7 Temas matemáticos de ayer: La circunferencia de Feuerbach o de los nueve puntos

Por Vicente MEAVILLA SEGUI (*)

«En el prólogo de su Geometría Proyectiva, el profesor Santaló escribe:

«La característica esencial de la matemática del presente siglo ha sido, sin duda, la influencia que ha tenido en todas sus ramas la llamada Algebra Moderna. Toda la matemática se ha algebrizado. La ordenación que el álgebra hizo de las estructuras matemáticas, su nomenclatura y su simbolismo particular han pasado a ser de uso común en toda la matemática. En general, ello ha sido saludable, pues ha contribuido a mantener la unidad conceptual y a sistematizar los conocimientos.

La Geometría no ha escapado a esta tendencia uniformadora. Muchos de sus capítulos tradicionales conservan de Geometría tan sólo el nombre, que también van perdiendo, para ser incluidos en los textos de la llamada Algebra Lineal. La Geometría pura, edificada en base a los métodos clásicos, va perdiendo interés y va desapareciendo de los planes de estudio de cualquier carrera universitaria. Ello es debido, principalmente, a dos razones. En primer lugar, la Geometría pura, basada sobre las figuras del espacio intuitivo, por lo menos en su origen, se presta difícilmente a su generalización a espacios de más de tres dimensiones y, sin embargo, es esta Geometría multidimensional la que resulta imprescindible para muchos capítulos de la matemática actual. En segundo lugar, la Geometría pura, traducida analíticamente, es la Geometría sobre el cuerpo de los números reales y la matemática moderna necesita de otros cuerpos de números, tanto para aclarar sus fundamentos como para servir a las exigencias de las aplicaciones.»

Estamos totalmente de acuerdo con don Luis, pero creemos que, desde una óptica meramente didáctica, puede resultar peligroso no volver, en ocasiones, la mirada atrás y recordar (quizás con nostalgia) algunas parcelas de la matemática que, en su día, resultaban familiares a cualquier estudiante de esta discipiina.

Las líneas que siguen tienen como único objetivo evitar la desaparición de bellos y formativos temas matemáticos (en nuestro caso, de la Geometría Elemental) que, con el paso del tiempo, corren el peligro de convertirse en auténticas piezas de museo.

PRIMER CASO

Consideremos el triángulo acutángulo $T = UVW$. Sean O y C el ortocentro y el circuncentro de T respectivamente.

El triángulo $T' = U'V'W'$, obtenido al unir los puntos medios de los lados de T, es (evidentemente) semejante al triángulo T, siendo la razón de semejanza 1/2 (figura 1).

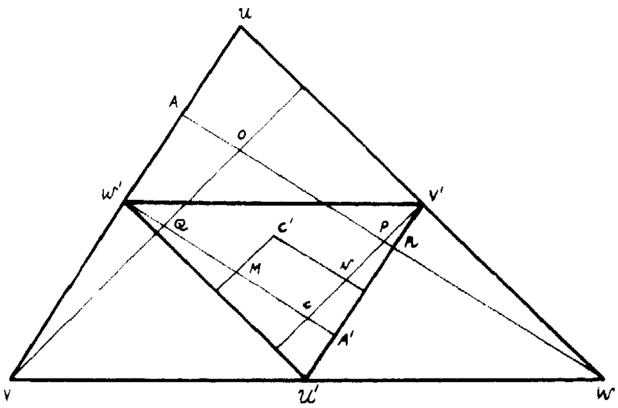

FIGURA 1

Sea C' el circuncentro de T' (notemos que C, circuncentro de T, es el ortocentro de T').

Resulta inmediato que los paralelogramos CMC'N y CQOP son semejantes (siendo 1/2 la razón de semejanza). Con esto, es obvio que el punto C' es la intersección de las diagnoales de CQOP. Tenemos, por tanto, el siguiente resultado:

El circuncentro C' del triángulo T' está alineado con el ortocentro y el circuncentro del triángulo T. C' es el punto medio del segmento OC.

Observemos, ahora, la figura 2.

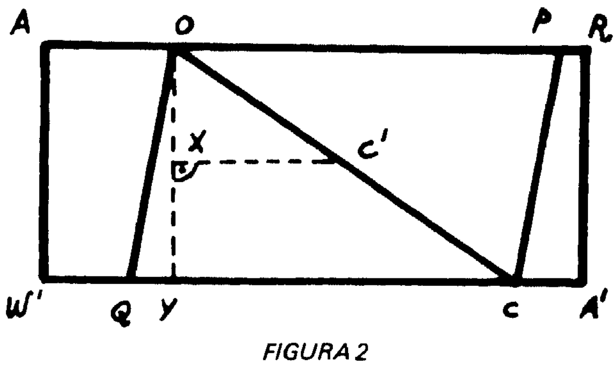

FIGURA 2

(*) Profesor agregado de Matemáticas del Instituto San Miguel de Aralar, de Alsasua.

No reviste dificultad alguna comprobar que el punto C' pertenece a la mediatriz del segmento AW' (y, naturalmente, a la mediatriz del segmento RA'). Luego:

— El circuncentro de T' equidista del punto medio del lado UV y del pie de la altura relativa al vértice W.

Podríamos demostrar también, que:

— El punto C' equidista del punto medio del lado UW y del pie de la altura relativa al vértice V.

— EL punto C' equidista del punto medio del lado WV y del pie de la altura relativa al vértice U.

Teniendo en cuenta estos resultados y recordando que el circuncentro de T' equidista de los puntos medios de los lados del triángulo T, podemos afirmar:

El circuncentro de T' equidista de los pies de las alturas del triángulo T.

La distancia de C' a los pies de dichas alturas coincide, naturalmente, con el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo T'.

Siguiendo adelante en nuestro estudio, prestemos atención a la figura 3.

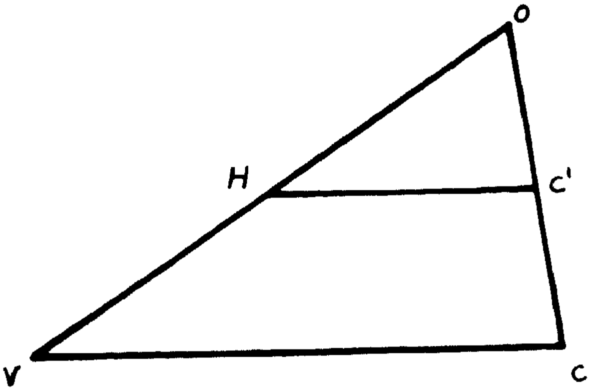

FIGURA 3

Los triángulos OVC y OHC' son semejantes (siendo 2 la razón de semejanza). El lado VC tiene por longitud el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo T; por tanto, el segmento HC' tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia circunscrita a T'. Además, el punto H es el punto medio del segmento VO, luego podemos asegurar:

***— La circunferencia circunscrita al triángulo T' pasa por el punto medio del segmento que determinan los puntos V** (vértice de T) y **O** (ortocentro de T).*

Razonando de forma similar llegaríamos a los siguientes resultados:

***— La circunferencia circunscrita al triángulo T' pasa por el punto medio del segmento determinado por los puntos U** (vértice de T) y **O** (ortocentro de T).*

***— La circunferencia circunscrita al triángulo T' pasa por el punto medio del segmento que tiene por extremos el punto W** (vértice de T) y **O** (ortocentro de T).*

A partir de las consecuencias obtenidas hasta aquí, podemos enunciar:

Dado un triángulo acutángulo T, los puntos medios de sus lados, los pies de sus alturas y los puntos medios de los segmentos determinados por su ortocentro y cada uno de sus vértices pertenecen a una circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento que tiene por extremos el ortocentro y el circuncentro de T y cuyo radio es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita a T (figura 4).

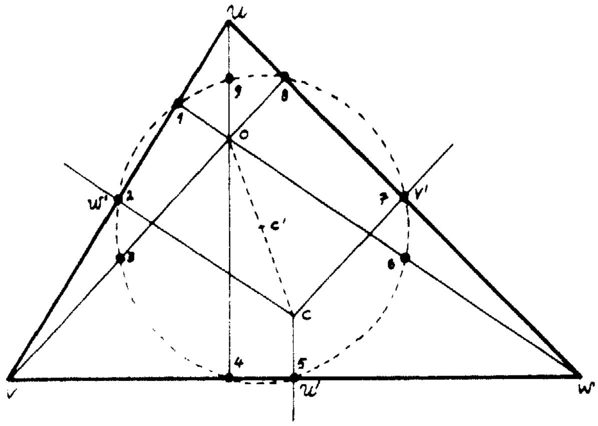

FIGURA 4

SEGUNDO CASO

Sea el triángulo obtusángulo T = UVW de la figura 5. Designemos por O y C el ortocentro y el circuncentro de T respectivamente.

El triángulo T' = U'V'W' cuyos vértices son los puntos medios de los lados de T es, trivialmente, semejante a dicho triángulo (siendo la razón de semejanza 1/2).

Sea C' el circuncentro de T' (observemos que el circuncentro de T coincide con el ortocentro de T').

Los paralelogramos CMC'N y CQOP son, obviamente, semejantes (siendo 1/2 la razón de semejanza). Por tanto, el punto C' coincide con el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo CQOP.

Podemos, pues, afirmar que:

El circuncentro C' de T' está alineado con el ortocentro y el circuncentro del triángulo T, siendo** (además) **C' el punto medio del segmento OC.

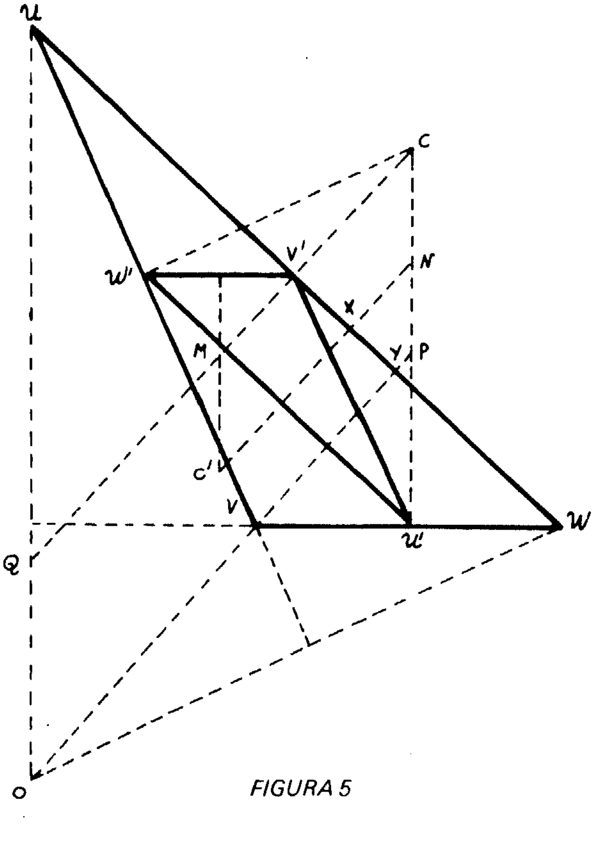

FIGURA 5

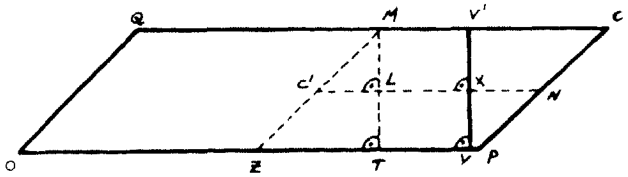

FIGURA 6

Teniendo en cuenta la figura 6, resulta inmediatamente que X es el punto medio del segmento V'Y. Entonces:

– EL circuncentro C' del triángulo T' equidista de los puntos V' (punto medio del lado UW de T) e Y (pie de la altura del triángulo T relativa al vértice V).

Se puede comprobar, también, que:

– El punto C' equidista del punto medio del lado VW y del pie de la altura relativa al vértice U.

– El punto C' equidista del punto medio del lado UV y del pie de la altura relativa al vértice W.

En definitiva, y tal como vimos en el primer caso, resulta:

El circuncentro del triángulo T' equidista de los pies de las alturas del triángulo T.

De la simple observación de la figura 7, y razonando de la misma forma que en el primer caso, obtenemos:

***– La circunferencia circunscrita al triángulo T' pasa por el punto medio del segmento que determinan los puntos V** (vértice de T) **y O** (ortocentro de T).*

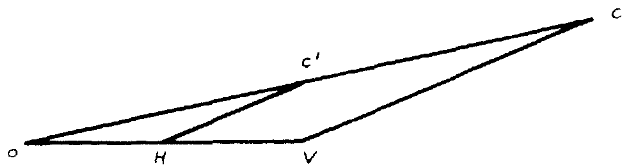

FIGURA 7

Podría, también, demostrarse que:

***– La circunferencia circunscrita al triángulo T' pasa por el punto medio del segmento determinado por los puntos U** (vértice de T) **y O** (ortocentro de T).*

***– La circunferencia circunscrita al triángulo T' pasa por el punto medio del segmento que tiene por extremos el punto W** (vértice de T) **y O** (ortocentro de T).*

Reuniendo todos los datos de que disponemos, enunciamos:

Dado un triángulo obtusángulo T, los puntos medios de sus lados, los pies de sus alturas y los puntos medios de los segmentos determinados por su ortocentro y cada uno de sus vértices pertenecen a una circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento que tiene por extremos el ortocentro y el circuncentro de T y cuyo radio es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

TERCER CASO

Sea el triángulo rectángulo T = UVW de la figura 8.

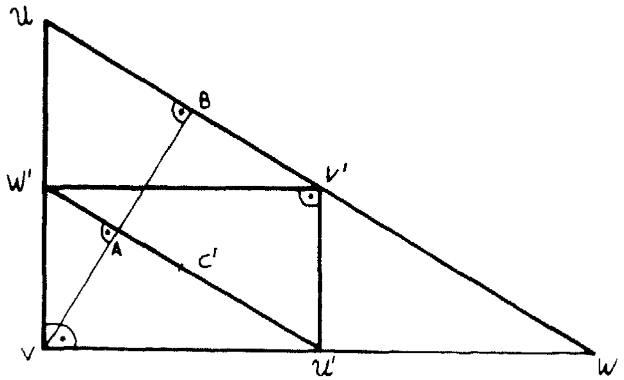

FIGURA 8

Notemos que el ortocentro de T coincide con el vértice V y que el circuncentro de T es el punto medio V' de la hipotenusa UW.

El circuncentro del triángulo T', obtenido a partir de T uniendo sus puntos medios, es el punto medio de la hipotenusa U'W'. Por tanto, el circuncentro C' de T' es la intersección de las diagonales del rectángulo U'VW'V'.

Es decir:

El circuncentro de T' está alineado con el ortocentro y el circuncentro de T. C' equidista de V y V'.

Los triángulos VAW' y VBU son semejantes (siendo 1/2 la razón de semejanza), entonces el punto A es el punto medio del segmento VB. En definitiva C' equidista de los puntos V y B. Teniendo en cuenta que el punto V es, al mismo tiempo, pie de la altura relativa al vértice U y pie de la altura relativa al vértice W, podemos afirmar:

El punto C' equidista de los pies de las alturas del triángulo T.

Evidentemente, las longitudes de los segmentos VC' y W'C' son iguales (ya que las diagonales de un rectángulo son iguales), luego: las distancias de C' a los pies de las alturas de T coinciden con el radio de la circunferencia circunscrita a T'.

Es obvio que dicha circunferencia pasa por los puntos medios de los segmentos que tienen por extremos el ortocentro de T y cada uno de sus vértices.

En resumen, al considerar un triángulo rectángulo llegamos a las mismas conclusiones que obtuvimos en el primer y segundo caso.

Podemos, pues, formular con carácter general el enunciado siguiente:

Los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que tienen por extremos el ortocentro y cada uno de los vértices de un triángulo cualquiera T pertenecen a una circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento determinado por el ortocentro y el circuncentro de T y cuyo radio es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

*Dicha circunferencia se llama **circunferencia de Feuerbach o de los nueve puntos.***