# EXPERIENCIAS

# 1 Aplicaciones del Cubo de Rubik a la enseñanza de las matemáticas

**Por Valerio CHUMILLA CHECA(*)**

Aprovechando la curiosidad de nuestros alumnos por el cubo de Rubik, se puede usar éste para enseñarles varias cuestiones matemáticas relacionadas con la resolución del problema planteado por el mismo.

No trato, por tanto, de dar una solución corta al problema sino de buscar una lo más «matemática» posible, desarrollarla lógicamente y adaptarla al nivel de los alumnos, tratando con ello de interesarlos en el estudio de las matemáticas.

No hay que decir que ésta es una de las muchas exposiciones posibles, que el aparato matemático usado dependerá del curso en que se explique el contenido del artículo y que, en varias ocasiones, he sacrificado el rigor matemático en aras de la mejor comprensión de los alumnos, por lo que varias proposiciones no están matemáticamente demostradas; sólo están «vistas intuitivamente».

## 1. OBJETIVOS QUE SE PERSIGUEN

Precisando un poco más, se pueden dividir los objetivos que tratan de alcanzarse en dos grandes grupos:

1.1. Objetivo fundamental. — Que los alumnos vean cómo se aplican las matemáticas a la resolución de un problema.

1.2. Objetivos técnicos. — Que aprendan algo más en relación con los siguientes temas:

- Grupos. Subgrupos. Homomorfismos.
- Combinatoria (especialmente permutaciones).
- Conocimiento del cubo.
- Relación de equivalencia y conjunto cociente.
- Números enteros.
- Potencias.
- Perfeccionamiento de la visión espacial.

Como vamos a resolver un problema, ante todo, hay que plantearlo.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En matemáticas es muy importante el planteamiento correcto del problema que vamos a resolver.

Como es bien sabido, el problema del cubo de Rubik consiste en partir de una posición cualquiera del mismo y, usando los movimientos posibles, llegar a la posición fundamental (que es aquella en la que aparece cada cara con un solo color).

## 3. CONOCIMIENTOS MATEMATICOS PREVIOS

Damos una lista de conceptos y propiedades matemáticas necesarios para el seguimiento de la explicación posterior.

Estos conocimientos habrán de darse o recordarse, según los casos, a los alumnos:

3.1. Grupos multiplicativos.

- Definición.
- Conmutatividad (se verá más adelante que el grupo de movimientos del cubo no es abeliano).
- Llamaremos I al elemento neutro y $x^{-1}$ al inverso de x.
- Prop. 1: $(x^{-1})^{-1}=x$, si $x \in G$.
- Prop. 2: $(x.y)^{-1}=y^{-1}.x^{-1}$. (No al revés.)

3.2. Permutaciones.

- Definición.
- Llamamos Ph al conjunto de las permutaciones con n objetos.
- Definición de producto (o composición) de permutaciones.
- El conjunto Pn con el producto definido es un grupo. Se dará el elemento neutro, la inversa de una permutación dada y se estudiará la conmutatividad.
- Ciclos. Inverso de un ciclo.
- Prop. 3: La n-ésima potencia de un n-ciclo es la identidad.
- Productos de permutaciones puestas en forma de ciclos.
- A los 2-ciclos les llamaremos trasposiciones.
- Prop. 4: Toda permutación se puede poner como producto de trasposiciones.
- Permutaciones pares e impares. El producto entre ellas recuerda la regla de los signos.
- Prop. 5; La paridad de un n-ciclo es la del número n-1.
- Prop. 6: Toda permutación par se puede poner como un producto de dos trasposiciones fijadas previamente.

---

(*) Catedrático de Matemáticas del IB «García Morente».

## 4. RECONOCIMIENTO DEL CUBO

Se describirá a los alumnos el cubo como un poliedro, viendo que cumple, por ejemplo, la fórmula de Euler.

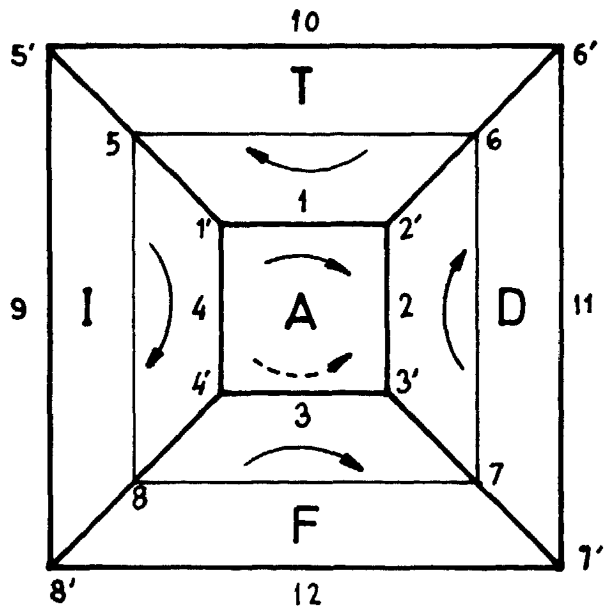
Se hablará del cubo de Rubik haciendo notar que la pieza central de cada cara dice el color que tendra esa cara.

En cada cara hay además cuatro piezas a las que llamaremos cubos aristas (situadas en el centro de cada arista, con dos colores) y cuatro piezas a las que llamaremos cubos vértices (situadas en las esquinas, con tres colores).

Es un bonito problema de combinatoria tratar de demostrar que hay 12 cubos aristas y 8 vértices (un cubo arista, por ejemplo, está determinado por un par de colores, sin que haya ninguno con colores opuestos).

Llamaremos F a la cara del frente, T a la de atrás, A a la de arriba, B a la de abajo, D a la de la derecha e I a la de la izquierda.

Ver la figura 1, donde los cubos aristas se han numerado del 1 al 12 y los vértices se denotan por números con acento; del 1' al 8'. Además, se ha señalado el sentido del giro positivo de cada cara, correspondiendo la flecha discontinua a la cara B.




## 5. GRUPO DE PERMUTACIONES $P_{20}$

Sean los 20 elementos 1, 2,..., 12; 1', 2'..., 8'.

Con ellos podemos formar el grupo de permutaciones $P_{20}$ tal como se definió en la sección 3.

## 6. GRUPO DE MOVIMIENTOS DEL CUBO

Como sabemos el color que va a tener cada cara, conocemos el lugar en que ha de colocarse cada cubo arista (en la intersección de las dos caras que tienen sus colores) y cada cubo vértice (en la intersección de las tres caras que tienen los mismos colores).

Al movimiento consistente en girar una cara 90° a la derecha (en el sentido de las flechas de las figuras 1 y 2), le llamaremos con la misma letra que la cara.

Tenemos, por tanto, 6 movimientos fundamentales: F, T, A, B, D, I. Cada uno de ellos transforma aristas en aristas y vértices en vértices.

Se hará notar que solamente hay cuatro potencias distintas de cada movimiento fundamental (se hará ver la diferencia con las potencias de números que son las más conocidas por los alumnos).

Por ejemplo, para F son: $F^0 = I$; $F^1 = F$; $F^2$; $F^3 = F^{-1}$, ya que $F^4 = F^0$.

Los elementos del grupo (al que llamaremos G) se obtienen escribiendo una tras otra varias potencias de los movimientos fundamentales. A estos elementos les llamaremos movimientos, transformaciones o palabras.

El producto de dos palabras se obtiene poniendo una detrás de otra. (Es decir, en realidad, G es el grupo libre en el alfabeto F, T, A,... etcétera).

Es interesante ver que G con este producto es, efectivamente, un grupo, resaltando el elemento neutro, así como el inverso de un movimiento dado.

## 7. RELACION ENTRE G Y $P_{20}$

De momento, sólo tendremos en cuenta la posibilidad de las piezas.

Vamos a asociar a cada elemento de G una permutación de $P_{20}$: la que nos dé el efecto que tiene el movimiento sobre los cubos aristas y vértices.

Lo hacemos en dos partes, usando siempre la notación de ciclos:

*a)* Asociamos a cada movimiento fundamental un producto de dos 4-ciclos (uno sobre aristas y otro sobre vértices), de la siguiente manera:

| | |
|---|---|
| F→(3 7 12 8).(4' 3' 7' 8') | B→(9 12 11 10). (8' 7' 6' 5') |
| T→(1 5 10 6).(1' 5' 6' 2') | D→(2 6 11 7).(3' 2' 6' 7') |
| A→(1 2 3 4).(1' 2' 3' 4') | I→(4 8 9 5).(1' 4' 8' 5') |

*b)* Asociamos a un movimiento cualquiera, el producto de los asociados de los movimientos fundamentales de los que se compone.

Es decir, hacemos que la aplicación sea un homomorfismo de G a $P_{20}$.

En este momento, es interesante que se comente la situación: Hemos partido de un problema (la reordenación del cubo) y hemos construido un modelo matemático (al asociar a cada movimiento una permutación) en el que vamos a trabajar, de manera que las propiedades matemáticas de las permutaciones nos van a dar propiedades de los movimientos con las que vamos a resolver el problema propuesto, aprovechando así la interacción entre nuestro problema y el modelo matemático.

## 8. ESTUDIO DE ALGUNOS MOVIMIENTOS

En este orden de ideas, vamos a ver el efecto de algunos movimientos, escribiendo, impropiamente, que cada movimiento es igual a su efecto.

Por ejemplo, vamos a empezar con productos de potencias de F, D y sus inversos (sin escribir las piezas que quedan fijas):

$F^2 = (3\ 12) \cdot (7\ 8) \cdot (4'\ 7') \cdot (3'\ 8')$ $D^2 = (2\ 11) \cdot (6\ 7) \cdot (3'\ 6') \cdot (2'\ 7')$

F-1 = (8 12 7 3) · (8' 7' 3' 4') D $^1$ = (7 11 6 2) · (7' 6' 2' 3')

FD = (3 2 6 11 7 12 8) · (4' 2' 6' 7' 8') (3')

DF = (2 6 11 12 8 3 7) · (3' 2' 6' 8' 4') (7')

$F^2D$ = (3 12) · (7 8 2 6 11) · (4' 3' 8' 2' 6' 7')

$F^2D^2$ = (3 12) · (7 8 6) · (2 11) · (4' 2' 7') · (3' 8' 6')

FD $^1$ = (3 11 6 2 7 12 8) · (4' 7' 8') · (3' 6' 2')

[F,D] = FDF $^1$D $^1$ = (3 7 11) · (4' 3') · (7' 6')

Es decir, por la proposición 3, $P = (F^2D)^5 = (3,12)$ (7' 6' 2' 8' 3' 4'), luego este movimiento cambia entre sí las aristas 3 y 12 y deja invariantes las demás ( no nos interesa el efecto sobre los vértices).

También como consecuencia de la proposición 3, $Q=(FDF^{-1}D^{-1})^3=(4'\ 3')\ (7'\ 6')$, luego deja invariantes las aristas y cambia dos pares de vértices entre sí: el 4' con el 3' y el 7' con el 6'.

Tenemos, pues, una trasposición de aristas y un par de trasposiciones de vértices.

Pero esto no es suficiente para demostrar que podemos poner cada pieza en su sitio, por ejemplo, en el caso de aristas, sólo podemos intercambiar la 3 y la 12 (es decir, la de enfrente arriba y frente abajo), pero, ¿cómo cambiamos otros pares de aristas?

La respuesta está en el punto siguiente.

## 9. CONJUGACION

En teoría de grupos se dice que el conjugado del elemento y por el x, es el $xyx^{-1}$.

Si dos aristas están en la misma cara y una enfrente de otra, decimos que están en buena posición (como la 3 y la 12 o la 3 y la 1); con P sabemos cambiar entre sí dos aristas en buena posición.

Si no lo están, realizamos su movimiento X para ponerlas en buena posición, luego las cambiamos con P y finalmente hacemos $X^{-1}$, es decir, conjugamos P con X, luego:

Proposición 7: Sabiendo intercambiar, con P, dos aristas específicas, podemos cambiar de sitio dos que estén en una posición cualquiera (con $XPX^{-1}$).

Ejemplos: Suponiendo que el sitio al que queramos llevar una arista sea el 3, si está en 2, el movimiento X será $D^2B^{-1}$ (que la lleva a 12), o DT (que la lleva a 1), después haríamos P y $X^{-1}$.

Si estuviera en 11, X podría ser $B^{-1}$ (para llevarla a 12) o $D^{-1}T$ (para llevarla a 1).

Se puede observar que siempre hay dos maneras «naturales» de conjugar (una llevando la arista a 12 y otra a 1), siempre que queramos trasportarla definitivamente a la posición 3.

El mismo artificio se puede usar en las demás operaciones (colocación y orientación de vértices).

## 10. POSIBILIDAD DE COLOCAR EN SU SITIO LAS ARISTAS Y LOS VERTICES

El movimiento P es una trasposición de aristas; por la proposición 7 sabemos realizar cualquier trasposición de cubos aristas y por la proposición 4 obtenemos la

Proposición 8: Usando P y la conjugación podemos poner cada cubo arista en su sitio.

Vamos a fijarnos en las 20 piezas (aristas y vértices juntos); en la posición fundamental forman una permutación par.

Por otra parte, cualquier movimiento fundamental es un 4-ciclo en aristas y otro 4-ciclo en vértices, es decir, una permutación impar en vértices e impar en aristas y, por tanto, par considerada sobre las 20 piezas.

Tenemos, pues, la

Proposición 9: Las 20 piezas forman siempre una permutación par.

Ahora, imaginemos los cubos aristas colocados en su sitio; formarán una permutación par y como las 20 piezas también, la única posibilidad es:

Proposición 10: Una vez bien colocadas las aristas, los vértices forman una permutación par.

Como consecuencia inmediata del movimiento Q, la conjugación y las proposiciones 10 y 6, obtenemos la

Proposición 11: Una vez puestas las aristas en su sitio, podemos hacer lo mismo con los vértices, usando el movimiento Q y la conjugación.

## 11. ORIENTACION DE LAS ARISTAS

Vamos a asignar a cada cara su color (por ejemplo, A amarillo, B blanco, D, naranja, I rojo, F verde y T azul) y establecemos una pregunta entre colores: Amarillo-blanco tienen preferencia sobre naranja-rojo y éstos sobre verde-azul.

Llamamos parte principal de un cubo arista a la que tiene el color preferente y cara principal (de las dos en que está) a la que tiene también el color preferente.

Una arista está bien orientada si su parte principal está en la cara principal.

Con la elección de preferencias entre colores hecha más arriba, es fácil ver que los movimientos F, T, A, B, no cambian la orientación de ninguna arista.

Los movimientos D, I, $D^{-1}$, $I^{-1}$ (no así $D^2$ o $I^2$) cambian la orientación de las cuatro aristas que mueven.

Se puede demostrar que cualquier movimiento cambia la orientación de un número par de aristas y como en la posición final están las 12 aristas bien orientadas, se concluye que, en cualquier posición del cubo, hay un número par de aristas mal orientadas. Por tanto, conociendo la orientación de 11 aristas, sabemos como está la doceava.

NOTA: La elección de colores es un ejemplo: no hay que hacerla así obligatoriamente, sólo hay que tener en cuenta que los colores de caras opuestas han de ir juntos y que los movimientos que cambian la orientación son los de las caras «intermedias» en cuanto a la preferencia.

## 12. ORIENTACION DE LOS VERTICES

Cada cubo puede estar en tres posiciones distintas sin cambiar de sitio.

Diremos que un vértice tiene carga 0 si al llevarlo a su posición final queda bien orientado (con cada uno de sus colores en la cara correspondiente); tendrá carga $+1/3$ si está girado 120° a la derecha respecto a la posición anterior (mirado desde el exterior del cubo) y carga $-1/3$ si está girado 120° a la izquierda.

Definimos la carga de una posición del cubo como la suma de las cargas de los 8 vértices.

Los movimientos A y B no cambian la carga de ningún vértice.

El F (o el $F^{-1}$) gira 4' y 7' hacia la derecha y 3' y 8' hacia la izquierda, siempre 120°.

Por ejemplo, D(o $D^{-1}$) gira 3' y 6' hacia la derecha y 2' y 7' hacia la izquierda.

Razonando de manera análoga al caso de las aristas, se llega a las siguientes conclusiones:

*a)* La carga del cubo, en cualquier posición, es un número entero.

*b)* El conocimiento de la carga de 7 vértices, nos dá la del octavo.

## 13. NUMERO DE POSICIONES DISTINTAS

Antes de seguir adelante, vamos a estudiar un interesante problema de combinatoria: el cálculo del número de posiciones en que podemos poner el cubo.

En principio, las 12 aristas se pueden poner en los cubículos de 12! formas distintas; cada una de ellas puede estar en dos posiciones distintas (bien o mal orientadas), luego las 12, atendiendo a la orientación, pueden estar en $2^{12}$ formas diferentes.

Razonando de la misma forma respecto a los 8 vértices, éstos adoptan 8! colocaciones distintas y, en cada una de ellas $3^8$ formas de orientarse (ya que cada cubo vértice puede adoptar 3 orientaciones).

Por tanto, el número de posiciones distintas sería:

$N' = 12!.2^{12}.8!.3^8 \cong 519.10^{18} = 519$ trillones.

Pero no podemos alcanzar todas estas posibilidades en la práctica porque ya dijimos en la proposición 9 que la permutación formada por las 20 piezas es par (luego hay que dividir por un factor 2) y en la sección 12 que ocurría lo mismo con los vértices (por ello, hemos de suprimir un factor 3).

El número de posiciones que podemos alcanzar es, por tanto,

$$N = \frac{N'}{12} \cong 43.10^{18} = 43 \text{ trillones}$$

Aquí tenemos un buen ejemplo de relación de equivalencia y conjunto cociente, porque la situación es la siguiente:

Si nos fijamos en el conjunto de los 519 trillones de posiciones y decimos que dos de éstas están relacionadas si se puede pasar de una a otra, tenemos una relación de equivalencia que nos da lugar a un conjunto cociente con 12 clases, en cada una de las cuales están las posiciones que se pueden obtener a partir de una dada.

Luego, puesto un cubo en posición fundamental, usando los movimientos permitidos, podemos llegar a cualquiera de las posiciones que están en la misma clase de equivalencia que la fundamenal, pero cambiando, por ejemplo, dos pegatinas de sitio en un cubo arista, obtenemos un cubo que no se puede poner en posición fundamental, ya que está en otra clase de equivalencia.

## 14. POSIBILIDAD TEORICA DE ORIENTAR LAS ARISTAS

Según lo dicho en las secciones 9 y 11, es fácil ver, estudiando caso a caso ya que son pocos, lo siguiente:

De las dos conjugaciones «naturales», una se hace sin que intervenga ningún movimiento de un cuarto de vuelta (o dándoles media vuelta) de alguna cara con una de los colores «intermedios» en cuanto a preferencias (naranja y rojo en nuestro ejemplo). Una conjugación de este primer tipo no cambia la orientación de las aristas que intercambia.

La otra conjugación siempre se hace poniendo su cuarto de vuelta con alguna de las caras «intermedias» y, por tanto, cambia la orientación de las dos aristas cambiadas.

La estrategia a seguir es usar una conjugación del primer tipo si la arista está ya bien orientada y una del segundo tipo si está mal orientada.

Al mismo tiempo que llevamos los cubos aristas a su sitio, usando la conjugación adecuada, podemos dejarlos bien colocados.

Proposición 12: Podemos orientar correctamente cada arista usando el movimiento P y la conjugación.

## 15. POSIBILIDAD TEORICA DE ORIENTAR LOS VERTICES

Buscamos una transformación $M_1$ que deje los vértices de la cara A en ella misma y que gire 120° a la derecha el 3'; entonces el movimiento $M = [M_1A] = M_1AM_1^{-1}A^{-1}$ dejará invariantes las aristas (de sitio y orientación) y girará 3' hacia la derecha y 2' hacia la izquierda (siempre 120°).

Es fácil ver que nos sirve el movimiento $M_1 = D^{-1}BDFBF^{-1}$, ya que deja cada vértice de A en su sitio y gira hacia la derecha los vértices 3, 7 y 8.

Respecto a las aristas, $M_1$ tiene el efecto (7, 9 12, 11, 10) y cambia la orientación de la 7 y la 12.

Pero ← $M = M_1AM_1^{-1}A^{-1} = D^{-1}BDFBF^{-1}AFB^{-1}F^{-1}D^{-1}B^{-1}DA^{-1}$, solamente gira 3' hacia la derecha y 2' hacia la izquierda.

Proposición 13: Con M y la conjugación, podemos orientar convenientemente cada cubo vértice.

## 16. POSIBILIDAD TEORICA DE RESOLVER EL PROBLEMA PLANTEADO

El movimiento Q no sólo no descoloca las aristas, sino que tampoco las desorienta, aunque [F,D] desorienta las aristas 7 y 11.

Este hecho y las proposiciones 12 y 13, nos llevan al teorema fundamental: Usando los movimientos P, Q, M, y la conjugación, es posible resolver el problema del cubo de Rubik.