

Aproximación a la didáctica de la lógica matemática en 3.º de bachillerato

Por Antonio BOLIVAR BOTIA (*)

INTRODUCCION

La enseñanza de la «nueva» lógica introducida, al fin, por primera vez en el programa oficial de Filosofía de 3.º de B.U.P., plantea al profesorado una serie de problemas didácticos a cuyo correcto planteamiento este artículo pretende contribuir.

Un simple ejemplo constatador es la diversidad de enfoques, sistemas, simbolizaciones, etc., que se presentan entre los múltiples «textos escolares» aparecidos de la disciplina. Tenemos constancia de que en igual medida se ha presentado entre el profesorado.

Si bien ello es comprensible por el grado de «novedad» (en el Bachillerato, ya que la lógica matemática es desde hace tiempo «ciencia normal»), lo es menos si se tiene en cuenta que la bibliografía ofrece un número amplio de obras de lógica traducidas, y sobre todo excelentes manuales de autores españoles como, aparte de las obras de Sacristán 1964 y Mosterín 1970 y 71, las de Deaño 1974- y 75 y Garrido 1974.

Este cambio de contenido es la lógica que hasta ahora se daba en el Bachillerato, aparece suficientemente justificado. En primer lugar porque el paradigma lógico («lógica-escolástica») estudiado en el Bachillerato (1) estaba anclado en siglos bastante anteriores, que A. Deaño (1974 I, p. 12) críticamente describió como «una "lógica" que parece escrita por un precursor de Aristóteles no demasiado agudo». Por otro lado su aplicación y validez de cara a su uso por los adolescentes, o por las relaciones interdisciplinarias con otros campos (Matemáticas y Ciencias), era, tal como estaba presentado, prácticamente nula. Así Piaget (1972, p. 77) ha constatado que «el silogismo tiene un empleo mucho más restringido en el pensamiento real de lo que pretendían los lógicos clásicos y constituye una estructura utilizada por el pensamiento verbal —por el «discurso»— mucho más

que por la inteligencia concreta o por el pensamiento en el trabajo de invención».

Toda esta situación de la que se parte tiene, sin duda, su explicación y excusa en el estado de la lógica matemática en España hasta hace pocos años, en la que ésta llegaba a tener «un cierto carácter de *underground*» (Garrido 1972, p. 129). El enclaustramiento de España frente al desarrollo de la lógica es un fenómeno curioso de constatar y estudiar, y del que Garrido (1972) ha señalado sus líneas generales en el aspecto institucional. Sólo a partir de la década del 60, se iría imponiendo lentamente. Y todo ello, tal vez, por una curiosa oposición inexistente, que algunos se esforzaron en presentar entre lógica tradicional-lógica matemática. No hay oposición alguna entre ambas, sino evolución (Garrido 1974, p. 24) o desarrollo (Kneale 1972) como sucede en cualquier ciencia. Todo ello explica, de alguna forma, la situación de «novedad» de la lógica en la Filosofía del Bachillerato.

En estas notas se señala un posible planteamiento de la enseñanza de la lógica en el BUP, que hemos llevado a cabo durante este curso. No tienen, por tanto, el sentido de aportar nada nuevo en cuanto al contenido expuesto, sino más bien sugerir una posible organización y estructuración de la lógica en el Bachillerato.

(*) Profesor agregado de Filosofía en el Instituto Nacional de Bachillerato «San Vicente Ferrer», de Valencia.

(1) Incluso si se analizan los avatares de la lógica en la Filosofía del Bachillerato se observa que ha variado poco a lo largo del tiempo y la única variación no es en cuanto a contenido, sino a una menor extensión en los últimos planes que en anteriores. Vid. para ello el estudio de E. Fey: «Estudio documental de la Filosofía en el Bachillerato Español (1807-1957)». Madrid: C.S.I.C., Instituto de Pedagogía «San José de Calasanz», 1975.

En primer lugar se plantea la relación entre nivel psicológico y nivel lógico, aun cuando estamos lejos de pensar que «la dificultad lógica de un problema tenga que coincidir con una dificultad psicológica» (Del Val 1977a, p. 38). En segundo lugar se señala el posible contenido y las razones metodológicas y didácticas para tal sugerencia (2).

I. ASPECTO PSICOLÓGICO

El contenido a transmitir en cualquier proceso didáctico debe ser seleccionado de acuerdo con un criterio de adecuación psicológica al nivel de desarrollo del destinatario, en aras a una mayor eficacia. Por eso tiene interés hacer referencia a él, siquiera sea brevemente, y a la relación entre lógica y proceso de pensamiento.

I.1. Desarrollo psicológico

La enseñanza de la Filosofía, tal como se imparte actualmente, se realiza con alumnos comprendidos entre 15-17 años de edad, que de acuerdo con una psicología evolutiva llamamos adolescencia, y más precisamente, según R. Hubert (1965), «adolescencia propiamente dicha». Nos interesa sobre todo los caracteres de su desarrollo intelectual. A este respecto los estudios de Jean Piaget son altamente significativos.

Dentro de los cuatro estadios de las operaciones intelectuales que distingue Piaget (1963, pp. 40-47, 1972b) nos fijaremos en las notas que da sobre el último, llamado «*Periodo de las operaciones formales*» que abarcaría de los 11-12 años a los 14-15. De alguna forma viene a significar una de las «condiciones internas» de que habla Gagné (1971) en todo proceso de aprendizaje-enseñanza.

El rasgo principal, que da nombre al período, es el «razonar por hipótesis» (Piaget 1972b, p. 46). Esto determina un cambio de perspectiva frente al período de operaciones concretas (7-11 años), ya que parte el alumno no de los objetos, sino de relaciones lógicas entre ellos. Como comenta Leif-Delay (1971, vol. I, p. 216): «el pensamiento de las relaciones supone la posibilidad de disociar los elementos y convertirlos en objetos de operaciones reversibles, las cuales constituyen los procedimientos esenciales del pensamiento formal». La capacidad de razonar sobre hipótesis, sobre enunciados, entraña, pues, la aparición a nivel psicológico de la lógica de las proposiciones.

Pero «la construcción de operaciones propocionales —señala Piaget 1972b (p. 48-49)— no es el único rasgo de este cuarto período. El problema psicológico más interesante que surge en este nivel está conectado con la aparición de un nuevo grupo de operaciones o “esquemas operatorios”, sin aparente relación con la lógica de proposiciones, y cuya verdadera naturaleza no se ve a primera vista». Estos esquemas operatorios serán operaciones combinatorias, proporciones y equilibrio mecánico. La capacidad de razonar y representar está involucrada, por tanto, en dos sistemas referenciales: aparición de esquemas operatorios y aparición de la lógica proposicional.

Piaget además, en su intento de buscar la lógica subyacente en cada proceso de razonamiento o «lógica natural», ha detectado un conjunto de estructuras lógicas proposicionales presentes en el adoles-

cente: las 16 operaciones binarias del álgebra proposicional sujetas a las leyes de un grupo de cuatro transformaciones (grupo llamado por Piaget INRC: Inicial (I), inversa (N), recíproca (R) y correlativa (C)). La aparición conjunta de la lógica proposicional y los «esquemas operatorios» se explicaría por el nivel de equilibrio y abstracción alcanzado en el pensamiento por el sujeto.

Hay, según Piaget, una cierta concordancia entre nivel psicológico del cuarto período y empleo natural inconsciente de la lógica proposicional por parte del sujeto, que sólo sería explicable por unas pautas de conducta de estructura booleana. Como señala Del Val (1974, p. 559): «Así pues, el cálculo de proposiciones clásico, la parte más sencilla y más armoniosa de la lógica, constituiría el término del desarrollo intelectual de los sujetos que viven en nuestras sociedades occidentales».

Todos estos caracteres, verdaderas «condiciones internas» de Gagné (1971), son las requeridas para que se pueda dar una comprensión de la lógica matemática, al mismo tiempo que su enseñanza posibilitará al sujeto un mayor desarrollo de dichas capacidades iniciales para dar paso de la lógica proposicional a la lógica del adulto. Ello justificaría la función de la lógica en este nivel.

I.2. Lógica y psicología

Lo anterior no implica una identificación entre nivel epistemológico y nivel psicológico, i.e. un psicologismo de la lógica. Hoy estamos lejos de creer como Boole (1854) que el objetivo de la lógica sea «investigar las leyes fundamentales de las operaciones de la mente mediante las cuales se realiza el razonamiento», según dice en el prólogo y reza en el título de su obra principal (*An Investigation of the Laws of Thought*).

Tras los períodos de logicismo y psicologismo hoy las relaciones entre uno y otro están más o menos perfectamente delimitadas y coordinadas. Ha sido también en esto Piaget quien ha contribuido más o menos decisivamente. Como él mismo señala: «Después de haber rehusado a la lógica el derecho de describir, en sustitución de la psicología, los mecanismos reales de la inteligencia y del pensamiento, los trabajos contemporáneos de los psicólogos sobre estos mecanismos reales están lo bastante avanzados como para que se perciba alguna relación entre las operaciones efectivas de la inteligencia y las operaciones abstractas y formalizadas descritas por la lógica» (Piaget 1972b, p. 80; también Beth-Piaget 1961). Este tipo de relación ha sido en los últimos años estudiado, tras el abandono del prejuicio introspeccionista por la psicología y el surgimiento de la psicología cognitiva, por los psicólogos.

Estos estudios, o al menos parte representativa de ellos, han sido dados a conocer en nuestro ámbito gracias a la labor y trabajo realizado por J. A. del Val en numerosos artículos (Vid. Bibliografía) y en el volumen por él compilado y traducido (3) (Del Val 1977a). Aquí vamos a reseñar lo que creemos im-

(2) A este respecto resulta de interés la obra de G. F. Kneller (1969), especialmente los capítulos 4 y 5 (pp. 59-115), y en otro contexto (nivel elemental de enseñanza) la de Glaymann-Rosenbloom (1973).

(3) Trabajo al que contribuyó inicialmente también Alfredo Deaño y el equipo del ICE de la Autónoma de Madrid.

porta más para los presupuestos psicológicos en la enseñanza de la lógica.

De alguna forma todos estos estudios tratan de investigar en qué medida la «lógica natural» de los adolescentes (o adultos) se adapta, o en qué difiere de la lógica matemática o simbólica. Tal vez lo más eficiente y breve sea reseñar textualmente las mismas conclusiones que J. A. del Val resume de tales estudios (Del Val 1977a, pp. 38-39):

«a) Parece claro en primer lugar que los sujetos no razonan formalmente, es decir, que al razonar lo hacen teniendo en cuenta el contenido tanto como la forma. Razonar únicamente sobre esta última constituye una habilidad muy específica que sólo adquieren las personas entrenadas en la lógica. De hecho, en la vida cotidiana no resulta necesario razonar con independencia del contenido, sino que por el contrario éste constituye frecuentemente una ayuda importante. b) Los sujetos, además, razonan sobre el conjunto de la situación y no sólo sobre lo que se les da, de tal forma que a menudo introducen premisas suplementarias, lo cual produce el efecto de que están razonando incorrectamente. c) En la medida de lo posible los problemas se simplifican al máximo y se tiende a reducir la cantidad de información que es preciso manejar. d) En relación con lo anterior, los problemas se tienden a cerrar lo antes posible, es decir, se tiende a limitar el número de alternativas que se deben considerar.»

Y Del Val comenta que «todo lo anterior establece una serie de diferencias entre el pensamiento natural y la lógica formal, que se manifiestan en los errores de los sujetos al resolver problemas lógicos. Esos errores hay que atribuirlos, en su mayor parte, al distinto modo de abordar los problemas. El sujeto que no ha estudiado lógica se enfrenta al problema que se le plantea con todos los datos que tiene a su disposición, aunque no están contenidos en lo que se le da, mientras que la persona con entrenamiento en lógica está habituada a servirse tan sólo de lo que se le da en el problema. Esta diferencia se manifiesta también en otros muchos problemas en los que el sujeto razona sobre unas suposiciones que él mismo establece y que, si en la vida cotidiana suelen ser de utilidad, en determinadas situaciones, que muchas veces son las que se tratan de producir experimentalmente, le llevan a soluciones erróneas o a no encontrar la solución. Es como si el sujeto construyera una representación general del problema, con lo que se le da y con lo que sabe en base a su experiencia anterior, y sobre ella razonara.»

Todo lo cual manifestaría las diferencias que hay entre un razonamiento natural y un razonamiento formal, diferencias que explican los errores cometidos por los sujetos. Parece como si el sujeto en el razonamiento natural, y no estrictamente lógico-matemático, además de no separar el contenido de la forma, hace intervenir otros elementos que están en función de la situación global total en que se plantea el problema y no sólo según las leyes lógicas.

Las investigaciones que se han realizado han versado o viendo la «lógica natural» que emplea el sujeto (Piaget y colaboradores) o estudiando la resolución de problemas lógicos. Sobre esta última, una gran cantidad de estudios han sido hechos sobre el silogismo y sus diversas figuras y modos; o —como últimamente se hace— sobre las conectivas proposicionales.

Entre las conectivas proposicionales la mayor cantidad de investigaciones han versado sobre la implicación, por ser la más problemática e importante dentro

de la lógica. Así desde B. Matalón (recogido en Del Val 1977a) se ha visto que los sujetos no la interpretan, ni en el sentido ni en su valor de verdad, de modo formal lógico. Se puede afirmar (Del Val y Rivière 1975, Del Val y Carretero 1977b) que los sujetos de forma natural tienden a interpretar los enunciados condicionales de acuerdo con la situación total y no sólo como condicionales o «condicional». En cuanto a su valor de verdad el que más difícil resulta aceptar por los adolescentes es que si de lo falso se sigue lo verdadero, la implicación sea verdadera. Con todo, las inferencias condicionales que menos problemas presentan son el *modus tollens* y sobre todo el *modus ponens*.

La disyunción no la suelen interpretar (Vid. art. de Naess, en Del Val 1977a, p. 282-294) en sentido inclusivo, sino como excluyente. Los sujetos tienen tendencia a utilizar inferencialmente la disyunción como «o» excluyente, no pensando en la posibilidad de que *p* y *q* sean ambas verdaderas, de ahí el alto porcentaje de disyunciones interpretadas por los sujetos excluyentemente (Naess, p. 293) y el problema que tienen en utilizar la llamada «regla por casos».

Las restantes conectivas (conjunción, negación, bicondicional) son las que menos problemas presentan para los sujetos, aun cuando en determinadas inferencias (especialmente con la negación) se encuentran algunos problemas (4).

1.3. Conclusiones

Todas estas investigaciones, unas a un nivel de mayor generalidad, otras más específicas sobre determinadas inferencias o empleos de conectivas proposicionales, tienen un sumo interés —del que el libro compilado por J. A. Del Val (1977a) da suficiente muestra— por constituir, creemos, unos presupuestos psicológicos para la enseñanza de la lógica. En cualquier caso lo que en ellos se pone de manifiesto es que contrariamente a las tesis de Piaget-Inhelder (1972a) el sujeto no emplea las operaciones lógicas de modo lógico, sino de acuerdo con otros muchos factores, como una lógica natural especial, que L. Apostel (recogido en Del Val 1977a) trata de esbozar. De aquí la necesidad de distinguir claramente el contenido de un razonamiento y su estudio formal en la enseñanza de la lógica. Pero también todos los estudios muestran hasta qué punto el desarrollo de una lógica proposicional natural en el pensamiento adolescente posibilita como condición interna la enseñanza de la lógica en el Bachillerato, y le da su sentido.

Lo cual no implica una confusión de planos —psicológico y lógico—, como decíamos antes, sino que haciendo un símil con la teoría chomshyana,

(4) Esta discordancia entre lógica natural-lógica formal y las dificultades de la enseñanza y aplicación de la lógica formal, pueden ser objeto de investigación, al modo de las reseñadas, por el profesor de Filosofía, en el mismo ambiente de clase y con motivo de los ejercicios que se realicen o se propongan intencionadamente. Lo único que exige es grabar o registrar por escrito para su posterior estudio. En el fondo no sería otra cosa que lo que Kalmykova llama «experimento natural». Cfr. vid. Kalmykova, Z. I.: «Métodos de investigación científica en la psicología de la instrucción», en Stones, E. (ed.): *Psicología de la Educación*. Madrid: Morata, 1972, pp. 152-170.

«la lógica podría entenderse como una descripción de la competencia de un sujeto razonante ideal. Aspira a construir la formalización de los criterios a los que ese razonador se atendería. Intenta exhibir el sistema de reglas que permitirían a un ser humano lógico-formalmente puro construir razonamientos válidos o reconocer la validez de los que otros pudieran construir» (Deaño 1976, p. 267). Pero al igual que el gramático generativista debe tener en cuenta la actuación de los hablantes concretos, en sentido parecido el docente de lógica debe tener presente la no correspondencia entre la «competencia natural» y la «competencia ideal» lógica, que provoca «actaciones» erróneas. Lograr la segunda, porque existe la primera, es el objetivo de su enseñanza.

II. ASPECTO DIDACTICO

La enseñanza de la lógica, tal como aparece en el programa oficial, se estructura en tres grandes núcleos: 1) Una introducción al lenguaje formal lógico (Tema 9); 2) Estudio de la lógica proposicional (Tema 10), y 3) Estudio de la lógica de clases (Tema 11). Sin embargo, por su enclave dentro del conjunto del programa va precedido y seguido de otros temas cuya conexión es evidente: A) «Comunicación y lenguaje» (Tema 8) es un tema «a caballo» entre dos núcleos y cuyo enfoque particular debía ser, por tanto, psicológico, pero al mismo tiempo lógico-filosófico: a través del estudio y análisis del lenguaje natural y los problemas lógico-semánticos y filosóficos que plantea, se enlazaría con el tema de lógica mostrando la ambigüedad del lenguaje natural y, por tanto, la necesidad, ventajas y límites del lenguaje formalizado con lo cual entraríamos de forma coherente en el estudio del lenguaje formal lógico. B) «La metodología del saber científico» (Tema 12) debería ser una aplicación-ampliación de la lógica: por un lado métodos de las ciencias formales, por otro —y con una consideración mayor— métodos de las ciencias empíricas, y problemas en general de la metodología y explicación científica. As pues, la conexión con lo anterior y posterior, creo, es evidente.

II.1. Contenido

Tal vez antes de comentar lo que creemos debería ser el contenido de enseñanza de la lógica, lo mejor sería presentar aquellos enunciados que integrarían cada uno de los temas:

9. *El lenguaje formal. La lógica.*—La ambigüedad del lenguaje natural.—Necesidad, ventajas y límites del lenguaje formalizado.—La lógica como estudio de los argumentos deductivos.—Historia de la lógica como un proceso de formalización.—La lógica simbólica.—Constantes y variables.—Enunciados atómicos, moleculares, juntores.—Verdad y falsedad lógicas.—Tablas de verdad.—Las categorías de un lenguaje formal: tablas de símbolos formales, reglas de formación y transformación de fórmulas.

10. *Cálculo lógico: lógica proposicional.*—Cálculo lógico: reglas de inferencia.—La deducción formal.—La lógica de enunciados.—Reglas básicas del cálculo de juntores (reglas de introducción y eliminación).—Algunas reglas derivadas.—Resolución de argumentos.

11. *Cálculo lógico: lógica de clases.*—Noción de clase.—La lógica de clases como reinterpretación de la lógica de enunciados.—Nociones generales del cálculo de clases: leyes del cálculo.—Inferencia inmediata: relaciones de oposición y conversión.—Inferencia mediata: el silogismo categórico.—Representación de clases y silogismos por diagramas de VENN.

II.2. La enseñanza de la lógica en BUP: comentario sobre su contenido

La ambigüedad del lenguaje natural y la necesidad, ventajas y límites del lenguaje formalizado tendrían la finalidad de introducir —como hemos señalado— de forma relacionada con el tema anterior, al estudio de la lógica, como un estudio de los argumentos deductivos formalmente válidos. Para hablar de la «lógica simbólica» o «matemática» actual se ha creído necesario hacer, muy brevemente, un recorrido histórico, marcando los jalones principales, como un proceso de formalización que, impulsado por la matematización de la lógica (Kneale 1972), ha dado lugar a la lógica simbólica.

Una vez definida la lógica simbólica y su objeto de estudio, comenzamos a analizar los elementos relevantes lógicamente en los argumentos: distinción entre constante y variables, enunciados atómicos y constantes o juntores, que conectándolos dan lugar a enunciados moleculares.

Los valores de verdad positivo (verdadero) y negativo (falso), según el principio de bivalencia, tendrán como objetivo interpretar por medio de atribuciones veritativas los enunciados moleculares, para lo cual se establecerán las condiciones de verdad para cada uno de los juntores. A través del método de tablas de verdad, cuyo aprendizaje lo realizan fácilmente los alumnos, se debe mostrar su validez para determinar exactamente el valor de verdad de una fórmula molecular y la interpretación de sus resultados según sea una tautología, contingencia o contradicción.

Se terminaría este tema de introducción al lenguaje lógico con un resumen de las categorías que forman un lenguaje formal: tablas de símbolos formales, reglas de formación y transformación de fórmulas. Estudiadas ya en este tema las dos primeras categorías, el objeto del cálculo lógico va a ser precisamente el estudio y aplicación de las reglas de transformación de fórmulas (5).

Los temas de cálculo lógico, creo, deben tener un carácter práctico y de aplicación a la resolución de argumentos. De aquí que los conocimientos dados sobre estos temas deben combinarse a ir encaminados a la resolución práctica de argumentos, lo cual facilitará el aprendizaje e interés por parte del alumno. De alguna manera estudiar cálculo lógico es saber resolver argumentos. Así lo señala Garrido (1974, p. 39): «Objeto de la lógica de enunciados es formalizar y definir los juntores y estudiar las leyes de com-

(5) Como se puede apreciar las líneas generales del contenido y ordenación de este tema (y los siguientes), está altamente influenciado por los excelentes manuales de Garrido 1974 y Deaño 1974-75. Creemos que, además de sus cualidades epistemológicas o didácticas, tiene el valor de enlazar con el lenguaje formal y sistemas que posteriormente, al menos para los alumnos de letras, van a estudiar en las Facultades (al menos también en la mayoría de ellas).

binación y deducción de enunciados fundadas en tales nexos».

El problema que se plantearía es qué sistema de deducción lógica seguir: A) O dar un conjunto de leyes lógicas inconexas y cuya evidencia no es tal (recordemos lo dicho en el aspecto psicológico), con lo que la lógica se convierte en un aprenderse tales leyes; B) Seguir un sistema axiomático, como puede ser el «sistema PM» de los *Principia Mathematica*; o C) Por último, seguir un sistema de reglas de inferencia, como la deducción natural de Gentzen. Los libros de texto de filosofía del BUP aparecidos en el mercado son representativos de los tres tipos, aunque desgraciadamente abundan más los del primero que los del último, y en algunos no aparece ninguno.

Tras la experiencia de la enseñanza de la lógica en este curso, junto con otros compañeros, creo tengo motivos didácticos para defender la conveniencia de seguir la tercera alternativa. La primera es rechazable por ser contraria a la idea de la lógica como inferencia y cálculo lógico, en el que todo lo que se emplee debe ser deductivamente demostrado. Un conjunto de leyes lógicas inconexas no cumple tal condición y menos cuando algunas de tales leyes (por ejemplo las de De Morgan) no llegan a ser inmediatamente evidentes, aun cuando sean tautologías. No presentar ningún sistema, sino sólo métodos de prueba de validez de un argumento mediante tablas de verdad, o de invalidez de un razonamiento, no llega a ser ningún cálculo lógico ni inferencia deductiva. El dilema está, por tanto, entre presentar un sistema axiomático de deducción o un sistema de reglas de inferencia.

Como señalaba Alfredo Deaño (1974, I, p. 186): «Aunque, en abstracto no haya diferencia entre presentar una teoría lógica como sistema axiomático y darle la forma de reglas de inferencia, cuando optamos por una u otra modalidad lo hacemos obedeciendo a motivaciones muy concretas. La presentación de la lógica en forma de sistema de reglas de inferencia favorece, como hemos visto, su aplicación al razonamiento natural. Pero, por otra parte, su presentación como sistema axiomático hace más cómodas las consideraciones metateóricas». Depende, por tanto, del objetivo propuesto para escoger entre uno y otro. La deducción natural del tipo Gentzen (6) se caracteriza, de forma general, por hacer de la deducción formal algo semejante o parecido a la deducción natural o intuitiva, frente al sistema axiomático que se caracteriza por estar muy alejado de la intuición natural. Si la deducción natural se ha ido imponiendo como modo usual de la argumentación lógica «se debe al carácter menos sofisticado, frente a los sistemas axiomáticos (...), en el sentido de que los procesos de demostración se asemejan mucho a los procesos tradicionalmente empleados en las demostraciones matemáticas: en estos no se parte de principios, sino de supuestos que ulteriormente se incorporan a las tesis matemáticas o se destruyen por dar lugar a contradicciones» (Beneyto 1975, p. 361).

Si tratamos, por motivos didácticos, de estudiar formalmente los procedimientos naturales de deducción, aproximando uno y otro, parece justificado y aconsejable su empleo. Por otra parte tiene la gran ventaja de posibilitar la realización de numerosas deducciones formales, sin excesiva complicación para los alumnos, lo que da al cálculo lógico un enfoque eminentemente práctico (7).

Su aprendizaje es fácil a través de las reexposiciones que se han hecho de él, eliminando su parte de deducción no lineal, principalmente el libro de Anderson-Johnstone (1962), Deaño (1974, I, pp. 129 y 165), y sobre todo el excelente manual de Garrido (1974, pp. 74 y ss.) que sigue de cerca la exposición del primero. Es principalmente a Garrido 1974 al que nosotros hemos seguido fundamentalmente.

La deducción natural se desarrolla linealmente, en la que desde los supuestos iniciales (cuando los haya) a la conclusión tendremos o supuestos subsidiarios o fórmulas obtenidas por la aplicación de reglas de inferencia. Las reglas básicas (o no fundamentales, sino por su evidencia o por la tabla de verdad) que lo componen son ocho: dos para cada juntor (implicador, conjuntor, disyuntor, negador —el coimplicador se considera derivado del implicador—), una de introducción y otra de eliminación del juntor en cuestión. Cada signo indicador de la regla de inferencia empleada deberá ir acompañado de los números de la línea o líneas a los que se ha aplicado dicha regla (Ver cuadro 1).

Con sólo las ocho reglas de deducción natural sería suficiente para la resolución de cualquier problema de lógica proposicional; sin embargo, sería necesario el dar algunas de las reglas derivadas más usadas, en primer lugar por su uso en la simplificación de las deducciones, y en segundo lugar porque su demostración (mediante básicas) constituye —al menos así ha resultado en nuestra experiencia docente— una excelente ejercitación para aplicar las básicas: en el fondo la demostración de por qué tales reglas derivadas puede constituir al mismo tiempo ejercicios de las básicas. El único problema resultaría de que se abrumase al alumno con tantas reglas derivadas, cosa que se aminora si se toman como ejercicios. Seleccionando las más fundamentales nosotros hemos dado las siguientes:

- 1) Reglas derivadas de la implicación: silogismo hipotético, mutación de premisas, identidad y coimplicación (introducción y eliminación).
- 2) Reglas derivadas de la conjunción: conmutativa, asociativa y distributiva.
- 3) Reglas derivadas de la disyunción: conmutativa, asociativa, distributiva, silogismo disyuntivo y dilemas.
- 4) Reglas derivadas de la negación: Modus tollens, ex contradictione quodlibet, principio de no contradicción y tercio excluso.
- 5) Reglas de interdefinición: leyes de De Morgan.

En todo caso conviene presentar tales reglas, según hemos comprobado, como ejercicios de aplicación de básicas que al ser demostradas se pueden emplear simplificándonos todos aquellos pasos que para demostrarlos necesitaríamos dar, e insistir en el dominio de las reglas básicas y empleo opcional de

(6) Como se sabe, Gerhard Gentzen expuso su sistema de reglas para la deducción natural en 1934, y vino a significar un cambio de perspectiva al hacer más intuitiva la deducción lógica. Este sistema fue esbozado igualmente, de forma independiente, en el mismo año por S. Jaskowski (de la escuela polaca de J. Lukasiewicz). Unos autores en la exposición actual siguen a uno u a otro, o conjuntamente, por lo que se suele llamar «sistema de deducción natural de Jaskowski-Gentzen». Vid. Bibliografía.

(7) Esto no excluye el presentar a los alumnos la lógica como sistema formal axiomático, bien al establecer las categorías del lenguaje formal (tema 9) o bien —como nosotros hemos hecho— en el tema 12 dentro de la metodología del saber científico.

CUADRO 1

REGLAS BASICAS DEL CALCULO DE JUNTORES				
Juntor	Introducción		Eliminación	
	Esquema	Signo	Esquema	Signo
Implicación	$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$	II o TD	$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$	MP
Conjunción	$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$	IC	$\frac{A \wedge B}{A}$ $\frac{A \wedge B}{B}$	EC ₁ EC ₂
Disyunción	$\frac{A}{A \vee B}$ $\frac{B}{A \vee B}$	ID ₁ ID ₂	$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array}}{A \vee B}$ $\frac{\begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{A \vee B}$	ED o Cas
Negación	$\frac{A \quad \vdots \quad B \wedge \neg B}{\neg A}$	IN o Abs	$\frac{\neg \neg A}{A}$	EN

las derivadas. El cálculo lógico proposicional debe ir enfocado en todo momento a la realización práctica de deducciones formales en doble ejercicio: formalización y deducción posterior, o deducción solamente a partir de supuestos iniciales o sin ellos.

Respecto al cálculo en LOGICA DE CLASES se plantea el problema de su relación con el tema anterior, de modo que la lógica guarde una cierta unidad. Según la perspectiva que se adopte ésta puede ser presentada: a) De modo independiente de la lógica de enunciados o predicados; b) Como una reinterpretación de la lógica de predicados monádicos, y c) Como una reinterpretación de la lógica de enunciados o proposicional.

La primera sería rechazable porque presentada de modo independiente, además de su incoherencia, daría lugar a como ya les es enseñada a los alumnos dentro de la matemática (8). Como una reinterpretación de la lógica de predicados monádicos es quizá como tiene más sentido su estudio y como puede hacerse éste de una forma más profunda y evidente (9) pero contamos con que en el programa oficial no se da lógica de predicados (10), lo cual hace imposible tal perspectiva. Por ello hay que desarrollar la lógica de clases como una reinterpretación de la lógica proposicional, al menos, para que tenga un cierto grado de coherencia (11). Se tiene, por tanto, que establecer una relación entre la lógica de clases y la proposicional:

Respecto al contenido en concreto del tema, una vez establecido el concepto y relación con la lógica

(8) Más que «clases» lo que se aprenden como tal es teoría de conjuntos, aunque hay que advertir que según los programas oficiales de matemáticas en BUP, en ellos no aparece la teoría de conjuntos, por lo que los alumnos sólo lo estudiado en EGB.

(9) Así lo hace, por ejemplo, Quine 1962, pp. 303 y ss., y otros muchos autores.

(10) Cabría, tal vez, replantearse si es correcto o no hablar de lógica de clases sin haber dado antes nada de lógica de predicados; y, por tanto, si no sería conveniente introducir unas breves nociones (solamente sería suficiente dar los dos cuantores, reglas de introducción y eliminación del generalizador y particularizador, así como la diferencia entre predicados monádicos y poliádicos). Esto posibilitaría dar la lógica de clases con esta perspectiva mucho más interesante.

(11) Así lo hace, por ejemplo, Deaño 1974 en sucesivas notas a pie de página (pp. 51 y ss.) al mismo tiempo que va exponiendo la lógica de enunciados.

CUADRO 2

Lógica de clases				Lógica proposicional		
	Nombre	Símbolo	Ejemplo	Nombre	Símbolo	Ejemplo
Operaciones	Complemento	—	\overline{A}	Negación	\neg	$\neg p$
	Intersección	\cap	$A \cap B$	Conjunción	\wedge	$p \wedge q$
	Unión	\cup	$A \cup B$	Disyunción	\vee	$p \vee q$
Relaciones	Inclusión	\subset	$A \subset B$	Implicación	\rightarrow	$p \rightarrow q$
	Equivalencia	$=$	$A = B$	Coimplicación	\leftrightarrow	$p \leftrightarrow q$
	Pertenencia	\in	$a \in A$			

proposicional estudiada, conviene dar unas nociones generales de su cálculo y las leyes para operar con él. En el establecimiento de tales leyes la relación debe ser directa con las reglas derivadas del cálculo de enunciados, todo lo cual le hace tener una relación y coherencia con el tema anterior y su conocimiento resulta al alumno más fácilmente asimilable.

Como un segundo núcleo dentro de este tema he incluido la inferencia inmediata, con las respectivas relaciones de oposición y conversión, y el estudio del silogismo categórico. Puede ser discutido (12) el hecho de haber introducido la teoría del silogismo en la lógica de clases. Garrido 1974 la estudia en relación con la lógica monádica de cuantores, cosa que aquí es inviable al no haberla estudiado. Se podría haber prescindido de él, pero considero que como núcleo principal de la lógica tradicional lo debía conocer el alumno, sin abandonar un enfoque y reinterpretación desde la lógica actual de clases. Este sentido tiene también la representación gráfica por los diagramas de Venn de silogismos —que puede servir como método para saber cuáles son válidos e inválidos— y clases. Igualmente aquí los ejemplos y ejercicios prácticos deben hacerse abundantemente.

II.3. Resolución de argumentos: algunos ejemplos

La enseñanza de la lógica debe tener un carácter eminentemente activo, de tal forma que aquí vale más que nunca que el conocimiento no será tal si no se pone en práctica en la resolución de argumentos. Cada uno de los apartados de su enseñanza tiene que acompañarse con los correspondientes ejercicios o problemas. Y ya que en lógica poca importa el contenido, sino la forma, conviene buscar para su formalización aquellos casos que, al mismo tiempo por su contenido, puedan resultar cuando menos interesantes o divertidos (13).

La prueba de si una determinada fórmula molecular es tautológica, contingente o contradictoria por el método de tablas de verdad, ofrece pocas dificultades al alumno, una vez definidos los valores de verdad y sus condiciones para cada junctor.

La formalización o simbolización de lenguaje natural al lenguaje lógico tiene una serie de problemas debido a la ambigüedad o redundancia del primero que requiere un entrenamiento continuado por el alumno. Pero el problema clave en este aspecto es qué sistema de simbolización elegir. Aunque sea éste un aspecto convencional, creo que debido a la popularización que la simbología de Lorenzen ha tenido en España, gracias a los manuales de Garrido y Deaño, conviene seguirlo, que además tiene una serie de ventajas intuitivas frente al de los *Principia*. Por otro lado, teniendo presente la continuación de gran parte de estos alumnos en las Facultades de Letras, en las que presumiblemente siguen dicha simbología, apoya la conveniencia de seguirlo. Lo cual no obsta para que se señale, con motivo de la convencionalidad del lenguaje lógico, la de los *Principia*.

Respecto a la resolución de argumentos por el método propuesto de reglas de inferencia o deducción natural, tal vez sea lo mejor recoger aquí algunos de los ejercicios, a título de ejemplo, realizados por los alumnos. Adoptamos el sistema lineal y trazos horizontales para señalar los supuestos iniciales (o premisas) y la llave para indicar el alcance del supuesto subsidiario, sistema tomado de ANDERSON-JOHNSTON 1962 y GARRIDO 1974.

I. Formalizar y deducir

1.1. «O la meta es batida o el Valencia será derrotado. Si el Valencia es derrotado, los hinchas se decepcionarán. Los hinchas no se decepcionarán. Por tanto, no es el caso que si la meta es batida, los hinchas se decepcionarán.»

— 1.	$p \vee q$	
— 2.	$q \rightarrow r$	$\vdash \neg(p \rightarrow q)$
— 3.	$\neg r$	
4.	$p \rightarrow r$	
5.	p	
6.	r	MP 4,5
7.	q	
8.	r	MP 2,7
9.	r	Cas 1,5-6,7-8
10.	$r \vee \neg r$	IC 3,9
11.	$\neg(p \rightarrow q)$	IN 4-10

1.2. 1. «Si Dios no existe, su existencia es lógicamente imposible.

2. Si Dios existe, su existencia es lógicamente necesaria.

3. La existencia de Dios, por tanto, o es lógicamente imposible o es lógicamente necesaria.

4. Si la existencia de Dios es lógicamente imposible, el concepto de Dios es contradictorio.

5. Ahora bien, el concepto de Dios no es contradictorio.

6. La existencia de Dios, consecuentemente, es lógicamente necesaria (14).»

— 1.	$\neg p \rightarrow q$	
— 2.	$p \rightarrow r$	
— 3.	$q \vee r$	$\vdash r$
— 4.	$q \rightarrow s$	
— 5.	$\neg s$	
— 6.	$\neg q$	MT 4,5
— 7.	r	SD ₂ 3,6

— 1.	$\neg p \rightarrow q$	
— 2.	$p \rightarrow r$	
— 3.	$q \vee r$	
— 4.	$q \rightarrow s$	
— 5.	$\neg s$	
6.	q	
7.	s	MP 4,6
8.	$s \vee \neg s$	IC 5,7
9.	$\neg q$	IN 6-8
10.	r	SD ₂ 3,9

(12) Existen autores del prestigio de J. Lukasiewicz que afirman que la silogística, al menos la aristotélica, no es ni una lógica de clases ni de predicados, sino un sistema independiente. Cfr. Lukasiewicz, J.: «La silogística de Aristóteles». Desde el punto de vista de la lógica formal moderna. (Trad. de J. Fernández Robles). Madrid: Tecnos, 1977.

(13) En este sentido A. Deaño (1974) ofrece una gran cantidad de ejercicios que pueden ser bastante válidos, sobre todo para formalizar; también M. Garrido (1974) presenta algunos. Igualmente hay libros que ofrecen múltiples ejercicios de los que se pueden tomar: J. C. Colacilli de Muro y otros: «Ejercicios de lógica. Lógica proposicional». Buenos Aires: Paidós, 1974. Col. «Textos Universitarios», núm. 3 (emplea la simbología de los *Principia*) y A. Burgos: «Iniciación a la lógica matemática». Madrid: Selecciones Científicas, 1970.

(14) Tomado de Sadaba, J.: «Lenguaje religioso y filosofía analítica». Barcelona: Ariel-Fundación J. March, 1977, p. 83.

I.3. «Si el PCE apoya a UCD, entonces el PCE tendrá que renunciar a su programa de reivindicaciones. Pero si combaten a UCD, entonces favorecen al PSOE. Pero una de dos: o apoyan a UCD o lo combaten. Por consiguiente, habrán de renunciar a su programa de reivindicaciones o favorecer al PSOE (15).»

- | | | |
|------|-------------------|-------------------|
| — 1. | $p \rightarrow q$ | |
| — 2. | $r \rightarrow s$ | $\vdash q \vee s$ |
| — 3. | $p \vee r$ | |
| [4. | p | |
| 5. | q | MP 1,4 |
| 6. | $q \vee s$ | ID ₁ 5 |
| [7. | r | |
| 8. | s | MP 2,7 |
| 9. | $q \vee s$ | ID ₂ 8 |
| 10. | $q \vee s$ | Cas 3, 4-6, 7-9 |

II. Demostrar y deducir:

II.1.

- | | | |
|------|--|-------------------|
| | $\vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$ | |
| [1. | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ | |
| [2. | p | |
| 3. | $p \rightarrow q$ | EC ₁ 1 |
| 4. | $p \rightarrow r$ | EC ₂ 1 |
| 5. | q | MP 2,3 |
| 6. | r | MP 2,4 |
| 7. | $q \wedge r$ | IC 5,6 |
| 8. | $p \rightarrow q \wedge r$ | II 2-7 |
| 9. | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$ | II 1-8 |

II.2

- | | | |
|------|--|--------|
| — 1. | $\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$ | |
| 2. | p | |
| 3. | $\neg q$ | |
| 4. | $p \wedge \neg q$ | IC 2,3 |
| 5. | $(p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)$ | IC 1,4 |
| 6. | $\neg \neg q$ | IN 3-5 |
| 7. | q | EN 6 |
| 8. | $p \rightarrow q$ | TD 2-7 |

II.3. Ley de De Morgan.

- | | | |
|------|------------------------------------|-------------------------------|
| — 1. | $\neg(p \vee q)$ | $\vdash \neg p \wedge \neg q$ |
| 2. | p | |
| 3. | $p \vee q$ | ID ₁ 2 |
| 4. | $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$ | IC 1,3 |
| 5. | $\neg p$ | IN 2-4 |
| 6. | q | |
| 7. | $p \vee q$ | ID ₂ 6 |
| 8. | $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$ | IC 1,7 |
| 9. | $\neg q$ | IC 6-8 |
| 10. | $\neg p \wedge \neg q$ | IC 5,9 |

(15) Adaptado de Garrido (1974), p. 88.

BIBLIOGRAFIA

- Anderson, J. M., y Juhnstone, H. W. (1972): «Natural Deduction». Belmont (Calif.): *Wadsworth Publishing Company*.
- Beneyto, R. (1975): «Un aspecto natural de la deducción natural», en *Teorema*, vol. V/3-4, pp. 361-381.
- Beth, E. W., y Piaget, J. (1968): «Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real». Madrid: *Ciencias Nuevas*.
- Deaño, A. (1974-75): «Introducción a la lógica formal». Vol. I: *La lógica de enunciados*. Vol. II: *La lógica de predicados*. Madrid: Alianza Ed.
- Deaño, A. (1976): «Lógica formal» en Quintanilla, M. A. (dir.): *Diccionario de Filosofía Contemporánea*. Salamanca: Sígueme.
- Del Val, J. A. (1974): «Sobre las aplicaciones de la lógica formal al estudio del razonamiento», en *Teorema*, vol. IV/4, pp. 555-578.
- Del Val, J. A., y Riviere, A. (1975): «Si llueve Elisa lleva sombrero»: Una investigación psicológica sobre la tabla de verdad del condicional», en *Revista de Psicología General y Aplicada*, núm. 30, pp. 825-850.
- Del Val, J. A. (1977a) (Intr., comp. y trad.): «Investigaciones sobre lógica y psicología». Madrid. Alianza Ed.
- Del Val, J. A., y Carretero, M. (1977b): «La adquisición de las conectivas proposicionales por los niños», en Del Val, J. A. (Comp.): *Lecturas de psicología del niño*. Madrid: Alianza Ed., vol. II, pp. 178-194.
- Gagné, R. M. (1971): «Las condiciones del aprendizaje». Madrid: Aguilar.
- Garrido, M. (1972): «La lógica matemática en España (1960-1970)», en *Teorema*, núm. 6, pp. 119-132.
- Garrido, M. (1974): «Lógica simbólica». Madrid: Tecnos.
- Gentzen, G. (1934): «Untersuchungen über das logische Schliessen», en *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, pp. 176-210 y 405-431. Traducción comentada francesa en R. Feys y J. Ladrière: *Recherches sur la déduction logique*. Paris: Puf, 1955. La rev. *Teorema* tiene anunciada versión cast. de dicho artículo.
- Glaymann, M., y Rosenbloom, P. C. (1973): «La lógica en la escuela». Barcelona: Teide.
- Hubert, R. (1965): «El desarrollo mental». Buenos Aires: Kapelusz, 2.ª ed.
- Kneale, W. y M. (1972): «El desarrollo de la lógica». Madrid: Tecnos.
- Kneller, G. F. (1969): «La lógica y el lenguaje en la educación». Buenos Aires: El Ateneo.
- Leif, J., y Delay, J. (1971): «Psicología y educación del adolescente». Buenos Aires: Kapelusz, 2 vols.
- Mosterin, J. (1970): «Lógica de primer orden». Barcelona: Ariel.
- Piaget, J. (1973): «Los estadios en la psicología del niño». Buenos Aires: Latauro.
- Piaget, J., e Inhelder, B. (1972a): «De la lógica del niño a la lógica del adolescente». Buenos Aires: Paidós.
- Piaget, J. (1972b): «Lógica y psicología» (Comp., Intr. y Trad. de A. Deaño y J. A. Del Val). Barcelona: A. Roldondo Ed.
- Quine, W. V. (1962): «Los métodos de la lógica». Barcelona: Ariel.
- Sacristán, M. (1964): «Introducción a la lógica y al análisis formal». Barcelona: Ariel.