Aplicación de las calculadoras programables para el estudio de la posición relativa de dos rectas en el espacio afín. Introducción de los conceptos de matriz definida positiva y norma

Por Enrique RUBIALES CAMINO(*)

El trabajo que voy a presentar fue realizado en un Seminario (un día a la semana, entre el 2.° y 3.er trimestre) con las alumnas de C.O.U., que quisieron asistir voluntariamente; y que en 3.° ya trabajaron con las calculadoras programables de bolsillo.

Este trabajo fue presentado por dichas alumnas a un concurso que se realiza todos los años, patrocinado por el centro.

Fue elegido por el alumnado, a fin de que se pusiese de manifiesto cómo una pequeña caculadora programable puede ser tan interesante como tener un ordenador.

El tema ya lo habían visto, pues se trataba de la posición relativa de 2 rectas, 2 planos y una recta y un plano. Ya sabemos que si estamos en un ordenador, en pantalla, nos puede aparecer, al introducir los datos de dos rectas, por ejemplo, SE CORTAN SEGUN UN PUNTO, o bien, SON PARALELAS, etc. Lo que es evidente, es que esto no es posible en una calculadora, pues no hay caracteres alfabéticos.

El primer paso, fue reducir a números, cada uno de los casos. Por ejemplo, si las rectas se cruzan, aparece en pantalla un (1); si son secantes, un (2); si son paralelas un (3) y si son coincidentes un (4).

Así, si alguien necesita saber qué pasa con dos rectas, debe introducir los datos de ambas rectas y pulsando una tecla, obtener en pantalla un (1) o un (2), etc., como ya dijimos antes.

Ahora bien, el trabajo del alumnado era todavía más complicado, pues ellas iban a exponer el desarrollo matemático, de forma que luego realizasen la programación. Entonces, para entrar en la programación, era preciso previamente realizar el esquema, que recibe el nombre de organigrama.

Tomamos las dos rectas:

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$r': \frac{x - x_2}{a'} = \frac{y - y_2}{b'} = \frac{z - z_2}{c'}$$

y planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} at - a't' = x_2 - x_1 \\ bt - b't' = y_2 - y_1 \\ ct - c't' = z_2 - z_1 \end{array}\right\}$$

, que sabemos tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} a & - a' \\ b & - b' \\ c & - c' \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & - a' & x_2 - x_1 \\ b & - b' & y_2 - y_1 \\ c & - c' & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Caract. (A) = 2, caract. (B) = 3 se cruzan.
Caract. (A) = 2, caract. (B) = 2, número de incógnitas, se cortan.
Caract. (A) = 1, caract. (B) = 2 son paralelas.
Caract. (A) = 1, caract. (B) = 1 número de incógnitas, son coincidentes.

Ahora, el problema está en averiguar el procedimiento para llevar esto a un organigrama, que sobre el programa nos va a dar las distintas bifurcaciones mediante condiciones lógicas.

El cálculo de $|B|$, se hace por los adjuntos conjuntos de la última columna, de modo que tenemos:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & - a' \\ b & - b' \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a & - a' \\ c & - c' \end{vmatrix} \quad y \quad A_3 = \begin{vmatrix} b & - b' \\ c & - c' \end{vmatrix},$$

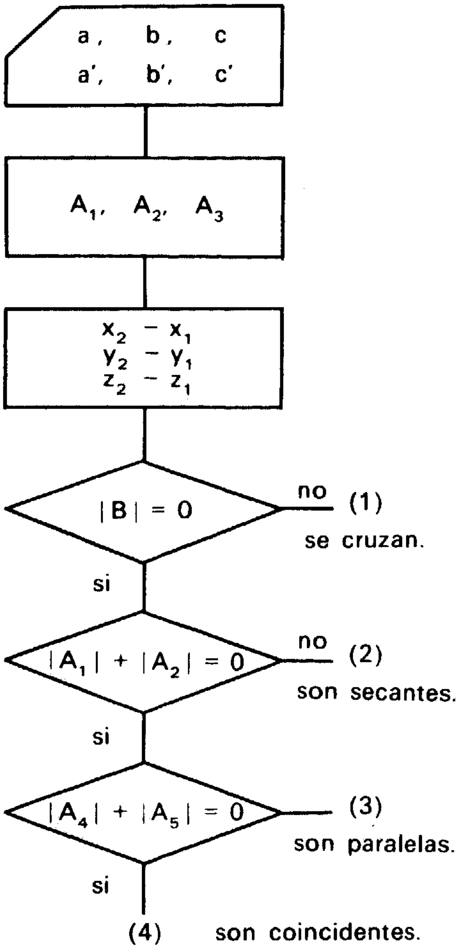
entonces:

$$|B| = (x_2 - x_1) \begin{vmatrix} b & - b' \\ c & - c' \end{vmatrix} - (y_2 - y_1) \begin{vmatrix} a & - a' \\ c & - c' \end{vmatrix} + (z_2 - z_1) \begin{vmatrix} a & - a' \\ b & - b' \end{vmatrix}$$

* Catedrático (excedente) y Profesor Agregado del INB «Emilia Pardo Bazán» de Madrid.

Así, en el organigrama, llegamos a ver si:

$$|B| = 0 \quad ó \quad |B| \neq 0$$



(figura 1)

Esto último, debemos enlazarlo con el paso siguiente, que será aquel en el que las rectas se corten y el que va a continuación, que es el que sean paralelas.

Sabemos que si $A_1 = 0$ y $A_2 = 0$, entonces $A_3 = 0$, por tanto, basta calcular los dos primeros, y así pasaríamos al caso de ser paralelas.

Y si $A_1 \neq 0$, se cortan.

Ahora bien, aquí había una cuestión delicada, si $A_1 = 0$ y no lo era A_2, entonces las rectas se cortan y como hacer cada caso por separado suponía muchos pasos de programación, tras pensar en ello, pusimos:

$$|A_1| + |A_2| = 0 \quad ó \quad |A_1| + |A_2| \neq 0$$

Continuando, con el siguiente paso, es decir, paralelas o coincidentes, tuvimos que calcular los determinantes siguientes de la matriz B:

$$A_4 = \begin{vmatrix} a & x_2 - x_1 \\ b & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \quad ; \quad A_5 = \begin{vmatrix} a & x_2 - x_1 \\ c & z_2 - z_1 \end{vmatrix}$$

para así, poner de manifiesto, el que la característica de B fuese 2 ó 1 (figura 1).

De esta manera, ya estamos en condiciones de poder realizar el programa, que en el caso concreto del seminario, se hizo para los tres tipos de calculadoras programables de bolsillo que teníamos.

En un seminario de C.O.U., sería interesante que tras la discusión y resolución de un sistema lineal del mismo número de ecuaciones que de incógnitas, les hiciésemos ver a los alumnos que la resolución directa no es la idónea para un ordenador. Ahora bien, como no tenemos un ordenador, le podemos sustituir por una calculadora programable.

La programación directa de dos ecuaciones y dos incógnitas y tres y tres, resulta asequible, pues los determinantes se pueden calcular directamente. Sin embargo, de cuatro en adelante sí hay dificultad y cuanto mayor sea el número de incógnitas, la dificultad será mayor. De ahí que se haya recurrido a métodos de resolución, que se suelen llamar iterativos.

En nuestro caso, veremos dos métodos:

a) Jacobi.
b) Gauss-Seidel (algunos autores le llaman Seidel).

También veremos, aunque sin entrar en muchos detalles las condiciones que se han de cumplir para que se dé la convergencia del proceso iterativo. Y, someramente hablaremos de los errores que se cometen. En fin, en C.O.U., para las alumnas de Ciencias, aunque sea un seminario ambicioso, pensamos que merece la pena, ya que entramos en un campo, como es el del cálculo numérico, que ha sido bastante olvidado en el Bachillerato y C.O.U.

El alumno debe conocer las calculadoras programables y haber trabajado procesos iterativos en resolución de ecuaciones algebraicas con una incógnita. Si no fuese así, se precisaría de un seminario previo, coincidente con el temario oficial (sistemas de ecuaciones lineales).

La idea expuesta podría desarrollarse en la forma siguiente:

El primer trimestre, se puede dar el seminario correspondiente a la resolución de ecuaciones algebraicas por métodos iterativos y en el segundo, lo que se explica en este artículo.

En el seminario previo, con la calculadora programada por nosotros de forma que se parase cuando el «error» entre dos iteraciones consecutivas fuese menor que una milésima, una diezmilésima, etc., el trabajo a proponer sería, cómo podríamos realizar esto para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, etc., de modo que debemos introducir la notación matricial y de ello surgió el concepto de norma de una matriz.

Por otro lado, estudiando la convergencia del proceso iterativo, llegamos a la conclusión de que no todo sistema lo hace, por lo que un teorema muy importante es el que dice:

«Si la matriz del sistema es real, simétrica (estos dos conceptos están en el programa de C.O.U.) y definida positiva, entonces el sistema converge, hacia la solución, sea cual sea el valor inicial que tomemos.»

Ayudado de varios ejemplos, voy a comprobar, más detalladamente, lo que enuncia el teorema.

En primer lugar, yo pongo el sistema siguiente de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x - 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Los alumnos, mediante cualquier método, lo resuelven y obtienen como resultado:

$$x = 0'40 \qquad e \qquad y = 1'20$$

Ahora, lo pongo para iterar, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= -2 + 2y^k \\ y^{k+1} &= 2 - 2x^k \end{aligned}$$

Lo programamos en la calculadora, y vemos que:

	$x^0 = 0,$	$y^0 = 0$
$k = 0;$	$x^1 = -2,$	$y^1 = 2$
$k = 1;$	$x^2 = 2,$	$y^2 = 6$
$k = 2;$	$x^3 = 10,$	$y^3 = -2$
$k = 3;$	$x^4 = -6,$	$y^4 = -18$
$k = 4;$	$x^5 = -38,$	$y^5 = 14$
$k = 5;$	$x^6 = 26,$	$y^6 = 78$

Podemos observar que el proceso diverge.

Si ahora vuelvo a ponerlo, pero de otra forma, para iterar, nuestra sorpresa es grande, ya que ahora sí que converge.

Lo programamos haciéndolo el alumno. En este caso, para el proceso iterativo, lo pongo así:

$$\left.\begin{aligned} x^{k+1} &= 1 - \frac{1}{2} y^k \\ y^{k+1} &= 1' + \frac{1}{2} x^k \end{aligned}\right\}$$

	$x^0 = 0$,	$y^0 = 0$
$k = 0,$	$x^1 = 1$,	$y^1 = 1$
$k = 1,$	$x^2 = 0'50,$	$y^2 = 1'50$
$k = 2,$	$x^3 = 0'25,$	$y^3 = 1'25$
$k = 3,$	$x^4 = 0'38,$	$y^4 = 1'13$
$k = 4,$	$x^5 = 0'44,$	$y^5 = 1'19$
$k = 5,$	$x^6 = 0'41,$	$y^6 = 1'22$
$k = 6,$	$x^7 = 0'39,$	$y^7 = 1'20$
$k = 7,$	$x^8 = 0'40,$	$y^8 = 1'20$

Como sabemos la solución paro la calculadora.

Pero, si el sistema antes era divergente y ahora es convergente, esto no parece serio. Me imagino que para el alumnado esto tiene que hacer pensar y, sobre todo en esta materia, donde todo goza de la exactitud.

Con esto se pone de manifiesto, que no todo es la práctica y que por eso hay que estudiar teoría. Los enunciados de los teoremas tienen hipótesis y tesis y existe el teorema recíproco de uno dado. En otras palabras, la condición necesaria y suficiente.

«Si la matriz del sistema

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= k_n \end{aligned}\right\}$$

es real, simétrica y definida positiva, entonces el sistema escrito en la forma especial:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (k_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (k_2 - a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}} (k_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{aligned}\right\}$$

converge a la solución, sea cualquiera el valor inicial que tomemos».

El recíproco no es cierto, como se comprobó en el ejemplo, ya que puede converger, y sin embargo, la matriz no ser definida positiva.

Para introducir el concepto de norma de una matriz, basta que escribamos el sistema especial, en forma matricial, es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & + a'_{12} & \ldots & + a'_{1n} \\ + a'_{21} & 0 & \ldots & + a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ + a'_{n1} & + a'_{n2} & \ldots & - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \ldots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ \ldots \\ k'_n \end{pmatrix}$$

donde

$$a'_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \neq j \quad y \quad k'_i = \frac{k_i}{a_{ii}}$$

Aquí, me interesan los vectores columnas, o matrices de n filas y una columna.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_1^{(k+1)} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \ldots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

que se pueden escribir

$$\bar{x}^{k+1} \qquad y \qquad \bar{x}^k$$

Si en la resolución de ecuaciones algebraicas por el método de iteración escribíamos:

$$|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$$

aquí, será algo que me «mida» la diferencia de los vectores. Entonces, ese algo que mide me lo da el concepto de norma. Por tanto:

$$||\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k|| < \varepsilon$$

Es conveniente que conozcan la existencia de diferentes normas, que son:

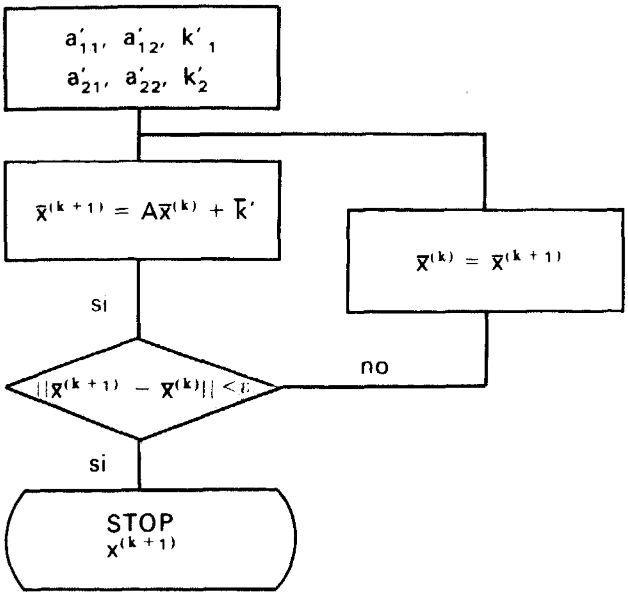
a) $||\bar{x}||_1 = \max\limits_i |x_i|$

b) $||\bar{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

c) $||\bar{x}||_3 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

Visto ya esto, me puedo entretener en que programen las tres normas, aunque pensando como siempre en ahorro de pasos de programa, la que más interesa es la *c*).

Para los interesados en trabajar en ello, el organigrama es el siguiente:



Tomo el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

que en forma especial, es

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - y) \\ y &= \frac{1}{3}(-1 - x) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{k} \\ y^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Y $\varepsilon = 10^{-3}$.

El programa para una HP-65, es el siguiente:

LBL	STO 3	STO 5	2
A	RCL 1	RCL 4	RCL 3
STO 1	CHS	RCL 2	STO 1
R/S	1	−	RCL 4
STO 2	−	g	STO 2
LBL	3	ABS	GTO
1	÷	RCL 5	1
RCL 2	STO 4	+	LBL
CHS	RCL 3	EEX	2
3	RCL 1	3	RCL 3
+	−	CHS	R/S
2	g	gx > y	RCL 4
÷	ABS	GTO	RTN

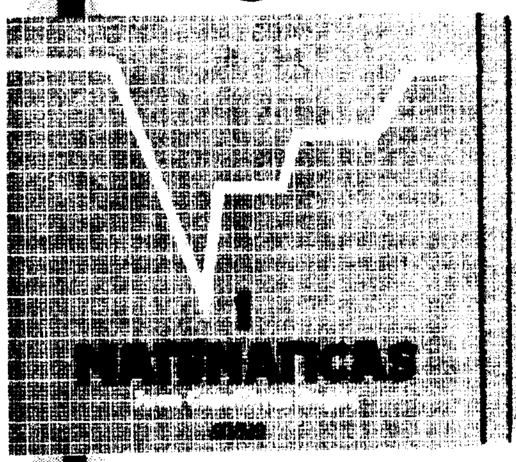
TECLAS	PANTALLA
O	0.
R/S	0.00
O	0.
R/S	2.00
R/S	— 1.00

Como final, explicaré brevemente en qué consiste el método iterativo de Gauss-Seidel, y como labor para otro seminario, será el ver si todo lo dicho anteriormente es válido sin más, o hay que hacer algunas variaciones.

Este método consiste en que el valor inicial y_0, sirve para hallar x_1, éste a su vez sirve para hallar y_1, etcétera. Este proceso de iteración se puede escribir de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}(K_1 - a_{12}y^k) \\ y^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}(K_2 - a_{21}x^{k+1}) \end{aligned}\right\}$$

DOS SERIES anaya DE MATEMATICAS PARA BACHILLERATO



JUAN CASULLERAS REGAS. Doctor en Ciencias Exactas. Catedrático de Matemáticas del Instituto de Bachillerato Milá i Fontanals, de Barcelona.

MATEMATICAS 1º:

Se inicia la serie de matemáticas para Bachillerato en este primer curso siguiendo, en lo esencial, el método cíclico. Muchos de los temas ya los han estudiado los alumnos de E.G.B., pero aquí, naturalmente, se tratan ampliando los conocimientos adquiridos con anterioridad y que en Bachillerato se estudian no sólo con mayor amplitud y extensión, sino relacionándolos y situándolos en el contexto total y unitario de la Matemática. El libro de Matemáticas de 1º que nos ocupa desarrolla siete grandes temas: Cálculo combinatorio, los cuerpos de los números reales y complejos, funciones polinómicas y racionales, inecuaciones y sistemas, progresiones aritméticas y geométricas, aritmética comercial, interés compuesto y anualidades.

MATEMATICAS 2º:

El cuestionario de MATEMATICAS 2º contiene un capítulo dedicado a las aplicaciones del cálculo infinitesimal que es el lugar oportuno para completar estas ideas dentro de la enseñanza media.

Las lecciones dedicadas al espacio vectorial son en cierto modo más simples, por cuanto apoyándose en manipulaciones algebraicas son más asequibles a alumnos que en la E.G.B. y en el primer curso de B.U.P. han adquirido una cierta familiaridad con los cálculos algebraicos.

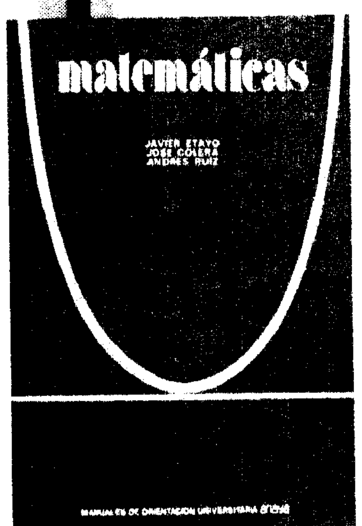
MATEMATICAS 3º:

La obra abarca cuatro grandes temas: Geometría, Trigonometría, Análisis y Estadística.

La geometría y la trigonometría van íntimamente ligadas.

Los problemas básicos del análisis como las nociones de derivada e integral se resuelven de una forma clásica. La última parte de la obra se dedica a la estadística.

El libro se completa con tablas auxiliares para el manejo de la distribución normal y unos doscientos ejercicios y problemas propuestos, que ayudan a la comprensión y fijación de los temas tratados en el índice.



MATEMATICAS C.O.U.

JAVIER ETAYO, JOSE COLERA, ANDRES RUIZ

JAVIER ETAYO, Catedrático de Geometría de la Universidad Complutense, de Madrid.
JOSE COLERA, Catedrático del Instituto de Bachillerato de Colmenar (Madrid).
ANDRES RUIZ, Catedrático del Instituto de Bachillerato "Rey Pastor", de Madrid.

MATEMATICAS 1º:

Cada uno de los conceptos estudiados aparece motivado mediante una puesta en situación, procurando con ello que el alumno vea natural el proceso por el cual se desarrolla cada una de las cuestiones, y que culmina en la expresión rigurosa de las conclusiones obtenidas. Ejemplos resueltos y ejercicios propuestos al final de cada apartado completan la comprensión de lo estudiado en él. Al acabar cada unidad se proponen bastantes ejercicios y problemas, cuidadosamente escogidos y graduados en orden de dificultad.

Al final del libro aparecen unos trescientos ejercicios de todo tipo, con los que se alcanza un total de unos ochocientos sin resolver y más de doscientos resueltos.

MATEMATICAS 2º:

En cinco bloques de lecciones se distribuyen, de acuerdo con las exigencias del cuestionario, las materias que corresponden a este curso.

En el primero de ellos se estudian las sucesiones, con los problemas fundamentales de convergencia y límite; en el segundo, las funciones reales de variable real y su noción básica, la continuidad, para pasar a tratar en el siguiente de algunas funciones particulares importantes, exponencial, logarítmica funciones circulares. El bloque cuarto contempla un problema de rango universal, la introducción del cálculo diferencial, junto a la formación de la integral indefinida. Finalmente hay un quinto bloque dedicado a la geometría con el estudio del plano y espacio vectoriales y del plano afín.

MATEMATICAS 3º:

De la trigonometría ya son conocidos por 2º de BUP sus conceptos fundamentales que, en esta obra, se amplían hasta el punto en que es posible ampliarlos a lo que es la razón principal de su estudio, la determinación de las relaciones métricas entre los elementos (lados, ángulos) de un triángulo. Ligado con la trigonometría por la importancia de su representación, se aborda el número complejo y todas las operaciones realizables en el cuerpo complejo C.

La última parte del libro se dedica a la formación de los conceptos fundamentales de la estadística.

El programa de Matemáticas de COU prefigura un curso de Matemáticas de 1º de Universidad o de Escuelas Técnicas y al mismo tiempo completa los temas sencillos que no hayan quedado suficientemente tratados en BUP.

La obra finaliza con tres capítulos dedicados al cálculo de probabilidades, donde se recuerdan algunos resultados conocidos. Y se introducen otros nuevos, como el teorema de Bayes, para su utilización en experimentos compuestos.