5 Dos soluciones ingeniosas al problema de la duplicación del cubo

Por Vicente MEAVILLA SEGUI (*)

Cuenta la leyenda que, estando los atenienses —allá por el año 430 antes de Jesucristo— azotados por la peste, acudieron al Oráculo de Delfos con el ánimo de encontrar el remedio que eliminase tamaña calamidad. El dios Apolo les indicó que, a tal efecto, deberían construir un altar doble del que, por aquellas fechas, le estaba dedicado (advirtamos que la forma de dicho altar era cúbica).

Aparentemente dicha petición no ofrecía dificultad alguna; sin embargo, y teniendo presente que en la mayoría de las escuelas de geómetras griegos tan sólo se utilizaban dos instrumentos: la regla y el compás, todos los intentos para determinar (con la única ayuda de estas «herramientas») la arista del cubo de volumen doble que el de uno dado resultaron infructuosos.

Hicieron falta muchos siglos para que se pudiese demostrar la imposibilidad de resolver este problema haciendo uso, exclusivamente, de estos medios.

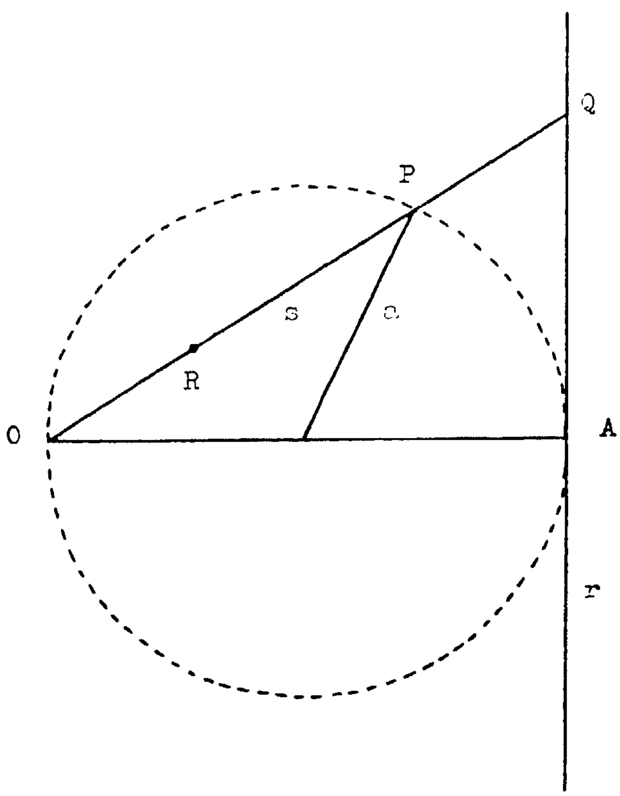

Figura 1

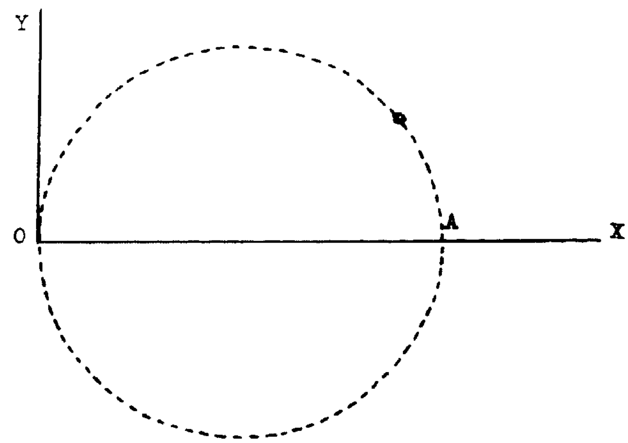

Figura 2

En este artículo expondremos dos métodos (con menos restricciones) que conducen a una respuesta satisfactoria a la recomendación que, en su día, hizo Apolo a los atemorizados atenienses.

Creemos, sinceramente, que este par de soluciones deberían poder ser asimiladas por cualquiera de nuestros estudiantes de COU; con este convencimiento escribiremos las líneas siguientes.

I. PROCEDIMIENTO DE DIOCLES

A Diocles (siglo II antes de J. C.) se debe la «invención» de la cisoide que lleva su nombre. Veamos cómo está definida dicha curva.

En una circunferencia de radio *a*, sea OA uno de sus diámetros. Consideremos la tangente (r) por A a dicha curva, y una secante (s) cualquiera pasando por O. Pues bien, el punto R, tal que d(O, R) = d(P, Q), pertenece a la cisoide. (Ver figura 1.)

Para determinar la ecuación de la cisoide de Diocles, elijamos como ejes cartesianos OX y OY, la semirrecta que teniendo por vértice el punto O contiene al A, y la perpendicular a ella por O. (Ver figura 2.)

Con este convenio resulta inmediato que las ecuaciones de la circunferencia, de la tangente *r* y de una

---

(*) **Profesor Agregado de Matemáticas del Instituto de Bachillerato «José Ibáñez Martín» de Teruel.**

secante arbitraria s (pasando por O) son, respectivamente:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$
$$x = 2a$$
$$y = mx$$

Además, las coordenadas de Q —punto de intersección de r y s— son (2a, 2am), y las de P —punto común a la circunferencia y a la secante— verifican el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$
$$y = mx$$

De aquí, fácilmente, se deduce que:

$$P[2a/(1 + m^2),\ 2am/(1 + m^2)]$$

Como la distancia entre P y Q viene dada por la expresión:

$$d(P,\ Q) = \sqrt{[2a-2a/(1+m^2)]^2+[2am-2am/(1+m^2)]^2} = \sqrt{4a^2m^4/(1+m^2)}$$

es evidente que el punto R de la cisoide se encontrará, simultáneamente, en la circunferencia de centro O y radio d (P, O), y en la secante s.

Resolviendo el sistema:

$$x^2 + y^2 = 4a^2m^4/(1 + m^2)$$
$$y = mx$$

y teniendo en cuenta la elección de los ejes cartesianos, se obtiene —sin problema alguno— que:

$$R[2am^2/(1 + m^2),\ 2am^3/(1 + m^2)]$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la cisoide de Diocles son:

$$x = 2am^2/(1 + m^2) \qquad y = 2am^3/(1 + m^2)$$

Eliminando m, entre estas dos igualdades, llegamos —finalmente— a la expresión:

$$x^3 = y^2 (2a - x)$$

que es la ecuación que estábamos buscando.

En la figura 3 hemos representado la gráfica de dicha función.

Estamos ya en condiciones de abordar, con garantías de éxito, el problema de la duplicación del cubo.

Tomemos como longitud del lado del cubo dado la unidad. Entonces, la cisoide (relativa a la circunferencia de diámetro igual a 1) tendrá la ecuación:

$$x^3 = y^2 (1 - x) \qquad (1)$$

Observemos, acto seguido, que las rectas:

$$y = mx \qquad (2)$$
$$y = m^3 (1 - x) \qquad (3)$$

—donde m es un número real cualquiera— se cortan en un punto de la curva (1).

En efecto:

Eliminando m entre (2) y (3), resulta:

$$y = \frac{y^3}{x^3} (1 - x)$$

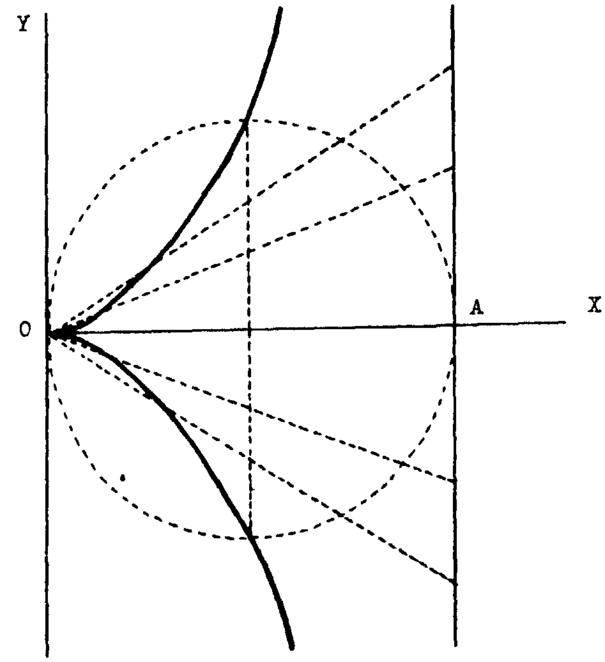

Figura 3

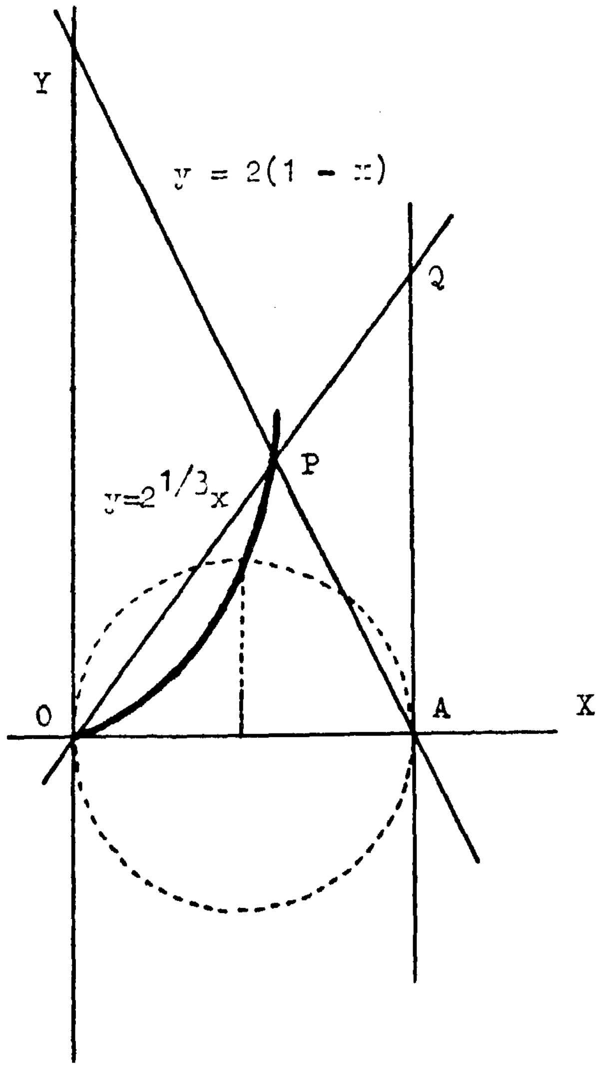

Figura 4

de donde:

$$x^3 = y^2 (1 - x)$$

Dicho en otras palabras:

El lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas (2) y (3) es la cisoide de Diocles.

Con esto, haciendo $m^3 = 2$ [en cuyo caso (3) toma la forma: $y = 2(1 - x)$], es obvio que la recta que pase por O y P —punto común a la cisoide y a la recta $y = 2(1 - x)$— tendrá por ecuación $y = 2^{1/3}x$. (Ver figura 4.)

Por tanto:

$$OA = 2^{1/3}$$

Hemos determinado, pues, la arista del cubo del volumen doble que el del dado.

II. PROCEDIMIENTO DE ARQUITAS

Arquitas —año 400 antes de J. C. (?)— dio una bellísima solución al problema de la duplicación del cubo utilizando superficies de revolución. Su construcción consistía, esencialmente, en:

Sobre el diámetro OA de la base de un cilindro recto —y perpendicularmente a ella— construyamos una semicircunferencia (d) de radio a (= OA/2) y hagámosla girar alrededor de la generatriz del cilindro, que pasa por O. En dicho movimiento, d describe una superficie de revolución que corta al cilindro según una curva alabeada (c).

Consideremos un cono recto de eje OA y semiángulo en el vértice (O) de 60°. Pues bien, el punto P (intersección de la curva c con dicho cono) es tal que la proyección del segmento OP sobre la base del cilindro está con el radio a en la misma razón que el lado del cubo buscado y la arista del cubo dado.

Estudiemos, detenidamente, haciendo uso de la geometría analítica —desconocida, naturalmente, por Arquitas— la corrección de este método.

Para ello, elijamos el sistema de coordenadas cartesianas OXYZ tal como se indica en la figura 5.

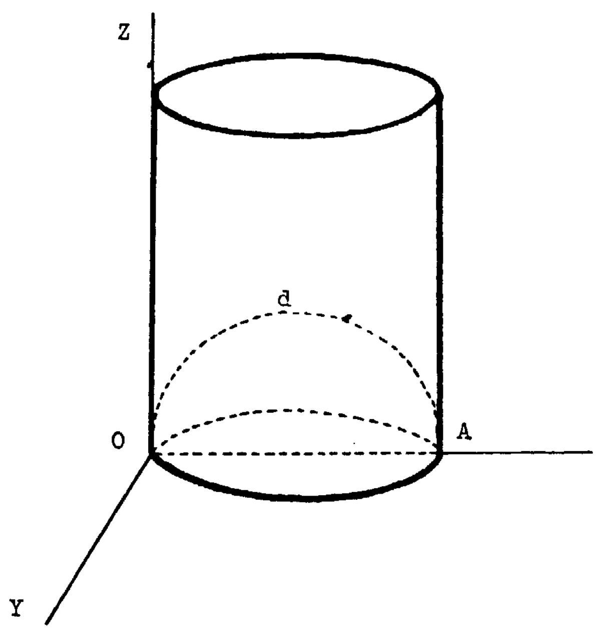

Figura 5

Cualquier plano vertical w', pasando por OZ, cortará al cilindro según una generatriz (g), y a la superficie engendrada por d (toro) en una semicircunferencia (s). El punto M, común a s y g, pertenecerá a la intersección del cilindro con el toro.

Utilizando ciertas nociones elementales de geometría descriptiva, nos proponemos obtener las proyecciones sobre los planos OXZ y OXY de un punto de c. Este logro nos permitirá la deducción de una propiedad interesante en la que nos apoyaremos más adelante.

Para simplificar, consideraremos únicamente aquellas porciones de superficie —cilíndrica y toroidal— contenidas en la región del espacio determinada por los sentidos positivos de los ejes OX, OY, OZ.

Abatiendo el plano horizontal OXY sobre el vertical OXZ, el cilindro de diámetro OA se proyecta en ellos según una semicircunferencia (e) y dos rectas paralelas —una de las cuales coincide con el eje OZ— respectivamente (figura 6).

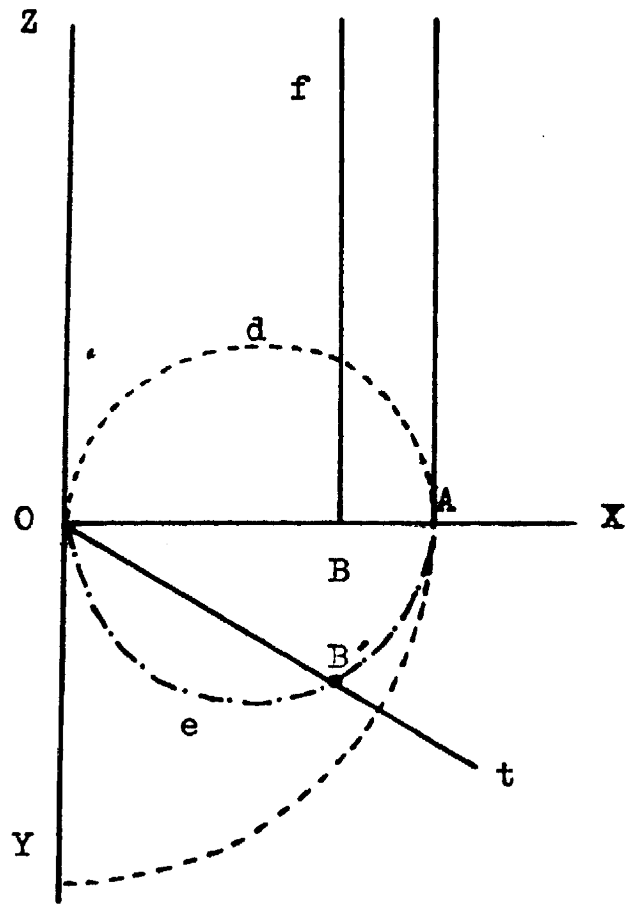

Figura 6

Al mismo tiempo, la traza horizontal del toro es un cuadrante de la circunferencia de centro O y radio OA, y la proyección vertical de dicha superficie es la semicircunferencia d.

Resulta claro, que si t representa la intersección de un plano vertical pasando por OZ con OXY, el punto B' común a t y e es la proyección horizontal de la generatriz en la que se cortan el cilindro y dicho plano (la traza vertical de esta generatriz es la recta f).

En consecuencia, B' será —también— la proyección horizontal de un punto perteneciente a la curva alabeada c.

¿Cómo podríamos determinar la proyección vertical de dicho punto?

Mediante un giro conveniente podemos hacer coincidir el plano vertical (de traza horizontal *t*) con el OXZ. Con esto, es evidente que A' se transforma en el punto A y B'' en B_1. Además, la generatriz proyectada en B'' será la recta *h*, que corta a *d* en B_2. (Ver figura 7.)

Resulta, pues, claro que deshaciendo el giro obtendremos la proyección vertical B'' del punto P perteneciente a la intersección del cilindro y el toro.

En los triángulos rectángulos OB_2A y $OB''A$ se verifican, respectivamente, las dos igualdades siguientes:

$$OB_2^2 = OB_1 \times OA = OB'' \times 2a \qquad (1)$$

$$(OB'')^2 = OB \times OA = OB \times 2a \qquad (2)$$

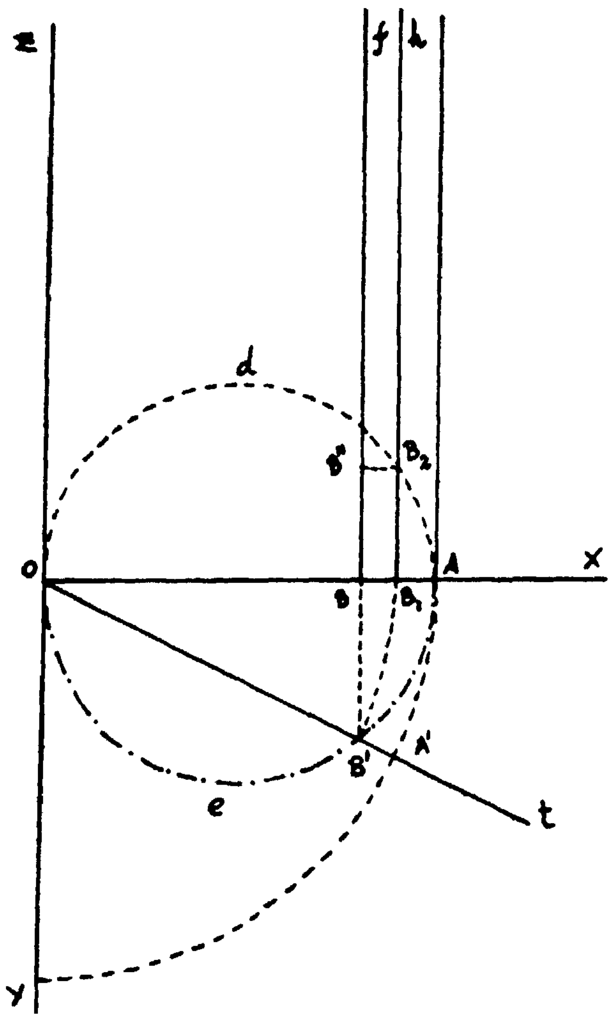

Figura 7

Suponiendo que el segmento OP forma con el eje OX un ángulo θ, no hay argumento que nos impida admitir que el coseno de θ sea igual a $b/2a$.

Con esta hipótesis, es obvio que:

$$\cos \theta = \frac{OB}{OP} = \frac{OB}{OB_2} = b/2a \qquad \text{(ver figura 8)}$$

de donde:

$$OB \times 2a = b \times OB_2 \qquad (3)$$

De (2) y (3) resulta que:

$$(OB'')^2 = b \times OB_2$$

o bien:

$$OB''/b = OB_2/OB'' \qquad (4)$$

Además (1), puede escribirse en la forma:

$$2a/OB_2 = OB_2/OB'' \qquad (5)$$

A partir de (4) y (5) llegamos a:

$$2a/OB_2 = OB_2/OB'' = OB''/b \qquad (6)$$

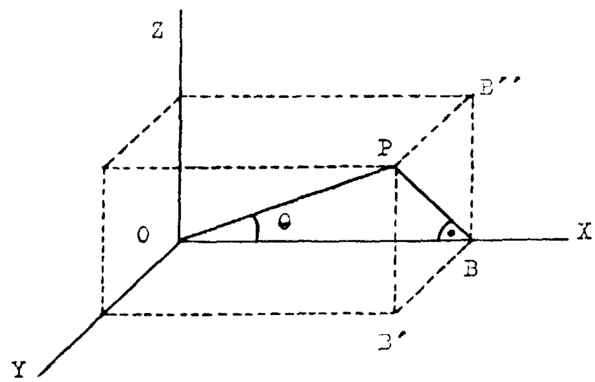

Figura 8

Este resultado puede traducirse en los siguientes términos:

Si P es un punto común al cilindro y al toro, la longitud del segmento OP y la de su proyección sobre el plano OXY son medias proporcionales entre 2a y b.

Resulta claro, apoyándonos en las consideraciones precedentes, que si el ángulo θ tiene una amplitud de 60° entonces:

$$(OB'')^3 = 2$$

en cuyo caso OB'' sería la arista del cubo de volumen doble al de lado 1.

Teniendo presente que, en esta situación, P pertenecería —además— a un cono de vértice O, eje OA y semiángulo en O de 60°, resulta que el método del pitagórico Arquitas resuelve, ciertamente, el problema de la duplicación del cubo.

BIBLIOGRAFIA

NICOLAS DE UGARTE: Algo sobre los tres problemas principales, insolubles con el solo auxilio de la regla y el compás ordinario. Revista de la Real Academia de Ciencias. Tomo XV, número 8. Febrero de 1917.

W. W. ROUSE BALL: Histoire des Mathématiques.

J. REY PASTOR, LUIS SANTALO y M. BALANZAT: Geometría Analítica.

JOSE BABINI: Historia sucinta de las Matemáticas.

JAMES R. NEWMAN: SIGMA: El mundo de las Matemáticas.