3 Sobre la génesis del concepto de función

(Algunas notas para su fundamento)

Por José María MARTINEZ BLANCO (*)

Los actuales planes de estudio de la enseñanza secundaria en España están pensados, en lo referente a las matemáticas, desde una *interpretación deductiva,* es decir, al alumno se le presentan «los axiomas y definiciones y se demuestran en forma deductiva las conclusiones, a las que se llama teoremas» (M. Kline, 1973). No vamos a debatir aquí las distintas concepciones que puedan existir sobre la enseñanza de las matemáticas (1) solamente pretendemos argumentar en el caso concreto de las funciones elementales la conveniencia de abrazar métodos inductivos para la enseñanza de esta materia en el BUP.

A la hora de elegir un hilo conductor de nuestra argumentación hemos optado por citar a un gran matemático: «Los zoólogos pretenden que el desarrollo embrionario de un animal resume en un tiempo muy corto toda la historia de sus antepasados desde los tiempos geológicos. Parece que sucede lo mismo en el desarrollo de los espíritus. El educador debe hacer pasar al niño por donde han pasado sus padres; más rápidamente, pero sin saltarse ninguna etapa. De esta manera, la historia de la ciencia debe ser nuestra primera guía.» (H. Poincaré, 1908). Siguiendo este consejo, comenzamos analizando algunos aspectos del desarrollo histórico del concepto de función.

1. Sobre los orígenes del concepto de función

Uno de los conceptos de más larga gestación histórica es precisamente el de función. Los primeros intentos de describir relaciones entre variables datan del siglo XIV y con el uso de estas primeras intuiciones va formándose, cada vez con mayor conciencia, hasta quedar explicitado. «Los conceptos de variable y función no surgieron en su forma definitiva ni en la mente de Galileo, Descartes o Newton, ni de cualquier otro matemático concreto. Los intuyeron muchos matemáticos (por ejemplo, Neper en conexión con los logaritmos) y gradualmente tomaron una forma más o menos definida, aunque no definitiva en Newton y Leibnitz, haciéndose aún más precisos y generales en el subsiguiente desarrollo del análisis. La definición actual data sólo del siglo XIX, pero ni es *totalmente* rigurosa ni seguramente la última. El desarrollo del concepto de función continúa incluso en el momento actual.» (Aleksandrov, Kolmogrov..., 1973).

Las primeras aportaciones en el campo de las relaciones entre variables son gráficas y vienen de la mano de cartógrafos y astrónomos, que en sus representaciones utilizan desde muy antiguo lo que más adelante serían las coordenadas cartesianas. (La primera gráfica conocida que utiliza este sistema data del siglo XI.)

Como se sabe, el desarrollo del concepto de función viene de la mano de la nueva física matemática. No tenemos espacio para relatar la aparición de los primeros métodos de análisis que utilizan de forma consciente (aunque embrionaria) la relación entre variables. Digamos tan sólo que la evolución de las funciones es inseparable de la profunda crítica de la dinámica de Aristóteles (y con ella a la concepción estática de la matemática griega), que culmina en el siglo XIV. De este modo, el uso de gráficas espacio-tiempo para representar movimientos fue empleada con cierta profusión al final de la Edad Media, como acredita, entre otros, Nicolás Oresme (muerto en 1382) y que algunos autores consideran precursor de la geometría analítica, quizá con cierta exageración (2).

2. Las funciones circulares

El siglo XV registra una baja producción matemática original. Es bien sabido que el Renacimiento supone una interrupción en el desarrollo de la ciencia, explicable por la prioridad que se concede al estudio de las humanidades. Se está cambiando la actitud del hombre ante el mundo y esto, desde luego, lleva su tiempo. Así, pues, la actividad científica está más ocupada en la difusión (imprenta) y crítica de tratados anteriores, clásicos y escolásticos, que en nuevas aportaciones.

De entre los escasos autores originales de este siglo cabe destacar las aportaciones de Peurbach y Regiomontano en trigonometría. La idea de ángulo y la de su medida a partir de los arcos que determinan en una circunferencia se remontan a los babilonios. A ellos debemos el grado como unidad de medida de un ángulo, que podía tomar valores entre 0 y 360°, siendo su uso generalizado entre los agrimensores y astrónomos de la antigüedad. «En los geómetras griegos de la época clásica, la definición de ángulo es todavía más restringida, puesto que se aplica solamente a los ángulos inferiores a dos rectos, y como, por otra parte, su teoría de las razones y de la medición se apoyaba en la comparación de múltiplos arbitrariamente grandes de las magnitudes mensurables, los ángulos no podían ser para ellos una magnitud mensurable, aunque aparezcan de modo natural las nociones de ángulos iguales, de ángulos mayores o menores que otro..., la medida de los ángulos debió constituir a sus ojos un procedimiento empírico sin valor científico.» (N. Bourbaki, 1969.)

El abandono de la trigonometría, por parte de los geómetras, hace que sean los astrónomos (Aristarco, Hiparco, Ptolomeo) los que desarrollen sus métodos, confeccionando las primeras tablas que proporcionan la cuerda que sobre un círculo de radio determinado determina cada ángulo (es decir, dan el valor $2.r.\text{sen}\,\frac{x}{2}$). En Occidente, fue Georg Peurbach (1423-1461) quien, desde el campo de la astronomía, descubrió la ventaja que suponía para sus cálculos emplear senos en lugar de cuerdas y confeccionó unas tablas trigonométricas rudimentarias. Mejoró estos

(*) Profesor Agregado del IB de la Extensión del INBAD de Barcelona.

1. Para una visión en profundidad de las distintas maneras de entender la enseñanza de las matemáticas véase la selección de textos realizada por Jesús Hernández «La enseñanza de las matemáticas modernas» referida en la bibliografía.

2. Para una descripción de este período, siglos XIII al XV, puede consultarse la magnífica «Historia de la Ciencia», de A. C. Crombie.

trabajos Johannes Müller «Regiomontano» (1436-1476), dando una tabla de senos para cada minuto y otra de tangentes para cada grado, escribiendo, además, el primer tratado de trigonometría que tuvo una influencia duradera. Así, pues, «todavía en la primera mitad del siglo XVI, esta rama de la matemática sigue vinculada con la astronomía. En la célebre "De revolutionibus" de Copérnico, de 1543 (como su antecesora: "El Almagesto", de Potolomeo), tres capítulos están dedicados a las funciones circulares. De ellos, dos habían aparecido el año anterior en un escrito del editor de Copérnico, George Joachim, de apellido desconocido, pero llamado Rhaeticus (1514-1577) (A él) se debe el estudio sistemático de las seis funciones circulares que, por primera vez en Europa, aparecen definidas mediante los lados del triángulo rectángulo.» (J. Babini, 1952.) De todos modos, durante todo este período, la trigonometría tiene un carácter más algorítmico que analítico. Fue François Viète (1540-1603) quien, también en este campo, llevó a cabo una labor de clarificación y fundamentación, estudiando las relaciones entre las distintas razones trigonométricas, sus principales teoremas y resolvió ecuaciones del tipo sen $mx = \text{sen}\alpha$, para las que da, todavía, sólo las dos soluciones entre 0 y π.

Hay aportaciones tanto en notación como en conocimiento a todo lo largo del siglo XVII, que introducen ya las razones trigonométricas dentro del análisis. Fue James Gregory (1638-1675) quien, además de contribuciones específicas, intentó demostrar (sin conseguirlo) que no podía hallarse ninguna fórmula algebraica finita para expresar las funciones circulares. Con Isaac Newton (1642-1727) se alcanza la mayoría de edad para dichas funciones al dar los desarrollos en serie del seno y coseno. Por fin, debemos a Leonhard Euler (1707-1783) la concepción moderna de ángulo, medido ya en radianes, con lo que se completa así el dominio de las funciones circulares.

3. Las funciones exponencial y logarítmica

Del siglo XVI es otra de las funciones elementales, el logaritmo. La noción de progresión geométrica era conocida en la antigüedad clásica y reglas para multiplicar potencias de igual base aparecen ya en los Elementos de Euclides, pero es en la Edad Media cuando se retoma esta preocupación por las potencias.

El proceso que conduce a la definición del logaritmo se inicia con el estudio de la potenciación. Ya hemos mencionado al precursor Oresme, que llega a definir las potencias de exponente fraccionario. Diversas aportaciones van esclareciendo las operaciones y la notación con exponenciales, como Nicolás Chuquet, en su obra de 1484 y sobre todo Michael Stifel (1486-1567). En la *Aritmética Integra* de Stifel encontramos ya la comparación entre una progresión aritmética y otra geométrica, señalándose que: «La adición en la serie aritmética (hasta el siglo XVII las progresiones se denominaron series) corresponde a la multiplicación en la geométrica; análogamente la sustracción en la primera corresponde a la división en la segunda. La simple multiplicación en la serie aritmética se convierte en multiplicación en sí (elevación a potencia) en la serie geométrica. La división en la serie aritmética guarda la misma relación con la extracción de raíz en la serie geométrica que, por ejemplo, la división por dos con la extracción de raíz cuadrada.» «De esta manera, ya en 1544 aparecía explícito total y claramente el principio base de los logaritmos, es decir, la posibilidad de rebajar un grado las primeras seis operaciones ariméticas» (E. Colerus, 1972). Estos resultados fueron recogidos por algebristas posteriores, en especial por Simón Jacob, y así llegó hasta Jost Bürgi (1552-1632). Este autor comparó las dos «series», la aritmética, escrita en rojo (por lo que denominó numeros rojos a lo que Neper llamó logaritmos) y la geometrica, números negros, trabajando con bases algo mayores que la unidad. Confeccionó distintas «tablas progresivas» que permitían cálculos efectivos. La publicación tardía de su obra le restó influencia respecto a la de Neper.

La definición de los logaritmos dada por John Napier (1550-1617) sigue un camino distinto basado en un brillante artificio cinemático. Para explicarlo pensemos en «un punto G» (Fig. 1), que describa una línea recta TS con velocidad decreciente, retardándose hacia su destino S, de manera tal que la velocidad siempre sea proporcional a la distancia que tiene que recorrer. Cuando el punto G se halla en el lugar d, su velocidad es proporcional a la distancia dS... A este movimiento, Napier lo denominó geométricamente decreciente.

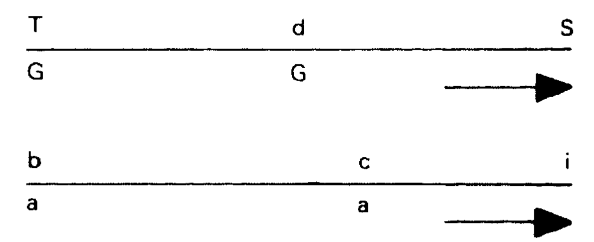

Fig. 1

Junto a éste, y sobre una línea paralela bi, un punto **a** se mueve uniformemente desde su posición de partida **b**. A ésta, Napier la denominó aritméticamente creciente. El recorrido entre los puntos móviles G y **a** se supone que comienza en T y **b**, partiendo ambos con la misma velocidad; y, luego, se registran los lugares alcanzados por G y **a** en cualquier instante subsiguiente. Cuando G ha alcanzado **d**, suponemos que **a** ha alcanzado **c**. Entonces Napier llama, al número que mide la longitud bc, logaritmo del número que mide dS. En resumen, la distancia que ha recorrido **a** es el logaritmo de la distancia que le falta por recorrer a G.

Napier, partiendo de esto como definición, no sólo halló las propiedades teóricas de los logaritmos, sino que también construyó sus tablas con siete cifras (H.W. Turnbull, 1956).

Es bien sabido que la obra de Napier fue continuada por Henry Briggs (1556-1630), de lo que surgió su amistad. Briggs trabajó en el perfeccionamiento de los logaritmos y editó en 1624 sus primeras tablas de logaritmos decimales.

Sin ánimo de hacer literatura, queremos llamar la atención sobre lo admirable del artificio de Napier. En efecto, no sólo emplea la cinemática cuando ésta no ha sido todavía precisada, sino que, además, la resolución de su problema depende de una ecuación diferencial; pero dejando de lado los comentarios admirativos, su definición tuvo la virtud de resolver los problemas en torno a la continuidad de la función logaritmo al presentarse como evidente por la construcción realizada. Si bien la interpolación fue empleada sin reparos también por Bürgi (a pesar de utilizar en su definición series discretas), Napier la «fundamentó» gracias a haber «demostrado» la continuidad del logaritmo (3) por lo que los porblemas de ampliación del dominio de las funciones exponencial y logarítmica a todo el conjunto de los números reales no preocupó hasta bien entrado el siglo XIX. Por lo demás, ha de tenerse en cuenta que la notación decimal no estaba, ni con mucho, consolidada (se introdu-

3. Enfatizamos estas expresiones para llamar la atención sobre algo que fue práctica habitual en los comienzos del cálculo infinitesimal. De hecho, la continuidad de algunas funciones (entre otras cuestiones de igual calibre) fue admitida como evidente, por lo que se puede decir que tuvo rango de axioma sobre el que se fundamentó los desarrollos posteriores.

ce en el siglo XVI y no se generalizó hasta el XVIII), empleándose gran variedad de algoritmos como las fracciones continuas para aproximar números irracionales. Con este estado de cosas, los cálculos, cada vez más numerosos y complicados, resultaban poco menos que inmanejables. Así, pues, es fácil entender el entusiasmo despertado por la aparición de los logaritmos (entusiasmo del que Kepler no es un caso aislado) al tiempo que nos explica la rápida difusión de éstos en la primera mitad del siglo XVII.

Desde que en 1622 Guillermo Oughtred inventara la primera regla de cálculo hasta la aparición de las modernas calculadoras, prácticamente en nuestros días, los logaritmos han sido un auxiliar indispensable «en todos los cálculos que se presentan en los negocios humanos». La importancia de los logaritmos dentro del análisis se puso de manifiesto gracias a las investigaciones sobre la cuadratura de la hipérbola. Evangelista Torricelli (1608-1647) «en una carta de 1644, habla de sus trabajos en una curva que nosotros escribiríamos $y = ae^{-cx}$, $x \geqslant 0$, añadiendo que allí donde Napier (al que, por otra parte, llena de elogios) «sólo buscaba la práctica aritmética» él «obtenía de ella una especulación geométrica»... Además, Descartes había encontrado la misma curva en 1639... y la había descrito sin hablar de logaritmos» (N. Bourbaki, 1669).

Hacia 1665, con la preocupación generalizada por los desarrollos en series de potencias, se realizan diversas aportaciones que van esclareciendo la natureza de los logaritmos. Así, en 1668, Gregory publica su Vera circuli et hyperbolae quadratura. Guillermo Brouncker (1620?-1684) desarrolla su método de cuadratura de la hipérbola que ya en 1657 es citado por Juan Wallis (1616-1703). «El cálculo racional empleado por Brouncker para el área de la hipérbola es, sin duda, superior al proceso irracional de iteración de Gregory, pero es superado en mucho por la progresión logarítmica:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{kao}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

Esta progresión fue (si no cuenta un estudio, todavía no publicado, del suizo Souvey sobre la hipérbola, mencionado en 1630) descubierta primeramente por Hudde (1656) y después por Newton (1665). El tercer descubridor independiente es Nicolás Mercator (1620-1687)» (J. E. Hofmann, 1661). Por fin, Leibniz (1646-1716) escribe el teorema en su notación actual, $\ln x = \int \frac{dx}{x}$

4. Sobre la consolidación del concepto de función

Para terminar damos un breve esquema de la evolución de la noción de función real propiamente dicha. Como ya sabemos, el concepto de función surge del desarrollo de dos intuiciones: la cinemática y la geométrica, con grandes zonas de contacto, pero pro diferenciadas entre sí.

La tradicción cinemática está caracterizada con la utilización que hicieron Isaac Barrow (1630-1677) y Newton de sus fluyentes. La idea de fluyente asemeja la curva a una trayectoria, mientras la variable depende del parámetro tiempo. La evidencia empírica en el uso de los fluyentes no dio pie a excesivas teorizaciones, pues, si bien, se admitía que el parámetro no tenía que ser obligatoriamente el tiempo, en la práctica no se desarrollaban.

La noción geométrica de «curva cualquiera» quedó restringida, por la intervención de Descartes (1593-1650), a aquellas para las cuales su ley podía ser expresada mediante las operaciones algebraicas. Sin embargo, como ya se ha dicho, este criterio quedó ampliado por la aparición de las operaciones trascendentes.

Dentro de la labor llevada a cabo por Leibniz en el terreno de las notaciones y lenguaje matemático, aparece por primera vez, en 1673, el término «functionem faciens» (functio) para designar las magnitudes variables que siguen una determinada ley. «Igualmente, Juan Bernoulli (1667-1748), cuando quiere considerar una función arbitraria de x, la introduce como «una cantidad formada de una manera cualquiera a partir de x y de constantes», precisando, a veces, que se trata de una cantidad formada «de una manera algebraica o trascendente» y en 1698 se pone de acuerdo con Leibniz para dar a esa cantidad el nombre de función de x» (N. Bourbaki, 1969).

De esta suerte, a fines del XVIII, las funciones estaban divididas en funciones *algebraicas,* las que pueden obtenerse por combinación de x y constantes mediante operaciones algebraicas; *trascendentes,* las que no pueden reducirse a funciones algebraicasa (Euler llama trascendentes a las funciones definidas por logaritmos indefenidos y Lagrange (1736-1813) da el significado de función analítica como la desarrollable en serie de potencia) y, por último, las funciones empíricas o arbitrarias con las que se designaban la gran cantidad de funciones especiales (como el famoso problema de la cuerda vibrante) que se iban dando en la práctica experimental.

Con la aparición de la teoría de funciones de variable compleja, que permite resolver gran cantidad de funciones especiales y con el trabajo de revisión de los números reales, ya aludido, se «borra la distinción entre función matemática y función arbitraria, ya que también éstas son expresables por las operaciones aritméticas; llegó Dirichlet (1805-1859) al concepto general de función (1854): La variable y es función de x en un conjunto X (llamado campo de variabilidad), si a cada valor x de este conjunto corresponde un valor bien determinado de y» (Rey Pastor, 1944).

Con la introducción del lenguaje de la teoría de conjuntos, esta definición se enuncia, al modo actual, como un subconjunto del conjunto producto cartesiano, del de salida y del de llegada, bien definido.

5. Conclusiones

Antes de comenzar con esta introducción histórica la justificábamos citando a H. Poincaré. Añadimos ahora que «queremos extraer de la historia de la ciencia la problemática que, presentada tal y como hace falta a los alumnos, les permita redescubrir, a través de una actividad investigadora, los conocimientos que la enseñanza tradicional trasmite ya elaborados. Y eso sólo es posible mediante un conocimiento de la historia de la ciencia por parte del profesorado, un trabajo de búsqueda de memorias originales, etcétera. No se trata de un planteamiento historicista, regido por criterios de fidelidad histórica. La tarea de los profesores ha de consistir, más bien, en una reelaboración del material histórico con vistas a preparar guías de trabajo inteligibles para los alumnos. Esto puede obligar (y generalmente obliga) a simplificaciones y a alteraciones del proceso histórico. Porque lo esencial, en esta perspectiva, no es que los alumnos aprendan historia de la ciencia, sino que aprendan a hacer ciencia y, al mismo tiempo, adquieran los conocimientos que se consideran necesarios para la continuación de sus estudios o de su futuro profesional» (D. Gil, 1980). Además de esta motivación genérica, quisiéramos que a la hora de abordar la parte didáctica se tuvieran en cuenta algunos aspectos que a modo de conclusiones presentamos a continuación.

5.1. Sobre el rigor y el aprendizaje

Parece aceptarse como un principio psicopedagógico muy general que «la comprensión real de una noción o una teoría supone la reinvención por el sujeto. Es evidente que en muchos casos éste puede dar la impresión de haber comprendido sin cumplir esta condición de reinvención, basta para ello cierta capacidad de reproducción y de aplicación a algunas situaciones prefabricadas. Pero la verdadera comprensión, aquella que se manifiesta por medio de nuevas aplicaciones espontáneas, o, dicho de otro modo, por una generalización activa, supone mucho más: que el sujeto haya sido capaz de encontrar por sí mismo las razones de la verdad que intenta comprender, y, por tanto, que la haya reinventado él mismo, al menos parcialmente» (J. Piaget, 1973). Con todo lo que se lleva dicho acerca de la génesis del concepto de función debe haber sido suficiente como para demostrar, en este caso concreto, la validez del principio según el cual «el carácter deductivo con el que se presenta ante el público la matemática bien organizada no debe impedirnos ver el carácter esencialmente inductivo en el que se han obtenido sus resultados» (D. J. Struik). Estas nos parecen unas razones de peso para abogar por una interpretación inductiva de la enseñanza de las matemáticas.

Cuando se presenta un nuevo concepto desde un punto de vista deductivo, se pone necesariamente el acento en el rigor, es más, muchos autores consideran éste como el rasgo esencial del aprendizaje de las matemáticas. Nosotros no compartimos este criterio. En primer lugar, el rigor absoluto no existe, y no existe porque el concepto de rigor ha variado a lo largo de la historia. Lo que en una época era evidente, fue demostrado en la siguiente. Del mismo modo, el rigor de cara al alumno no podemos llevarlo más allá de lo que para él es necesario. «Nuestros alumnos creen saber (qué es una fracción o qué es la continuidad...) cuando empiezan a estudiar seriamente las matemáticas. Si, sin otra preparación, les digo: «No, ustedes no lo saben; esto que creen comprender ustedes, no lo comprenden; es preciso que les demuestre esto que les parece evidente». Y si en la demostración me apoyo sobre las premisas que les parecen menos evidentes que la conclusión, ¿qué pensarán estos desgraciados? Pensarán que la ciencia matemática no es más que un amontonamiento arbitrario de sutilezas inútiles, o bien les repugnará o divertirán como en un juego al que llegasen en un estado de espíritu análogo al de los sofistas griegos. Más adelante, al contrario, cuando el espíritu del alumno se familiarice con el razonamiento matemático y haya madurado con ese largo contacto, las dudas nacerán de ellos mismos y entonces vuestra demostración será bienvenida» (H. Poincaré, 1944).

Pero es que, además, y en segundo lugar, esa falta de rigor es sólo relativa. Es bien sabido que el abandono del rigor (los altísimos niveles de rigor de Euclides y Arquímedes) ha estado en la base del descubrimiento del cálculo. Resulta inimaginable, por ejemplo, que Newton o Leibniz se hubieran dedicado a elaborar el concepto de límite para llegar al de derivada (lo que no impide que resulte muy difícil encontrar un libro de texto que no explique límites antes de derivadas). De igual manera, creemos que no existe ninguna contradicción entre definir, en primera instancia, una función continua, como la que no presenta saltos y aceptar al mismo tiempo que estamos haciendo una exposición rigurosa.

Queda dicho, pues, que el rigor no es la guía que permita argumentar una exposición didáctica, o, al menos, ese rigor con pretensiones de absoluto. «Cuando el lógico haya descompuesto cada demostración en una multitud de operaciones elementales, todas correctas, no poseerá aún la realidad entera (...) esta vista de conjunto, la lógica pura no puede dárnosla; es a la intuición a quien hace falta pedírsela (...) es por lógica como se demuestra, por intuición como se inventa» (H. Poincaré, 1944). La intuición está en la base de todo fenómeno de creación y la creación de las teorías y conceptos por parte del alumno es el rasgo esencial para una verdadera comprensión. Pero es más, «el rigor y la fecundidad son dos aspectos complementarios de la misma realidad: cuando concentramos toda nuestra atención en uno perdemos de vista el otro» (R. Duval y G. T. Guillband, 1945). Por ello, a la hora de desarrollar la didáctica de un determinado tema, deberemos discernir cuándo se debe fundamentar un procedimiento matemático y cuáles de estos procedimientos requieren fundamentación. Cuando se haya decidido, la demostración debe hacerse con «todo el rigor» que haga falta (o sea, posible aplicar). Por el contrario, cuando se trata de presentar situaciones a través de las cuales el alumno deba «redescubrir-aprender» nuevas teorías la guía para un desarrollo didáctico adecuado deberá ser la intuición.

En resumen, aceptar como única guía del desarrollo didáctico al rigor es tanto como reducir las matemáticas a un juego formal. No podemos eludir (o no queremos) el citar al profesor E. Garbayo: «La matemática es un juego sin sentido ni significado. Al menos eso explican los formalistas a su, mitad indiferente, mitad perplejo, auditorio (...). La matemática es un juego, o por lo menos alguien *dice* que es un juego.

Como las palabras son un fenómeno físico-químico en el caso de la escritura o un fenómeno acústico en el del verbo hablado, no creemos que esa trivial actitud científica ante los hechos nor permita averiguar si los propios formalistas se creen lo que dicen. Por otra parte, parecen tener más que suficiente influencia en el sistema social matemático para imponer su ley, es decir, su juego. No parece, por tanto, que tengamos mucho donde elegir si no queremos marginarnos y así, con paciencia (y un tanto de sano, pero bien escondido, escepticismo) nos disponemos a aprender las reglas de este inocente juego en el que no se apuesta, y prepararnos a competir, en presumible notoria inferioridad, con los consumados maestros que estan en los secretos de las más complicadas jugadas» (E. Garbayo, 1978). A lo que nosotros añadimos que si en la universidad es grave dedicarse al juego, en la enseñanza media es sencillamente una irresponsabilidad.

5.2. Por una visión cíclica e interdisciplinaria de las matemáticas de BUP

Ya se ha dicho que con el siglo XIX se inicia una tarea de fundamentación de los conceptos básicos del análisis. También con esta tarea de fundamentación comienza un proceso de generalización y abstracción que da pie a que la matemática empiece a presentarse como una creación exclusiva de la mente humana. El equilibrio entre forma y contenido, entre teoría y práctica, se pone frecuentemente en entredicho al tiempo que aparecen distintas formas de entender esta relación. Dentro de esta tendencia, va entendiéndose la aceptación como criterio de verdad matemática, la ausencia de contradiciones con los axiomas (que, por otra parte, pueden ser formulados independientemente de su significación objetiva, con lo cual el matemático puede verse como aquel que se consagra a una tautología). Pero no siempre las cosas fueron así. Ya se ha comentado como el cálculo pudo avanzar gracias a la productividad de sus distintas aplicaciones, por lo que, podemos decir, la verdad matemática, antes del siglo XIX, tenía más de verdad «experimental» que de verdad «lógica».

¿Cuál de estos criterios es más apropiado para el Bachillerato? Las matemáticas elementales, a las que se enfrentan nuestros alumnos, están más cerca del siglo XVII que las del XX. En sus «Principia», después de enunciar las leyes del movimiento, Newton escribe: «hasta aquí hemos transmitido los principios aceptados por los matemáticos y confirmados por múltiples experiencias». Esta, si se quiere ingenua, visión de verdad experimental es, en nuestra opinión, la que más se adecua a la mente del alumno, ya que permite presentarle unas matemáticas «con sentido» que se diferencian de un juego y que son aplicables a los procesos de la naturaleza, no de una manera, sino de muchas.

Consecuentes con esta opinión, hemos de preguntarnos cómo se puede introducir en las matemáticas del bachillerato ese carácter experimental. En primer lugar, si se acepta el punto de vista inductivo, el papel del profesor «no debe consistir en dar lecciones, sino en organizar situaciones ue inciten a investigar, utilizando métodos apropiados» (J. Piaget, 1973). Esas situaciones deben ser concretas y experimentales, por lo que aquí se nos presenta una primera vía de penetración de esa realidad experimental deseada. Asumido esto, el profesor puede organizar de ditintas maneras estas situaciones didácticas. Una de ellas consiste en plantear a través de los problemas que utilice enunciados que reflejen objetos y situaciones reales (simulación de experiencias), o bien, indistintamente, realizar en su propia clase diversas experiencias de «laboratorio» (algunas de ellas realmente asequibles como son curvas de calentamiento de líquidos, comprobación experimental de la ley de Hooke, etcétera).

Hasta aquí se ha planteado un trabajo que puede ser realizado por el profesor de matemáticas independientemente del resto del profesorado y al cual estamos siempre a tiempo de recurrir. Otra situación, más interesante, consiste en asumir una concepción interdisciplinaria para organizar el aprendizaje de los alumnos. En efecto, si el alumno se enfrenta a un problema, que es analizado en común por distintas asignaturas, se dará un paso importante para que deje de ver, en lo que a nosotros se refiere, las matemáticas como un mundo aislado, al tiempo que se evidencia su carácter de ciencia formal y, en este sentido, junto a la lógica, «auxiliar de las ciencias fácticas» (M. Bunge, 1963). Pero, además, se evidencia igualmente la aplicabilidad de las matemáticas, no en un futuro que el profesor asegura que algún día llegará, sino en el presente del propio aprendizaje del alumno, al tratar problemas que aparecen en otras «asignaturas» y que son susceptibles de un tratamiento matemático (desplazando los métodos matemáticos hasta el laboratorio de física y química, al campo, en los trabajos de ciencias naturales, a los estudios de realidades concretas de las ciencias sociales, etcétera). No tenemos aquí espacio para tratar más detenidamente el tema de la interdisciplinariedad (4).

De las notas históricas anteriores podemos deducir que la secuencia de formación de una teoría sigue, aproximadamente, las siguientes fases. Una primera en la cual se toma contacto con el problema generalmente a partir de necesidades muy concretas (funciones-dinámica, logaritmos-cálculos aritméticos, trigonometria-agrimensión-astronomía...). Un segundo período de elaboración de los materiales que han ido apareciendo en la primera fase y que corresponde a una elaboración más «matemática» de esa teoría (simplificando mucho esta fase en la formación del análisis es la asumida por Newton y Leibniz). La tercera etapa es de expansión y aplicación a nuevas situaciones de la teoría elaborada (este período es el que corresponde al siglo XVIII con los Bernoulli, D'Alembert, Euler...). Pero este proceso es cíclico, pues las nuevas aplicaciones van generando situaciones (a veces contradictorias), que obligan a la revisión, profundización y generalización que determina el nuevo ciclo.

Aplicar esta secuencia al aprendizaje del alumno es coherente (y en la práctica útil) con los criterios que venimos defendiendo. En concreto, una propuesta metodológica que asuma esta visión puede formularse en cuatro etapas: «Problemas de introducción, elaboración del modelo matemático, ejercicios de manipulación y ejercicios de consolidación.

Los problemas de introducción tienen como finalidad la toma de contacto del alumno con el tema; son ejercicios sencillos que puede resolver por sí solo, cobrando confianza en sus posibilidades...

La elaboración del modelo matemático consiste en buscar los rasgos comunes que han aparecido en los problemas de introducción, es decir, en abstraer de unas situaciones concretas los conceptos matemáticos que permitan su análisis y resolución, viendo además que son aplicables a otros contextos similares...

Los ejercicios de manipulación sirven para que los alumnos adquieran soltura y agilidad necesarias en el manejo de los conceptos trabajados.

Los ejercicios de consolidación presentan situaciones con diversos grados de complejidad en las que aparecen otras aplicaciones de los modelos elaborados» (Grupo Cero Valencia) (5).

Esta manera de «explicar matemáticas» parte de un presupuesto básico: el alumno se enfrenta a problemas-experiencias para que de su resolución surjan los elementos que sugieran, a la vez que justifican, su teorización (o matematización). Por ello, nos parece útil recordar que no debemos mutilar la riqueza matemática que en un problema-experiencia pueda aparecer por el mero hecho de que no sea estrictamente del campo del análisis. «No importa que el álgebra simplifique notablemente los problemas de aritmética y que muchas cuestiones de geometría se resuelvan brevemente, recurriendo a las funciones trigonométricas; es forzoso operar dentro de cada recinto, fingiendo ignorar los otros. (...) Criterio tan simplista no resiste ligero examen. La matemática no es cadena lineal, sino multipolar; sus ideas se desarrollan y entremezclan en múltiples direcciones y hay en ella una unidad funcional que no permite este encasillado de los problemas.» (Esto puede dar la impresión de estar desarrollando unas matemáticas desordenadas al no estar sometidas) «a las normas clásicas, muy discutibles a pesar de la autoridad que les confiere la costumbre, pues la fragmentación de la matemática en aritmética, geometría, algebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo..., tiene su origen en una concepción demasiado esquemática de su evolución a través del tiempo» (Rey Pastor, 1935) (6). Esta visión cíclica (o fusionista) de las matemáticas, que no lineal, ha de tenerse en cuenta a la hora de abordar un desarrollo didáctico posterior.

---

4. El tema de la interdisciplinariedad puede tratarse desde diversos puntos de vista (el más general, como solución metodológica a los intentos de acercamiento del mundo real, no compartimentado en «asignaturas», al mundo académico). Algunos de ellos recurren a argumentaciones parciales, no globalizadas, como la que hemos seguido aquí. Sin embargo, nos parece que es a través de los principios de la educación ambiental la forma de dar solidez argumental a la estructuración interdisciplinaria del aprendizaje. Para este tema, poco elaborado en nuestro país, puede verse «Ecología y educación ambiental», de Jaume Terradas (Ediciones Omega, 1979) con abundantes referencias bibliográficas, así como, y a otro nivel, «Ecología y educación» de la serie seminario (4) del ICE de la U. Autónoma de Barcelona, donde se relatan experiencias interdisciplinarias (en las que hemos colaborado) llevadas a cabo en el INB de Montcada i Reixac (Barcelona).

5. Hemos optado por citar al Grupo Cero de Valencia por creer que era más interesante dar una referencia actual al tiempo que se llama la atención sobre sus magníficos trabajos. Sin embargo, no es la única cita que podríamos hacer expresando la misma idea. De entre esos autores que cabría citar destaca, por su importancia, Pedro Puig Adam. Remitimos a la bibliografía donde citamos obras suyas que tienen que ver directamente con el tema. Una de ellas, «La matemática y su enseñanza actual» es una recopilación de distintos comentarios, publicada en 1960 por el servicio de publicaciones de la revista «Enseñanza Media» del por entonces Ministerio de Educación Nacional. En esta obra se recogen las ideas, vigentes, de este gran pedagogo. Nos parece injustificable el olvido de este autor, por ello, pensamos que sería muy interesante que el Ministerio de Educación estudiaría la posibilidad de reeditar esta obra fundamental.

6. Queremos llamar la atención sobre la ingente labor didáctica y pedagógica (compatible, como ellos demostraron, con las tareas de investigación y el magisterio universitario) que desarrollaron una gran cantidad de matemáticos hijos de la Institución Libre de Enseñanza. Entre ellos destacan: Julio Rey Pastor, que, además de la obra estrictamente matemática, ha dejado gran cantidad de textos sobre historia de las matemáticas, didáctica, epistemología..., que merecen una edición completa de sus obras. Puig Adam, quien dentro de su labor pedagógica se cuenta el haber organizado los programas de matemáticas para el Institut Escola de la Generalitat de Catalunya. Luis A. Santaló con su labor de organización de la enseñanza de las matemáticas en América Latina. Francisco Vera, Esteban Terrades, Pi Calleja, Araujo, Fernández Baños, Pineda, Rodríguez Sanz...

Toda labor de renovación pedagógica no debería olvidar la recuperación de esta tradición de la cual queda tanto que aprender y sentir.

5.3. Líneas generales para una didáctica de las funciones elementales

Lo primero que interesa dejar sentado es que no se debe pretender que el alumno verbalice una definición de función prematuramente y ello creemos que ha quedado justificado todo a lo largo de esta introducción.

La primera fase de introducción del concepto de función, entendemos que viene caracterizada por la presentación del mayor número posible de situaciones a las cuales es factible aplicar el modelo de función. En este sentido, y de ello depende en buena parte su actitud, nos interesa que el alumno vea ante sí un instrumento mediante el cual matematiza aquellas situaciones en las cuales las magnitudes no se presentan aisladas. Esta primera toma de contacto debe ser sugerente y rica en variedad de situaciones, al tiempo que el aparato teórico que se necesita sea simpelmente el sentido común con un poco de «la cuenta de la vieja» (lo que para algunos alumnos llaman resolver por «lógica» en contraposición a «por matemáticas»).

Por todo ello, entendemos que esta primera fase se estructura en tres aspectos, en principio diferenciados, que podemos resumir en:

Primero, representaciones gráficas. Se pretende que el alumno aprenda a extraer información de una representación gráfica, manipularla numéricamente y viceversa.

Segundo, tablas de valores. Se trata de que sepa manejar (y en su caso obtener experiencias sencillas) leyes empíricas proporcionadas mediante una colección de datos (tablas espacio-tiempo, peso-precio, etcétera), para obtener de ellas gráficas y las operaciones formales (leyes de asociación) que permiten pasar de un valor a otro. También los problemas recíprocos.

Tercero, leyes de asociación. Se trata de que el alumno vea cómo puede expresar la relación entre variables mediante operaciones, de las cuales se puede obtener una representación gráfica y eventualmente una tabla de valores. Más adelante, aparecerá como el instrumento más potente con el que contamos para un estudio sistemático de las funciones.

Estos tres aspectos no son correlativos, están estrechamente relacionados, así, de una ley de asociación se obtiene una gráfica, de una tabla de valores una ley de asociación, etcétera. El profesor, no obstante, debe, en primera instancia, averiguar cuáles de estos aspectos manejan sus alumnos (y con qué soltura) y, en segunda instancia, tener en cuenta que para el alumno los tres aspectos aparecen diferenciados, siendo precisamente el primer paso en su aprendizaje conseguir integrarlos dentro de un mismo concepto: las funciones. Conseguido esto, se termina la etapa introductoria general (por lo que habrá que realizar una prueba que detecte si esto se ha logrado).

Superada la fase de introducción se está en condiciones de formular, por primera vez, el concepto de función propiamente dicho. Se les hace ver que en todos los casos existe un conjunto de salida, otro de llegada y una ley de asociación que los conecta, discutiendo, asimismo, las condiciones que deben cumplir cada uno de estos elementos para que se dé una buena definición.

Antes de seguir, nos preguntamos ¿cuál es el objetivo primordial de la enseñanza de las funciones elementales? Podría contestarse que el concepto de función, pero esto sólo replantea la pregunta en los términos: ¿por qué tiene que estudiar un alumno de enseñanza media lo que es una función? (Tratar de contestar esta pregunta nos permite reencontrar la importancia que tiene para la didáctica el estudio de la historia.) En este caso en concreto, creemos haber demostrado que se trata de que el alumno conozca (reconstruya) un *catálogo de funciones* que, por resolver matemáticamente situaciones de gran frecuencia en la física, la química, la historia, la sociología, la economía, etcétera, las denominamos, por ello, funciones elementales. Y ésta es la tarea primordial a la que nos enfrentamos.

El alumno deberá saber que la proporcionalidad directa (con su omnipresencia en toda cuestión práctica sencilla) se expresa matemáticamente por una recta y que la inversa se expresa mediante una hipérbola equilátera. Deberá saber, también, que toda situación en que una variable crece por multiplicación de lo ya multiplicado (o división en su caso) se expresa mediante una función exponencial o logarítmica (como ocurre en los cálculos demográficos, en los movimientos abandonados al retardo del rozamiento, o en el caso de los intereses bancarios, etcétera). También deberá entender que los fenómenos periódicos (como la salida de los astros, la respiración de un mamífero, los vaivenes de un péndulo o los impulsos eléctricos de nuestra actividad cerebral, etcétera), se pueden tratar, de forma simplificada pero eficaz, mediante las funciones circulares. Todo esto es algo que debería estar presente en el acerbo cultural de cualquier persona de nuestro tiempo, pero, con mayor razón si cabe, deberá pertenecer a unos alumnos para los cuales existe la posibilidad, más que probable, de que aspiren a una formación científica, o técnica, o humanística, o artística, o a un poco de todo ello a la vez.

Esta tarea de confección del catálogo de las funciones elementales se lleva a cabo, lógicamente, en el desarrollo de los temas: funciones polinómicas y de proporcionalidad inversa; funciones exponencial y logarítmica, y, por último, las funciones circulares. Estos tres temas, más el de introducción al concepto de función ya comentado, es lo que constituye el programa que aquí desarrollamos. No obstante, debemos añadir que el estudio de las funciones en el bachillerato quedará completado cuando, después de haber visto la derivación, se traten los temas de representación y estudio general de funciones y el de aproximación de funciones mediante polinomios, que no desarrollamos aquí por considerar que tiene más sentido hacerlo junto al tema de derivación.

BIBLIOGRAFIA

1. Para consideraciones generales sobre la enseñanza de las matemáticas:

PIAGET, J.; CHOQUET, G.; DIEUDONNE, J.; THOM, R., y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas,* Alianza Universidad (207), Madrid, 1978.

POINCARE HENRI: *Ciencia y método,* Espasa-Calpe (Austral, Madrid, 1944.

PUIG ADAM, PEDRO: «La matemática y su enseñanza actual», Publicaciones de la revista *Enseñanza Media,* Ministerio de Eduación Nacional, Madrid, 1960.

KLINE, MORRIS: *El fracaso de la matemática moderna,* Siglo XXI, Madrid.

2. Para la parte histórica:

BABINI, JOSE: *Historia sucinta de la matemática,* Espasa-Calpe, Madrid, 1952.

BELL, E. T.: *Historia de las matemáticas,* Fondo de Cultura Económica, México, 1949.

BERNAL, JOHN D.: *Historia social de la ciencia,* Ediciones Península, Barcelona, 1964.

BOURBAKI, NICOLAS: *Elementos de historia de las matemáticas* Alianza Universidad, Madrid, 1972.

COLERUS, EGMONT: *Breve historia de las matemáticas,* Doncel, Madrid, 1972.

CROMBIE, A. C.: *Historia de la ciencia,* (Tomo I: siglos V al XIII, tomo II: siglos XIII al XVII), Alianza Universitaria, Madrid, 1959.

GARBAYO, EMILIO: *Control ideológico de la invención matemática,* Edición a cargo del autor, Barcelona, 1978.

HOFMANN, JOSEPH E.: *Historia de la matemática,* Uthea, México, 1961.

NEWMAN, JAMES R.: *El mundo de las matemáticas,* Grijalbo, Barcelona, 1956.

NEWTON, ISAAC: *Selección,* Espasa-Calpe, Madrid, 1943.

STRUIK, DIRK J.: *La matemática, sus orígenes y su desarrollo,* siglo XX, Buenos Aires, (¿ ?).

STRUIK, DIRK J.: «A concise history of mathematics», *Dover Publications,* New York, 1948.

3. Para la parte técnica:

ALEKSANDROV, KOLMOGOROV, LAURENTIEV y otros: *La matemática: su contenido, métodos y significado,* Alianza Universidad (68-69-7°), Madrid, 1973.

REY PASTOR, JULIO: *Teoría de funciones,* Biblioteca Matemática, Madrid, 1967.

4. Para la parte didáctica:

Grup Zero de Barcelona: *Funciones. Función exponencial y logarítmica. Funciones circulares.* Publicaciones del ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Grupo cero de Valencia: *Matemáticas de Bachillerato, volumen I,* Editor Roberto Guillén, Valencia, 1977.

PUIG ADMAN, PEDRO: *Matemáticas 6.° curso (Plan 1938),* Biblioteca Matemática, Madrid, 1947.

REY PASTOR, JULIO: *Curso cíclico de matemáticas (tomo 1),* Edición a cargo del autor, Madrid-Buenos Aires.

The School Mathematic Project (SMP): *Revised Advanced Mathematics,* Cambridge University Press, Cambridge, 1967.