

# Masa y energía dentro de la teoría de la relatividad

---

Por José L. ORANTES DE LA FUENTE (\*)

---

## PRESENTACION

Conmemoramos el año pasado el centenario del nacimiento de uno de los más grandes genios de la humanidad: Albert Einstein. Si tuviéramos que colocar debajo de su nombre un epígrafe, sin lugar a duda escribiríamos: «creador de la Teoría de la relatividad». La Teoría de la Relatividad ha ejercido y ejerce desde su nacimiento una poderosa atracción sobre cualquier mente inquieta ya sea desde el aséptico y abstracto dominio matemático, ya desde el apasionante campo filosófico, o bien, desde el sencillo asombro del hombre de la calle.

Pero, ¿qué tiene que ver todo ésto con el tema que aquí nos proponemos desarrollar? La respuesta es sencilla. Si hemos dicho que el nombre de Einstein va unido por un lado al de una teoría, del otro tendríamos que colocar una fórmula:  $E = m.c^2$ . Esta simple fórmula, revolucionadora en multitud de aspectos de nuestra sociedad, refleja mejor que nada el contenido de este trabajo. Con ella se nos abre una puerta a un mundo nuevo y grandioso: la equivalencia entre masa y energía.

El objeto de este desarrollo puede resumirse en conseguir obtener una visión clara y de conjunto de esta relación, estableciendo de manera concisa y lógica los distintos pasos que nos llevan de los postulados relativistas a dicha expresión.

Creo que el presente trabajo puede ofrecer un doble interés. Por un lado asomarnos a un planteamiento formal de la dinámica relativista y por otro captar los nuevos principios y concepciones acerca del universo que la nueva teoría establece. He de confesar que uno de los motivos que me ha impulsado a escribir estas ideas es el de constatar la curiosidad e inquietud que este tema despierta en mis alumnos y la necesidad de darles conceptos claros y precisos que no les induzcan a error. Lógicamente no se puede dar, ni siquiera a nivel de C.O.U., de una manera rigurosa, todo lo que aquí vamos a exponer, pero sí es preciso que una visión formal y coherente esté siempre detrás de las sencillas pa-

labras con que transmitimos estos hechos a nuestros alumnos.

Es preciso señalar que no se pretende dar aquí una explicación completa y detallada de los cálculos que exponen, lo cual alargaría notablemente estas líneas. Por ello, aún a riesgo de resultar esquemático, he abreviado lo más posible algunos desarrollos remitiendo al lector a la bibliografía, bastante asequible, que se da al final. Así, por ejemplo, considero suficiente conocida la transformación de Lorentz y en todo caso puede ser consultada en casi todos los libros citados por lo que se ha omitido el desarrollo.

Por último, establecer las dos partes claramente diferenciadas de este trabajo. La primera es una breve exposición de las bases conceptuales y operativas de la Teoría de la Relatividad. La Segunda, que se inicia con el estudio específico de la masa, es propiamente el objeto del presente trabajo que no puede ser interpretado ciertamente sin el apoyo de las líneas anteriores.

## TRANSFORMACION DE LORENTZ Y FORMULACION TETRADIMENSIONAL

Existe históricamente un hecho experimental que precipita los acontecimientos científicos de finales del siglo XIX: la comprobación de la constancia de la velocidad de la luz por Michelson y Morley.

Sobre esta experiencia Einstein elabora la Teoría de la Relatividad restringida (o especial) en un famoso artículo, compañero de otros dos igualmente revolucionarios, de 1905. Sin embargo, ya se conocía anteriormente que la ecuación de propagación de las ondas electromagnéticas no era invariante frente a la transformación de Galileo.

Lo que esta invariancia supone es que las leyes de la Física siguen siendo igualmente válidas cual-

---

(\*) Profesor agregado de Física y Química del I.N.B. «Andrés Laguna» de Segovia.

quiera que sea el sistema de referencia inercial (sin aceleración) desde el cual las observemos.

Resultaba, pues, que la ley de propagación de la luz era distinta, según el sistema de referencia en que nos situáramos (según la transformación de Galileo). Para evitar esta dificultad, Lorentz había introducido una nueva transformación que la resolvía, pero nadie había tenido la intuición o el valor necesarios para sacar las consecuencias que esta transformación supone hasta que en 1905 apareció el trabajo de Einstein.

Esta transformación suele darse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 & \beta &= \frac{v}{c} & ; & x_4 &= + ict \\ x'_2 &= x_2 & & & & & \\ x'_3 &= \frac{x_3 + i\beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} & x'_3 &= \frac{x_3 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} & & & \\ x'_4 &= \frac{x_4 - i\beta x_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} & t' &= \frac{t - \beta/c \cdot x_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} & (1) & & \end{aligned}$$

donde las coordenadas primadas corresponden a un sistema de referencia  $K'$  que se mueve respecto otro  $K$  según el eje  $XX'$  con una velocidad  $v$ .

Las conclusiones que Einstein deduce podemos resumirlas así:

- El tiempo deja de ser una magnitud absoluta e independiente para cualquier fenómeno del universo, sino que está estrechamente relacionado con el sistema de referencia que tomemos.
- Las longitudes y distancias espaciales dejan de ser igualmente entes absolutos (varillas de longitud constante), sino que depende igualmente su medida del sistema en que me encuentre.
- El Universo deja de ser tridimensional para convertirse en tetradimensional, donde la cuarta coordenada está íntimamente relacionada con el tiempo.

Podemos dejar hablar al propio Einstein a este respecto: «La concepción de algo que sucede era siempre la de un continuo de cuatro dimensiones; pero el reconocimiento explícito de éste estaba oculto por el carácter absoluto asignado al tiempo prerrelativista. Una vez que se eliminó la hipótesis del carácter absoluto del tiempo, particularmente en lo que se refiere a la simultaneidad, apareció inmediatamente el concepto de tetradimensionalidad del espacio-tiempo. Lo que tiene sentido físico no es ni el punto en el espacio ni el instante de tiempo en que algo ocurre, sino únicamente el acontecimiento mismo...»

Junto con esta visión tetradimensional existe otro elemento, ya mencionado, que conforma la filosofía de la Teoría relativista. Consiste en establecer el principio de que todas las leyes físicas del universo deben tener una forma semejante cualquiera que sea el lugar del mismo o el sistema de referencia que yo utilice para observarlas. Esto nos lleva a que debemos reformular todas las leyes conocidas

para que sean *invariantes* en su forma cuando las sometamos a la transformación de Lorentz.

Así, por ejemplo, cuando en una ley nos aparezca el tiempo esa ley no puede ser invariante, pues la coordenada tiempo «varía» de un sistema de referencia a otro. Por ello, se recurre a construir una cantidad «invariante» que denominaremos *tiempo universal* y se representa por:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2)$$

donde  $dt$  es el tiempo elemental de un sistema  $K$ .

Los conceptos y magnitudes físicas habituales tendrán que ser remodelados y adaptados a este nuevo espacio tetradimensional, pero hay que advertir que esto no se consigue sin más que añadir una coordenada. Lo único que podemos exigir es que en el límite de bajas velocidades la magnitud tridimensional y la tetradimensional (sus tres primeras coordenadas) coincidan.

Tal es el caso de la velocidad. Si en la formulación habitual la representamos por un vector  $(V_1, V_2, V_3)$ , en la tetradimensional tendremos cuatro coordenadas  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  cuyos valores son:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} & i &= 1, 2, 3 \\ u_4 &= \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

## FUERZA, CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y ENERGIA

Recordemos que la fuerza en la dinámica de Newton, viene definida en la forma:

$$\frac{dP_i}{dt} \equiv \frac{d}{dt} (mV_i) = F_i \quad (4)$$

¿Cómo se transformará esta expresión en el formalismo tetradimensional? Si queremos que se mantenga invariante frente a la transformación de Lorentz, es evidente que (4) no lo es. Es lógico suponer que la forma correcta ha de ser:

$$\frac{d}{d\tau} (mu_v) = K_y \quad (5)$$

denominado  $K_y$  como fuerza de Minkowski. No podemos suponer que las componentes espaciales de  $K$  coincidan con las de la fuerza, sino que  $K_i \xrightarrow{v} F_i$  cuando  $\beta \rightarrow 0$ .

Sustituyendo las expresiones de la tetravelocidad en (5), vemos que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = K_i \sqrt{1 - \beta^2}$$

de donde sacamos la conclusión que:

$$P_i = \frac{mV_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (6)$$

$$F_i = K_i \sqrt{1-\beta^2}$$

¿Qué significado tiene la componente  $K_4$ ? No es difícil ver que su valor es de la forma:

$$K_4 = \frac{i\dot{E} \cdot \dot{v}}{c \sqrt{1-\beta^2}}$$

que llevada a (5) nos dá:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \dot{E} \cdot \dot{v} \quad (7)$$

Si recordamos el significado clásico de  $\dot{E} \cdot \dot{v}$  (igual a la derivada de la energía cinética), llegamos a la conclusión de que la energía cinética es de la forma:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (8)$$

que, para velocidades pequeñas, se puede desarrollar como:

$$T \xrightarrow{\beta \ll 1} mc^2 + \frac{1}{2} mV^2$$

Nos aparece aquí el término clásico  $\frac{1}{2} m \cdot V^2$  más la constante  $m \cdot c^2$ . Esta constante podríamos eliminarla, ya que no afecta a la derivada temporal de  $T$ , pero la mantenemos en esta forma, ya que así el momento  $\vec{p}$  y  $\left( i \frac{T}{c} \right)$  forman un tetravector momento universal,  $p_\nu$ , definido por:

$$p_\nu = mu_\nu \quad (9)$$

en donde

$$p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{iT}{c}$$

Lo primero que salta a la vista de estas expresiones es que el momento y la energía cinética dejan de ser conceptos independientes para transformarse en una misma cosa: el momento universal. Por otro lado, si no existen fuerzas exteriores  $K = 0$ , esto implica que se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética (según los conceptos relativistas).

Todo ello es de enorme importancia y señala una clara diferencia con la mecánica clásica en donde ambas leyes de conservación eran independientes. Esto ocurría en los choques inelásticos en los que se decía que la variación de energía cinética se

transforma en calor. Desde el punto de vista relativista quiere esto decirnos que si hay una variación de la cantidad  $\frac{1}{2} mV^2$ , como  $T$  debe mantenerse constante, dicha variación se debe compensar con una modificación en los términos del desarrollo de (8). Particularmente, para bajas velocidades, debe haber un incremento en el término  $mc^2$ , denominado energía en reposo, proporcional a esta variación, es decir:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \quad (10)$$

que es la famosa relación de Einstein, la cual nos indica que en tales casos debe haber una modificación de la masa en reposo. Este efecto es inobservable para pequeñas energías, ya que  $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$  y  $c^2$  es un número muy grande, pero tiene excepcional importancia en procesos radioactivos y de creación-aniquilación de pares de partículas.

La relación entre energía y el momento se expresa fácilmente, teniendo en cuenta que el módulo del tetramomento es constante:

$$\sum_{\nu=1}^4 p_\nu p_\nu = -mc^2 = p^2 - \frac{T^2}{c^2}$$

es decir:

$$T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (11)$$

## ALGUNAS CUESTIONES EN TORNO AL CONCEPTO DE MASA

Ya hemos visto en el apartado precedente cómo surge el concepto de energía dentro del dominio relativista. Su vinculación al momento de la partícula hace que constituya con él otra magnitud más genérica, que hemos denominado tetramomento o momento universal. Vamos a detenernos en revisar brevemente la forma en que se dan estos conceptos en introducciones elementales al tema y las consecuencias que pueden presentar.

En dichas introducciones a la Teoría de la Relatividad, que se hacen en los textos de Física general, se suele desechar la imagen tetradimensional y recurrir a construcciones heurísticas, estableciendo algunos conceptos a priori y unas supuestas bases experimentales.

Así, por ejemplo, para obtener las expresiones relativistas de la energía se postula el hecho experimental de que la «masa» depende de la velocidad en la forma:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (12)$$

denominando a  $m$ , la masa relativista, mientras que  $m$  es la masa de la partícula en reposo. A partir de esto se deduce la nueva expresión del momento, ya que «lógicamente»:

$$\vec{p} = m_r \cdot \vec{V} = \frac{m \cdot \vec{V}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (13)$$

Llegados aquí se repiten todos los pasos que en mecánica clásica se siguen para obtener las expresiones de la Energía y de la fuerza.

Sin embargo, este planteamiento empobrece, de una manera notable, el trasfondo y significado de la teoría relativista reduciéndola a un «ardid matemático» para superar una mala pasada que nos ha jugado la naturaleza: la constancia de la velocidad de la luz.

Por otra parte, no se ve en el desarrollo casi ningún punto de conexión entre los conceptos base de la teoría relativista y el resultado experimental de variación de la masa con la velocidad. Con todo ello se anula el carácter de revisión crítica de los conceptos clásico que lleva consigo la nueva teoría, ya que no se menciona siquiera cómo se han obtenido esos resultados experimentales.

Una manera de inquietar la mente clásica del alumno sería describiéndole alguno de los experimentos con los que se comprueba la variación de la masa. Por ejemplo, un estudio elemental del espectrómetro de masas hace caer en la cuenta que las partículas, cuya masa queremos medir, han de ser aceleradas a altas velocidades (si queremos poner de manifiesto algún efecto relativista). La medida de su masa se calcula por la desviación que sufren dichas partículas al atravesar un campo de fuerzas, perpendicular a la dirección de las mismas, ya sean eléctrico o magnético. Dicha desviación es proporcional al cuadrado de la longitud del trayecto recorrido por la partícula en dicho campo, e inversamente proporcional a su masa.

Lo que en estas condiciones se observa es una disminución en la desviación esperada, tal como muestra la figura:

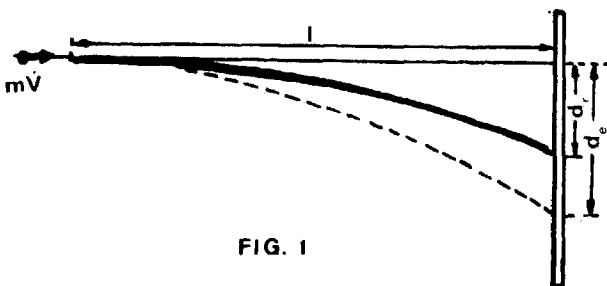


FIG. 1

$$d_e = K \frac{l^2}{m}$$

$$d_r = K \frac{l^2}{m_r}$$

Podemos suponer que este acortamiento de la desviación se debe a un crecimiento de la masa con la velocidad; pero, ¿dónde se encuentran las bases relativistas en este razonamiento? Considerando estas podemos razonar de otra forma: sabe-

mos que una partícula con velocidad  $v$  observa una contracción en las longitudes dadas por la contracción de Lorentz. Por tanto, no ve la longitud del campo de fuerzas como es  $l$ , sino contraída hasta  $l'$ , tal como observamos en la figura:

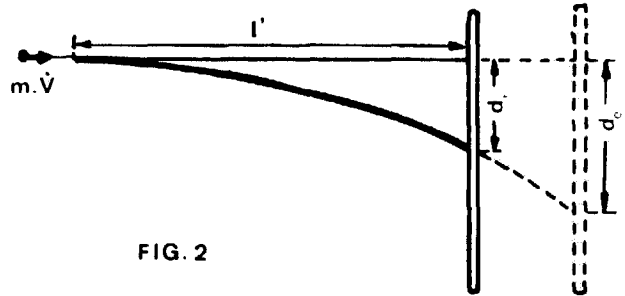


FIG. 2

$$d_r = K \frac{(l')^2}{m}$$

Vemos de estos razonamientos que la masa en cuanto tal no ha variado realmente; lo único que ocurre es que aparece un factor de contracción relativista en las expresiones utilizadas para calcularla. Es decir, *la masa sigue siendo una propiedad característica de la partícula* y, por tanto, no hay razón para introducir un concepto ficticio que no tiene más objeto que el de conservar formalmente las expresiones clásicas.

Esta fuerte tendencia (seguir manteniendo formalmente las ecuaciones no relativistas) hace sospechar de que no se haya comprendido lo que significa realmente la teoría de la relatividad. Efectivamente: hemos llegado a la conclusión de que es necesario, a partir de ahora, considerar todos los sucesos dentro del espacio tetradimensional de Minkowski. Esto lleva consigo una reformulación de todas las leyes y magnitudes físicas y no una simple generalización «añadiendo una coordenada más». Empeñarse en seguir manteniendo (aún solamente desde el punto de vista formal) las expresiones clásicas equivale a forzar dichas expresiones introduciendo conceptos dudosos desde el punto de vista físico.

## RELACION MASA-ENERGIA

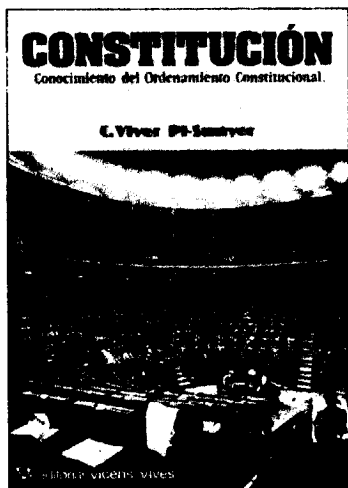
Con todo lo expuesto resulta evidente que la masa sigue siendo una propiedad intrínseca de la partícula (nos referimos, claro está, a la masa en reposo que es la única que tiene significado físico, pues la «otra» depende del estado de referencia del observador, cosa absurda para la propia partícula). Se podría argumentar ahora: ¿Qué significado tiene entonces la relación de Einstein entre masa y energía? Si esta relación es cierta, ¿por qué a un aumento de energía cinética no le corresponde un aumento

# LA NOVEDAD QUE USTED ESPERABA

Para el estudio del  
«Ordenamiento Constitucional  
en Bachillerato y en  
Formación Profesional»,  
regulado por la ley 19/1979

## CONSTITUCIÓN

Conocimiento  
del Ordenamiento Constitucional



Un libro de  
**C. VIVER  
PI-SUNYER**

### INDICE GENERAL INTRODUCCION

Concepto y contenido de la Constitución.

### PARTE I

El estado social y democrático de derecho  
como régimen político en España.

### PARTE II

La monarquía parlamentaria  
como forma de gobierno en España.

### PARTE III

La autonomía política  
como forma de organización territorial  
del Estado en España.

### ANEXO

Texto completo de la Constitución.

 **editorial vicens-vives**  
Avda. de Sarrià 130-132 ■ Barcelona-17

de masa? ¿no parece que todo ésto está en contradicción con los hechos experimentales?

Vayamos por pasos. En primer lugar establecimos que, *en ausencia de fuerzas exteriores* al sistema, se conservaba el tetravector  $p$ , lo que equivale a la conservación de  $\beta$  y  $T$ . Por tanto, en estas condiciones, cualquier variación de energía cinética (en sentido clásico), tiene que ser compensada con una variación de masa de signo contrario. Esto se puede comprobar experimentalmente con los productos de desintegración de un átomo. Podemos suponer que la energía total de la partícula se haya repartida en dos partes: el recipiente dinámico de la energía cinética y el estático cerrado por la masa de la partícula. Esos dos recipientes no están incomunicados, sino que puede haber un intercambio entre sus contenidos.

Tal como dice Levich en su curso de Física Teórica, «la masa y la energía están indisolublemente unidas entre sí y son proporcionales. No hay que confundir, claro está, los conceptos de equivalencia y de identidad. La energía y la masa son dos características físicas de las partículas, distintas una de otra, y la ley de equivalencia establece únicamente la proporcionalidad entre ambas. La relación mutua entre masa y energía es análoga a la que existe entre las masas gravitatoria e inerte en mecánica clásica: las dos están indisolublemente vinculadas entre sí y son proporcionales, pero constituyen a la vez características distintas».

Como resumen, hemos de indicar una vez más el peligro que se corre al exponer el concepto de energía relativista fuera propiamente de la formulación tetradimensional. Conceptos experimentales no fundamentados debidamente en la teoría pueden dar origen a interpretaciones erróneas asignando carácter real a expresiones o denominaciones que sólo lo tienen desde un punto de vista formal y operativo. Por otro lado, la formulación tetradimensional ofrece un panorama energético, coherente con las bases de la teoría relativista, al mismo tiempo que se deducen en forma sencilla todas las propiedades de los nuevos entes físicos: los tetravectores.

### BIBLIOGRAFIA

- (1) «FISICA»: P.S.S.C. Reverté, 1970.
- (2) «FISICA» (Tomo I. Mecánica): Alonso-Finn. Fondo Educativo Interamericano, 1970.
- (3) «Mecánica Clásica»: H. Goldstein. Aguilar, 1972.
- (4) «Estructura de la materia»: Christy-Pytte. Reverté, 1971.
- (5) «Historia de la física»: D. Papp. Espasa-Calpe, S.A., 1961.
- (6) «El significado de la relatividad»: A. Einstein. Espasa-Calpe, S.A., 1971.
- (7) «Física teórica»: Levich. Reverté, 1974.
- (8) «Electrodynamics»: A. Sommerfeld. Academic Press, 1952.
- (9) «Relatividad Especial»: French. Reverté.
- (10) «Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad»: R. Resnick. Limusa, 1977.