2 Radiografía del tetraedro regular

Por Vicente MEAVILLA SEGUI (*)

En los programas de Matemáticas del nuevo Bachillerato es curioso observar que las «unidades didácticas» dedicadas al estudio de la Geometría Elemental brillan por su ausencia. Suponemos que los responsables de la estructuración de la enseñanza, a nivel medio, tendrán sus razones (quizá, desde su punto de vista, poderosísimas) para eliminar, de raíz, esta bellísima disciplina de los actuales libros de texto. A pesar de ello, estamos convencidos de que la supresión de este capítulo de la Matemática puede resultar, pedagógicamente, poco acertada, debido a que la ayuda que en la «visión» (o comprensión) del espacio tridimensional aporta dicha rama del saber, resulta (o al menos en nuestra época de estudiantes así ocurría) de capital importancia en la formación del alumnado. Además, dado que hasta los tiempos modernos la Geometría era la única parcela de las Matemáticas formulada axiomáticamente, resulta paradójico que en nuestros días (en los que el método axiomático está siendo utilizado con profusión) se extirpe como un tumor maligno esta sección, impidiéndose que con su estudio se comprenda con claridad la técnica que, en general, es usada actualmente en la construcción de la Matemática.

El motivo que nos anima a escribir este modesto estudio es evitar que algunos apartados de la disciplina que enseñamos queden, con el paso del tiempo, reducidos a la categoría de fósiles y, al mismo tiempo, animar a nuestros compañeros (los sufridos profesores) en la tarea de rescatar conceptos y teorías que, injustamente, están siendo relegados a segundo plano.

Desarrollaremos este artículo como si de una clase destinada a los alumnos del Bachillerato Unificado y Polivalente se tratara. Por tanto, que nadie crea que en estas líneas que siguen va a encontrar un riguroso tratado con abundancia de teoremas y demostraciones. Unicamente intentaremos sugerir ideas (que, naturalmente, serán aceptadas o no) para la didáctica, en cierto modo clandestina, de uno de los numerosos temas que, desgraciadamente, están siendo olvidados.

Antes de entrar de lleno en el tema a desarrollar, recordaremos las definiciones de las impropiamente llamadas «rectas» notables de un triángulo y de los puntos notables de un triángulo.

(1) Se llaman medianas de un triángulo a los segmentos que tienen como extremos un vértice y el punto medio del lado opuesto.

(2) Se llaman alturas de un triángulo a los segmentos que tienen por extremos un vértice al lado opuesto.

(3) Mediatrices de un triángulo son las mediatrices de sus lados.

(4) Bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.

(1') Las medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado baricentro, que dista de cada vértice dos tercios de la longitud de la respectiva mediana.

(2') Las alturas de un triángulo (o sus prolongaciones) se cortan en un punto llamado ortocentro.

(3') Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro, que equidista de los tres vértices.

(4') Las bisectrices de un triángulo concurren en un punto llamado incentro, que equidista de los tres lados.

Observamos (figura 1) que en un triángulo arbitrario las «rectas» notables no coinciden (lo mismo ocurrirá con los puntos notables), sin embargo, si el triángulo considerado es equilátero, ¿qué sucede con los puntos y rectas notables?

AP = Mediana.
AR = Altura.
r = Mediatriz.
AQ = Bisectriz.

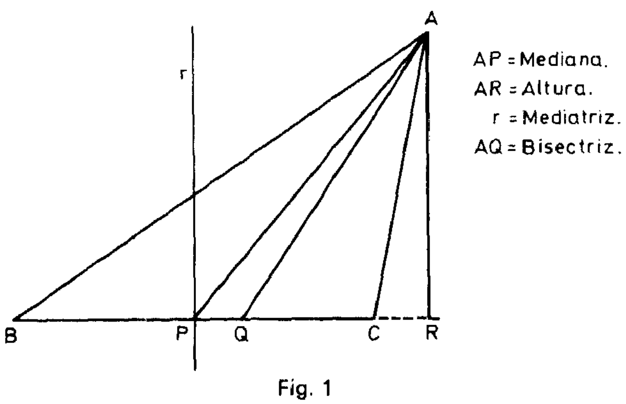

Fig. 1

(*) Profesor agregado de Matemáticas del I.N.B. de Alsasua (Navarra).

Sea el triángulo equilátero ABC (figura 2). Consideremos la bisectriz AD y observemos que los triángulos (rectángulos) ABD y ADC son iguales. Por tanto, los segmentos BD y DC tienen la misma longitud. En definitiva, la bisectriz AD es también altura y mediana del triángulo equilátero ABC. Luego, en un triángulo equilátero se confunden las bisectrices, medianas y alturas. (Notemos que como las mediatrices son rectas y las restantes «rectas» notables son segmentos, no puede decirse, con rigor, que en un triángulo equilátero coincidan todas las «rectas» notables). A partir de aquí es evidente que en un triángulo equilátero todos los puntos notables se confunden en un mismo punto (llamado centro).

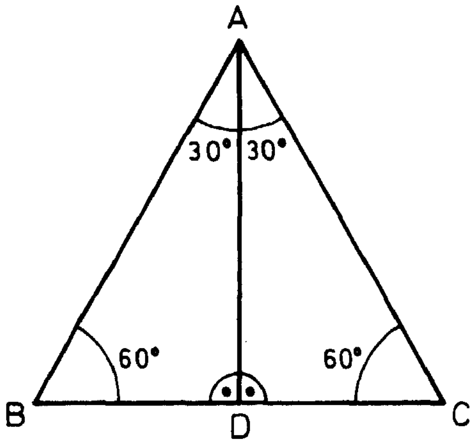

Fig. 2

Pasemos ya al estudio de uno de los cinco poliedros regulares (o platónicos): el tetraedro.

Por el baricentro (circuncentro, incentro u ortocentro) del triángulo equilátero BCD tracemos la recta r, perpendicular al plano determinado por los puntos B, C y D. Evidentemente, todos los puntos de la recta r equidistan de los tres vértices del triángulo considerado. Nos planteamos la cuestión siguiente:

Si 1 es la longitud del lado del triángulo equilátero BCD, determinar la distancia de E (baricentro de BCD) a un punto A de la recta r de forma que las distancias de A a los puntos B, C y D sean iguales a 1.

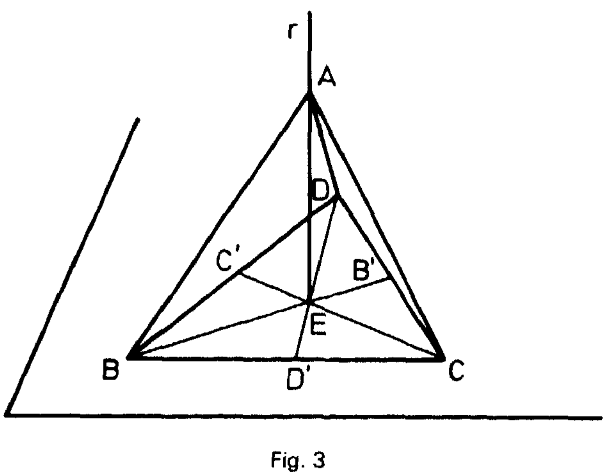

Fig. 3

En la figura 3 los triángulos rectángulos ABE, ACE y ADE son, evidentemente, iguales. Observemos, además, que los lados BE, CE y DE tienen por longitudes las dos terceras partes de las medianas BB', CC', DD'. Teniendo en cuenta que las longitudes de las medianas de un triángulo equilátero de lado 1 vienen dadas por la expresión $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ resulta que los lados BE, CE y DE tienen longitudes respectivamente iguales a $\frac{l\sqrt{3}}{3}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABE (por ejemplo) obtendremos que la distancia buscada es igual a $\frac{l\sqrt{6}}{3}$.

Una vez determinado el punto A, los triángulos ABC, ACD y ADB son, trivialmente, equiláteros (de lado 1). Hemos construido, pues, un poliedro de cuatro caras (triángulos equiláteros iguales) al que se llama TETRAEDRO.

Los puntos A, B, C y D son los vértices del tetraedro, los segmentos AB, AC, AD, BC, BD y DC son las aristas del tetraedro; los triángulos ABC, ADC, ADB y BCD son las caras del tetraedro.

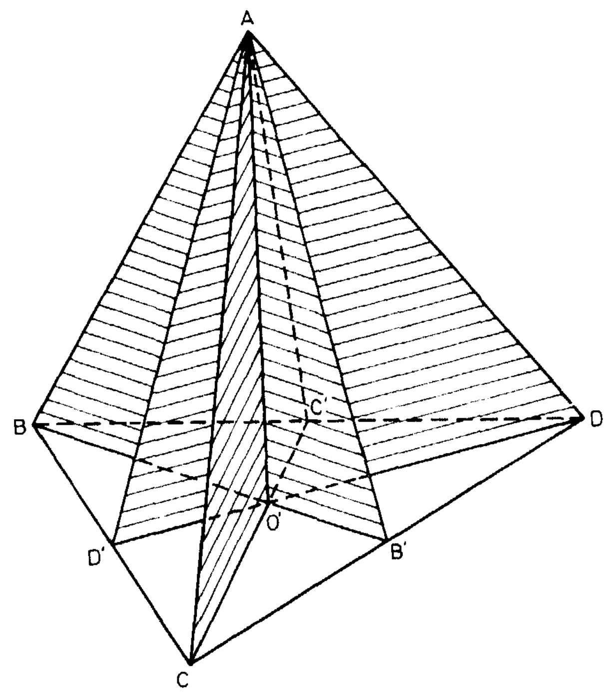

Fig. 4

Llamaremos alturas del tetraedro a cada uno de los segmentos que unen cada uno de los vértices con los centros (baricentros) de sus caras opuestas.

A continuación, vamos a comprobar que las alturas de un tetraedro concurren en un punto al que llamaremos centro (más adelante justificaremos dicho apelativo).

Antes de entrar de lleno en dicha comprobación daremos una sencilla definición:

Llamaremos plano mediador de un segmento al plano que pasando por el punto medio de dicho segmento es perpendicular a él.

Observemos la figura 4, en la que están representadas las intersecciones de los planos mediadores de las aristas BC, CD y DB con el tetraedro ABCD.

(Dichas intersecciones son, respectivamente, los triángulos ADD', ABB' y ACC'). Observemos que dichos triángulos se cortan en la altura AO'.

Trazando por B una perpendicular a la cara ADC, obtenemos la altura del tetraedro relativa al vértice B. Dicha altura es, a su vez, altura del triángulo isósceles ABB' y teniendo en cuenta que las alturas de un triángulo concurren en un punto (ortocentro), hemos comprobado que las alturas del tetraedro relativas a los vértices A y B se cortan en un punto que designaremos por O.

Ahora bien, efectuando un giro de 120° (de eje AO') podemos transformar, en el triángulo BCD, el vértice B en el C. Teniendo presente que en un giro alrededor de un eje los puntos pertenecientes a él quedan fijos, y observando que por el giro efectuado, el triángulo ABB' se transforma en el triángulo ACC', se deduce, fácilmente, que las alturas del

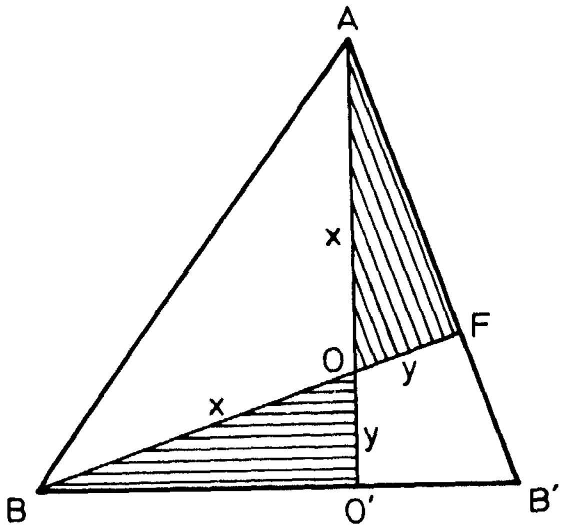

Fig. 5

tetraedro reltivas a los vértices A, B y C concurren en el punto O. De la misma forma efectuando un giro de eje AO' y amplitud 240° el triángulo ABB' se transforma en el triángulo ADD' y razonando como antes llegamos a la conclusión de que las cuatro alturas del tetraedro ABCD se cortan en un punto.

¿El punto O, de intersección de las cuatro alturas, es equidistante de los cuatro vértices del tetraedro?

En el triángulo ABB' (isósceles, por tener los lados AB' y BB' iguales, ya que son medianas de los triángulos ACD y BCD respectivamente) los triángulos OBO' y OAF son iguales (al tener los tres ángulos iguales y los lados BO' y AF iguales), por tanto, los segmentos BO y AO tienen la misma longitud. Utilizando el mismo procedimiento deductivo, aplicado a los triángulos ADD' y ACC', obtendremos, en definitiva, que las distancias de O a los vértices A, B, C y D son iguales entre sí. En resumen, el punto O es el centro de una esfera que contiene a los puntos A, B, C y D (o dicho en otras palabras, el tetraedro ABCD es inscriptible en una esfera de centro O). De aquí la justificación de que hayamos llamado al punto O centro del tetraedro.

Vamos, ahora, a calcular (en función del lado 1 del tetraedro) el radio R (R = OA = OB = OC =OD) de la esfera circunscrita al tetraedro ABCD. Llamemos X = OA = OB (figura 5). Teniendo en cuenta que AO' es la altura del tetraedro ($= \frac{l\sqrt{6}}{3}$) y que $BO' = \frac{l\sqrt{3}}{3}$, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = AO' = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$x^2 = y^2 + (BO')^2 = y^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

De donde se obtiene, fácilmente, $x = \frac{l\sqrt{6}}{4}$; $y = \frac{l\sqrt{6}}{12}$.

Supongamos que nuestro tetraedro ABCD es cortado por el plano P determinado por los centros F, G y H de las caras ACD, ABD y ABC. La intersección es el triángulo QRS (figura 6). Se tiene, obviamente, que:

$$SH = HQ,\ QF = FR,\ RG = GS$$

entonces, recordando el teorema («El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercero e igual a su mitad»), resulta que el triángulo FGH es equilátero. ¿Cuál es la longitud de su lado?

Evidentemente, el triángulo ABD' es semejante al ASH (siendo la razón de semejanza 3/2). Tenemos, pues, que:

$$\frac{BD'}{SH} = \frac{3}{2}$$

De donde, siendo 2.BD' = 1 (lado del tetraedro ABCD), resulta que la longitud del segmen-

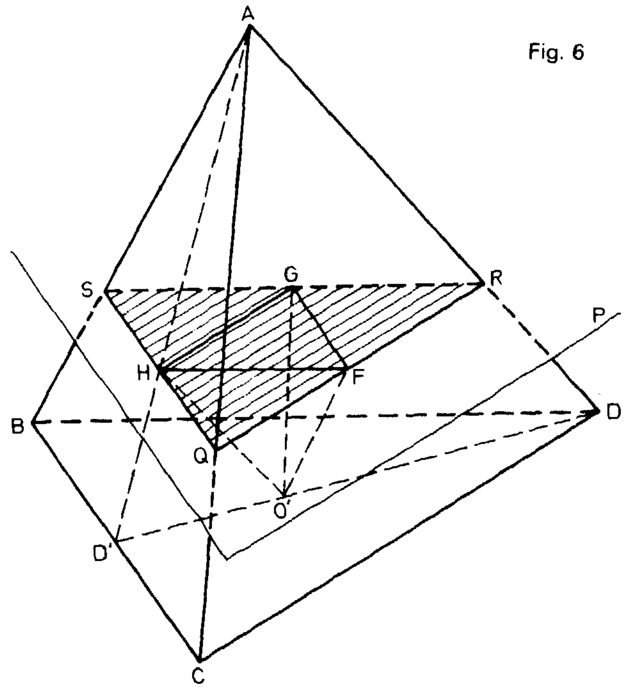

Fig. 6

to SH es la tercera parte de la arista del tetraedro. Por tanto, teniendo en cuenta que 2.GF = SQ, deducimos que el lado del triángulo equilátero GFH es la tercera parte de la arista del tetraedro.

En el triángulo ADD' (figura 7) los segmentos HD' y D'O' tienen la misma longitud, al ser H y O' los baricentros de los triángulos ABC y BCD respectivamente. En consecuencia, los triángulos D' AD y D'HO' son semejantes (siendo la razón de semejanza 3), por tanto, la longitud del segmento HO' es la tercera parte de la longitud de la arista del tetraedro. De forma análoga se comprobaría que los segmentos FO' y GO' tienen longitudes iguales a la tercera parte de la longitud de la arista del tetraedro. Tenemos, en definitiva, que los triángulos HGF, HO'F, FO'G y GO'H son equiláteros, o dicho en otras palabras, el poliedro O'FGH es un tetraedro (al que se llama conjugado del ABCD). Podemos resumir esta situación diciendo:

«Si en un tetraedro se unen los centros de sus caras, se obtiene un tetraedro conjugado.»

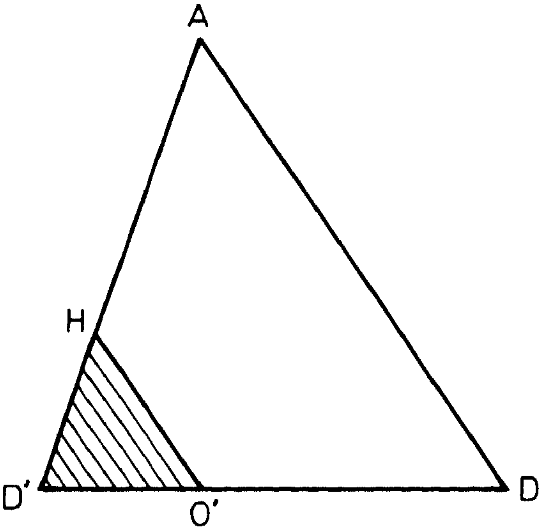

Fig. 7

Finalizaremos nuestro análisis deduciendo las fórmulas, a partir de las cuales pueden obtenerse, de forma sencilla, el área total y el volumen del tetraedro.

(a) Area total del tetraedro.

Como todas las caras del tetraedro son iguales, para hallar el área total bastará multiplicar por cuatro el área de una de sus caras. Teniendo en cuenta que el área de un triángulo equilátero de lado 1 es $\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

El área del tetraedro vale:

$$A = 4 . \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = l^2 \sqrt{3}$$

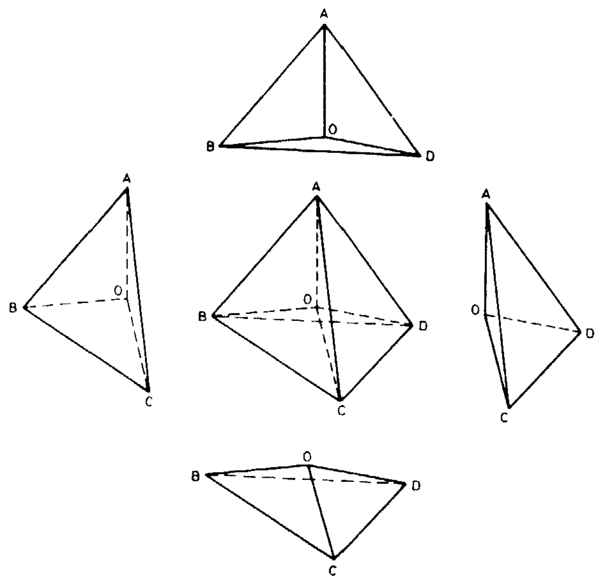

Fig. 8

(b) Volumen del tetraedro.

En la figura 8 se observa, claramente, que un tetraedro puede descomponerse en cuatro pirámides triángulares iguales. Por tanto, el volumen del tetraedro será igual a cuatro veces el volumen de una de dichas pirámides. Teniendo en cuenta que la altura (relativa al vértice O) de cada pirámide es igual a $\frac{\sqrt{6}}{12}$ (véase figura 5 y cálculos efectuados para la determinación del radio de la esfera circunscrita a un tetraedro) y que el volumen de una pirámide viene dado por la fórmula:

Vp = 1/3. Area de la base. Altura relativa a dicha base.

Resulta que el volumen del tetraedro se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$V_t = 4 . 1/3 . \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} . \frac{l \sqrt{6}}{12}$$

Llamaremos apotemas de un tetraedro a los segmentos que unen el centro (del tetraedro) con los centros de cada una de sus caras. De esta definición resulta inmediato que (designando por a la longitud de una de las apotemas):

$$V_t = 1/3 . A . a$$