*

— *Y de tal manera no me gusta, porque, aunque comprendo que evidentemente las cosas deben tener un límite, no puede uno superarse en todo, pero tampoco que sistemáticamente te detengas siempre en el límite del programa.*

Esta situación me fastidia bastante. Me gustaría más que, en algunas cuestiones, se fuera hasta el final.

N.—*¿Qué es lo que te molesta?*

A.—*Pues precisamente eso,, que se cierre la puerta, que se cierren las matemáticas. Es por eso por lo que estoy molesto.*

N.—*¿Qué es lo que te sucede?*

A.—*Bien..., ¡Es algo así como si a un hombre se* *le mete en la cárcel, sí! Se pierde su libertad, la libertad que tiene, no puede estar contento. A mí me gustan las matemáticas, precisamente porque todo viene enlazado, porque se puede seguir. En definitiva, porque uno es libre.*

Pero, si se comienza por encerrar, por limitar las matemáticas, se acabó, las matemáticas pierden su libertad.

Desarrollar un espíritu democrático

20) La dificultad inherente a la matemática hace de ella una vara para medir un tipo de inteligencia y para clasificar a los alumnos, a la vez que puede afirmar una supermacía dominante del maestro.

La clase de matemáticas suele ser, en pequeño, una sociedad que reproduce diferencias y jerarquías, cuando debería ser una comunidad de trabajo, organizada democráticamente.

El profesor no puede, como se le aconseja, marchar con la media de la clase, debe velar porque cada uno progrese, en la medida de sí mismo, con ayuda de todos.

21) Los grupos de trabajo no pueden reducirse a pequeñas formaciones creadas al azar, que se limitan a rellenar fichas en torno de una mesa. Deben ser equipos de alumnos, formados libremente, para llevar a buen término tareas de las que se han hecho responsables. En ellos, los más fuertes ayudan a los más débiles, y éstos prestan los servicios adecuados a su capacidad.

22) El maestro ya no es el dispensador único de la ciencia, es ahora el coordinador, el guía, el consejero, la autoridad reconocida por su eficacia.

Buen animador, sabe conducir todo el esfuerzo de la clase, en convergencia, sobre un problema que se resiste. Sin dejar de alentar también a los alumnos imaginativos, que, por vías divergentes, investigan sobre el problema.

23) Se aprende a discutir, a practicar una lógica viva guiada más por la autoridad de la prueba matemática que por la del maestro. Se descubren argumentos falaces en las demostraciones, como los que se pueden encontrar en la publicidad o en la información. Se ejercitan en sacar conclusiones tanto de lo probable como de lo seguro.

24) El profesor no siente el temor de arriesgarse, de mostrarse ante los alumnos en situación de búsqueda, y hasta llegar a reconocer con sencillez sus posibles errores en cuyo propósito los alumnos pueden llegar a ser muy vigilantes (Tenía yo la costumbre de recompensar con una buena nota a todo alumno que me señalaba cualquier deficiencia observada en una demostración mía).

25) En matemática, más que en otra rama en la que los contactos humanos son más afectivos, el maestro debe velar por mantener un clima de cooperación fraterna, en la que cada uno debe sentirse más comprendido, más valorado, más libre.

En tal atmósfera, los alumnos sienten por instinto lo que la razón puede aportar de mesura y de equidad en las relaciones humanas.

Estimular la expansión del ánimo

26) En la escuela secundaria, los adolescentes, a veces hasta los más huraños, están muy interesados en afirmarse a sí mismos, en su propio desarrollo.

Por esta razón, en caso de fracaso, los que tienen mejor concepto de su personalidad abandonan frecuentemente la matemática.

27) En todos los casos, es conveniente que tengan algún éxito. No se trata de otorgarles, porque sí, calificaciones engañosas, sino de hacerles experimentar la alegría de descubrir algo, aunque no sea más que un problema sencillo, de acuerdo con sus posibilidades. La mejor motivación para su trabajo es el placer que el alumno pueda sentir en el despliegue de su propia actividad matemática. En estas condiciones, resolver un problema viene a ser un desafío consigo mismo.

Otro factor de interés es también la elección personal de un determinado trabajo matemático.

(28) Para proporcionar todo su alcance al curso de matemática, el profesor no puede limitarse a dar una formación teórica y aplicada. Debe participar en el desarrollo humano más amplio de sus alumnos, en la expansión de sus capacidades potenciales.

En todas las ocasiones, en el trabajo o en el comportamiento de un niño o de un adolescente, deberá fomentar la aparición de aquellas cualidades con mayor proyección en los objetivos generales de la educación para cuya adquisición la matemática presenta una gran ayuda.

La educación matemática, en efecto, supera en todo a la mera instrucción matemática en sentido estricto. Contribuye en gran medida a la formación general de la personalidad, mediante el desarrollo de actitudes intelectuales, y el gusto por la belleza y del fomento de los rasgos morales ([22]). Estos objetivos, de naturaleza cualitativa, susceptibles de transferencia, deben alcanzarse progresivamente a lo largo de los estudios al mismo tiempo que los fines específicos que les sirven de soporte.

I. Formación intelectual

1. Ejercitarse en el juicio, distinguir lo verdadero de lo falso (aplicables a los hechos reales), lo demostrado de los no demostrado (aplicables a un enunciado en el seno de una teoría deductiva).
2. Adiestrar en la organización lógica del pensamiento. Ordenar las ideas, reconocer las hipótesis, las consecuencias, las causas, los medios, los efectos.
3. Aprender a reflexionar sobre los diversos aspectos de una situación, separar lo esencial de lo accesorio, afimar el espíritu de análisis, reforzar el poder de la síntesis.
4. Desarrollar la actividad mental y favorecer así la imaginación, la intuición y la invención creadora.
5. Lograr la adquisición de un sentido crítico constructivo.
6. Formar el espíritu científico: objetividad, precisión, gusto por la investigación.

II. Formación estética

1. Despertar y afirmar el gusto por la belleza matemática presente en ciertas relaciones, fórmulas, figuras, demostraciones y teorías.
2. Cultivar el gusto por la expresión del pensamiento: claridad, orden, concisión, elegancia.
3. Hacer presente y apreciar las relaciones entre la matemática y la belleza formal de las artes:
   — equilibrio arquitectónico;

— comparación de las artes plásticas (dibujo, pintura, escultura);
— ritmo y estructuras en las artes (música, cine);

4. Sensibilizar en la belleza de las formas y de organización en la naturaleza y en la técnica.

III. Formación moral

1. Amor a la verdad objetiva y a la equidad.
2. Necesidad del rigor, del discernimento y de la claridad en la verificación y en las pruebas.
3. Cuidado por conocer y comprender los principios de las cosas, los fundamentos y los a priori de las doctrinas y de las opiniones.
4. Hábito de investigar las preguntas y las justificaciones de las afirmaciones.
5. Probidad y lucidez acerca de sus propias observaciones, de sus opiniones y de sus deducciones personales.
6. Capacidad de atención, de concentración y de esfuerzo.
7. Voluntad de terminación y de perfeccionamiento.

Mantener todos los lazos con la vida

29) Los alumnos viven en un entorno donde coexisten, con frecuencia, como concurrentes o antagonistas, un universo natural y un mundo creado por el hombre.

Ahí está la historia para dar testimonio de toda la participación que corresponde a la matemática en el descubrimiento, la comprensión y el dominio parcial del universo, así como en la invención y en la realización del mundo tecnológico.

En la enseñanza secundaria, la matemática, el más potente de nuestros instrumentos de pensar, durante muchos años ha estado frecuentemente reducida a no pensar en nada que estuviera fuera de sí misma.

A todos los alumnos atraídos por la vida, les ha parecido la matemática como una lengua muerta, sin conexión significativa con el mundo.

Por mucho cuidado que se ponga en decirles «esto os servirá más adelante».

Por falta de ganas, por temor, por desaliento, son muchos los jóvenes que, llegado de sopetón el momento de las aplicaciones significativas, han perdido ya, más o menos, su interés por la matemática.

La potencia de la matemática, de la que tanto se habla, es para ellos una promesa para cuya realización falta demasiado tiempo.

Hay ahí un desfase que los cursos de Ciencias son los primeros en padecer. Para suprimir este retraso es posible iniciar al mismo tiempo, como lo hace la enseñanza renovada belga, el aprendizaje de las ciencias y de la matemática siguiendo la vía abierta por el doctor Decroly hace ya tantos años [20].

30) Pero si se quiere humanizar la enseñanza de la matemática no es suficiente con darle como campo de acción las ramas científicas: física, química, biología, geografía, informática. Es menester también conectarla con la enseñanza de la lengua materna [15].

Y, más, ampliamente es con la vida entera con la que la matemática está en relación. Así lo revela la obra pedagógica de Emma CASTELNUOVO [21].

La vida es la mejor motivación de la enseñanza de la matemática y la fuente inagotable de temas pedagógicos, variados y atractivos, para los jóvenes alumnos que descubren al mismo tiempo que los hechos su matematización.

Un matemático que ha consagrado lo mejor de sí mismo a la educación matemática, H. FREUDENTHAL [22], en su última publicación *Mathematical instruction in the year 2.000*, se expresa en estos términos:

— *Para afianzarse como matemático, no hay necesidad de hacer complejos de interioridad en los demás por medio de la teoría de conjuntos, del cálculo de las proposiciones, de la teoría de grupos, de los espacios vectoriales y de las teorías intelectuales más indigestas. Podéis descubrir las matemáticas por todas partes, a simple vista y con sentido común, pues la matemática es precisamente la única cosa tan evidente que, sin esfuerzo por nuestra parte, cualquiera puede convencerse que vale la pena conocer, aprender, enseñar.*

Por ser la matemática tan verdadera y convincente, estoy seguro que seguirá enseñándose en el futuro. Pero al mismo tiempo y por la misma razón, es algo que no puede enseñarse como una cuestión aparte. Debe surgir de la acción como la lectura, la escritura, el «bricolage», el dibujo, el canto, la respiración, en una educación integrada. En la educación general, se aprenderá más matemática de la que se ha estudiado hasta ahora; sin embargo, no será enseñada como una materia aislada, excepción hecha evidentemente, de los niveles más elevados, en la educación especializada, que, de hecho, se seguirá por un número de alumnos superior al de hoy. Pero no preguntéis jamás cuánta matemática puede aprender un niño. Preguntad, más bien, cuánta matemática, en la educación, puede contribuir a la dignidad humana del niño [23].

BIBLIOGRAFIA

[1]. Jacques NIMIER, *Mathématique et affectivite*, Stock, 1976.
[2]. Willy SERVAIS, «Présentation de la Caractérologie», Mathematica à Pedagogia 7 (1955-56).
[3]. R. LE SENNE, *Traité du caractère*, P.U.F. (9 y siguintes).
[4]. *Analyse du caractère*, P.U.F. (1952).
[5]. André LE GALL, *Caractérologie des enfants et des adolescentes*, P.U.F. (1951).
[6]. Paul GRIEGER, *L'intelligence et d'éducation intellectuelle*, P.U.F. (1950).
[7]. R. VERDIER, *La caractétologie dans l'enseignement secondaire*, P.U.F. (1957).
[8]. E. G. BLEGE, *The role of research in the improvement of mathematics education. Actas du Premier Congrès international l'Enseignement mathématique* (1969). D. Reidel publishing Company. Dordrecht.
[9]. W. SERVAIS, *L'enseignement de la mathématique diversitié dans les classes superieures des écolas secondaires*. Educación matemática en las américas-IV (1975). U.N.E.S.C.O.
[10]. W. SERVAIS, «Tendances caracterielles», *Mathematica* K *Pedagogia* (1955-56).
[11]. P. C. WASON, P. N. Johnson LAIRD, *Thinking and reasoning*, 1968. Penguin Books.
[12]. J. BRUNER, J. GOODNOW, G. AUSTIN, *Astudy of thinking*, Sciencie Editions, inc New York (1962).
[13]. Robert BLANCHE, *Le raisonement*, P.U.F. (1973).

[14]. Georges GLAESER, I.R.E.M. de Strasbourg, *Le livre du problème*, Cedic (1973).
[15]. Josette ADDA, *Initiation au largage mathématique*, Régionale parisienne de l'Association des Professeurs de Mathématique (A.P.M.), 1975.
[16]. F. JAULIN-MANNONI, *Le pourquoi en mathématique*, Ed. E.S.F. (1975).
[17]. R. SKEMP, *The psycology of learning mathematics*, Tenguin Books, 1971.
[18]. W. SERVAIS, «Problématique dans l'apprentissage de la mathemátique». *Educational studies in mathematics* vol. 7, n.° 1/2, 1976. D. Reidel Publi. Company.
[19]. W. SERVAIS y otros, *Mathématique 2*, Ed. Labor (1971). *Mathématique 3*, Ed. Labor (1976).
[20]. A. PELTIER, «A la découverte de la physique experimentale», Ed. Labor.
[21]. E. CASTELNUOVO y M. BARRA, *Matematica nella realta* (Paolo Boringhieri 1976).
[22]. H. FREUDENTHAL, *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publ. Company, 1973.
[23]. H. FREUDENTHAL, Allocution prononcéeà Utrech le 14 août i976 à l'ocassion de son départ de l'IOWO.

PRIMER SEMINARIO PREPARATORIO DEL SIMPOSIO SOBRE «DIDACTICA DE LA FISICA Y LA MATEMATICA, SU INTERRELACION»

Organiza: **Instituto** Nacional de Ciencias de la Educación (I.N.C.I.E.).

Lugar de realización: **I.N.C.I.E.**, Ciudad Universitaria, s/n.—Madrid-3.

Fecha: Diciembre, 1979.

Director del Seminario: **Luis Rosado.**

1. Organizado por el I.N.C.I.E., se ha celebrado en la sede de este Organismo el Primer Seminario del Simposio sobre «Didáctica de la Física y la Matemática, su interrelación».

2. En el mes de diciembre, en que ha tenido lugar la reunión en el I.N.C.I.E., se han reunido más de 40 profesores de física y matemática de todos los niveles educativos procedentes de toda España, para analizar los resúmenes de las 50 comunicaciones presentados hasta la fecha.

3. Estos trabajos, que responden a los objetivos planteados para el Simposio, han quedado encuadrados en la siguiente clasificación:

   Grupo I: Fundamentos de la interrelación (12 comunicaciones).

   Grupo II: Aspectos pedagógicos y didácticos (20 resúmenes).

   Grupo III: Temas concretos (17 resúmenes de comunicaciones).

4. En el mismo se han fijado las normas de estructuración de las comunicaciones, a ser posible modulares, con el fin de dar homogeneidad a los trabajos.

5. Asimismo se ha determinado como fecha del Segundo Seminario Preparatorio del Simposio la semana del 17 al 22 de marzo de 1980. En éste se presentarán para su estudio y posibles relaciones entre los mismos, *las comunicaciones totalmente desarrolladas, así como un extracto de las mismas en un folio a espacio sencillo o doble*, con el fin de difundir éste a los interesados en participar en el Simposio. (Este material debe enviarse al director del Simposio en la primera semana de marzo, para proceder a su reproducción y posterior distribución a los participantes del Segundo Seminario Preparatorio.)

6. El desarrollo del Seminario ha transcurrido según el esquema y los objetivos previstos, con la plena satisfacción de los asistentes por el resultado alcanzado.

7. Los asistentes agradecen al I.N.C.I.E. la invitación y la posibilidad de participar en estas reuniones de trabajo, para la mejora de la enseñanza de la física y la matemática en todos los niveles del sistema educativo y en la totalidad del ámbito nacional. Asimismo, extienden el reconocimiento a la U.N.E.S.C.O., por el alto interés que se toma en apoyar la organización y la realización de este Simposio por el I.N.C.I.E. y por proporcionar asesores especialistas y material bibliográfico al mismo.