

5

Matemática, modelo y experiencia(*)

Por Javier DE LORENZO (**)

1. Quisiera comenzar disculpándome porque las observaciones que siguen tienden a cuestiones de carácter especulativo y no a experiencias realizadas o por realizar. Observaciones a viejos problemas, a cuestiones de principio que, sin embargo, y desde mi punto de vista, se muestran primarias, condicionantes de unas posibles experiencias concretas. En cualquier caso, estas observaciones vienen centradas básicamente en torno a la Enseñanza Media y, por supuesto, condicionadas al entorno en el que, aquí, en España, me encuentro.

2. Se acogen, estos *Encuentros*, bajo un tema: las relaciones de la Enseñanza de la Matemática —no de la Matemática— con la realidad y con otras disciplinas que la inspiran y a las que sirve —si es de la Enseñanza, esas disciplinas serían del orden de la Psicología, Didáctica, Metodología...—. Se sugiere, inmediatamente, un haz de temas que señalen el hecho de que la «matemática» —ahora ya no su enseñanza— sea un instrumento esencialmente interdisciplinario. En otras palabras: Se admite, por un lado, el enlace de la Enseñanza de la Matemática con la Realidad; por otro, que la Matemática es una herramienta interdisciplinaria. Lo primero es un truismo, porque el mero acto enseñante es algo perteneciente a lo real, como actividad social. Lo segundo, ya es tema más conflictivo por cuanto no se clarifica el concepto de interdisciplinaridad.

Admitamos que lo que se ha querido indicar —no por el enunciado del tema, sino por las sugerencias para los trabajos, para las comunicaciones— es el enlace de la Matemática, tanto con la realidad como con otras disciplinas y, consecuentemente, su repercusión en la Enseñanza de la matemática. Ello supone admitir, tácitamente, la posibilidad de dicho enlace. Incluso me atrevería a más, se tiene la seguridad del mismo. Y es otra posibilidad, desde mi punto de vista, la que es radicalmente cuestionable. Y mucho más al nivel elemental que aquí nos reúne. Y a nivel elemental, porque a un nivel superior dicha posibilidad ni siquiera es cuestionable, sencillamente porque el enlace no existe. Debo precisar, a un nivel superior de la Matemática actual, de la surgida en los entornos de 1939, no la de entornos anteriores. Matemática superior que no ha llegado a la Enseñanza media, provocando un desfase entre la Matemática y lo que de Matemática se enseña en Enseñanza Media. Desfase que hace que ésta sea una caricatura deformada de la Matemática del segundo tercio del siglo XX.

Desfase que se ha intentado superar en dos sucesivos intentos de reformas «pedagógicas». En un pri-

mer intento, planes «modernos» permitieron situar la enseñanza de la Matemática, como mucho, a fines del siglo XIX, con la teoría de gomas de colores o teoría intuitiva de conjuntos; pero bien entendido que de conjuntos finitos, caricatura de la teoría de conjuntos o teoría del infinito actual. Como caricatura, inservible para el hacer matemático conjuntista que parte, precisamente, de la escala de conjuntos transfinitos para alcanzar, como mero rincón de dicho infinito, lo finito. En un segundo intento, planes más «modernos» pretendieron que se introdujera en la Enseñanza Elemental una mísera concepción estructural, en la cual, lo que importara no fuera el conjunto base, sino la estructuración del mismo, dada por unas leyes de composición con sus axiomas apropiados. Acosada desde al menos tres frentes —a) se le atribuyó un carácter excesivamente abstracto y alejado de la «realidad»; b) se cometió el exceso de fuerte algebrización, porque sin duda, es más cómodo una enseñanza formal pura de estructuras, poniendo de relieve una cierta imprevención o inmadurez mental del profesorado; c) el alumno pareció perder su viejo estatuto de calculista prestidigitador—, el intento de reforma matemática estructural se ha quedado a medio camino. Por rechazo, la reforma no ha logrado plasmarse en la Enseñanza Media, pero ha logrado suprimir otros aspectos que se mantenían en el hacer matemático de dicha enseñanza, como el geométrico sintético o el de teoría de números que, en el decir de muchos, permitan desarrollar la imaginación del alumno al hacer ver a dicho alumno lo que no se ve —y digo desarrollo de la imaginación frente al argumento de que constituye un desarrollo de la razón—. Avance en la modernidad que ha provocado una enseñanza de lo híbrido, no de lo matemático.

3. Y es en este híbrido en el que sitúo la llamada, el tema de estos *Encuentros*. Y no sólo de ellos. Se responde a un estado bastante general de la llamada opinión pública. El enfoque estructural propio de la Matemática del segundo tercio del siglo XX viene siendo denostado en todos sus niveles, por mostrarse muy alejado de los problemas que hoy afectan a la sociedad, como mero trabajo de una pequeña capilla de «entendidos» —¿cuántos «en-

(*) Ponencia presentada al XXX *Recontre Internationale de Professeurs de Mathématique* de la CIEAEM, celebrado en Santiago de Compostela del 31 de julio al 7 de agosto de 1978.

(**) Catedrático de Matemáticas del I.N.B. «Zorrilla» de Valladolid.

tendidos» seguían la matemática de Gauss, Jacobi, Galois en su momento?—. Excesivamente abstracto, tal enfoque estructural conduce a los temas de la Matemática que tan lúcidamente ha mostrado Dieudonné como propios de la elección bourbakista. Excesivamente abstracto, sólo para profesionales de la Matemática en un momento de crisis, se ha llegado a reconocer que este enfoque ha alcanzado un cierto límite por agotamiento de ideas, por ausencia de nuevas vetas. Mera transposición, tales ataques se realizan por igual allí donde no es procedente, a la Enseñanza Media de dicha matemática, cuando en tal nivel sólo ha aparecido una caricatura de ese enfoque matemático. Y si bien la aparente abstracción pura alejada de la realidad —cuando nadie ha precisado a qué llamar «realidad»— a un matemático puro, «de raza», no le preocupa en exceso, sí lo hace a quienes no son profesionales matemáticos puros, sino profesionales enseñantes de ese hacer, en quienes la presión social sitúa más fuertemente y no pueden encerrarse en su torre de marfil. Y, manteniendo el híbrido, pretenden mantener, a la vez, un enlace con algo lo suficientemente confuso como lo manifestado y ocultado en un término como «realidad». Parece como si, carentes de ideas orientadoras, se reclame de la experiencia directa lo que ésta, así reclamada, es incapaz de proporcionar. Reclamación apoyada en un materialismo del sentido común, en un inductivismo baconiano, erróneo y confuso, que puede ocultarse en términos como los de «matematización de lo real» y en la permanente llamada a la interdisciplinariedad, llamada que en general lo es a la multidisciplinariedad.

Estado que, aparentemente, caracteriza la situación de la enseñanza de la matemática —no tan general en otras disciplinas— en estos últimos tiempos y parece nota propia contemporánea, inexistente en momentos anteriores —la reforma propugnada por Klein tenía otro alcance—. Los intentos de reforma que antes he indicado han pretendido cambiar los contenidos y, ahora, con las ideas confusas de interdisciplinariedad, también el método. Se parte de la idea del aislamiento de la Matemática como pecado social, encerrada en su torre de marfil y se tiene la presión social para su instrumentalización, para su enfoque tecnológico, presión que intenta hacer salir de dicha torre de marfil a la Matemática, como si la misma fuera la panacea para la constitución, desarrollo y avance de las restantes disciplinas, del hombre en la sociedad actual... La Matemática, el matemático, obligados a salir de su concha y trabajar entre equipo y más que en equipo, interdisciplinadamente.

Si se han intentado reformas en la enseñanza del hacer matemático, y si ahora se pretende que las mismas vayan de la mano de otras disciplinas, parece que habría que tener presente que tales disciplinas también han cambiado, también han sufrido sus rupturas propias. Y las reformas de la enseñanza de la Matemática no parecen haber tenido en cuenta las reformas en las distintas disciplinas. Especialmente, y desde mi punto de vista, mucho más importante el cambio sufrido en el encuadre epistemológico de dichas disciplinas. Cambio de marco que condiciona o debe condicionar nuestra actitud como profesionales enseñantes. En lo que sigue intentaré dar un esbozo de las líneas quizá centrales de dicho cambio que ha provocado una inversión que podría esquematizarse en las palabras siguientes:

En las ciencias experimentales: Deductivismo frente a Inductivismo, mientras que en la Matemática

se ha producido lo contrario, Inductivismo frente a Deductivismo. Mero esbozo lo que sigue en función de una incitación al estudio y meditación de esta problemática.

4. En este punto se tiene siempre el peligro del profesional enseñante de la Matemática. Es posible que sepa Matemática, incluso que se sobrecargue de ideas pedagógicas y metodológicas, no se sabe muy bien para qué. Pero que admita, a la vez, y para otras disciplinas, lo que cabe calificar como axiomas del sentido común materialista ingenuo para la ciencia. Ello no es propio del sólo profesional enseñante de la matemática, sino de los profesionales de muchas disciplinas calificadas como «científicas». Los ataques a la «abstracción», al método axiomático, a la racionalidad, compensados y aumentados con unos engañosos retornos a la naturaleza, a los datos simples, a la observación pura y desnuda, muestran que es un estado bastante generalizado en el momento actual. Quizá porque falte un dominio cognoscitivo de las condiciones epistemológicas que condicionaron la creación de la «ciencia nueva» y de las que han provocado la radical inversión en la ciencia actual.

En mero esbozo debo señalar que las ciencias experimentales se han visto a través de unos mitos: la observación pura, los hechos desnudos y la acumulación de datos. Mitos inconsistentes, contra los que ya desde Poincaré se viene luchando para afirmar que no hay observación desnuda, ni experimento ni dato sin un contexto teórico propio que eleve dichos actos al nivel científico-experimental. Contra el inductivismo elemental como criterio metodológico y epistemológico de la ciencia experimental se ha alzado el deductivismo teórico. Y se ha alzado en nombre de lo que en la práctica real venía ocurriendo.

Si en la práctica era el contexto quien decidía lo que había que observar y el tipo de experimentos que tenían que realizarse, este contexto venía delimitado por una cosmovisión, por una concepción mecanicista de la naturaleza. Un fenómeno no era otra cosa que un simple agregado de partes. La interrelación orgánica o estructural entre esas partes no se tenía en cuenta, despreciándola por estimarla como no significativa. En otras palabras, se acotaba el fenómeno a estudiar y se simplificaba despreciando la acción de todo aquello que no se sabía o podía calcular fácilmente. Se comenzaba con una escisión y delimitación no apoyadas en criterio estrictamente racional alguno. Y a pesar de ese carácter analítico, la ciencia se constituyó en contraposición al dato de observación aislado, frente a la mera acumulación de datos, frente a la experiencia desnuda. Si se constituye la ciencia fue por delimitar, esquematizando y simplificando el fenómeno a estudiar; por construir un modelo, una teoría, mero esquema de simulación de la experiencia. Quiero decir, si la ciencia se ha constituido ha sido precisamente por la construcción de una realidad simbólica en paralelo a la realidad sensible, material; ha sido mediante erosiones continuadas a los sentidos, ha sido haciendo ver lo que no se ve y no ver lo que se ve... Desde este punto de vista, el hecho bruto, los datos, las observaciones no constituyen el punto de partida de la ciencia, sino el modelo conceptual manifestado en la elaboración de hipótesis, conjeturas, problemas...

En el momento presente el contexto estrictamente mecanicista base de la «ciencia nueva» ha variado. Y con él, las consecuencias metodológicas. El contexto epistemológico actual puede calificarse como de «orgánico» o estructural, opuesto al mecanicista.

Lo que importa es el estudio de las globalidades, de los modelos teóricos. Es decir, no tomar los sistemas aislados en sí y escindidos a su vez en fenómenos parciales. Lo que importa no es el fenómeno aislado, traducido a proposición aislada, sino el modelo o teoría en el cual cobra su pleno sentido. Lo que importa no es la simplificación en sí y los principios de corte, de análisis de los fenómenos —manifestando en el permanente estudio parcial, y a la vez utópico, de los gases «perfectos», del sistema solar de objetos puntuales salvo el Sol y sin interacciones entre sí... y que han conducido a limitaciones como el problema de los tres cuerpos—, sino la interrelación de sistemas y sus posibles morfismos.

Nuevo enfoque que, como matemáticos, nos debía ser bien conocido y esencia del marco epistemológico de la «matemática moderna» o estudio de las estructuras y sus interrelaciones. Marco epistemológico que, sin embargo, nos olvidamos que es el mismo para las restantes disciplinas científicas, a las que seguimos enfocando como mero agregado de proposiciones, de experimentos sin condiciones previas, de temas sueltos en los que entrar a saco para ejemplificación «interdisciplinaria» de nuestros cálculos de prestidigitación, aunque lo adornemos con intentos justificativos de concreciones y problemas de la vida real... Olvido con su extralimitación correspondiente, por el que llegamos a concebir la Matemática como un hacer inductivo, experimental...

Debo precisar que aquí entiendo por teoría o modelo una esquematización teórica, es decir, un sistema conceptual que intente representar algún aspecto interrelacionado de sistemas reales. Por ello, todo lo anterior me conduce a sostener que ninguna teoría puede retratar un proceso real, un acontecimiento en su totalidad. Constituye una construcción conceptual que es esencialmente diferente a la de su correlato, de tal forma que jamás comporta una reconstrucción completa de los sistemas materiales. Reconstrucción o representación conceptual que no tiene por qué ser visualizable o imaginativamente intuible, sino que puede ser estrictamente simbólica o abstracta. Incluso aquellas reconstrucciones que piden auxilio a la representación visual estricta pueden tener sus problemas de carácter conceptual al quedar cargados sus conceptos primarios de una nota de representación simbólica gráfica que les es accesoria y que, de ayuda en un primer momento, se convierte en carga de connotaciones no deseadas en la posterior elaboración del modelo o teoría.

En este mero esbozo debo precisar también dos puntos: Por un lado, insistir en que el modelo no es mero conjunto o agregado de expresiones o fórmulas aisladas, tomadas independientemente. La teoría se constituye como tal por una estructuración interna, es una unidad en sí. Es decir, todo modelo, para serlo, comporta dos condiciones de cierre: a) Estructural, b) Semántico. Esta última nos da la unidad material por la cual, si en una teoría se trabaja con electrones, por ejemplo, no se deben introducir paraguas. El cierre semántico viene dado por el empleo de unos conceptos-clave distribuidos entre las expresiones y fórmulas de la teoría. Por su parte, el cierre estructural viene dado por la estructura formal sintáctica correspondiente. Esto no significa que ambos cierres se encuentren, en todo momento, plenamente delimitados, con fronteras rígidas e impermeables, sobre todo el semántico, punto que convendría matizar, sin duda, en otro lugar.

Por otro lado, el que los modelos constituyan una representación y, consecuentemente, una simplifi-

cación conceptual o simbólico de lo real y no sean, ellas mismas, reales. Como construcciones conceptuales de la especie humana poseen una existencia objetiva, tan real como lo que se entiende por objeto real en el sentido común, y por consiguiente, también pueden ser objeto de estudio, formando parte del cierre semántico de otras teorías o modelos. Lo cual no quiere decir, como se confunde a menudo, que deba identificarse existencia objetiva conceptual con estatismo o existencia eterna. La extensión de un concepto no es siempre la misma, sino que varía por enriquecimiento, bien por empobrecimiento de referenciales. Y lo mismo ocurre con las teorías o modelos, con todo el proceso cognoscitivo de la especie humana. Y debo aclarar que esta posición no entraña la admisión de cualquier tipo de platonismo, precisamente.

El modelo no constituye una abstracción directa de la experiencia, sino una elaboración puramente conceptual, teórica y que puede ser cognoscitiva —y por ello indico teoría con una interpretación semántica— o simbólica —en la cual el plano del significado priva sobre el plano del sentido—. Empresa científica como búsqueda de marcos inteligibles para los hechos conocidos y establecidos en una determinada época. Empresa científica como búsqueda de invención de hipótesis o primeros principios o conjeturas que den cuenta de viejos y nuevos hechos, dar cuenta mediante la adecuada organización estructural de los mismos, tanto sintáctica como semántica.

Y si no es abstracción directa de la experiencia, ni se obtiene de un cúmulo de datos —que si es auténtico cúmulo lo único que hace es entontecer además de impedir teorizar y, consecuentemente, organizar dicha masa observacional— sino una reconstrucción racional representativa y simplificada de lo real, entonces, la acusación de abstracción pura a la Matemática se convierte en algo superfluo, dado que cualquier disciplina teórica se encuentra en el mismo plano de abstracción que la Matemática. Ninguna disciplina es reflejo directo de experiencia alguna, sino construcción conceptual simbólica de la misma. Únicamente cuando se realiza una interpretación global de la teoría se correlacionan sus componentes sintácticas, estructurales, con un dominio determinado. La posible confusión en cuanto a niveles abstractivos se centra en que en las teorías científicas, por ejemplo, pueden darse modelos figurativos en mayor cantidad que en las teorías matemáticas. Ahora bien, tales modelos figurativos, icónicos incluso, pueden convertirse, como ya he indicado, en fuente de mayores problemas de los que permiten facilitar su comprensión. Y meramente señalo los problemas de la mecánica cuántica en cuanto onda-corpúsculo o, más elemental, las dos acepciones con las que se interpreta el concepto «masa»; en ambos casos, el cierre semántico de la teoría correspondiente se ha venido abajo y ello por utilizar, por un lado, el modelo icónico, y por otro el operacional, que sin duda son ayuda, pero más bien heurística y que siempre han de manejarse con extremo cuidado.

5. Si una teoría o modelo científico, con sus cierres estructural y semántico, constituye una construcción conceptual que representa ciertos caracteres de la experiencia ayudándose para ello, y siempre que sea factible, pero como mera ayuda de la plasmación visual e incluso icónica, cabe preguntarse por el papel que en tal construcción tiene la Matemática. Por lo pronto, pueden distinguirse dos enfoques:

Matemática en cuanto contenido, Matemática en cuanto método —si es que este último es enfoque estrictamente matemático y no de carácter epistemológico o metodológico—.

Hasta ahora se ha admitido, sin más, la instrumentalización matemática, tanto de la «clásica» —entendida, a grandes rasgos, como disciplina de la cantidad y la medida— como de la «moderna» —entendida, también a grandes rasgos, como disciplina de relaciones no meramente cuantitativas—. Voy a admitir, siguiendo esta posición generalizada, y en este punto, que el contenido matemático sea interpretable como herramienta para la elaboración de teorías o modelos científicos. Admisión que, sin embargo, me parece requerir algunas precisiones.

Utilizar una fórmula, realizar un cálculo, no entran, para mí, en tal categoría de instrumentalización o empleo matemático, sino más bien de tendero. Ya he indicado que las fórmulas o expresiones aisladas carecen de sentido, obtenido únicamente cuando se las enfoca en el contexto teórico que les es propio. Con Freudenthal estimo que no pertenece al hacer matemático el cálculo numérico elemental; aún más, ni siquiera el cálculo euleriano formal de la derivación. El empleo debe serlo de una de las teorías matemáticas, M . Teoría caracterizada bien por su cierre formal, bien semánticamente. Esta teoría matemática M mediante una aplicación i , pasa al contexto de una teoría o modelo científico o social T ; se tiene, así, $i(M) \subset T$. En este caso, $i(M)$ se ha convertido en parte propia de T , no de M . Ha quedado M integrada, por interpretada mediante i , en T . Que el cálculo pueda hacerse sintácticamente en T teniendo presente únicamente $i(M)$, de acuerdo; pero sólo la materialidad de ese cálculo. La interpretación y el sentido del mismo dependen de T , no de M . Debe evitarse, así, alguna confusión que en este aspecto suele presentarse tras la exaltación del empleo de la Matemática, exaltación acompañada de los discursos en torno al rigor —inexistente— que dicho empleo proporciona, en torno a las ventajas en cuanto a la capacidad deductiva que se obtiene de esta instrumentalización.

Todo lo anterior implica, en principio, dos cuestiones:

a) Si se hace una teoría o modelo T , aunque en ella se emplee M , es decir, $i(M)$, lo que se hace es T , no M . En otras palabras, si se trabaja en una teoría física, por ejemplo, se hace Física, no Matemática. Y esto es aplicable al contexto matemático: Si se trabaja en una teoría matemática, se hace Matemática, no Química o Biología... Aún más, entre teorías matemáticas pasa lo mismo: Si se hace Geometría sintética no es lo mismo que si se hace Geometría analítica o vectorial. Es reiterar la vieja afirmación de Einstein respecto a la Geometría...

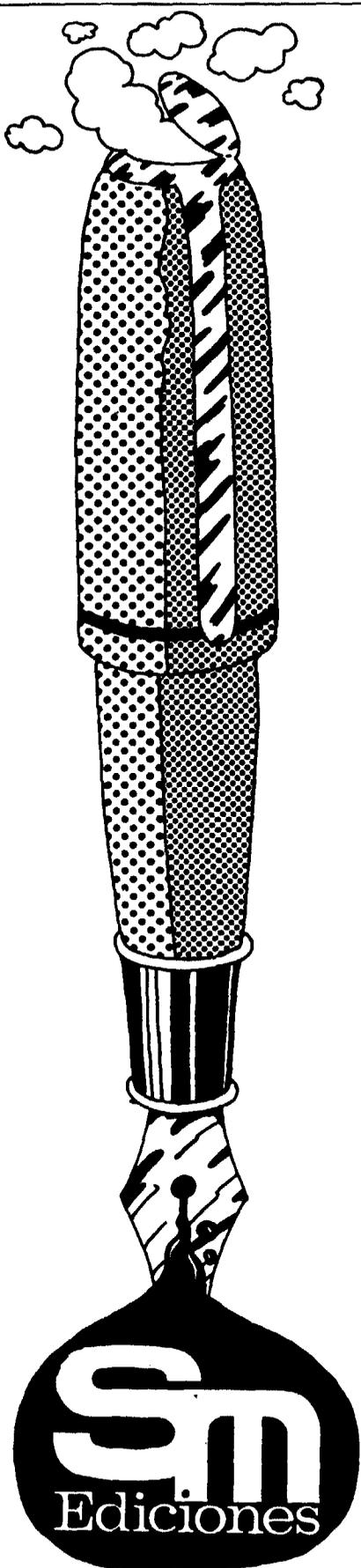
b) La elección de la teoría M viene condicionada por la teoría a construir, elaborar o sistematizar. Y en este punto cabe señalar que en ocasiones, la elección de un determinado sistema matemático puede «ayudar», sin proponérselo, a una excesiva simplificación de la teoría. «Ayuda» no sólo en cuanto a los instrumentos utilizados —así, por vía de ejemplo, la linealización como instrumento conceptual base, cuando los fenómenos a considerar quizá no verifiquen dicha linealidad, impuesta no sólo por los instrumentos matemáticos, sino por el enfoque epistemológico originario de la «ciencia nueva», pero linealidad instrumental matemática que limita la capacidad explicativa y predictiva de la teoría o modelo físico—, sino en cuanto a enmascarar los propios

hechos científicos, con lo cual en lugar de facilitar perjudica el estudio de los propios fenómenos calificados de reales.

Podrían ejemplificarse estas últimas palabras. Desde las críticas a Poincaré por el establecimiento cualitativo de la teoría de la relatividad, pero no definitivo por no poseer la imprescindible intuición física, quedándose en la pura convencionalidad matemática, como señala de Broglie, hasta las confusiones que en mecánica clásica, en la dinámica de fluidos, provocó una ecuación como la euleriana, enfocada como mera sucesión de símbolos, impidiendo percibir el contenido epistemológico profundo del método euleriano, el principio de corte y que no es otro que el principio del análisis de la mecánica clásica. Principio de corte que llega a crear confusiones precisamente por su enunciado puramente geométrico: la tracción es normal a la superficie sobre la que actúa. Confusión que, y sigo a Truesdell, oscurece el carácter tensorial del esfuerzo y hace equivalentes los principios del momento lineal y del momento de la cantidad de movimiento, equivalencia válida para sistemas degenerados. Y la independencia de ambos principios expresa algo fundamental de aquellos espacio-tiempo, en los cuales existe un concepto absoluto de simultaneidad y tales que la sección del universo en un momento determinado sea un espacio euclídeo. Confusión por no tener presente que toda transformación independiente al sistema de referencia se descompone en una traslación —momento lineal— y en una rotación —momento de la cantidad de movimiento—.

Insisto, no son las fórmulas aisladas, no es tampoco $i(M)$ quien decide en un momento la elección de una M determinada para una teoría T . Las decisiones electivas, las condiciones de interpretación, dependen de razones a veces ni siquiera explicitables, en todo caso apoyadas siempre en el razonamiento intuitivo previo en el contexto del cierre semántico de la teoría T . Ello me conduce a decir que sólo la previa clarificación, tanto del contexto como del interior de la teoría o modelo que se trabaje permitirá la adopción de unos u otros principios, hipótesis o conjeturas, de unas u otras teorías matemáticas a emplear, según la interpretación elegida. Y este hecho también ha ocurrido en el interior de la propia matemática, y basta recordar las crisis que la misma ha ido sufriendo, como la de fundamentos de los primeros años de este siglo; crisis en la cual las hipótesis previas eran, todas, perfectamente conocidas, pero se carecía de criterios, claros y distintos, para cuáles elegir y cuáles rechazar. Elección a base de tanteos, ensayo y error..., que pueden conducir a diversos enfoques de una misma teoría, a la construcción de diversos modelos que pretenden dar cuenta de la misma experiencia. Desde este punto de vista, enfocar el hacer matemático como panacea para la organización y desarrollo de una teoría científica se me presenta como una autojustificación de la falta de ideas claras y distintas en las respectivas disciplinas, una falta de profundización de su estatuto propio que siempre requiere de su propio esfuerzo clarificador intrínseco antes de acudir a la instrumentalización matemática. Es la expresión de esta clarificación la que requiere de un lenguaje y, en esta búsqueda expresiva, dicho lenguaje podrá apoyarse en algún contenido matemático.

Un problema de distinto tipo, pero a tener en cuenta en el contexto que aquí me ocupa es el de que $i(M)$ sea común, por isomorfismo, para varias teorías T . Con precisión, isomorfos en cuanto a la



B.U.P.

PRIMER CURSO

LENGUA ESPAÑOLA, Guía - Colección TEXTOS LITERARIOS - H.^a DE LAS CIVILIZACIONES - MATEMATICAS, Solucionario - CIENCIAS NATURALES - MUSICA - RELIGION, Guía - DIBUJO - FRANCES - INGLES

SEGUNDO CURSO

LENGUA Y LITERATURA ESPAÑOLA - LATIN - GEOGRAFIA HUMANA Y ECONOMICA - MATEMATICAS, Solucionario - FISICA Y QUIMICA, Solucionario - FORMULACION Y NOMENCLATURA QUIMICA - RELIGION, Guía - DIBUJO TECNICO - DISEÑO ARTISTICO - FRANCES - INGLES

TERCER CURSO

LENGUA Y LITERATURA ESPAÑOLA - LATIN - GRIEGO - FILOSOFIA - GEOGRAFIA E HISTORIA - MATEMATICAS, Solucionario - CIENCIAS NATURALES - FISICA Y QUIMICA, Solucionario - RELIGION - DIBUJO TECNICO - DISEÑO ARTISTICO - FRANCES - INGLES

C.O.U.

LENGUA ESPAÑOLA - LITERATURA ESPAÑOLA - HISTORIA DE LA FILOSOFIA - HISTORIA DEL MUNDO CONTEMPORANEO - HISTORIA DEL ARTE - MATEMATICAS, Solucionario - FISICA, Solucionario - QUIMICA, Solucionario - GEOLOGIA - BIOLOGIA - FRANCES - INGLES

estructura sintáctica o al mero cálculo, no en cuanto a la semántica. Por este último punto, las teorías M alcanzan una fuerte polisemia gracias a las distintas interpretaciones o aplicaciones i , polisemia que se obtiene de los distintos contextos en que M se interpreta y con la cual se manejan posteriormente algunos términos matemáticos que quedan «cargados», por decirlo así, de referenciales, carga que en ocasiones permite su extensión conceptual, aunque en otras impide su limpio manejo.

6. Varias teorías o modelos pueden tener una base estructural común. Es claro que ésta no puede situarse en el cierre semántico; la estructura común debe situarse en el cierre sintáctico, formal. Y aquí me viene otro mito asociado a la instrumentalización matemática. Aquél que ve a esta disciplina como herramienta metódica y no sólo de contenido. Es el enfoque instrumental quizá más antiguo; ya Platón, en *Menón*, indicaba el «razonemos al estilo de los geométricos»; es el método *more geométrico*. Herramienta como método que a veces se ha identificado con herramienta en cuanto a que $i(M)$ aparece integrado en T y es común a varias teorías. Y no es $i(M)$ la base común, precisamente porque aparece integrado en cada teoría T y, además, porque también hay teorías que hacen uso de «fórmulas» que nada tienen que ver con las fórmulas matemáticas y pueden ser, sin embargo, estructuralmente semejantes. La clave de la instrumentalización metódica se encuentra en lo indicado por Platón, en el método hipotético-deductivo el que permite la estructuración sintáctica, la organización formal y, con ella, el cierre sintáctico de una teoría. Cierre sintáctico que podrá ser común, en cuanto a tal estructuración, a varias teorías aunque $i(M)$ sea diferente en ellas.

Ahora bien, el método hipotético-deductivo, ¿es método estrictamente matemático? Ciertamente encontró en la Geometría helena una de sus plasmaciones más perfectas y el propio Descartes contraponen sus *Regulae*, su criterio de análisis o descomposición contra ese método como propio de los matemáticos. Sin embargo, creo que el método hipotético-deductivo, si bien se plasma con mayor perfección en el hacer matemático, constituye un marco epistemológico más que un método propio de un hacer determinado. Como tal marco abarca, ciertamente, a la Matemática, pero también a cualquier otro hacer, sea o no científico. Lo que posibilita su empleo como método es la convicción, precisamente, de la unidad, de la totalidad de aquello a lo cual se aplica. Frente a un ideal mecanicista de división o análisis en partes para alcanzar posteriormente la unidad como mera agregación de dichas partes, el método hipotético-deductivo toma como punto de origen la creencia en la globalidad orgánica de lo que estructura o construye. Frente a Descartes y su mecanicismo, Newton compendrará un marco teórico que plasma en título polémico como *Principia mathematica* frente al *Principia philosophiae* cartesiano porque, para Newton, el demiurgo compuso el universo en unidad estructural y el conocimiento de la misma deriva básicamente del conocimiento que obtengamos de los primeros principios. Marco teórico en el cual esos primeros principios no sólo marcan el cierre semántico, sino que determinan el cierre sintáctico mediante su elaboración axiomática. Aparentemente, este último punto quedó olvidado en beneficio de la unidad semántica, condicionando el trabajo posterior, aunque la referencia al marco dado por las «leyes fundamentales de la naturaleza» fuera el recurso so-

corrido para develar la unidad estructural en la cual se trabajaba. Es la creencia previa en la unidad total, pero orgánica y no como mera suma de agregados, la que condiciona el empleo del método axiomático y, con él, el enfoque estructural de la empresa científica.

No se trata, como se sostiene a menudo, de un método meramente organizador y sólo manejable cuando se ha obtenido un cúmulo de datos y proposiciones experimentales; esta idea es la de un enfoque mecanicista u operacional que no da cuenta del cuadro epistemológico axiomático. Este cuadro es, precisamente, todo lo contrario conceptualmente a la idea anterior. Y es el que ha venido a sustituir al cuadro mecanicista. Se parte de la creencia previa en la unidad estructural dada por una serie de hipótesis para determinar el comportamiento de la misma, mediante la provocación de experimentos adecuados. En imagen algo cruda: un edificio no surge por la mera acumulación de ladrillos, cemento, vidrio...; el método axiomático equivaldría a la planificación previa de esa construcción por la cual los elementos anteriores no se colocan al azar o por mera acumulación, sino organizadamente y según plan previo, que lleva a buscar los materiales adecuados. Que, desde este enfoque, y en cada momento, se analicen zonas especiales no es incompatible, sino necesario, pero siempre bajo la óptica de que dicha separación y análisis se ha realizado en función de la unidad originaria, lo cual posibilitará su posterior síntesis, en el mismo cierre semántico. Igualmente, que deba utilizarse un simbolismo, una formalización más o menos fuerte, es algo secundario; siempre que, por supuesto, no se confunda tal empleo, necesario como el del lenguaje, con el propio hacer, confusión realizada por alguna escuela como el logicismo en el hacer matemático.

Desde este mi punto de vista, un término como el de «interdisciplinariedad» se me presenta equívoco. Lo importante es develar la estructura interna de los diversos modelos. Y este trabajo de captación constituiría, auténticamente, un trabajo interdisciplinario. No la colaboración para aplicación de un hacer, como herramienta, en otro; mera interacción entre dos haceres, siempre plausible. Sino el develamiento de la unidad estructural que puede subyacer a diversas representaciones conceptuales de la experiencia —experiencia que no tiene por qué ser, exclusivamente, material, sino también conceptual—. Unidad subyacente en cuanto a estructuración orgánica y metódica. Para lo cual, el método axiomático, al crear esa estructura se manifiesta como el más idóneo. Con todas las limitaciones que el mismo tiene y que fueron puestas de manifiesto hacia 1930 por Gobel y Tarski entre otros. Limitaciones que permiten vislumbrar, a la vez, la necesidad de partir en la investigación empujando dicho método dada la incompletitud de las teorías formales apoyadas en lenguajes de orden superior o igual a dos y la imposibilidad de su axiomatización total. Necesidad, porque este método es el principio creador de la construcción, de la constitución del modelo, de la teoría.

Y ello me conduce a otro error frecuentemente cometido cuando se habla de la necesidad de la axiomatización: considerar que ésta ha de ser de todo el conocimiento humano. Olvida, quien adopta este punto de vista, que ello sería equivalente a saltarse una de las condiciones que se imponen a un modelo, el cierre semántico. La axiomatización, y la consecuente formalización, sólo son factibles para la determinación de teorías, para modelos, y no para el

conocimiento total, sino para las unidades de ese conocimiento. Y precisamente por ello, permite que, como unidades, como objetos, puedan relacionarse y no por meras analogías de carácter semántico, sino por isomorfismo, en categorías, en sistemas. Quiero decir, el ideal axiomático o hipotético-deductivo, cuando se plasma en el método deductivo ha de hacerlo de manera local, no global. Se usa no en el total de la Matemática, sino para establecer las teorías o sistemas matemáticos; no en «la» ciencia, sino para la elaboración de las teorías científicas. Enfocadas como nuevos objetos, el método puede reiterarse, ya que, como método, sólo alcanza su plenitud en su permanente realización. Es un tipo de aprehensión que permite, a la vez, analizar la extensión de los conceptos y, con ello, precisar el enriquecimiento de los mismos. Ideal que se plasma en la definición implícita postulacional y no sólo, como suele confundirse, en el plano demostrativo. Plano demostrativo, y concepto de demostración, que componen otro tema en el que, aquí, no entro.

7. Consideraciones como las anteriores en cuanto a la inversión provocada en el marco epistemológico de las ciencias conllevan una serie de consecuencias para la práctica enseñante. Voy a limitarme a esbozar alguna inmediata.

Por lo pronto, no creo honesto que se deba huir de lo que se ha denominado excesiva abstracción en la enseñanza de la Matemática. Y ello porque cualquier disciplina, por construcción conceptual es abstracta sin dejar de ser real. Cuando se habla de la concreción se habla, en general, y por un lado, en nombre de representaciones icónicas que no son más que meras ayudas heurísticas y casi siempre deformadoras, de la verdadera construcción o modelo científico; por otro, se mantiene un cuadro epistemológico de carácter analítico y mecanicista que desde mi punto de vista se encuentra conceptualmente atrasado en el terreno del pensamiento científico, en el de la filosofía de la naturaleza. Y en este sentido, la insistencia en dar situaciones «matematizadoras» puede conducir a confusiones totales, ya que, en los niveles medios de enseñanza, tales situaciones deben limitarse a ejemplos, a casos casi siempre triviales y de carácter aún más simplificador y caricaturesco del que puede simplificarse en una construcción científica. En lugar de poner de relieve la unidad estructural interna, tanto conceptual como metódica, se pone de relieve, por modo exclusivo, el matiz de instrumentalización. Y digo «el matiz» porque a ese nivel los trabajos experimentales que pueden elegirse quedan sin conexión unos con otros, marcando una radical superficialidad en el hacer científico. Por inversión, se oculta la marcha de las ciencias en el momento presente o, en todo caso, debe postularse que tal conexión existe, afirmación que no hará otra cosa que ocultar la misma. Lo más importante sería hacer ver la estructuración, tanto por cierre semántico —y ello supondría no un trabajo de superposición o colaboración— como por cierre estructural —y ello supondría un manejo del método deductivo—.

Tras las consideraciones precedentes no quisiera descuidar un aspecto importante: la mejora de la enseñanza. Tema que supone, para el enseñante, el pleno dominio del contenido que ha de poder transmitir. Parece que, en los terrenos de la Didáctica y Pedagogía, más bien en los del sentido común, constituiría la exigencia primaria y fundamental.

No voy a entrar en qué contenido se debería programar. Debo tocar lo que parece haberse convertido

en segunda condición esencial para el enseñante: A la pregunta de cómo enseñar un contenido previo, corrientes muy a la hora, muy bañadas no sé si superficial o profundamente en esas técnicas del engaño para el alumno que se cubren bajo los rótulos de Didácticas y Pedagogías, se está respondiendo que de manera dinámica y no de forma estática o «autoritaria» como se venía haciendo. Y la forma dinámica estriba en que sea el alumno quien redescubra o invente, bajo la sugerencia del profesor —incluso sin dicha sugerencia para mayor libertad dinámica creadora— el contenido más o menos libremente programado.

Tengo que aclarar, ante todo, que nada entiendo en estos terrenos. No sé lo que quiere decir que el alumno invente o redescubra o cree. Si quisiera decir auténtica invención o creación, sobre cualquier situación matematizadora más o menos sugerida por profesor alguno, suponiendo creación casi *ex nihilo*, es posición platónica o de tabla rasa, cuya admisión no comparto, al igual que tampoco conozco recetas para que nadie invente y dudo mucho que las mismas existan a pesar de los esfuerzos de Polya y Lakatos para convencer de lo contrario —aunque desearía y agradecería vivamente que alguien me diera una receta para ser, también yo, creador—. Si creación supone, como quería Poincaré, establecer analogías entre diversos campos, parece imprescindible el dominio previo de dichos campos, porque nada se sacaría de donde no hay; y tenemos el mismo problema de cómo dominar esos dominios previos de conocimiento entre los que descubrir las analogías. Si se trata de formar, de hacer madurar al individuo alumno, cabría preguntarse si la Naturaleza tiene, de hecho, algún papel en tal maduración, aunque en todo caso yo votaría porque la misma desapareciera de los programas, para no sobrecargar con exceso a los alumnos, dado que una sobrecarga como la que ahora tienen les puede impedir crecer y madurar auténticamente, en verdadera dinámica creadora...

No parece que tanta dinamicidad que en ciertas dosis puede ser positiva —¿no exige, la resolución de problemas, una iniciativa dinámica?— ha conducido al desprecio de «virtudes» muy antiguas, pero que han ido perdiendo importancia, al menos desde Aristóteles, que convirtió a una de ellas en mero ejercicio separado de razón, en regla operacional, técnica: la memoria. Y creo que para hacer matemática, como cualquier otro hacer, como para cualquier tipo de experiencia, la memoria es imprescindible porque entraña, enfocada no como técnica, sino como cosmovisión, un ejercicio de voluntad y disciplina y coherencia mental que las actuales dinámicas parecen olvidar atomizando los cierres semántico y sintáctico de los modelos teóricos, como queriendo provocar una uniformidad en los individuos, por su límite inferior, y, si no lo olvidan es por el engaño que se hace al propio individuo llevándole a un final sin haberle dicho que le conducen a dicho final en nombre de su libertad.

8. En todo lo anterior me he limitado a un enfoque muy específico de las ciencias, al calificable de teórico y se me puede argumentar que nuestros alumnos, en general, no van a ir por ese camino. No he olvidado que junto al enfoque teórico se encuentra el tecnológico. No he olvidado que el enfoque teórico se encuentra cada día más en desuso porque el cuadro ontológico-epistemológico actual es marcadamente tecnológico. Y porque no lo he olvidado, es por lo

que lo he defendido o he pretendido defender al menos. Con el poeta diría: Se canta lo que se pierde...

El enfoque tecnológico no supone, en absoluto, ciencia aplicada, aplicación de conocimientos adquiridos a una práctica, a unos problemas aplicados. La tecnología tiene su cuadro epistemológico propio, sus procedimientos de trabajo e investigación, circunscritos en general a fenómenos y circunstancias, ahora sí, concretas, particulares que aunque entrañen cierta simplificación de la experiencia, se apartan radicalmente de los casos puros que estudian las ciencias. Cualquier rama tecnológica se apoya en un número de reglas, de recetas, de carácter empírico que han llegado a ser descubiertas y empleadas antes de que algunas ciencias conjeturen hipótesis, elaboren principios que permitan absorber tales reglas. Reglas empíricas que pueden o no llegar a ser justificadas teóricamente, pero que no se apoyan en esta justificación para su éxito y empleo, sino en su operacionalismo intrínseco. Quiero indicar, aún con interrelaciones, el enfoque científico y el tecnológico son enfoques distintos y no siempre en marcha paralela. Podría ejemplificarse tal disparidad con la creación, como modelo científico, de la Hidrostática por parte, entre otros, de Torricelli. Siglos antes, los árabes, entre otros, habían mostrado su dominio técnico de esta posterior rama teórico-científica, sin por ella crearla como ciencia, aunque sí dominarla como técnica y para usos no meramente artísticos, sino de necesidad económica.

Y desde un enfoque operacional, tecnológico que no científico es desde el cual quizá cobren todo su sentido esos predomios dinámicos de los que he hablado en el punto anterior. En ellos se llega a dominar unas técnicas y el manejo de unas reglas matemáticas en otras áreas —lo que mal cubre la palabra «interdisciplinaridad»—. Creatividad como operacionalismo. Y aquí sí interviene el factor de presión social que llega a plasmarse en declaraciones de gobierno, en las cuales se exige la «creación» de técnicos en todas las áreas —y los mejores técnicos, por supuesto, los multidisciplinarios—, así como la creación de ayudas a la investigación que, claramente, son de investigación para instrumentalización inmediata, tecnológica. Aunque ello implique, por rechazo, el sacrificio de las ciencias, y la Matemática se encuentran entre estas últimas.

Es mezcla y confusión, no sé si consciente o no, entre los distintos marcos epistemológicos que posibilitan las ciencias y las técnicas. Mezcla en la que parece como si se hubiera bebido del Ameles perdiéndose, con ello, la virtud individual en forma de *accésis*, de purificación mediante el ejercicio, el trabajo. Nuevas didácticas, apoyadas en la dinámica, contrarias a la marcha y al corte epistemológico sufrido por las ciencias, inmersas en el cuadro de las técnicas como recetas para el profesor —¿un profesor requiere de recetas en su enseñanza?— y que al sostener el papel del descubrimiento o de la creatividad libre me recuerdan la aseveración de André Gide al señalar que con sólo buenos sentimientos no se hace buena literatura. Con muy buena pedagogía y con muy buenos deseos de que nuestros alumnos sean creadores —toda la especie humana creadora, si-

multáneamente...— no tiene por qué enseñarse bien ni crearse nada. No se descubre nada porque de una manera más o menos cortés se le indique a uno que descubra algo. Aunque quizá se le conduzca al alumno a ser buen técnico y a que se le ocurran nuevos mecanismos frente a la máquina.

Permítanme que haya mantenido la defensa del método deductivo frente a los ataques «contra el método», porque estimo que sólo una verdadera disciplina de trabajo y esfuerzo constante pueden conducir, ya que no a la creación, al menos a no quedarse en la *amaleia*, a no quedarse en la satisfacción del aquí y ahora, dada por la ignorancia que beber el agua del Ameles ha provocado y su continua bebida mantiene.

NOTA.—En los numerosos *ateliers* que se realizaron por las tardes en el *XXX Rencontre Internationale de Professeurs de Mathématique* pude comprobar la confirmación de alguna de las tesis que he venido sosteniendo, aunque alguno de los expositores manifestaba adoptar posiciones teóricas contrarias, siempre favorables a la creatividad por parte del alumno, manifestaciones no acompañadas de argumentos, en general. De tales tesis destaco, en mero esquema, las siguientes:

1. No existe trabajo interdisciplinar, aunque el profesor de matemáticas «explique» o exponga temas de materias diferentes.

2. Los ejemplos o situaciones «matematizadoras» son: a) triviales y clásicos —se continúa con los mismos ejemplos de los dados de Pascal, muy interesantes ciertamente, pero que no conducen a los temas y conceptos de la Matemática actual, un sobreañadido espúreo desde este enfoque...

b) artificiales y excesivamente «insertados» en la vida real de nuestros alumnos, por lo cual, estos alumnos no pueden pensar, no sé si inventar, en situaciones y con temas que les son desconocidos —así, intensidad en el brillo de las estrellas dobles, de las novae y supernovas, los huevos de sapo, la temperatura basal...—; temas que, como no pueden ser de otra manera, exigen el previo informe del contexto en el que cobran su sentido, porque desgajados de él carecen totalmente del mismo. Y para dar el contexto semántico el profesor de matemáticas debe informar de dicho contexto previamente a lo que desea obtener de estos ejemplos.

3. De esta forma se manifiesta que ni siquiera los que sostienen la creatividad y la interdisciplinaridad creen en ella o la practican. Salvo que confundan creatividad con motivación. Y es esto último lo que, realmente, se hace. Motivación con varios peligros, por la confusión indicada, especialmente el de «epatar» al alumno.

4. Los ejemplos, las situaciones se escogen de las ciencias, desgajándolas de sus contextos propios. Ejemplos «científicos» —y no motivaciones honestas surgidas de las «humanidades»— no hacen otra cosa que aumentar lo que Tierno calificara como «razón mecánica», frente a la razón englobadora humanística, frente a la razón dialéctica; aumento de tecnicismo frente a humanismo.

5. Con todo ello se manifiesta, una vez más, el uso de las Didácticas como engaño y manipulación del alumno. La imagen continúa siendo la de Sócrates con el esclavo de Menón que «descubre» cómo duplicar el cuadrado, descubrimiento que no le hace salir de la esclavitud mental porque no hay trabajo posterior integrador. Una mínima honestidad exigiría que, ya que hay que «motivar» al alumno, al menos se le indique que lo que se realiza es tal motivación, y que con ella no se hace Matemática; es el procurar no alinearle o enajenarle, ni manipularle consecuentemente.