Los métodos de la lógica

Por Maximiliano FARTOS MARTINEZ (*)

Agrupamos los métodos de la lógica en tres grandes rúbricas:

— Métodos sintácticos.
— Métodos semánticos.
— Métodos algorítmicos.

Entre los primeros estudiaremos el método axiotico y los sistemas de deducción natural. Dentro del segundo apartado consideraremos el método de las tablas semánticas y la utilización de interpretaciones y modelos para pruebas de independencia, y en general la importancia decisiva y la fecundidad del enfoque semántico para la demostración de los principales metateoremas. Bajo la tercer clase de métodos nos referiremos a los métodos de decisión y los problemas conectados con la decibilidad.

1. METODOS SINTACTICOS

La sintaxis es aquella parte de la semiótica o ciencia general de los signos que se ocupa de las relaciones de los signos entre sí, prescindiendo de lo que designan y significan. Las otras dos partes, la semántica y la pragmática, se ocupan respectivamente de las relaciones de los signos con los objetos a que se refieren y de las relaciones de los signos con los sujetos que los usan. Esas tres dimensiones de los signos están sin duda alguna vinculadas entre sí. «La relación pragmática supone la semántica y la sintáctica; la semántica supone la sintáctica. Una palabra sin sentido no puede servir para entenderse, y para que una palabra tenga sentido debe estar en determinadas relaciones con las otras palabras. En cambio, la relación sintáctica no supone las otras dos y es posible estudiar la semántica sin atender a la pragmática» (1).

Aunque esta famosa división de la semiótica es generalmente aceptada, el acuerdo ya no es tan unánime cuando se trata de dividir a su vez en pura y descriptiva cada una de las partes. Y en particular hay lógicos actuales que consideran deseable «una nueva definición de algunos conceptos semióticos básicos», puesto que, según ellos, «la distinción entre sintaxis y semántica no es en modo alguno tan clara como puede parecer por las definiciones respectivas. En la práctica, tal como se usan esos términos, no sólo son un tanto vagos, sino que, sin duda alguna, se solapan en sus significaciones»; solapamiento que «está reconocido por Tarski» (2). Sin emprender ahora análisis pormenorizados al respecto, nos limitaremos a emplear aquí los términos «sintaxis» y «semántica» en un sentido amplio como marcos para encuadrar los diferentes métodos lógicos.

1.1. El método axiomático

La característica fundamental de toda teoría axiomatizada es la división de todos los enunciados del campo del saber que en ella se trate en dos clases:

a) La de los *axiomas o postulados* aceptados en principio, en razón de su evidencia o por simple convención razonable.
b) La de los *teoremas*, que son los enunciados deducimos a partir de los axiomas por inferencia lógica.

Puede decirse que la silogística aristotélica fue «axiomatizada» por su fundador al conseguir «reducir» el resto de los modos silogísticos válidos a unos pocos de ellos tomados como primitivos. Sabemos también que los estoicos axiomatizaron las propias reglas de su lógica. No obstante, la axiomatización considerada como modélica durante siglos fue la contenida en los *Elementos* de Euclides. En los siglos XVII y XVIII no sólo la «filosofía natural» se fijaba en ese modelo, sino que incluso la filosofía *ut talis* pretendió presentar sus demostraciones *more geométrico*. Recuérdese la *Etica* de Espinoza. Vieta y Leibniz con su preocupación por la formalización del lenguaje matemático y lógico fomentaron sin duda el desarrollo del estilo axiomático. Pero el hecho decisivo para el despliegue sistemático que después había de conocer dicho método fue el descubrimiento de las geometrías no euclidianas. En el presente trabajo nos veremos forzados a referirnos varias veces a este acontecimiento trascendental de la historia de la ciencia. Entonces los matemáticos se vieron abocados a suplir cada vez más la antigua confianza en la intuición por el rigor lógico de las demostraciones. Siguiendo esta nueva dirección se vio la necesidad de llegar a sustituir las teorías

---

* Catedrático de la Universidad Complutense.

(1) BOCHENSKI, *Los métodos actuales del pensamiento*, Madrid, 1968, 74-75.

(2) CURRY y FEYS.: *Lógica combinatoria*, Madrid, 1967, 60, 59, 61. Cfr. MORRIS, Ch.: *Fundamentos de la teoría de los signos*, México, 1958. CARNAP: *Intrpduction to semantics*, Harvard University Press, 1961. *Logische Syntax der Sprache*, Viena, 1934. TARSKI: «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen» en *Studia Philosoph.*, vol. 1, 1936, 261-405. *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica*, Buenos Aires, 1972.

deductivas concretas por teorías deductivas «puras», en las que no sólo no se parte ya de unos axiomas o postulados considerados como evidentes, sino que ni siquiera los términos primitivos del sistema quedan restringidos a una determinada interpretación. Si además las reglas empleadas en la deducción de los teoremas son explícitamente formuladas, sin permitir entrar en juego ninguna otra por más intuitivamente evidente que parezca, entonces se habrán eliminado los elementos ingenuos y se habrá llegado a la construcción de un *sistema formal*. A Hilbert se debe en primer lugar «el subrayar que la formalización estricta de una teoría envuelve la total abstracción del significado, dando por resultado lo que se denomina un *sistema formal o formalismo*», y en segundo lugar se le debe «su método consistente en hacer del sistema formal, considerado como un todo, el objeto de un estudio matemático denominado *matemático o teoría de la demostración*» (3). En un sistema de objetos en el que se efectúa esa abs-abstracción total del significado «los objetos del sistema son conocidos sólo mediante las relaciones del sistema». Lo que se establece es «la estructura del sistema, dejando sin especificar qué sean esos objetos en cuales quiera de sus respectos, con la excepción del que se refiere a saber cómo encajan en dicha estructura». Ulteriormente puede hallarse «una representación (o modelo) del sistema abstracto, esto es, un sistema de objetos que satisface las relaciones del sistema abstracto y tiene además un estatuo propio». Por otra parte, estos objetos del modelo pueden ser elegidos también «de algún otro sistema abstracto (o incluso del mismo sistema de que se trate bajo una reinterpretación de sus relaciones» (4). Así pues, podemos afirmar que «un sistema formal es esencialmente un conjunto de teoremas obtenidos mediante reglas precisas y referentes a objetos indeterminados» (5).

Para obviar las ambigüedades, redundancias y dificultades de todo tipo propias de los lenguajes *naturales*, cuando se los pretende emplear con fines científicos, la construcción de sistemas formales va normalmente precedida o acompañada de la elaboración de lenguajes artificiales apropiados. No obstante incluso una lengua "natural" (corriente) pudiera, en principio, ser formalizada, mientras que cabe muy bien considerar un lenguaje artificial como no formalizado» (6). Los sistemas formales, pues, son sistemas axiomáticos, que constan de símbolos cuya interpretación no pertenece al sistema y que están estructurados de la siguiente forma:

1) Símbolos primitivos.
2) Reglas de definición.
3) Símbolos derivados.
4) Reglas de formación de fórmulas.
5) Lista de axiomas.
6) Reglas de inferencia.
7) La serie de los teoremas.

Siendo los ingredientes característicos: 1, 4, 5 y 6.

En el capítulo V de *Outhines of a formalist philosophy of mathematics* ofrece H. Curry nueve ejemplos de sistemas formales, correspondientes a diversas teorías en la mayoría de los casos y a distintas formalizaciones de una misma teoría en los restantes.

El primero de ellos lo recoge en la ya citada *Lógica combinatoria* como ejemplo de sistema «completamente formalizado» y es el que insertamos a continuación:

a) Obs (objetos):

(1) Un ob primitivo: o.
(2) Una operación monaria, indicada por el índice.
(3) Una regla de formación de obs: Si x es un ob, entonces x' también lo es.

b) Enunciados elementales:

(1) Un predicado binario:
(2) Una regla de formación de enunciados elementales: si x e y son obs, entonces x = y es un enunciado elemental.

c) Teoremas elementales:

(1) Un axioma: 0 = 0.
(2) Una regla de deducción: Si x = y, entonces x' = y'.

Los teoremas elementales de este sistema son precisamente los que se indican en la siguiente lista:

$$0 = 0$$
$$0' = 0'$$
$$0'' = 0''$$

que son enunciados verdaderos del sistema. Pero, una vez definido este, podemos formar *epiteoremas*, es decir, enunciados sobre él. Por ejemplo:

Si y es un ob, entonces y = y.

es un enunciado verdadero sobre el sistema, aunque no es un teorema elemental (7).

Entre las diferentes axiomatizaciones de la lógica de enunciados una de las que goza de universal aceptación es la presentada por Lukasiewicz en 1929, y que, siguiendo a Frege, toma como términos primitivos los correspondientes a la implicación material y a la negación (8).

Utilizando la notación de Lukasiewicz el sistema queda estructurado de la siguiente forma:

1) *Símbolos primitivos*

a) Constantes lógicas: C, N.
b) Variables enunciativas: p, q, r, ...

2) *Reglas de Formación de fórmulas*

a) Cualquier variable enunciativa en una fórmula.
b) Si x es una fórmula, Nx es también una fórmula.
c) Si x e y son fórmulas, Cxy es igualmente una fórmula.

3) *Axiomas* (Lukasiewicz llama *tesis* tanto a los axiomas como a los teoremas).

T_1 C C p q C C q r C p r
T_2 C C N p p p
T_3 C p C N p q

---

(3) KLEENE.: *Introducción a la metamatemática*, Madrid, 1974, 64.

(4) *Ibid*, 34.

(5) CURRY y FEYS.: *o.c.*, 32.

(6) BOCHENSKI, *o.c.*, 92.

(7) Cfr. CURRY y FEYS.: *o.c.*, 33-34. Sobre la idea de «formalización completa», vease págs. 55-56.

(8) Cfr. LUKASIEWICZ.: *Arist. Syllog.* Oxford, 1957, 79-83. Cfr. GARRIDO.: *Lógica Simbólica*, Madrid, 1974, 297-300.

4) *Reglas de inferencia*

a) Regla de sustitución: A partir de una tesis aceptada del sistema pueden deducirse nuevas tesis, escribiendo en lugar de cualquiera de sus variables, en todas y cada una de sus ocurrencias, una fórmula cualquiera.
b) Supuesta una tesis del tipo Cxy, si hay otra tesis que consista en el antecedente x, entonces puede afirmarse como nueva la tesis y, que consista en el consecuente separado de aquel condicional.

Así pueden obtenerse todas las tesis verdaderas del sistema. No obstante, para abreviar la escritura de las fórmulas y para hacer más sencillas las demostraciones se introducen:

5) Como símbolo derivados: K, A, E de acuerdo con las definiciones:

K p q = N C p N q
A p q = C N p q
E p q = K C p q C q p

6) Como nueva regla de inferencia, la regla de *intercambio*, que permite reemplazar el *definiens* por el *definiendum* y viceversa.

Como ejemplo de derivación de una nueva tesis presentamos la que da Lukasiewicz, en el formato sintético que él utiliza, para obtener a partir de los tres axiomas la ley de identidad Cpp. La deducción requiere dos aplicaciones de la regla de sustitución y otras dos de la regla de separación:

$T_1 \cdot q/C\ N\ p\ q\ X\ C\ T_3 — T_4$
$T_4 \cdot C\ C\ C\ N\ p\ q\ r\ C\ p\ r$
$T_4 \cdot q/p,\ r/p\ X\ C\ T_2 — T_5$
$T_5 \cdot C\ C\ p\ p$

Este sistema de Lukasiewicz posee el encanto de ser una especie de recopilación histórica. En efecto, el primer axioma es la *ley del silogismo hipotético*, cuyo origen se remonta a Aristóteles; el tercero es la llamada *ley de Duns Escoto* (aparece por primera vez en un comentario a Aristóteles atribuido al *doctor Subtilis)*; el segundo es la conocida *ley de Clavius*, jesuita del siglo XVI, que fue el primero en llamar la atención sobre esta ley en un comentario sobre Euclides. Por lo que respecta a las reglas de inferencia, la regla de sustitución equivaldría al *dictum de omni* aristotélico; la regla de separación es el *modus ponens* de los estoicos, y la regla de intercambio «es —como escribe el profesor Garrido— trasunto de la propiedad tradiccional de las definiciones, según lo cual todo lo que sea verdad del extremo definiente *(definiens)* ha de serlo igualmente del extremo definido *(definiendum)*».

Entre los sistemas axiomáticos de lógica elemental cabe destacar dos formulados recientemente (en la década 1950-1960) que han tenido una extraordinaria acogida entre los tratadistas. Nos referimos a los sistemas de Church y de Kleene. Mientras que el del primero presenta un número muy reducido de símbolos lógicos primitivos y de axiomas, el del segundo exhibe abundancia de ellos (9).

Pero sin lugar a dudas la más bella construcción, aunque seguramente no tan verdadera, que se ha elaborado por el método axiomático ha sido la teoría axiomática de conjuntos.

A finales del siglo diecinueve se produce la másl profunda crisis de fundamentos en la matemática. Con la aritmetización del análisis y posterior reducción de los números naturales a los conjuntos, todo el edificio de la matemática pura se apoyaba por fin en el concepto de conjunto. *Pero en el interior mismo de* la teoría «ingenua» de conjuntos aparecieron paradojas lógicas (como la de Cantor, la de Burali Forti y la de Russell), y a la antigua paradoja semántica del mentiroso vinieron a sumarse otras nuevas (la de Richard, la de Grelling). Ante el reto de las paradojas se hacía necesario elaborar una teoría «no ingenua» que solventara la crisis del cantorismo. En la primera década de nuestro siglo, o precisando más, entre los años 1906 y 1908 surgen independientemente y casi a la vez tres líneas distintas de pensamiento que suponen otras tantas propuestas de solución a la crisis: la de Zermelo que propone construir una teoría axiomática de conjuntos, añadiendo axiomas específicos de la teoría a la lógica elemental tomada como única base; la de Russell o línea logicista que opta por desarrollar el programa logicista, tomando como base la lógica superior y la teoría de los tipos; y la de Browwer con quien recobran nuevo vigor las tesis finitista y constructivista del intuicionismo.

Entre los posteriores desarrollos de la línea iniciada por Brouwer cabe destacar la formalización de la lógica intuicionista realizada por Heyting y las recientes aportaciones de Kleene. El programa logicista desarrollado en los *Principia Mathematica* ha sido remodelado después de forma muy original en los sistemas de Quine.

Entre las múltiples presentaciones axiomáticas de la teoría de conjuntos que se han producido siguiendo la dirección emprendida por Zermelo (la línea comunmente conocida como «axiomática») cabe destacar dos orientaciones fundamentales: la de la teoría axiomática conocida como sistema de Zermelo-Fraenkel (o simplemente con la sigla Z F) y la teoría axiomática conocida como sistema de Von Newmann-Bernays-Gödel (o sistema N B G). Una de las diferencias que saltan a primera vista es que mientras en Z F se opera sólo con conjuntos en N B G se admiten clases y conjuntos; o dicho con más precisión, se admiten clases normales (las clases que son elemento de alguna otra) que son los conjuntos, y también se cuenta con las clases últimas (clases no normales) que no son conjuntos. Por supuesto está probada la consistencia relativa de N B G respecto de Z F. ¿Se trata entonces de dos teorías o más bien de dos formulaciones de la misma teoría? Los seguidores de Z F se inclinan por el segundo miembro de la alternativa: «The main point which will, in our opinion, emerge from this analysis, is that set theory with classes and set theory with sets only are not two separate theories; they are, essentially, different formulations of the same underlying theory» (10).

---

(9) Cfr. CHURCH.: *Introduction to mathematical logic*, vol. I, Princeton, 1965. KLEENE.: *Intr a la Metam. ed. c.* Ambos sistemas están recogidos en el libro citado de Garrido, págs. 280-288.

(10) FRAENKEL, BAR-HILLEL, LEVY.: *Foundations of set theory*, Amsterdam, 1973, 119. Este libro, del que justamente dice el profesor Garrido en la recensión hecha para *Teorema* que es «casi único en su género» contiene una abundante bibliografía. En castellano pueden verse: en la dirección del sistema Z F: SUPPES.: *Teoría axiomática de conjuntos*, Cali-Colombia, 1968; en la línea del sistema N B G: MOSTERIN.: *Teoría axiomática de conjuntos*, Barcelona, 1971.

1.2. Método de la deducción natural

En realidad los sistemas de reglas de deducción natural son algo así como sistemas axiomáticos sin axiomas. En todo caso se puede decir de ellos que también son sistemas formales. Sistemas formales en los que las funciones de los axiomas estarían suplidas por determinadas reglas peculiares: las de introducción y eliminación de premisas.

Gentzen consideraba que los cálculos logísticos, tal como él los encontró presentados, no eran adecuados para servir a los matemáticos o científicos y que se alejaban demasiado de la manera *natural* de razonar. Como escribe Feys en la introducción a la traducción francesa del famoso artículo de Gentzen (11) «Untersuchungen über das logische Schliessen» de 1934: «Gentzen ha empleado un camino diferente del de Hilbert. Ha valorado el empleo frecuente y natural, en matemáticas, de razonamientos a partir de una suposición (razonamientos que proceden en fin de cuentas al modo de las pruebas *ex suppositione* de los antiguos). Para formalizar estos razonamientos deberá introducir la aserción «esto es verdadero bajo tal suposición como elemento formalizado de sus sistemas». En efecto, la forma más «natural» de proceder cuando nos enfrentamos a la tarea de deducir algo de algo es que desencadenemos secuencias del tipo: supongamos el antecedente... y supongamos también «de momento»..., entonces se seguirá que..., pero si esto es así, ocurrirá..., etc.

Al igual que en los sistemas formales axiomáticos también en los sistemas de deducción natural se puede optar por una mayor o menor abundancia de símbolos primitivos y reglas básicas de derivación.

Es muy frecuente (y didácticamente muy recomendable) que, además de la regla de introducción de premisas, se empleen, siguiendo a Gentzen, como reglas básicas dos para cada símbolo de constante lógica empleada: una de introducción y otra de eliminación. Así para la lógica elemental sin identidad es usual emplear las correspondientes pares de reglas para la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional, el cuantificador universal y el cuantificador existencial.

Cuando en una línea de una derivación realizada de acuerdo con las reglas establecidas aparece un enunciado que depende del conjunto vacío de premisas, dicho enunciado es un teorema. Es de capital importancia resaltar que para la lógica elemental se dispone de sistemas formales de deducción natural cuyo rendimiento es equivalente al de los correspondientes sistemas formales axiomáticos.

Para entrever esa equivalencia entre el rendimiento de ambas presentaciones de la lógica elemental vamos a comparar el sistema de reglas expuesto en el texto de B. Mates y el sistema axiomático de Church al que aludíamos en páginas anteriores.

Las diferencias más chocantes a primera vista entre SN y SA es que en SN se introducen premisas en lugar de partir de unos axiomas fijos como en SA, y luego esas premisas se eliminan por 2), quedando los teoremas sin depender de nada. Pues bien 1) y 2) quedan justificados respecto a SA por la demostración del *teorema de deducción* (que se utiliza en SA ulteriormente como regla derivada).

3) Se corresponde con VII. 4) puede justificarse en SA, ya que en SA se prueba IX y la ley de importación, llegándose a $(A \rightarrow B) \cdot -B) \rightarrow -A$ y 4) es la regla obtenida a partir de este esquema. 5) se corresponde con la regla obtenida a partir de V.

Sistema de deducción natural S N	Sistema axiomático S A
1) Regla de introducción de premisas 2) Regla de Condicionanalización 3) *Modus Ponens* 4) *Modus Tollens* 5) Especificación universal 6) Generalización universal 7) Cuantificación existencial 8) Intercambio deficional	**Axiomas** I) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ II) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow$ $\rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow$ $\rightarrow (A \rightarrow C))$ III) $(-A \rightarrow -B) \rightarrow$ $\rightarrow (B \rightarrow A)$ IV) $(A \rightarrow Pa) \rightarrow$ $\rightarrow (A \rightarrow (x)Px)$ V) $(x)\ Px \rightarrow Pa$ **Símbolos definidos** VI) Además de las definiciones que se contemplan igualmente en 8) de SN, se incluye: $(\exists x)\ Px = df\ -$ $-\ (x)\ -\ Px$ **Reglas de inferencia** VII) *Modus ponens* VIII) Generalización **Teoremas** IX) $(A \rightarrow B) \rightarrow$ $\rightarrow (-B \rightarrow -A)$

6) está directamente relacionado con IV y VIII. 7) y 8) están comprendidos en VI.

Decíamos más arriba que una vez constituido un sistema formal podíamos considerarlo como un todo y hacerlo objeto de estudio metateórico. Aquí, por ejemplo, hemos comparado dos sistemas formales con miras a establecer la equivalencia de su rendimiento.

Entre las propiedades principales de los sistemas formales en los que se centran los estudios metateóricos figuran: la consistencia, la completud, la decibilidad, la independencia, la categoricidad. Mientras que esta última es una propiedad netamente semántica, las otras cuatro pueden ser consideradas sintáctica o semánticamente, si bien la independencia de los axiomas es demostrada en la mayoría de los casos semánticamente. Veamos como define Curry las otras tres:

«A system is consistent if not every elementary proposition is a theorem; it is complete if every elementary proposition is either a theorem or implies every elementary proposition; it is resolvable if there exist a definite algorithm wich, given an elementary proposition, will determine definitely wether or not it is a theorem» (12).

El cálculo proposicional es consistente, completo y decible. A Post se deben pruebas de carácter sintáctico de la consistencia y completud de dicho cálculo.

---

(11) Cfr. GENTZEN, *Recherches sur la deduction logique*, PUF, Paris, 1955.

(12) CURRY: *Outli Form. Phi. of Math.*, Amsterdam, 1970, 51-52.

2. METODOS SEMANTICOS

Aunque no se ha conseguido un criterio formal de diferenciación entre sintasis y semántica puede hablarse de un acuerdo unánime en cuanto al carácter semántico de los conceptos de consecuencia y validez universal, en correspondencia con los conceptos sintácticos de derivabilidad y de teorema.

En cuanto a las propiedades de los sitemas formales enfocados desde los puntos de vista sintáctico y semántico Hao Wang ha escrito:

«Acerca de cada uno de los sistemas formales podemos plantear diferentes problemas. Estos problemas se distribuyen de ordinario en dos familias: problemas *sintácticos*, que se refieren al sistema considerado como un formalismo puro o como una máquina que maneja expresiones simbólicas, independientemente de sus significaciones, y problemas *semánticos* que se refieren a la interpretación del sistema. Las nociones y problemas más importantes pueden dividirse del siguiente modo:

1. *De naturaleza sintáctica*	2. *De naturaleza semántica*
1.1. Formalismo	2.1. Modelo o interpretación
1.2. Teorema	2.2. Verdad o validez
1.3. Método de decisión para la demostrabilidad	2.3. Método de decisión para la verdad y criterio de id.
1.4. Consistencia	2.4. Realizabilidad
1.5. Consistencia relativa	2.5. Modelo relativo
1.6. Completud	2.6. *Categoricidad* (13).

En el punto 2.6. de esta tabla se debería hablar más bien de completud o saturación semántica, dejando aparte la categoricidad como propiedad netamente semántica; ya que si bien puede darse por bueno que todo conjunto de axiomas que es categórico es también semánticamente completo; cabe, en cambio, que un conjunto de axiomas sea completo en sentido semántico, o en sentido sintáctico, y no sea categórico (14).

Un sistema axiomático es categórico si todos sus modelos son isomórficos. Al lado de esta definición de la categoricidad absoluta (o simplemente cateforicidad) cabe dar otra referida a la categoricidad relativa: «Un sistema se dice *categórico respecto a una cierta clase de objetos* Cl pertenecientes a él, si todos los modelos de este sistema, en los cuales esta clase Cl recibe la misma interpretación, son isomorfos (15).

Veamos ahora algunas definiciones de las otras propiedades de los sistemas en sentido sintáctico y en sentido semántico:

Consistencia sintáctica

Un sistema es consistente si no toda fórmula del sistema es derivable en él. O también (en el caso de que el sistema incluya el operador de negación) si no es posible derivar en él una fórmula y su negación.

Consistencia semántica

Un sistema es consistente si no toda fórmula del sistema es una consecuencia lógica. O sencillamente, un sistema es consistente si es realizable.

Prescindiremos ahora de la ω— consistencia y de la consistencia relativa.

Completud sintáctica

De un sistema se dice que ex completo *en sentido fuerte* si toda fórmula perteneciente al sistema es derivable o refutable. Un sistema es completo *en sentido débil* si, añadiéndole una fórmula no derivable del sistema se torna en consistente.

Completud semántica

Un sistema es absolutamente completo o *saturado* si, y sólo si, toda fórmula válida del sistema es derivable.

Se dice que un sistema es completo en relación a un campo de interpretación, si toda fórmula del sistema, válida en relación a ese campo, es derivable, y recíprocamente.

Decibilidad sintáctica

Un sistema es decidible si se puede dar un procedimiento efectivo que permita determinar, para toda fórmula del sistema, si es o no es derivable.

Decibilidad semántica

Se dice que un sistema es decidible si se puede dar un procedimiento efectivo que permita determinar, para toda fórmula del sistema, si es o no es válida.

Independencia sintáctica

Dado un sistema formal se dice de uno de sus axiomas que es independiente si no es derivable del conjunto de los axiomas restantes.

Independencia semántica

Análogamente se dice que un axioma es independiente si no es una consecuencia lógica de los otros axiomas del sistema. Un axioma es independiente en este sentido si, y solamente si, hay un modelo que satisface al conjunto de axiomas restantes, y en el que resulta ser falso el axioma en cuestión.

2.1. Teoría de modelos y pruebas semánticas

En la segunda mitad del siglo XIX Beltrami y Klein consiguieron encontrar modelos euclidianos para la geometría hiperbólica (no euclidiana), con lo que quedaba demostrda la consistencia relativa de esta nueva geometría y la independencia del axioma de las paralelas.

Este descubrimiento paradigmático es recogido unánimemente hoy por todos los tratadistas de la moderna teoría de modelos como el más ilustre precedente histórico de la nueva disciplina. Otro hito igualmente memorable, el conocido teorema de Löwenheim-Skolem, pertenece ya a nuestro siglo.

El primero que empleó la expresión «teoría de modelos» fue Tarski, en 1954. En él hay que ver

(13) HAO WANG.: *Quelques notions d'axiomatique, Rev. phil.* Louvain, 51, 1953, pág. 411. Recogido por V. MUÑOZ en *Lecciones de lógica*, I, Salamanca, 1972, págs. 178-179.

(14) Cfr. FRAENKEL, BAR-HILLEL, *o.c.*, 297-298.

(15) LADRIERE: *Limitaciones internas de los formalismos*, Madrid, 1969, 71. Tendremos en cuenta esta obra igualmente para las definiciones que siguen.

al principal promotor de la actual semántica pura, si bien ya en las obras de Bolzano y Frege se encontraban importantes consideraciones semánticas y por más que en los tratados medievales de lógica, e incluso en los estoicos y en el mismo Aristóteles, puedan encontrarse pasajes muy sugestivos al respecto. El punto de arranque de los actuales desarrollos de la semántica se puede fijar en el artículo de Tarski «El concepto de verdad en los lenguajes formalizados» escrito en 1931 y cuya versión alemana para la revista *Studia Philosofica* ya hemos citado. En él se recupera la doctrina de la verdad contenida en el famoso pasaje de la metafísica de Aristóteles: «decir de lo que es que no es y de lo que no es que es, es falso; mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero». Ahora bien, Tarski hace resaltar el carácter metalingüístico del predicado «verdadero», y como el lenguaje corriente por su «universalismo», lejos de permitir la distinción nítida entre lenguaje objeto y metalenguaje, «es fuente de las llamadas antinomias semánticas, como la de el cretense o la de las palabras heterológicas», resulta como consecuencia que, para establecer una definición correcta de la expresión «enunciado verdadero», es necesario acudir a los lenguajes formalizados, con lo que esa noción deja de ser absoluta y queda relativizada al lenguaje formalizado concreto al que pertenezca el enunciado de cuya verdad se trate.

En *Undecidable Theories* establece Tarski la siguiente definición de modelo: «A possible realization in which all valid sentences of a theory T are satisfied is called a *model* of T» (16).

En esta definición aparecen conectadas las nociones de «realización», «validez», «satisfacción» y «modelo».

Vamos a ocuparmos ahora de establecer brevemente la conexión entre interpretación, satisfacción, verdad, modelo, verdad lógica o validez universal, y consecuencia lógica.

Dado un lenguaje L una interpretación J de L consta de:

1) 1) Un dominio no vacío (o universo del discurso) D.
2) Una asignación o atribución que asocie:
   a) Con cada constante individual de L un individuo o elemento de D.
   b) Con cada letra predicativa n-ádica de L una relación n-ádica entre miembros de D.
   c) Con cada letra enunciativa de L uno de los dos valores de verdad V o F.
   d) Las constantes lógicas conservan en la interpretación su significación usual.

Hemos supuesto que L es un lenguaje de lógica de primer orden sin identidad.

Dada una fórmula A del lenguaje L, un dominio D y una interpretación J, se dice que J *satisface* a A, si dicha fórmula al ser así interpretada se convierte en un enunciado verdadero.

He aquí una definición *recursiva* (o inductiva) de la satisfacción:

1. *La fórmula A es atómica*
   - 1.1. A es una letra enunciativa. Entonces J sat. A Sii J asigna el valor V a A.
   - 1.2. A es una predicación. Entonces J sat. A Sii los objetos que J asigna a las constantes individuales de A (tomándolos en el orden en que sus correspondientes constantes ocurren en A) guardan entre sí la relación n-ádica que J asigna al predicado n-ádico de A.

2. *La fórmula A es molecular*
   - 2.1. Su *signo lógico* principal es un conectivo.
     - 2.1.1. A = —B, entonces J sat. A Sii no es el caso que J sat. B.
     - 2.1.2. A = BvC, entonces J sat. A Sii J sat. B o J sat. C.
     - 2.1.3. Análogamente se procedería en el caso de que A fuera una conjunción, una implicación o una doble implicación. Dadas las reglas de intercambio definicional basta con los dos subcasos analizados.
   - 2.2. *Su signo lógico principal es un cuantificador*
     - 2.2.1. A = (x)B, entonces J sat. A Sii B x/a es verdadero bajo toda variante de a en J, siendo B x/a el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de la variable x por ocurrencias de la constante a, que se supone es la primer constante individual que no ocurre en B (partiendo de que las constantes individuales están enumeradas por el siguiente orden: a, b, ... t, a_1, b_1, ... t_1, a_2, b_2, ...).
     - 2.2.2. Análogamente si A tiene como símbolo principal el cuantificador existencial, exigiéndole solamente en este caso que B x/a sea verdadero, cuando menos, bajo una variante de a en J. La regla de intercambio definicional de cuantificadores nos permite por otra parte reducir los dos casos a uno sólo (17).

Por otra parte, de una interpretación que no cumpla las anteriores cláusulas se dice que no satisface a la fórmula en cuestión, o que ésta es falsa bajo esa supuesta interpretación.

Si una interpretación J satisface la fórmula A sin que quepa ejemplo alguno en contra, se dice que J es un *modelo* de A. (Análogamente tratándose de cualquier conjunto G de fórmulas).

Una fórmula A (o en general un conjunto G de fórmulas) es verdadero o válido bajo la interpretación J en el dominio o universo D si, y sólo si, dicha interpretación es un modelo suyo.

Un modelo M para el lenguaje L puede representarse por el par < D, J >, dónde D y J son respectivamente el universo y la interpretación elegidos. Suele escribirse M = < D, J >.

Dados dos modelos M = < D, J > y M', J' >

(16) TARSKI, MOSTOWSKI, ROBINSON: *Undecidable Theories*, Amsterdam, 1973, 11.

(17) Cfr. QUINE: *Filosofía de la lógica*, Madrid, 1973, 77-81. MATES: *Lógica matemática elemental*, Madrid, 1971, 77-79. GARRIDO: *o.c.* 226-228.

para un conjunto G de fórmulas del lenguaje L, se dice que M y M' son isomórficos si sólo si:

1) Para cada letra enunciativa P que ocurra en G, se cumple J(p) = J'(p), es decir, lo que J asocia con p es idéntico a lo que J' asocia con p.
2) Hay una aplicación biyectiva f entre D y D' tal que:

2.1. Para cada elemento x del dominio D y el elemento x' correspondiente del dominio D' se cumple: f(x) = x'.

2.2. Para cada relación n-ádica R de M y la correspondiente relación R' de M' se cumple:

$$R(x_1 \ldots x_n) \text{ Sii } R'(f(x_1) \ldots f(x_n))$$
para todas las $x_1 \ldots x_n$ de D (18).

Se dice que una fórmula A es universalmente válida o lógicamente verdadera si A es verdadera o válida bajo toda interpretación.

Una fórmula A es una consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas G, si no hay ninguna interpretación bajo la cual todas las fórmulas de G son verdaderas y A es falsa. O como diría Tarski, el enunciado A se sigue *lógicamente* del conjunto de enunciados G si y sólo si todo modelo del conjunto G es también un modelo de A.

«La distinción entre las dos clases de relación deductiva, la deducibilidad formal y la consecuencia semántica, no es trivial. En principio no está garantizado que ambas hayan de coincidir. Posiblemente el resultado más interesante de la investigación de sistemas de lógica elemental o de primer orden, es que en dicho orden la relación de deductibilidad y la relación de consecuencia son coextensivas o equivalentes. Este resultado se debe a Gödel (1930). Pero en teorías de orden superior no es ese el caso. En tales teorías el control lógico inherente a la relación de deducibilidad deja de ser operante, y es preciso atenerse tan sólo al criterio de consecuencia lógica» (19).

Para calibrar la fecundidad del método semántico bastará con mencionar algunos de los resultados metalógicos más decisivos: Se han conseguido diferentes pruebas semánticas de la consistencia y completud del cálculo proposicional, así como la consistencia de la lógica de primer orden. Sobresale especialmente el teorema ya aludido sobre la completud semántica de esa parte de la lógica. Una demostración implícita estaba contenida en las investigaciones de Herbrand (1930). La primera demostración explícita fue la ya mencionada de Gödel (1930). Una nueva prueba más sencilla fue conseguida por Henklin en 1949 (20). Un paso esencial en esta prueba consiste en la exhibición de un modelo enumerable construido sobre la base de una autointerpretación del propio sistema. En 1953 HASENJAGER presenta una simplificación de la prueba de Henkin. Otra demostración es conseguida por SCHUTE en 1956. Pruebas constructivas se deben a Hintikka, Beth y Smullyam. Hay asímismo una demostración de Rasiowa y Sikorski (1951) que utiliza álgebra y topología (21).

El teorema de Löwenheim (1915) generalizado por Skolem (1920) puede obtenerse como corolario de la prueba de Henkin y nos garantiza que si un conjunto de fórmulas es simultáneamnte satisfacible en un dominio no vacío, entonces es simultáneamente satisfacible en un dominio infinito enumerable.

El famoso teorema de incompletitud presentado por Gödel en 1931 tiene como punto crucial la exhibición de una expresión indecidible que es autorreferente pero cuya «circularidad» no es paradójica, pues, gracias a la estrategia de la aritmetización, la aritmetización de la matematica del cálculo aritmético permite reflejar las reflexiones *sobre* el cálculo *en* el cálculo mismo; se trata de un *sumergimiento* de la metaaritmética en la aritmética misma, mediante el rodeo de la aritmetización del cálculo PM que se supone coherente (más aún ω — coherente) y suficientemente amplio para que la aritmética recursiva sea formalizable en él (22). Ya hemos mencionado el carácter semántico de las pruebas usuales de independencia.

Es de destacar la reciente prueba de independencia de la hipótesis del continuo que nos ha conducido en teoría de conjuntos a una situación similar a la producida en geometría con la demostración de la independencia del quinto postulado de Euclides.

La prueba de independencia de la hipótesis del continuo se obtiene uniendo los resultados conseguidos por Gödel (1939) y Cohen (1963).

Gödel demostró la consistencia relativa del axioma de elección AE y la hipótesis generalizada del continuo HGC respecto de la teoría axiomática de conjuntos ZF. Para llevar a cabo la demostración empleó la noción de «conjunto constructible». Gödel llama constructibles los conjuntos que pueden ser obtenidos como resultado de una secuencia transfinita de definiciones predicativas. Llamando L a la «clase» de los conjuntos constructivos y V a la clase universal, la demostración discurre por los siguientes pasos:

1) Los axiomas de ZF se cumplen en L, es decir, los conjuntos constructibles son un modelo para ZF.
2) Axioma de constructibilidad: L = V. El universo de ZF y el de los conjuntos constructibles son equivalentes, es decir, todos los conjuntos son constructibles.
3) L = V es expresable en ZF y se cumple en L (en este punto entra en juego la noción de relación *absoluta)*.
4) El axioma de constructibilidad L = V implica el axioma de elección AE y la hipótesis del continuo HGC.

En conclusión: La consistencia de ZF implica la consistencia de ZF + AE + HGC.

---

(18) Cfr. MATES: *o.c.*, 229. CHANG, C.C. y KEISILER, H. J.: *Model theory*, Amsterdam, 1973, 20-21. Estos autores caracterizan a la teoría de modelos mediante la siguiente ecuación: álgebra universal + lógica = a teoría de modelos. Cfr. también: BELL, J.L. y SLOMSON, A.B.: *Models an ultraproducts: an introduction*, Amsterdam, 1974. Sobre la interpretabilidad de unas teorías en otras véase la obra de TARSKI, MOSTOWSKI, ROBINSON, antes citada pág. 20 y siguientes.

(19) GARRIDO: *o.c.* 231-232.

(20) Cfr. HENKIN, L.: «*The completeness of the first-order funcional calculus*», *Journal of Simbolic Logic*, vol. 14 (1949), 159-166. Recogido en HINTIKKA, J. (ed.): *The philosophy of mathematics*. Oxford university press, 1969.

(21) Cfr. BELL y SLONSON.: *o.c.*, 62-65 y 71.

(22) Cfr. CHURCH, A.: *Introduction to mathematical Logic*, Princeton, 1956, 238-245.

(22) Cfr. GODEL, K.: *On formally undecidable proposition of principia mathematica and related systems*, with introduction by R. B. BRAITH-WAITTE, London, 1962.

Cohen por su parte probó que: La consistencia de ZF implica la consistencia de ZF + — AE + — — HGC es decir, demostró la consistencia relativa de la negación del axioma de elección y la negación de la hipótesis del continuo respecto de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos. Hay interpretaciones en las que no se cumplen AE y/o HC y en las que en cambio siguen valiendo los axiomas de ZF.

Empleando las originales ideas de *forcing* y «conjunto genérico» logra construir en primer lugar un modelo N tal que en él se cumplen ZF y también HGC y AE, pero que contiene un conjunto a no constructible y, que, por lo tanto, no satisface V = L. De ahí se sigue, de momento, que aunque V = L implique HGC y AE, en cambio HGC y AE no implican V = L. Por una extensión ulterior del método se alcanza el resultado completo (23).

2.2. El método de las tablas semánticas

Entre los métodos semánticos merece una especial mención el denominado método de las tablas semánticas. Sabemos por la definición de consecuencia lógica que no cabe en una deducción correcta que, siendo verdaderas las premisas, sea falsa la conclusión. Supongamos un conjunto de premisas P y una supuesta conclusión c. Para comprobar si c se sigue de P podemos ensayar la búsqueda de una interpretación que satisfaga a P y a —c, en la seguridad de que si esto ocurre, entonces queda invalidada la supuesta inferencia. Ahora bien, en el caso de que la búsqueda del *contraejemplo* o *contramodelo* nos lleve a una contradicción, entonces queda garantizado que la conclusión c se sigue de las premisas P.

Realmente Aristóteles ya hizo uso del método de los contraejemplos para invalidar algunos modos incorrectos del silogismo. Este procedimiento «viene a ser una especie de versión semántica de la reducción al absurdo». No obstante «el hallazgo del contraejemplo era algo que dependía prácticamente del azar», hasta que las recientes investigaciones de E. W. Beth y J. Hintikka condujeron a la consecución de un método que permite la búsqueda sistemática de la interpretación invalidadora del argumento» (24).

El procedimiento consiste en la aplicación sistemática de un conjunto de reglas de eliminación de símbolos de constantes lógicas de acuerdo con una distribución tabular o arborescente que puede conducir a una de las tres situaciones siguientes:

a) Clausura completa, esto es, que en toda trayectoria continua descendente aparezca una fórmula atómica afirmada en una de sus líneas y negada en otra. En este caso la búsqueda sistemática del contraejemplo ha conducido a contradición, quedando refrendada la validez del argumento que se pretendía invalidar.

b) Que el procedimiento termine sin que se haya producido la clausura completa. En este caso el argumento sometido al proceso queda invalidado.

c) Que el procedimiento no tenga fin, es decir que la tabla se revele como *infinita*.

La situación c) puede presentarse y de hecho se presenta en los argumentos sometidos al control de este método intervienen fórmulas con letras predicativas poliadiádicas. Pero para los argumentos en los que sólo intervienen fórmulas del cálculo proposicional y/o del cálculo cuantificacional monádico las tablas en cuestión desembocan siempre en una de las dos primeras situaciones descritas. Esto es, el método de las tablas semánticas proporciona un algoritmo de decisión para la validez de las fórmulas pertenecientes a esa parte de la lógica.

3. EL METODO ALGORITMICO

Acabamos de decir que el método de las tablas semánticas permite decidir la validez de cualquier fórmula o argumento en los que no intervengan letras predicativas poliádicas. Sabemos también que toda fórmula válida de ese ámbito de la lógica puede ser obtenida como teorema, tanto por el método axiomático como por el método de la deducción natural, y que se cumple la recíproca: si una fórmula se obtiene como teorema es válida. No obstante hay una diferencia importante entre estos dos métodos y aquel otro. Tanto en el método axiomático como en el método de la deducción natural, por más que se conozcan estrategias ocasionalmente muy útiles, se requiere a menudo una cierta dosis de inventiva de quien lo practica para la derivación de los teoremas, no siendo infrecuentes los típicos fenómenos de «invisión» o de reestructuración gestáltica y hasta diferentes «estilos» de demostración. El método de las tablas semánticas, es, en cambio, mecánico. En él las demostraciones se realizan a través de pasos ordenados siguiendo una rutina establecida. Los procedimientos de este tipo son algorítmicos. Algunos procedimientos algorítmicos en el campo de las matemáticas se conocían desde la antiguedad. Recuérdese el algoritmo de Euclides para la descomposición de un número en sus factores primos. El ideal algorítmico ha sido una constante en el desarrollo de la lógica formal y hasta la década de los años 30 de nuestro siglo no se había conseguido demostrar los límites de estos métodos.

Desde hace tiempo se ensayaron y consiguieron varios métodos para resolver silogismos. El método de diagramas y diferentes tipos de máquinas lógicas constituyeron verdaderos métodos de decisión para ese campo y hay que verlos como auténticos precedentes de los métodos más potentes de que hoy disponemos (25).

Un método de decisión para las fórmulas y argumentos del cálculo proposicional es el constituido por el conocido método de las tablas de verdad. Otro puede obtenerse fácilmente a partir de la teoría de las formas normales.

(23) Cfr. COHEN, P. J.: *Set theory and the continuum hypotesis* W. A. Benjamin, Massachusetts, 1966 especialmente, págs. 85-99 y 120-127. Cfr. KRIVINE, J. L.: *Theorie axiomatique des ensembles*, Paris 1969, especialmente páginas 100-118. Cfr. SMULLYAN, R. M.: «*The continuum hypotesis*» en *The mathematical sciences, a collection of essays*, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1969, 252-260. Para el tratamiento de estas pruebas de independencia con modelos de valores booleanos Cfr. ROSSER, J. B.: *Simplied Independence Proofs*, Academic press New York and London, 1969.

(24) Cfr. GARRIDO, *o.c.*, 259. Cfr. BETH.: «Semantic entailment and formal derivability» recogido en HINTIKKA (ed.), *o.c.*, 9-41. Cfr. también la obra conjunta de BETH y PIAGET, *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*, Madrid, 1968, 33.

(25) Cfr. GADNER, M.: *Máquinas lógicas y diagramas*, México, 1973.

En cuanto a los métodos de decisión para la parte monática de la lógica de predicados cabe destacar los resultados de Löwenheim (1915), Behmann (1922), Von Wrigh (1949) y Quine (1950) (26).

En esta ocasión nos limitaremos a consignar aquí el siguiente teorema: «Si una fórmula del cálculo cuantificacional monádico es válida en un dominio de 2^n individuos, donde n es el número de letras predicativas distintas, entonces es válida en todo dominio no vacío».

Con motivo de este teorema hace Church las siguientes observaciones sobre la relación en el marco de la lógica de primer orden entre *The decision problem* i.e. *the decision problem for provability* y *the decision problem for validity*

«By Gödel's completeness theorem it istrue in one sense that a solution of a special case of the decisión porblem for validity is also a solution, in the same special case, of the decision problem. But in another sense —which ve have not attempted to make precise— this is not true, as may be seen from the fact that proof of** 466 (el teorema expuesto) provides no effective method of finding a proof of a wff A which passes the test of containing none but singulary functional variables and being valid in a domain of 2^n individuals» (27).

Hasta aquí hemos visto que para el cálculo de proposiciones y para el cálculo cuantificacional monádico no sólo se podía hallar una solución total al problema de la decibilidad, sino que además se cuenta de hecho con varios métodos concretos de decisión. El caso no es el mismo cuando sobrepasamos la lógica monádica, esto es, cuando nos enfrentamos con el problema de la decibilidad de todo el cálculo de predicados de primer orden. No se trata solamente de que no se disponga aún de una solución completa de ese problema, sino que existen razones que excluyen el que podamos llegar nunca a encontrarnos en posesión de una tal solución. A. Church ha demostrado el primero (1936) la imposibilidad de descubrir un proceso general de solventar la decibilidad.

Antes de describir a grandes rasgos la marcha de la argumentación de Church veamos como precisa Ackermann el alcance de sus consecuencias:

«No ha de malentendernos este resultado, por lo demás en el sentido de que podrían presentarse expresiones determinadas acerca de las cuales se probase que no es factible decidir si son universalmente válidas o no: de hecho no es posible tal prueba. Por si se puede probar que no cabe decir nada acerca de la validez universal o no de una expresión, existe también una demostración de que tal expresión no es deductible en el sistema de axiomas, o sea que —debido a la completitud de este sistema de axiomas, se tendría una demostración de que la expresión no era universalmente válida, contra lo que se había supuesto. Más la imposibilidad de un proceso general para solventar la decibilidad quiere decir lo siguiente: se ha encontrado procesos de esta índole para clases especiales de expresiones, y hemos de suponer que se encontrarán procesos análogos para aún otras clases de expresiones; ahora bien todos estos procesos callan acerca de expresiones cualesquiera. Con esto se aclara también al mismo tiempo porqué los esfuerzos para ampliar el campo de las expresiones cuya validez universal puede decidirse en uno u otro sentido, tropiezan cada vez con mayores dificultades» (27).

Insertamos a continuación un resumen panorámico de los casos especiales para los que se ha solucionado positivamente el problema de la decibilidad de la lógica de predicados de primer orden (28).

«El problema de la decisión ha podido ser resuelto para todo esquema bien formado que:

1) Sólo contenga letras funcionales monádicas.
2) Pueda ser reducido a una forma normal prenexuada cuyo prefijo no contenga:
   a) Ningún cuantificador existencial.
   b) Ningún cuantificador universal.
   c) Ningún cuantificador existencial delante de un cuantificador universal.
   d) Más que un cuantificador existencial.
   e) Más que dos cuantificadores existenciales que no se hallen separados entre sí por ningún cuantificador universal.
3) Pueda ser reducido a una forma normal prenexuada en la que:
   a) La matriz (esto es, la expresión que sigue al prefijo) sea una disyunción de componentes elementales y sus correspondientes negaciones o quepa reducirla a dicha forma.
   b) El prefijo sea de la forma $(\exists x_1) \ldots (\exists x_m)$ $(y_1) \ldots (y_n)$ y todo componente elemental de la matriz que contenga alguna de las variables $x_1, \ldots, x_m$ o bien al menos una de las variables $y_1, \ldots, y_n$.
   c) El prefijo concluya con $(z_1) \ldots (z_n)$ y todo componente elemental de la matriz que contenga alguna de las variables que intervienen en el prefijo contenga al menos una de las variables $z_1, \ldots, z_n$.
   d) El prefijo sea de la forma $(\exists x)$ (y) $(\exists z_1) \ldots$ $\ldots (\exists z_n)$, donde $n \leqslant 4$, y la matriz sea de la forma $G(x,y) \supset H(z_1, \ldots, z_n)$, con la letra funcional diádica G como única letra funcional en la versión completa o desarrollada de $H(z_1, \ldots, z_n)$.»

El teorema sobre la imposibilidad de hallar un procedimiento decisorio para el cálculo de predicados de primer orden puede esquematizarse de la siguiente manera. Desde la indecibilidad de la teoría elemental de números (presentida ya desde el teorema de incompletitud de Gödel) se arguye a la indecibilidad del cálculo de predicados de primer orden.

Llamando P a la aritmética de Peano, P^o a la aritmética de Skolem y Q al sistema de R. M. Robinson, A. Tarski y A. Mostowski, se cumple:

---

(26) Cfr. ACKERMANN, W.: *Solvable cases of the decision problem*, Amsterdam, 1954. CHURCH.: *o.c.*, 246-280. Para los métodos que emplea Quine para la decisión del cálculo cuantificacional monádico Cfr. QUINE.: *El sentido de la nueva lógica*, Buenos Aires, 1971, 94-96 y *Los métodos de la lógica*, Barcelona, 1962, 145-172 y 262-266, Cfr. VON WRIGHT.: *Logical studies*, Londres, 1957, 22-43. Una adaptación del método de Von WRIGHT puede verse en HUGHEUES y LONDEY: *The elements of formal Logic*, London, 1966, 182-197.

(27) CHURCH.: *o.c.*, 254.

(27) HIBERT y ACKERMANN, *Elementos de lógica teórica*, 4.ª ed. Madrid, 1962, 138-139.

(28) El texto que ofrecemos está en la pág. 675 de *El desarrollo de la lógica* de W. y M. Kneale, Madrid, 1972.

Q C P° C P. Aunque Q es considerablemente menos potente que P°, en cambio consta de un número finito de axiomas y a la vez es igualmente adecuado para la definición de las funciones recursivas. Ahora bien Q es indecidible porque admite en su interior la definición de la función diagonal. Más aún, es esencialmente indecidible, puesto que todas sus extensiones consistentes (como, por ejemplo, P° y P) lo son.

Llamando A a los axiomas especiales de Q el problema de saber si cabe probar, por ejemplo, F dentro del sistema Q queda reducido al de saber si cabe probar A → F dentro de la lógica de primer orden. Si esta lógica, lamémosle L, fuese decidible, habría de serlo también el sistema Q. Pero como ya sabemos que Q no lo es, se sigue por una sencilla aplicación del *modus tollens* que L tampoco puede serlo (29).

La notación de la teoría elemental de números es la del cálculo de predicados de primer orden con identidad, complementada con las notaciones 'x + y' y 'x · y' para la suma y el producto respectivamente. Las variables individuales x, y, z, etc., son las del tipo ordinario, pero construidas como referentes exclusivamente a los números naturales (30).

Varios problemas seculares, como el famoso de Fermatan resistentes a los más variados ensayos de solución y que son formulables en la notación de la teoría elemental de números, hacen que no sorprenda demasiado la indecibilidad de esta teoría. Por otro lado, conviene resaltar que para esta teoría las relaciones entre completitud y decibilidad son muy distintas a las que median entre ambas propiedades cuando se barajan en el marco de la lógica de predicados de primer orden. De la teoría elemental de números sabemos por el teorema de Gödel que es incompleta. Pero, además, si fuera completa podría hallarse para ella un procedimiento decisorio. Así que puede de nuevo arguirse su incompletitud a partir de su indecibilidad. En cambio de la lógica de predicados de primer orden sabemos por el otro teorema de Gödel que es completa, pero de su completitud no puede inferirse su decibilidad. Esta situación tan dispar «se debe al hecho de que un procedimiento demostrativo completo para la validez no acarrea consigo un procedimiento refutatorio completo de la validez, por que los esquemas no válidos no tienen siempre negaciones válidas. En cambio, un procedimiento completo de demostración de la verdad acarrea necesariamente un procedimiento completo refutatorio (si el sistema incluye la negación) y, por tanto, un procedimiento decisorio» (31).

Para demostrar la imposibilidad de un procedimiento decisorio general para la teoría elemental de números se sirvió Church de su famosa tesis de que «Toda función efectivamente calculable es recursiva general». Aunque esta tesis es más bien una conjetura dado el carácter vago e intuitivo de la noción de «función efectivamente calculable» es coincidente con muchas otras formas de abordar esta temática debidas a Gödel, Turing, Post y Kleene.

En particular: «la tesis de Turing de que toda función que sea naturalmente considerada como computable, es computable en el sentido por él especificado, esto es, computable por una máquina de Turing, es equivalente a la tesis de Church» (32).

No es este el momento de abordar los problemas filosóficos conectados con estas cuestiones, y en particular el de las relaciones entre inteligencia humana e inteligencia artificial (33).

En la introducción al ensayo citado de Turing escribe Garrido: «La tesis de la identidad de la mente con las máquinas no está aún definitivamente demostrada y continua siendo materia de conjeturas. Pero los adversarios de esta tesis han de poner ahora más cuidado que antes al elaborar sus argumentos». Por lo que toda en concreto a la indecibilidad de la lógica de predicados, Garrido termina su libro *Lógica Simbólica* relacionando ese resultado con la existencia de tablas semánticas infinitas y traduciendo un pasaje de Beth en el que éste expone su parecer de que «la mente humana está equipada con operaciones adicionales que van más allá del poder» de una supuesta máquina de buscar contraejemplos (34).

Terminaremos este apartado resaltando el hecho de que, según ha demostrado Tarski, el álgebra elemental de los números reales admite un proceso decisorio; y acompañando este resultado notable con el siguiente comentario de Quine: «La notación de este álgebra elemental es precisamente la misma descrita antes para la teoría elemental de números, con adición y multiplicación (ambas), y con la sola diferencia de que las variables se contruyen ahora como referentes a números reales en general, y no sólo a números naturales. A pesar de la complejidad aparentemente mayor de su tema, el álgebra elemental es completable y decidible mecánicamente, mientras que la teoría elemental de números no lo es» (35).

---

(29) Cfr. TARSKI, MOSTOWSKI, ROBINSON.: *o.c.*, 46 y ss. Cfr. W. y M. KNEALE.: *o.c.*, 682-685. Los dos trabajos de CHURCH «An insolvable problem of elementary number theory» y «A note on the Entscheidungs problem», aparecidos en 1936 respectivamente en las revistas *American Journal of Mathematics* y *Journal of Symbolic logic*, están reimpresos en DAVIS.: *The undecidable*, Nueva York, 1965.

(30) Cfr. QUINE.: *Los métodos de la lógica*, ed. c. 326.

(31) *Ibid.* 328 Cfr. también pp. 260-261. Cfr. también LORENZEN, *Matemática*, Madrid, 1971, 157.

(32) KLEENE, *o.c.*, 340. Toda esta problemática es minuciosamente tratada en esta obra ejemplar. Cfr. también LADRIERE, *Limitaciones internas de los formalismos*, ed. c. Cfr. H. ROGERS.: *Theory of recursive functions and effective computability*, New York, 1967.

(33) Cfr. TURING.: *¿Puede pensar una máquina?* Valencia, 1974. Cfr. A. NEWELL, y H. A. SIMON.: «Simulación del pensamiento humano», *Teorema* IV/3, 1974, 335-377. Cfr. SMART.: *Ent. Ci. y fils*, 230-247; Cfr. entre otras obras: VON NEUMANN. *The computer and the brain*, Yale University Press, 1974. STARKE, P. H. *Abstract automata*, Amsterdam. 1972. FRANK NORMAN.: *Markov Processes and Learning Models*, Now York, 1972.

(34) Cfr. el ensayo de Beth recogido en HINTIKKA (ed.) *ed. c.*, 34.

(35) QUINE, *o.c.*, 330. Sobre el método de eliminación de cuantificadores que utiliza Tarski en sus demostraciones de decibilidad de teorías Cfr. KREISEL y KRIVINE: *Elements de logique matematique*, Paris, 1967, 47-50. Cfr. también LORENZEN, *o.c.* 183 y ss.