2

El bachiller que llega a la universidad

(pequeño chequeo matemático)

Por José Javier ETAYO

Catedrático de Geometría Diferencial de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Es autor de libros sobre *Conceptos y métodos de la Matemática Moderna*, *Manual de Matemática moderna*, etc.

Recientemente la Facultad de Ciencias de Sevilla me invitó a intervenir en un cursillo de didáctica sobre la matemática en el Bachillerato; las páginas que siguen son algunas de las reflexiones que con ese motivo me hice y con ellas querría responder a la amable petición de esta revista, que me honra solicitando mi colaboración. Tanto más cuanto que hoy no me encuentro, como hace algunos años, en contacto muy directo con esos problemas; no digo que me sean indiferentes sino que no poseo una información muy precisa ni tampoco una meditación seria sobre ellos. Por eso creo que la única opción que me quedaba, y que traslado ahora a estas líneas, es tratarlos desde mi perspectiva actual.

Entre los cursos que imparto en la Facultad de Madrid figura el de 1.° de Geometría; durante muchos años he explicado también el Algebra lineal y el Cálculo infinitesimal del no hace mucho desaparecido curso selectivo. Me encuentro, pues, en la situación de enfrentarme con el alumno que acaba de finalizar el Bachillerato, de encajar los conocimientos y la formación que de él trae con los que ha de ir recibiendo en su carrera; quizá, pues, en una situación buena para juzgar, al menos desde un cierto punto de vista muy parcial, lo que las matemáticas de ese Bachillerato han hecho de nuestro estudiante.

Y pienso si podría ser útil lo único que yo puedo hacer ahora: RECAPACITAR UNA VEZ MAS SOBRE LA MISIÓN DE LAS MATEMÁTICAS, LA FORMA EN QUE CUMPLEN ESA MISIÓN Y EN QUÉ PROPORCIÓN DEJAN DE CUMPLIRLA, LA RESPUESTA DEL ALUMNO ANTE SUS REQUERIMIENTOS, LA VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS. Mi óptica es personal y, por supuesto, discutible y aun rechazable; no se trata de dogmatizar sino de esa cosa tan modesta de decir cómo creo ver la cuestión, sin estar demasiado seguro ni de si está bien vista ni de si debe ser como yo lo digo. Pero con todo, y a pesar de esta inseguridad, me parece que cualquier conversación, cualquier exposición de un punto de vista entre docentes, puede llegar a ser en alguna medida enriquecedora.

LA FORMACION MATEMATICA

Preguntémonos, pues, sobre la misión de la matemática en el Bachillerato. Siempre se ha dicho que es doble, como la de casi todas las disciplinas: formar e informar. ¿Y en qué sentido y en qué grado contribuye a formar e informar al muchacho? Esto es lo que yo querría plantear aquí: cómo veo a este bachiller cuando lo recibo a las puertas de la Facultad, tanto desde el punto de vista de su formación como de su información.

Ambas misiones están, evidentemente, muy relacionadas. En realidad, toda información ya forma de alguna manera. Cuando vuelvo a coger en 5.° curso a una parte de aquellos alumnos que conocí en 1.°, la situación es bastante distinta. Quizá sepan poco, como va siendo habitual en los últimos tiempos, pero parece que al menos el discurrir matemático ha llegado a impregnarles de algún modo. Pueden no saber una cosa pero, siquiera en general, creo que distinguen la diferencia entre saberla y no saberla. El estudio de las matemáticas, y por consiguiente de los métodos con que actúan, pienso que de alguna manera conforma sus mentes y les dota de aquellas cualidades que la formación matemática lleva consigo: la exigencia de rigor, la claridad en el planteamiento de las cuestiones, la lógica del razonamiento, la disciplina mental. Repito que puede que no tengan alguna de esas cualidades o todas ellas, pero al menos se dan cuenta de que no las tienen, saben en qué consiste tenerlas.

Ahora bien, esas propiedades intenta cultivar también la matemática en el Bachillerato. Ya se sabe que en él anda mezclada con otras materias, cada una de las cuales producirá quizá una formación peculiar, ¿pero será posible que hasta para hablar de las cosas propias de la matemática se utilice un lenguaje incompatible con ella? Y por lenguaje entiendo el modo de tratar sus problemas. Bien que las matemáticas no hayan formado totalmente a la persona, que está también sometida a otras formaciones, pero es que ocurre que no lo ha hecho ni aun para tratar de las matemáticas mismas.

Tengo a la vista un modelo, por supuesto muy exagerado, pero a veces conviene contemplar una caricatura para captar bien los rasgos. Pues bien, mi caricatura va a ser un examen de primer curso, el primer parcial de geometría, realizado por un alumno. Es verdad que este alumno no es un representante de la clase sino que lo he elegido precisamente por lo chusco de sus respuestas, pero cierto es también que dista mucho de ser un caso único. Alguna vez he recogido y publicado respuestas de los antiguos exámenes de preuniversitario, en los que muchas veces actué de examinador, regocijantemente disparatadas. Veamos lo que dice este alumno de I.°, eliminando de cada contestación aquellas pocas cosas que no tengan que ver con las preguntas que se le hacían.

1. Factorización canónica de una aplicación.

... Lógicamente y en virtud de las propiedades de las matrices, éstas de esta forma pueden dividirse en partes, que son llamadas cajas canónicas, con las ventajas de que las cajas que son cero se anulan... Otro tipo de factorización se lleva a cabo entre funciones o relaciones para descomponerlas en varias operadas entre sí por medio de aplicaciones. Este tipo de factorización tiene gran interés en su aplicación a problemas, si bien es de escaso interés teórico por su sencillez.

2. Imagen y núcleo de un homomorfismo entre grupos.

Sea (V,+) un grupo y (V',+) otro grupo, a la relación entre estos dos grupos se le denomina homomorfismo. Según si V y V' sean iguales o el tipo de relación que les une reciben diferentes nombres y notaciones...

3. Relación de equivalencia en un anillo asociada a uno de sus ideales. Anillo cociente.

Es la que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Esta se puede definir en un anillo, asociada a uno de sus ideales. Una de las partes fundamentales de los anillos es la formación del anillo cociente que consiste en la simple definición de que anillo cociente es A/I *y se escribe con esta notación.*

4. Definición y propiedades de la relación de dependencia lineal.

Las aplicaciones de los conceptos de dependencia e independencia lineal es muy grande, de ella se deriva el concepto de generador de tanta importancia y cuya primera condición es la de la dependencia lineal y a su vez de este concepto de generador se deriva el de base de un espacio vectorial de incalculable importancia en la teoría de los espacios vectoriales.

5. Cambio de base de un espacio vectorial.

El concepto de base de un espacio vectorial V es ser subespacio de este espacio y ser un sistema de generadores de V. Cada vez que tengamos que efectuar un cambio de base en el espacio vectorial deveremos (sic) *de comprobar estas propiedades. La rutina del cambio de base es ya sobradamente conocida y sólo incluye operaciones algebraicas sobradamente conocidas...* (Las cuales hace mal.)

6. Operaciones con matrices: propiedades.

Tipos de matrices: Según su forma pueden ser cuadradas, reztangulares (sic), *diagonales, triangulares, fila, columna, etc., si bien esto tiene poca importancia. Suma por un escalar: Se realiza sin complicaciones...* (Y pone una barbaridad.)

OTROS CONTRAEJEMPLOS

Como se ve, el chaval no tiene desperdicio. Se dirá que es un caso y que no demuestra nada, pero lo que me importa no es el ejemplo particular sino lo que tiene de significativo: el creer que se puede definir una cosa dando una simple orientación, a veces sólo su notación; escribir una barroca redacción que oculta un vacío total de contenido; insinuar las cosas que se podrían hacer sin hacerlas o, al menos, sin indicar con claridad cómo hacerlo... Si alguna cosa debe proporcionar el estudio de la matemática es saber fijar con precisión los límites de lo que se está diciendo, proporcionar un lenguaje absolutamente unívoco, definir un concepto señalando claramente y sin dejar lugar a duda alguna cuál es el objeto definido; evitar por completo la menor confusión. Podría ser ésta una importante labor formativa de las matemáticas del Bachillerato: lo diré con palabras de un admirado compañero, Julio Fernández Biarge, que de modo insuperable lo expresaba así (1):

Otra actividad que encuentra su lugar de desarrollo adecuado en la asignatura de matemáticas es la práctica de la utilización de lenguajes adecuados para la comunicación de estructuras, razonamientos, definiciones, condiciones, etc. y, en primer lugar, a la utilización de la lengua española con estas finalidades... Es lógico que el profesor de lengua española trate principalmente de mejorar las calidades literarias de las redacciones de nuestros alumnos, que fomente en ellos la utilización de las metáforas más imaginativas; sólo alguna vez tratará de enseñarles a redactar razonamientos en los que la precisión de las ideas expuestas sea más importante que la belleza del lenguaje empleado; incluso en estos casos tomará como temas para esos razonamientos cuestiones sociales, políticas, religiosas o filosóficas de la vida real; temas siempre complicados y confusos en sí... Sólo en la asignatura de matemáticas se tiene la verdadera oportunidad de formar la facultad del alumno de redactar en lengua española con precisión y claridad objetiva y la de leer, cuando sea necesario, exactamente lo que se dice en un texto, sin dejarse llevar de lo que sugiere, da a entender o hace suponer. Sólo en clase de matemáticas se comprenderá que el que afirma que tiene un ojo no está diciendo que es tuerto; puede tener además otro.

Véase, después de estas palabras, con qué deficiencias sobre lo que es expresar algo en matemáticas pueden llegar a terminar los alumnos el Bachillerato. Ahora ya no nos parecerá tan insólito el ejercicio de examen que antes he copiado: sus defectos, en él quizá exageradamente acusados, los tienen muchos otros. Y esto es frecuentísimo en muy distintos niveles. Como comprobación, he aquí un manojo de respuestas entresacadas de unos ejercicios de oposiciones.

Se preguntaba: **A lo largo de E. G. B. se estudian conjuntos formados por elementos matemáticos. A algunos conjuntos numéricos se les dota de estructura. ¿Qué ventajas reporta el estudio de dichas estructuras?** Y ésta es la respuesta: *Las ventajas que reporta el estudio de las estructuras son el estudio concienzudo y un mayor raciocinio de las propiedades que cada una de ellas tiene y así poder desmenuzar, estructurar, valga la redundancia, las interacciones que en cada campo de la división numérica se producen.* Si hay algo definitivamente alejado del estilo matemático es ese párrafo. Pero, aún para el que no sea matemático, ¿es que esa palabrería quiere decir algo?

Y para que no parezca que estoy espigando sólo casos particulares, véanse un montón de respuestas a la pregunta: **«Indique qué es una ley externa»**:

— *«Ley de composición interna es la que viene dada por una definición en sí misma. Para que se cumpla una ley externa es necesario cierto número de requisitos o bien que se cumplan ciertas propiedades.*

— *«Ley externa es diferente a la ley de composición interna. La ley de composición externa es la que definimos en el conjunto de los números exponenciales.»*

— *«Ley externa es aquella que forma un conjunto que no está sometido a ninguna operación aritmética o algebraica.»*

— *Una gran mayoría dice: «Operando con los elementos de un conjunto se sale del conjunto. Ejemplo, la resta en los números naturales.»*

— *«Una ley esterna es cuando tiene extruztura (sic) con la propiedad conmutativa, distributiva, reflexivo, simétrico.»*

— *«Ley que preside el modo de ser de una estructura algebraica y de realizarse, es decir, expresa un modo de obrar de dicha estructura en su interrelación.»*

— *«Que entra una operación que no queda incluida entre las de los dominios internos a los grupos abelianos.»*

—***«Es aquella que afecta al conjunto o a la ecuación sin bariarla (sic) ni cambiarla.»***

Creo que es suficiente. Alguien quizá pudiera objetar qué necesidad hay de saber lo que es una ley externa para enseñar en determinados niveles, pero no es ése el punto a discutir. Se trata de querer hacer pasar como definiciones, y definiciones matemáticas además, esas frases. Yo entendería que no se contestase a la pregunta o que se dijera: «No sé responder, no conozco la definición», pero nunca que se contestase así, es decir, que se creyese haber contestado. Porque ésa sí que es una absoluta falta de formación (2).

APRENDER A RAZONAR

Me parece, pues, que a nadie extrañará que señale como una grave deficiencia en la formación de nuestros bachilleres ese modo equívoco de hablar en el que solamente se insinúa por dónde deben de andar las cosas de que se está hablando pero sin señalarlas de forma inconfundible. La univocidad del lenguaje es una de las grandes aportaciones de la matemática a esa formación. Ya sabemos,

(1) *IX Reunión Anual de Matemáticos Españoles*, Granada 1968. Publ. Inst. Jorge Juan, Madrid, 1971.

(2) Claro que no reducida exclusivamente a este ámbito, porque también decía uno: *Catequizar es algo muy importante que debe de estar en manos de personas ya catequizadas.* Y otros decían que Miguel Servet actuó en el Concilio de Trento o que Fray Luis de León, Fray Luis de Granada, Santa Teresa y San Juan de la Cruz fundaron órdenes religiosas o que Fray Luis de León pertenece al Romanticismo y que Luis Vives y Pérez Galdós son figuras de la Ilustración española...

claro está, que hay un lenguaje literario y poético que habla por analogías y comparaciones y metáforas, que despierta la imaginación, que se preocupa de la belleza de la exposición, de la elección de los términos más sugestivos, de las frases más brillantes, y eso es también importante en la formación del estudiante; no vamos a pretender que describa un paisaje o redacte sus impresiones como quien desarrolla un teorema. Pero, por idéntica razón, no vamos a permitir que demuestre un teorema o defina, por ejemplo, lo que es límite como quien está describiendo la llegada de la primavera, y algo parecido es alguna de las cosas que he copiado.

Y no sólo en matemáticas, sino en el discurrir normal, sería preciso introducir esa sistemática en el razonamiento, la claridad en la deducción que la matemática debe llevar consigo. Hay aportaciones matemáticas que deberían ser lugar común en cualquier persona cultivada. Una cosa, para nosotros tan repetida, como la distinción entre condición necesaria y suficiente es algo que nadie debería ignorar. ¿Y no se ha visto en cambio mil veces, en conversaciones o discusiones entre gentes que se tienen por preparadas, una confusión total entre una proposición y su recíproca y, por tanto, una tergiversación por cada uno de lo que el otro dice? ¿Cuántas veces no nos hemos reconocido en lo que nuestro antagonista repite como afirmación nuestra? Y ese desconocimiento de las reglas más elementales de la lógica que a los matemáticos tanto nos preocupan; cómo la gente no se da cuenta de que la negación de «todos» no es «ninguno», etc. ¡Para qué seguir!

He aquí, pues, me parece a mí, una jugosa aportación de las matemáticas a la formación integral de los alumnos, vayan o no a ser matemáticos: imbuir en ellos la necesidad de exponer con claridad, de razonar con lógica, de decir estrictamente lo que se quiere decir y de entender exactamente lo que se ha dicho. Enséñeseles, sí, belleza literaria para los textos literarios, lenguaje poético para la poesía; disciplinas tendrán encargadas de ello. Pero a la hora de razonar un hecho o una especulación nada, quizás, como las matemáticas para haber ido haciéndoles entender las leyes del razonamiento. Y esto, que es válido independientemente de la futura orientación del bachiller, observamos que está ausente aún entre los que llegan dispuestos a cursar una carrera científica y, más en particular, en muchos que intentan estudiar matemáticas.

Ahora bien, ciñéndonos a éstas y no a la formación integral, como el estilo de las demostraciones es bastante peculiar, no es raro que los alumnos adopten para los razonamientos y demostraciones matemáticas ese estilo y, para los restantes razonamientos, ningún estilo. Lo que produce una disociación entre la formación matemática y el resto de su formación y por eso quizá son miradas en ella como un punto singular aislado: las matemáticas no forman humanamente, se piensa, sino que tienen un modo de discurrir que sólo sirve para ellas pero no para las demás cosas. El matemático, en el entender popular, es un chalado que vive en las nubes. Muy fino tiene que ser el profesor que haga percibir al alumno que el razonamiento matemático es el que debe practicar cualquier mente pensante.

Y como demostración de esto, de cómo la gente piensa que los matemáticos son unos seres que viven de espaldas a la realidad haciéndose preguntas inútiles para darles respuesta inoperante también, vaya este recorte de periódico que alude a una noticia antes publicada sobre un niño británico llamado Steven, que había nacido cierto 6 de septiembre, dándose la coincidencia de que su padre y su abuelo también habían nacido en otros 6 de septiembre. Debajo del título de la noticia, el diario «Ya» escribía: *Los matemáticos que estudian el cálculo de probabilidades se hacen con frecuencia este tipo de preguntas. Pero es la propia vida la que, como tantas veces sucede, ha dado la respuesta.*

Uno de esos curiosos lectores que envían cartas a los periódicos sale al paso de esa interpretación y dice: *Dudo mucho que los matemáticos, que tendrán problemas muy importantes que resolver... estén preocupados con problemas como el de Steven. Tampoco veo claro que, porque se haya dado este caso, sea la propia vida la que diga cuál es la probabilidad, que, en definitiva, es un número, de que ocurra esta triple circunstancia. De todas formas, el problema es elemental para un chico de «Preu». La probabilidad de que Steven nazca el 6 de septiembre es* 1/365; *para que su padre nazca otro 6 de septiembre, además de haber nacido Steven en igual fecha, es* $1/365^2$, *y que el abuelito remache el clavo otro 6 de septiembre será* $1/365^3$, *es decir,* 1/48627125. Parece que el lector conoce más las probabilidades que el periodista, pero los restantes lectores de uno y otro supongo que se habrán quedado sin enterarse de nada. Ni les importa.

APRENDER A DEFINIR

Además de enseñar a razonar y a deducir hemos dicho que las matemáticas proveen de un lenguaje unívoco para el cual definir un concepto es señalar aquellas propiedades características del mismo, esto es, las que él y solamente él verifica. Enseñar a definir: he aquí otra excelente labor formativa de las matemáticas. Que el alumno no ha dado importancia a las definiciones queda patente en la mayor parte de los trozos de exámenes que antes hemos contemplado; yo creo que ha captado mucho más el estilo que ha de tener una demostración que el de una definición, con ser en realidad el mismo estilo. Hay que hacer entender que en la definición ha de quedar perfectamente retratado el objeto definido y, por lo tanto, enunciarla equivale a conocer exactamente este objeto: por eso he dicho alguna vez que me contentaría con que los alumnos supieran las definiciones, pero saberlas de verdad, no repetir unas palabras sino entender hasta el fondo su significado.

Ahora bien, una definición, si ha de entenderse bien, no puede darse en general de entrada, sin tener o bien un conocimiento intuitivo del concepto definido o bien algunos modelos del mismo. La definición axiomática, que es la matemáticamente correcta, no siempre es la más deseable didácticamente. Me parece que es Poincaré quien cuenta que al no poder hacer entender a un alumno la definición de circunferencia, es decir, cuál era la figura que respondía a aquella definición, trazó con el dedo en el aire lo que aproximadamente representaría una circunferencia y el alumno entendió al instante la figura y su definición.

Afortunadamente está cada vez más presente en las orientaciones didácticas esa preocupación de no empezar por una definición sino llegar a ella después de haber manejado distintos ejemplos y modelos de la misma. La definición no haría después más que recoger en palabras los resultados de aquellas experiencias. Y sería un buen ejercicio buscar que los alumnos, cuando tienen ya un conocimiento suficiente del concepto a definir, ensayen a dar buenas definiciones del mismo, haciéndoseles ver los defectos en que suelen llegar a incurrir mediante ejemplos de cosas que respondan a la definición dada por ellos y no coincidan en cambio con lo que han querido definir. Uno se acostumbra a que se le den las cosas ya definidas y no piensa en los detalles que hay que tener en cuenta para que una definición esté bien hecha. Esa búsqueda de la precisión en el decir puede ser, así, una radical aportación de la matemática a la formación del alumno.

No dejaré de insistir, pese a todo, que la definición axiomática debe ser prácticamente la última etapa del camino, nunca la primera como tantas veces hemos padecido. Yo recuerdo que en mi primera enseñanza, ¡antes de los diez años!, aprendíamos las definiciones de preposición, conjunción, etc.; luego no sabíamos si el *que* que aparecía en una frase era conjunción o pronombre relativo. Habíamos conseguido todo lo contrario de lo deseado: en vez de tener en la definición la guía para saber con certeza si un determinado objeto respondía o no a aquella definición, sólo habíamos llegado a aprender de memoria una colección de palabras sin sentido que no nos servían, ni podían servirnos a aquella edad, para reconocer el objeto.

La cuestión de las definiciones es un tema muy delicado de la didáctica, dice por ello nuestro compañero Rafael Rodríguez Vidal (3), aportando una serie de razones para preferir en algunos momentos definiciones psicológicas que describan el objeto y que no serían válidas para un lógico matemático antes que las axiomáticas, que no servirían al maestro. Y recuerda la observación de un colega refiriéndose a las contestaciones de unos alumnos a los que se ha preguntado qué es el metro: *Uno dice que la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Otro separa las manos y dice con buen tino: esta distancia poco más o menos. ¿Cuál de los dos sabe más del metro? ¿Cuál está mejor formado?*

UN TOQUE DE REALIDAD

Esta última es también una cuestión interesante que debe preocupar en el bachillerato. Que hay definiciones correctas pero no comprobables, como la de rectas paralelas, cuando decimos que no tienen ningún punto común. Pero, por lo mismo que no lo son, si ha de poder distinguirse el objeto hay que dar una noción experimental de él. Y también que los estudiantes tomen conciencia de algunas mediciones: que sepan decir aproximadamente, sin medir, qué orden de longitud tiene un muro, qué capacidad una vasija. Que no haya esa disociación con la realidad que antes hemos dicho.

Muchas veces podrían darse cuenta de que habían resuelto mal un problema sólo con ver que el orden de magnitud que han obtenido es totalmente absurdo. Yo recuerdo un problema de física, en uno de aquellos exámenes de «Preu», en el que se trataba de calentar hasta la ebullición un litro de agua y se daban unos datos normales para el calentador eléctrico, el precio del kilovatio, etc. Se preguntaba cuánto había tenido que pagar el usuario por ese gasto de electricidad: a uno de los examinandos le salía no recuerdo qué cantidad de millones de pesetas. Y ejemplos como éste, aunque quizá no tan notorios, hay muchísimos.

Y se extiende, naturalmente, a otros órdenes. Tengo dos recortes de periódico como modelo. Uno dice así: *La Central del Sello Misionero ha cerrado el balance de sus actividades durante el último ejercicio con las cifras siguientes: la Central tuvo una entrada de* 23.788.401 *sellos, que equivalen a* 3.408.635 *kilos*. Como se ve, en un kilo entran unos siete sellos: cada sello viene a pesar lo que una alcachofa.

Ya sé que esto podría ser una errata. En cambio este otro recorte del 9 de enero de este año habla de la propaganda que un cierto grupo hacía repartiendo octavillas y dice: *Las octavillas, del tamaño de media cuartilla, representan en una de las caras...* E insiste más adelante: *Junto a estas octavillas han sido difundidas otras, del mismo tamaño...* Por lo visto el periodista no sabe que una octavilla es *siempre* la mitad de una cuartilla, ya que, como su

(3) *VI Reunión Anual de Matemáticos Españoles*, Sevilla 1965. Univ. de Sevilla, 1967.

nombre indica, ambas son respectivamente la octava y la cuarta parte de algo: de un pliego, en este caso. Pero con ejemplos como éstos se podría llenar toda una revista.

LA INFORMACION MATEMATICA

Pasemos al problema de los conocimientos. ¿Qué información se imparte a los alumnos de Bachillerato? Mirándolo por encima se diría que es una distribución en esos cursos de lo que constituiría la matemática de l.º de Facultad. Si un alumno conociese bien su Bachillerato, el primer curso universitario le sería bastante cómodo: trataría de ordenar y organizar con cuidado sus anteriores conocimientos, desarrollar más ampliamente algunos de ellos y dotarles de un rigor que no siempre han tenido en su tratamiento anterior. Pero los programas no diferirían gran cosa.

Parecería, pues, esta programación bastante adecuada para ingresar en la facultad sin grandes sobresaltos y buscando que la rampa de acceso fuese suave y sin baches. Incluso para estudiar en la Universidad no necesariamente la carrera de matemáticas sino cualquier otra de tipo científico o técnico, ya que son unos conocimientos sensiblemente análogos a los del anterior curso selectivo. Casi se diría que para eso ha sido programado así. Voy a recordar, en efecto, algunas afirmaciones de Dieudonné en aquel coloquio de la O. E. C. de 1959 en el que lanzó su célebre proclama: *Si yo quisiera resumir en una frase todo el programa que tengo en el ánimo, ésta vendría dada en dos palabras: ¡Abajo Euclides!* (4).

Refiriéndose a la situación francesa decía entonces Dieudonné: *Para poder dar una enseñanza satisfactoria, los profesores de facultad estiman que los alumnos de primer curso deberían estar familiarizados con un cierto número de técnicas experimentales, que son el álgebra lineal elemental, geometría analítica, trigonometría y algunos elementos de cálculo diferencial e integral. Y, por otra parte, estar bien entrenados en el empleo de la deducción lógica y tener una idea del método axiomático.*

No pretendo que éstas sean las únicas metas que se puede asignar a la enseñanza de las matemáticas en los centros secundarios; yo mismo estaría convencido de lo contrario si una proporción importante de alumnos no llegase a entrar nunca en la Universidad. La mayor parte de los profesores está de acuerdo en que la situación actual está muy mal y se agrava de año en año. Hasta 1880 ninguna crítica de este género estaría justificada. Los programas de las facultades no rebasaban el cálculo diferencial e integral y la geometría analítica y los programas secundarios, con un estudio profundo de la geometría euclídea y del álgebra elemental, eran una preparación suficiente.

Desde esa época los programas universitarios han sufrido profundas transformaciones, pero no ha ocurrido lo mismo en los centros secundarios... Recientemente se han introducido algunos elementos de cálculo diferencial e integral, álgebra vectorial y un poco de geometría analítica, pero siempre relegados a un segundo plano.

LA GEOMETRIA, AL PAREDON

Parece que nuestro Bachillerato actual colmaría los deseos del profesor Dieudonné. ¿Pero puede decirse que eso es suficiente aunque sea, desde luego, muy cómodo? En el fondo de todo ello hay, como se ve, un abandono absoluto de la geometría, abandono, por supuesto, totalmente premeditado y que no parece que haya sido sin protesta. Algunos de los defensores del cambio, capitaneados por el profesor Revuz, se han sentido obligados a justificarlo. *La enseñanza de la geometría —dicen— está cargada de tradiciones. Considerada como la parte más noble y rica de las matemáticas, la costumbre la ha convertido en el capítulo más importante de la matemática elemental; de ahí que constituya un obstáculo a la modernización de nuestra enseñanza* (5). Y, ante una amenaza tan extrema como la que parece desprenderse de las palabras de Dieudonné, *se comprende que los buenos espíritus que hayan gustado las alegrías de la bella geometría hayan tenido a veces reacciones apasionadas.*

No parece haber lugar a dudas sobre la necesidad que han visto de eliminar la geometría para conseguir otro tipo de enseñanza más actual, sin perjuicio de reconocer que nuestra geometría clásica constituye una buena descripción del espacio en que vivimos, hasta el punto de afirmar que *la cultura de un individuo sería muy incompleta si lo ignorase todo de esta estructura.* Parece que ocurre así a nivel didáctico lo que a nivel científico sucedió también: que una pronta axiomatización por Euclides de la geometría, que la convirtió durante siglos en modelo de lo que debe ser una ciencia matemática, trajo como consecuencia un estancamiento que impidió, hasta que en el siglo pasado surgió su crisis, el avance que en cambio se había producido ya en otros campos, aritméticos y analíticos.

De esta forma, el planteamiento didáctico actual suele consistir en proponer otra axiomática, la del espacio vectorial, sobre la que fundamentar la geometría. Lo que acaso esté de más en el Bachillerato es la pretensión de una axiomática a ultranza, construcción que parece más propia de otro nivel y, por lo tanto, no cabría plantearse la sustitución de la

---

(4) Hay un resumen en *Gaceta Matemática*, XIV, 1962, pp. 35-38.

(5) *Chantiers mathématiques*, Inst. Pédag. Nat., Paris 1965.

axiomática de Euclides por esta otra. Me estoy refiriendo a que se han eliminado unos conocimientos geométricos importantes que se iban encadenando a partir de ideas intuitivas, como seguramente debe hacerse en una enseñanza a ciertas edades.

Obsérvese, pues, que no quiero hacer de esto una cuestión metodológica ya que también los espacios vectoriales, qué duda cabe, pueden introducirse tras un entrenamiento intuitivo, experimental y tan sencillo de adquirir como el otro. Ni tampoco creo que sea desatinado, sino todo lo contrario, estudiar estos temas en el Bachillerato. Todos tenemos la experiencia de que la herramienta vectorial, bien dominada, permite simplificar enormemente los problemas y cuestiones de la geometría cartesiana, sistematizarlos al máximo y casi convertir la teoría en un pequeño conjunto de ejercicios elementales. Lo que quiero decir es que para lograr eso no habría sido necesario sacrificar, en la medida en que se ha hecho, nuestra vieja geometría.

BALANCE DE PERDIDAS

Para defender esa postura se recurre también, a veces, a la caricatura. Se reconoce, cierto es, como un bien la gran riqueza de cuestiones contenidas en la estructura general del espacio euclídeo, filón que la pedagogía ha explotado ampliamente a través de problemas usados por generaciones de bachilleres. *Pero entre todos los bellos teoremas, ¿cómo seleccionar los que son verdaderamente dignos de ser retenidos? Hay piezas de museo que honran el talento de quienes las han descubierto, pero que encumbrarían bien inútilmente el espíritu de nuestros alumnos: pequeñas maravillas de relojería, como el teorema de Feuerbach, son para conservar bajo un fanal pero no para pasar a los manuales* (6).

Es evidente y no vale la pena insistir en ello, pero no se trata de conocer exhaustivamente todas estas pequeñas (o grandes) propiedades de las figuras geométricas, sino de ignorar casi todo. Todas aquellas cosas que antes sabíamos en el Bachillerato, y aun antes, no tenían por qué ser desechadas, bien que al final del mismo se estudie una geometría con distinta orientación; y más cuando, hasta para estudiar ésta, se necesitaría utilizar buen número de aquéllas. Yo me encuentro con que en primer curso de facultad no es que no sepan el círculo de los nueve puntos, que a mí bastante me importa, sino otras cosas que no desmerecen de los conocimientos geométricos más elementales. Una pequeña anécdota bien reciente: uno de los problemas propuestos en nuestra última olimpíada matemática es un lugar geométrico; pues bien, la comisión que redactó los enunciados puso al final de aquél una pequeña definición de lugar geométrico porque hubo quien dijo que eso ya no figura en algunos textos de Bachillerato.

Ante este panorama me he dirigido a algunos profesores de instituto para que me indicasen qué cuestiones se habían dejado de ver que fuesen lo bastante importantes para tenerlo en cuenta en 1.° de facultad. He aquí algunas referencias. En geometría plana, ángulos en una circunferencia, arcos capaces; potencia de un punto respecto de una circunferencia, eje radical; cuaterna armónica; construcciones elementales; transformaciones geométricas... En el espacio lo desconocen todo, según afirman; no ven ninguna posición que se les insinúe, como rectas que se cruzan, rectas que se cruzan perpendicularmente, teorema de las tres perpendiculares; rectilíneo de un diedro; relaciones entre las caras de un ángulo poliedro; volúmenes de cuerpos, de los que sólo conocen los muy elementales... Repito lo de antes: ¿Valía la pena? Porque nadie dirá que se trata de una geometría exquisita y sofisticada, apta sólo para iniciados. Hasta para ser carpintero y poner una pata a una mesa conviene saber que una recta es perpendicular a un plano si lo es a dos rectas de distinta dirección contenidas en él; le basta entonces con utilizar dos veces la escuadra.

Hay quien me escribe con acento pesimista: «Los alumnos que en el curso 76-77 han estado en 1.° de facultad han cursado bachillerato elemental y superior; pueden no haber realizado el examen de reválida superior (basta aprobar C. O. U.) y todos han realizado al terminar el bachillerato elemental una prueba que no supone dificultad (no comparable a la reválida elemental). Muchos no han realizado, pues, ninguna prueba seria de conocimientos (no aludo a la de selectividad porque no lo considero necesario). Por consiguiente, las deficiencias encontradas este curso en los alumnos de I.° pienso que muy fácilmente se verán incrementadas en cursos posteriores en que los alumnos procederán de E. G. B. y B. U. P.»

Naturalmente este proceso, bien lo decía Dieudonné, es un reflejo de lo que pasa en la universidad, donde la geometría ha sufrido este embate de un modo mucho más acusado, aunque seguramente más justificado. Hay que pensar que en nuestra facultad se forman los matemáticos que deberán conocer y comprender las matemáticas que hoy se hacen, pero no todos los bachilleres, sino un número muy pequeño, van a ser matemáticos y, aparte de tener el natural derecho a que se les enseñen las cosas suficientemente modernizadas, tendrán también que conocerlas de modo que puedan aplicarlas a otras materias que las requerirán en un estadio más primitivo.

Y tampoco estorbarán al matemático, y más si ha de ser profesor de bachillerato. Hace

(6) *Chantiers mathématiques*, ibid.

unos años decía el profesor Cuesta Dutari (7) refiriéndose a la programación de la licenciatura: *Quizá deba restaurarse alguna de las disciplinas un tanto alegremente suprimidas. Y pienso en un curso de geometría gráfica que englobara métrica, proyectiva gráfica y sistemas de representación. Considero sumamente grave que el profesor de matemáticas del Bachillerato —y aun el universitario— sea incapaz de dibujar figuras claras y sugerentes, por ejemplo las superficies solución de una ecuación entre derivadas parciales, para que los alumnos vean y concreten lo que el cálculo les ha dado. Nuestra inteligencia tiene un soporte sensible y no somos máquinas a las que se provee de mecanismos. Descartes aconsejaba dibujar buenas figuras en sus «Reglas para la dirección del espíritu».*

A pesar de esta probable presión de la programación universitaria en la del Bachillerato, yo echo de menos en éste un curso de geometría; acaso pudiera ser el de matemáticas de 1.° de B. U. P. Ya habría lugar en los otros dos cursos y en el C. O. U. de hacer una programación suficiente para las matemáticas de la universidad. Porque hay una pequeña geometría elemental que no necesita llegar a esas obras de orfebrería de que hablaban los franceses y que, como ellos mismos decían, no puede ignorarse sin que sufra detrimento la misma cultura general. Que no se dé el caso, como me ha pasado una vez, de que en la reválida de licenciatura nadie consiguió resolver un problema que puse a nivel de selectivo: hallar los vértices de un octaedro dadas las coordenadas de uno de ellos y las ecuaciones de la recta en que estaba situada una de las diagonales. El único que intentó algo confundió el octaedro con el cubo; yo saqué la impresión de que nadie, ¡entre licenciados en matemáticas!, sabía lo que era un octaedro: noción que antes era de primera enseñanza.

APUNTE DE SOLUCION

No puede esto por menos que preocuparnos. En el nuevo plan que este curso se ha implantado en la Facultad de Madrid hemos puesto en primer curso una asignatura llamada Seminario de Geometría, que es autónoma respecto de la geometría también de 1.° Está organizada como si fuera el laboratorio de geometría, a la manera experimental, y busca suplir la falta de conocimientos que se van advirtiendo; no tiene, pues, una programación rígida: los alumnos trabajan en equipos y lo que cuenta es la labor que van haciendo a lo largo del curso, controlada con periodicidad muy frecuente por los profesores, que proponen multitud de problemas para trabajar sobre ellos. Problemas que fundamentalmente son de geometría gráfica, como propugnaba Cuesta, pues para los problemas propios de la asignatura de geometría ya tienen las clases prácticas de la misma.

Este curso, primero de la experiencia, han versado fundamentalmente sobre geometría métrica elemental, construcciones con regla y compás, movimientos, semejanzas e inversiones, sistemas de representación, en especial perspectiva caballera, etc. El programa es modesto, como se ve; quizá pueda parecer impropio y, sin embargo, se ha manifestado muy necesario. No hace falta decir que los alumnos, precisamente por lo insólito del mismo, lo han seguido con mucha mayor dificultad que la asignatura teórica que a tantos padres de mi edad les ha parecido tan difícil para sus hijos, sólo porque ellos no la sabían. Y es que lo que llamamos noción natural, la idea de concepto claro y distinto, está sujeta a una relatividad que es —copio a Lichnerowicz— *función de toda nuestra experiencia mental anterior. Lo simple, lo claro o lo concreto no es, demasiado frecuentemente, más que lo familiar* (8). Los padres entienden que se les enseña a sus hijos cosas muy difíciles porque a ellos no les son familiares y, en cambio, las que a sus hijos resultan difíciles son las que sabían ellos. Pero éste es otro problema.

Volviendo al nuestro, yo creo que ha sido una decisión acertada poner esta asignatura en nuestro primer curso porque llena un evidente vacío y porque, además, la orientación que se le ha dado, destinándola de modo prácticamente exclusivo a la resolución de problemas, pone también el énfasis en este tipo de actividad tan descuidada en nuestros planes: los ejercicios prácticos. Yo confío en que, si llega a consolidarse en años sucesivos, significará una buena aportación tanto a la formación como a la información de nuestros licenciados.

Pero no puedo dejar de notar, con pesar, que casi todas estas cuestiones las traían antes conocidas desde el Bachillerato y que ése era, sin duda, el lugar en que deberían encontrarse. Se da así la paradoja de que la ganancia de tiempo y esfuerzo que supone, por una parte, una programación cercana a la universitaria repercute luego negativamente al tener que dedicar un tiempo de la universidad a cuestiones de Bachillerato. Y creo que en éste habría cabido muy bien todo.

* * *

Muchas más cosas, y seguro que mejores, podrían decirse sobre estos temas; algunas otras apunté también en aquellas conferencias de Sevilla, pero me parecería abusivo continuar. Sirvan éstas como muestra del panorama que contempla un profesor de 1.° de licenciatura y de las meditaciones que esta contemplación le provoca. Al final, lo que todos buscamos es perfeccionarnos a nosotros mismos e intentar mejorar también aquello que de nosotros depende.

---

(7) *VI Reunión Anual de Matemáticos Españoles*, ibid.

(8) *VIII Reunión Anual de Matemáticos Españoles*, Santiago de Compostela, 1967. Publ. Inst. «Jorge Juan», Madrid, 1969.