4 A qué llamar lógica matemática

Por Javier DE LORENZO (*)

1. El término «lógica» cubre un campo semántico muy amplio. Tanto, que es término equívoco si no va acompañado del contorno de creencias que delimiten el marco de validez donde tome uno u otro de sus referenciales. Quiero decir, cualquier concepto —en este caso el de «lógica»— no posee un único referencial o significado, válido para todo lugar y tiempo. El significado viene establecido por un marco previo, por el contexto de una creencia determinada, marco que es el que hace perder la radical equivocidad al concepto que se maneje. Marco de referencia variable a lo largo del tiempo y no sólo en un corte sincrónico. Por un ejemplo, Lógica en el contexto de la llamada filosofía moderna, tanto en el pascaliano o de Port-Royal como en el de sus contemporáneos, designará el «arte del pensar», de persuadir y conducir bien a la razón. En el marco de la «filosofía moderna» la Lógica no será otra cosa que dialéctica o conjunto de reglas para la argumentción; y a pesar del calificativo de formal, se difunde en ella un profundo psicologismo, que permanecerá largo tiempo.

Desde hace algún tiempo, y con objeto de diferenciación respecto a la nota de psicologismo, de pretendida precisión o delimitación de marcos, se califica a la Lógica con el término «matemática». Se atiende, para ello, a dos rasgos que resultan no ser intrínsecos sino estrictamente metodológicos, anque conformen parte de su contexto: formalización y consecuente simbolización, y empleo del método axiomático en su desarrolllo o en la construcción de cálculos. Rasgos que permiten una aparente lejanía del «arte de pensar» y que hacen, en el decir de Bochenski por ejemplo, que la lógica posea como objeto no reglas de pensamiento o reglas metalingüísticas, sino leyes internas al lenguaje formal en el que se esboce la lógica. El psicologismo parece quedar eliminado, así como la faceta de pura argumentación, en beneficio de un formalismo metodológico, del que está ausente cualquier nota de carácter ontológico.

Aceptada en principio esta concepción del término «lógica», resulta que, junto a la misma, junto a la Lógica matemática como disciplina de leyes internas del lenguaje formal tratada con el método axiomático así como con una simbolización completa —tanto de sus variables como de sus constantes—, se presentan al menos otros dos campos: Por un lado, la Lógica aplicada; aplicación de la disciplina lógica que puede hacerse tanto a las argumentaciones empleadas en otras disciplinas —principalmente científicas— como a otros lenguajes; pero también aplicación a otros campos como el tan llamativo de los circuitos de conmutación y, a su través, a la construcción de modelos teóricos como los neurofisiológicos, más llamativos aún para el filósofo, por su carencia de relevancia auténticamente científica... Por otro lado, la Filosofía de la Lógica, o campo de especulacion acerca de lo que, entre otras especulaciones, el propio término «lógica» puede denotar, para lo cual cabe recurrir, incluso, a la historia...

Ninguno de estos dos campos —Lógica aplicada, Filosofía de la Lógica— debería solaparse con la disciplina que les da origen —no se habla de origen histórico o genético, sino estrictamente conceptual—. Sin embargo, para evitar tal solapamiento es imprescindible aceptarlo como punto de partida, al menos en cuanto a una toma de posición especulativa respecto a qué denominar «lógica», toma de posición que se haga consecuente con el posterior desarrollo de la misma. Toma de posición que, por supuesto, no es estrictamente interna al hacer lógico sino más bien al especulativo en torno a dicho hacer pero que, por penetrar en el terreno normativo de las creencias, condicionará radicalmente el modo de trabajo, por condicionar tanto el objeto como el método del mismo, al precisar en cierta medida el marco en el que pueda tener un cierto significado el término «lógica». Punto de partida en el que deberían precisarse no sólo los aspectos metodológicos —como la aceptación de los dos puntos o rasgos antes señalados de simbolización completa y axiomatización—, sino también y fundamentalmente el objeto de la disciplina a desarrollar.

Hay una aparente circularidad en esta toma de posición previa. Aceptar un cierto marco para, después, o sobrepasarlo o variarlo. Sin embargo, la circularidad es sólo aparente porque, de hecho, y por un lado, hay que comenzar por algún punto, como hay que empezar sabiendo no sólo leer y escribir sino contar y medir para trabajar, por ejemplo, en matemática, y porque las creencias que condicionan tal toma de posición no son elementos racionalizados, aunque se pretenda la posterior justificación de alguno de dichos elementos; y, por otro lado, refleja, esta adopción previa, el círculo hermenéutico que se encuentra en la base de toda acción cognoscitiva conceptual. Además, el intento de precisión en el punto de partida, en la delimitación del marco en el que adopte un significado el concepto a manejar, y por supuesto su concesuente mantenimiento a lo largo del trabajo, lograría evitar los sincretismos y confusiones que abundan en las divulgaciones de Lógica hoy al uso —muy abundantes en España, donde en cambio escasea la Lógica matemática en publicaciones, quizá en cultivadores, a nivel de investigación propia— y en las cuales, tras admitir más o menos vagamente que la Lógica es una disciplina constituida por leyes, simbolizada y con método en general el axiomático, se centra todo el estudio y desarrollo en lo que no es Lógica, sino Lógica aplicada a la argumentación, en una vuelta a la dialéctica o al arte del pensar y persuadir, convencido el autor de que la Lógica es un instrumento para enseñar a «razonar» a quien lea el manual de lógica. Si se me permite una comparación con la Matemática, el sincretismo equivaldría a la afirmación que hiciera el autor de una obra de divulgación de Geometría en el prólogo, si es que llega a hacerla, indicando que la obra que va a seguir trata de una disciplina científica abstracta en la que a partir de unos primeros principios se van a obtener unas propiedades determinadas o teoremas que nada tienen que ver con la práctica de la medida, pero inmediatamente, y en el desarrollo de los diferentes capítulos, tal disciplina deja de ser científica y se muestra como una serie de recetas sobre mediciones de longitudes, áreas, ángulos...; o en una obra de Aritmética se indicara que el estudio de la misma como disciplina axiomática permite que el lector realice cálculos numéricos en una forma mucho mejor que antes de tal estudio. Cálculo y medida propias del tendero, o del agrimensor, que no del matemático, si es que de un matemático se tratare...

(*) Catedrático de Matemáticas. I. B. «Zorrilla». (Valladolid).

2. Si la toma de postura antes adoptada es la propia de gran parte de los filósofos que se enfrentan con la Lógica matemática —aunque, como acabo de decir, no mantengan tal postura de modo consecuente en algunos casos—, creo que es un enfoque parcial que no delimita auténticamente el marco de validez propio del concepto «lógica». Desde mi punto de vista, la disciplina Lógica matemática no se centra en un mero aumento tanto en extensión como en rigor respecto a los rasgos metodológicos antes señalados —aumento por cuanto ya pueden buscarse en la historia, siempre al «servicio de...», los precedentes de tal uso—, sino en una inversión conceptual, ontológica, de su objeto. No sólo se debe caracterizar por su aspecto metodológico sino, más importante, por su aspecto ontológico-metodológico. Y, desde este criterio se desborda el marco aceptado previamente y, desde aquí, carecen de sentido las discusiones en torno a cualquier desviación psicologista o argumentativa. La Lógica matemática se va a tomar como disciplina cuyo objeto no son leyes más o menos universalmente válidas, aplicables difícilmente a unas argumentaciones, sino como aquella disciplina cuyo objeto se centra en determinados sistemas formales, estructuras que, para diferenciarlas de otras estructuras matemáticas, cabe calificar como estructuras o sistemas lógicos; y ello mediante una instrumentalización metodológica basada en las notas de formalización y axiomatización, notas que aúno bajo el nombre de constructivismo axiomático.

Por supuesto, al enfocarlo así podría admitirse que la disciplina Lógica matemática constituye una parte del hacer matemático, parte a incluir en zonas próximas a la de Algebra universal o Teoría de categorías si se enfoca como Teoría de modelos: en lugar de estudiar una estructura como la de grupo o espacio vectorial o espacio topológico, aquí se enfrentaría con sistemas formales o estructuras elementales cuyo operador central tendrá que ser determinado con precisión, así como el lenguaje formal sobre el cual se actúe. Que las estructuras formales que quepa considerar como sistemas lógicos constituyan la base para otras estructuras o que puedan aplicarse a otras disciplinas, ello sería materia ya de Lógica aplicada, instrumental al servicio de, como la teoría de grupos lo es para la Mecánica cuántica o el Cálculo para la Física general, por ejemplo; pero esto es asunto no propio del matemático en cuanto matemático, sino del físico. Igualmente hay que indicar que el estudio de los sistemas lógicos como estructuras no completa o agota toda la disciplina Lógica matemática, por cuanto de tales sistemas lógicos puede predicarse la efectividad o no de los mismos, por lo cual la Teoría de la recursividad también constituiría una de las zonas de la disciplina Lógica matemática, al menos aquella zona de la recursividad que muestre posibles aplicaciones a la misma —y, en este sentido, el papel de instrumentalización se invierte, por cuanto dicha teoría de recursividad muestra un papel independiente de la Lógica matemática estricta, pero es un instrumento muy útil y operativo para ella.

Las estructuras que califico de sistemas lógicos quedan caracterizadas, como toda estructura, tanto por las configuraciones de partida como por el operador que permita pasar de esas configuraciones iniciales a otras, los teoremas; operador —u operadores— que permite dar el cierre a dichas configuraciones originando la teoría deductiva formal, es decir, el conjunto de las proposiciones o contenido propio de la estructura de que se trate. Quiero decir, mediante los operadores enfocados como operaciones primitivas sobre el conjunto de fórmulas o configuraciones construidas sobre el vocabulario base, se obtienen todas las proposiciones relativas a la estructura, aunque en acto sólo puedan conseguirse unas cuantas.

El operador considerado como clave para los sistemass que califico como sistemas lógicos no es otro, desde un enfoque sintáctico, que la formalización del intuitivo «se sigue de...». Sintácticamente, la formalización de esta noción intuitiva se apoya en la previa caracterización formal de las reglas de derivación —reglas como la de derivación en sentido estricto o del modus ponens, o la de derivación, generalización y sustitución—, así como sus reglas subsidiarias. Establecidas las mismas, puede darse la definición de lo que es una demostración formal —mera sucesión de configuraciones o fórmulas— y, con ella, la cláusula de cierre u operador «consecuencia sintáctica». Y, de esta manera, queda determinada la idea de Teoría deductiva a partir de un conjunto X de fórmulas, como aquel conjunto de proposiciones tal que coincide X con Cn(X).

En paralelismo, la comparación de un sistema lógico con una estructura abstracta, relacional o matemática, permite dar la noción de satisfacción o validez de una proposición en dicha estructura, convertida en modelo de la proposición. Y, de esta manera, puede establecerse la noción de «consecuencia semántica» de unas fórmulas —concepto en el que no interviene para nada la noción de demostración— y, mucho más importante, la noción de estructuras asociadas a un lenguaje L^* y a un sistema lógico determinado sobre dicho lenguaje, a la noción de L^*-estructuras. Con lo cual se indica que cualquier sistema lógico, como construcción conceptual humana, no se encuentra aislado sino en relación con otras construcciones conceptuales, con estructuras de manera que las proposiciones del sistema lógico quedan satisfechas en otras estructuras o construcciones conceptuales. Relación por la que dado un lenguaje L^*, todas las estructuras del mismo tipo de semejanza tales que cualquier proposición p de L^* —proposición entendida siempre como configuración o fórmula que carece de símbolos de variables libres de individuo—, p se satisface en cada una de dichas estructuras, constituyen una L^*-clase elemental del tipo de semejanza dado.

Y si bien el operador consecuencia sintáctica puede estimarse como el operador clave para las distintas estructuras o sistemas lógicos, resulta que éstos se diferenciarán básicamente en el lenguaje de partida, simbólico, en el que se construyan las configuraciones. Es decir, las distintas estructuras lógicas se diferenciarán por los distintos símbolos con los que se construyan sus configuraciones y, por consiguiente, tales sistemas dependerán del alfabeto elegido y de las reglas inductivas para componer configuraciones o fórmulas, así como de la numerabilidad del mismo y de la posibilidad o no de que las expresiones obtenidas concatenando los símbolos del vocabulario base sean finitas o no finitas —y, entonces, numerables o no—.

Dos de las estructuras más estudiadas, y enfocadas casi como constitutivas de toda la disciplina Lógica matemática, han sido el Cálculo proposicional y el Cálculo de predicados de primer orden con o sin igualdad. Pero ambas estructuras no son más que dos de las más simples, incluso muy limitadas, de todas las estructuras que pueden ser objeto de estudio de la disciplina Lógica matemática, aunque las dos, quizá por su simplicidad, permiten el mantenimiento del enfoque dialéctico o retórico, apoyado en su completitud semántica que ha permitido la creacción de procesos de «deducción natural», que se quieren como más cercanos a la forma psicológica del razonador matemático, con lo que se refuerza la creencia en la naturaleza dialéctica o argumentativa de la Lógica y se hace más difícil su clarificación. Ambos cálculos poseen el mismo operador consecuencia sintáctica —con sus matizaciones correspondientes, por supuesto, según las configuraciones a las que se apliquen pero ello es conceptualmente secundario—; ambos vienen caracterizados porque la longitud de sus expresiones es finita. Además, el Cálculo proposicional puede estimarse como una subestructura del de predicados. Naturalmente ambos cálculos, al depender del lenguaje en el que están construidas sus expresiones tendrán «manifestaciones» o concreciones muy diversas según sean los símbolos base empleados, pero tales manifestaciones, como estructuras concretas, son isomorfas entre sí, por lo cual pertenecerán a la misma clase de equivalencia según el isomorfismo establecido —que dependerá del tipo de semejanza— y bastará tomar como sistema lógico la correspondiente clase de equivalencia en la clase cociente de tales estructuras.

Una generalización clásica de la estructura lógica del cálculo de predicados de primer orden, la constituye la dada porque en el vocabulario base se admitan como variables no sólo los símbolos de individuo con su cuantificación correspondiente, sino también los símbolos de predicado o relacionales, que pueden ser cuantificados a su vez. Ello equivale a admitir lenguajes con distintos tipos de variables, con distintos niveles, con lo cual el sistema lógico obtenido será de orden superior al primero, pero con los mismos rasgos de finitud en cuanto a la longitud de las configuraciones que puedan construirse y con pérdida de una serie de propiedades típicas de los sistemas de primer orden. Si se agrega la condición de que puedan realizarse conjunciones y disjunciones con un número al menos numerable de elementos, se pasa a un sistema lógico como el $L\omega_1\omega$, mientras que si el número de elementos que intervienen en tales conjunciones y disjunciones es arbitrario se pasa al sistema lógico $L^{\infty}{}_1\omega$... Por supuesto, todos estos sistemas lógicos están apoyados en los conectivos proposicionales y cuantificadores clásicos, mientras que como base del lenguaje se establece en el vocabulario de todos ellos la escisión entre símbolos de relación, de operación y de individuo.

Así, por ejemplo, dado un lenguaje L^* con símbolos de relación, de operación y de variables de individuo, además de los conectivos proposicionales y de los cuantificadores existencial y universal, es decir, un lenguaje de primer orden, y una estructura matemática K como la de cuerpo, las fórmulas siguientes son expresiones de primer orden:

1. $\mathrm{V}x\,\exists y(x=0 \vee x.y=1)$
2. $\mathrm{V}x\,(x+1>x)$

La primera se satisface en todos los cuerpos K; la segunda sólo en algunos, los ordenados. Sin embargo una configuración como la siguiente es de orden superior al primero, por hacer uso de subconjuntos del conjunto base del cuerpo ordenado, es decir, uso del símbolo de inclusión que no es del vocabulario base de primer orden:

3. $\forall A,\forall B, A\subset K, B\subset K, A\neq\emptyset, B\neq\emptyset\ (\forall x, x\in A, \forall y, y\in B\rightarrow \exists z(x<z<y))$

3. Desde la inversión ontológica y epistemológica que entraña el rechazo de la disciplina Lógica matemática como dialéctica o retórica en beneficio de la disciplina Lógica matemática como estudio de ciertos sistemas lógicos, resulta que no sólo se pueden construir estructuras como las mencionadas, con configuraciones y demostraciones de longitud infinita, por ejemplo, imposibles como «abstracciones»» de cualquier tipo de argumentación, sino sistemas axiomáticos que den cuenta, por un lado, de estructuras modales —donde ya los símbolos del vocabulario base no tienen por qué ser los clásicos, aceptando la cuantificación modal— y, por otro, y fundamentalmente, de relaciones entre estructuras y sus lenguajes asociados. Es una inversión conceptual muy profunda que no siempre se ha sentido, al detenerse en la superficie de la simbolización y axiomatización a pesar de que ya el teorema de completitud semántica, tan comentado, no expresa más que una relación entre el sistema lógico y la estructura relacional o modelo, pero tomadas ambas y siempre como entidades unitarias. Al cambiar de objeto, que ya no es la ley del pensamiento o ley universalmente válida —lo cual carece de sentido, aquí, porque las proposiciones lo son dentro de un lenguaje determinado y, con ello, de sólo las estructuras asociadas al mismo—, ni el análisis lógico del lenguaje, ni el análisis de las argumentaciones, permite dar cuenta del papel del mismo, así como de sus generalizaciones, imposibles por vía del sólo argumento dialéctico.

Quiero decir, la importancia del Cálculo de predicados de primer orden, o sistema lógico L_1 si el símbolo de igualdad se encuentra entre sus símbolos básicos, se centraba desde la dialéctica o arte del pensar en el hecho de que el mismo permitía la expresión y análisis argumental de algunas disciplinas o partes de ellas —así, de algunas zonas de la Matemática—; en otras palabras, su importancia se centraba en algo ajeno al interior de la disciplina lógica, se centraba en la pragmática o aplicación de la misma. Contra lo que ya se habían alzado quejas, confusas ciertamente, en el sentido de argumentar que no se razona en Barbara, por ejemplo, por lo que la Lógica no debería apoyarse en la argumentación... Se carecía de criterios intrínsecos para caracterizar el papel de uno u otro sistema lógico. Porque las propiedades de completitud o categoricidad se veían como elementos no de la Lógica sino de la Filosofía de la lógica, componentes de la Metalógica. Y ello es consecuente, porque tales propiedades sólo poseen pleno sentido referidas a sistemas tomados en unidad, a estructuras lógicas y no a proposiciones consideradas más o menos aisladamente, sin el contexto discursivo en que alcanzan su pleno sentido. Y así, al hablar de tales propiedades, pero sin el reconocimiento del objeto del cual pudieran predicarse, se tenía que hacer una escisión arbitraria, carente de precisión y justificación auténticamente sólidas. Escisión arbitraria como, en analogía, si el estudio de los espacios vectoriales y sus relaciones no fuera propio del hacer interno matemático, sino de un metahacer externo a la Matemática, aunque el estudio de esas relaciones entre espacios vectoriales conduce, entre otras cuestiones, a la construcción de un nuevo espacio vectorial, el dual por ejemplo, que ya pertenecería no a la estructura a la que pertenece, sino a una metaestructura a la que, de hecho, no pertenece...

Sólo el enfoque y construcción de tales sistemas, con las relaciones y conexiones a que daban paso, podía dar razón de las características de unos y otros, así como de su comparación y de la categoría a la que pertenezcan. Para indicar un ejemplo, sólo esta inversión conceptual permite el planteamiento de nuevos problemas como el de la clasificación de estructuras o sistemas lógicos. Clasificación que puede intentarse por medios diferentes: el iniciado por Lindström en 1969, y el iniciado por Barwise en 1972. Por éste último puede caracterizarse el sistema lógico de primer orden mediante procesos puramente conjuntistas, al observar que en sistemas como L_1, $L\omega_1\omega$, L^{∞},ω los cuantificadores afectan tan sólo a elementos de los conjuntos base de las estructuras y no a subconjuntos de dichos conjuntos base —lo que sí hacen los sistemas de orden dos, por ejemplo—, por lo cual una posible caracterización de los sistemas lógicos de primer orden ha de tener en cuenta básicamente este hecho. Como resultado de este tipo de caracterización se puede obtener que $L^{\infty}\omega$ constituye el sistema lógico de orden primero más potente, siempre que se admita el teorema de interpolación como una de las características centrales del mismo.

En cuanto al enfoque dado por Lindström —en el campo de la teoría axiomática de modelos— un sistema lógico de primer orden queda caracterizado por ser el único sistema

—salvo isomorfismo— que posee las propiedades de compacticidad y de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente. En otras palabras, que no hay sistema más potente que L_1 que satisfaga las dos propiedades mencionadas.

Ello obliga a precisar, aunque muy someramente por ser mera ejemplificación, qué debe entenderse por sistema lógico general, así como recordar el contenido de las dos propiedades centrales de los sistemas generales de primer orden.

Esquemáticamente, un sistema lógico general L es una cuaterna ordenada $(L^*, X, V, \models)$, donde

a) L^* es un lenguaje de primer orden, con un número finito de símbolos de relación y operación;

b) X es una clase de proposiciones del lenguaje de primer orden;

c) Para cada proposición p de X existe un conjunto V compuesto por los símbolos de variables, de relaciones, de operaciones que ocurren en p;

d) La relación $\models$ de satisfacción entre las proposiciones p y las L^*-estructuras A caracterizada porque se verifica $A \models p$ únicamente si la interpretación de los símbolos de V se satisface en A; es decir, si la clase X está determinada únicamente por L^*.

Además, en un sistema lógico general se han de cumplir, por un lado, que las L^*-clases elementales son cerradas bajo isomorfismo, entendiendo por L^*-clase elemental K a la clase de todos los modelos A para algún L^*/y p; por otro, que si K es una L^*-clase elemental y L^{**} es una expansión de L^*, entonces K es una L^{**}clase elemental, pero no a la inversa. Esto último es lo que permite asegurar que los sistemas lógicos sobre L^{**} son más potentes que los construidos sobre L^*.

Es claro que los sistemas L_1, $L\omega 1\omega$, $L\infty\omega$, L_2, son sistemas lógicos generales en el sentido de la definición anterior y además que se cumple que L_2 es un sistema más potente que L_1, al igual que $L\infty\omega$ es más potente que $L\omega_1\omega$ que a su vez lo es más que L_1. Hay que observar que la noción de sistema lógico general es muy amplia y hace uso para las extensiones de la lógica de primer orden de las L^*-clases elementales, es decir, extensiones de lenguajes en que la noción de modelo o estructura asociada es de primer orden. Con lo cual, las nociones que entran en juego son las que corresponden a las clases elementales que son no sólo axiomatizables, sino finitamente axiomatizables. Y las propiedades centrales acerca de este tipo de sistemas lógicos, es decir, las que caracterizan a los sistemas lógicos de primer orden son las ya mencionadas de Löwenhewim-Skolem-Tarski descendente y de compacticidad. Y para recordar lo que ambas indican es preciso recordar que se dice de un sistema lógico que es consistente cuando y sólo cuando el mismo posee al menos un modelo. El teorema de compacticidad numerable —CN— establece:

> Un sistema es consistente si y sólo si todo subconjunto finito suyo es consistente.

Enunciado de esta manera constituye la versión semántica del teorema de finitud sintáctica por el cual de toda demostración puede obtenerse otra subsucesión finita, otra demostración finita más breve, lo que se pone aún más de relieve si se indica que es la propiedad de intersección finita la que entra en juego. Es claro que la propiedad de compacticidad, tal como está establecida, no la pueden verificar aquellos sistemas lógicos en cuya construcción se admitan sucesiones infinitas. Una pregunta inmediata es en qué sentido esta condición de compacticidad —esencial para la teoría de modelos— puede generalizarse para lenguajes y sistemas lógicos de longitud infinita y, consecuentemente, para qué tipo de conjuntos base de estructuras es admisible. Pregunta o nuevo problema surgido en este cambio de enfoque de la disciplina Lógica.

Por su lado, la propiedad de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente —LSTd— establece:

> Sea S un sistema y k un cardinal transfinito menor o igual que el cardinal de S. Si S tiene al menos un modelo infinito, entonces S tiene un modelo de cardinal k.

Como corolario de esta propiedad resulta que si un conjunto X de proposiciones tiene un modelo, entonces X tiene un modelo de potencia menor o igual que la potencia del conjunto de fórmulas del lenguaje. Lo cual, si X es la teoría de conjuntos, por ejemlo, conduce a la paradoja llamada de Skolem: Si X posee un modelo —que ha de ser claramente infinito—, entonces posee un modelo numerable. Y esta proposición es correcta aunque en esa teoría de conjuntos se pueda demostrar la existencia de conjuntos no numerables.

Se puede enunciar entonces el teorema de Linsdtröm en términos como los siguientes:

Si L es un sistema lógico general tal que

a) L_1 está contenido en L,

b) cualquier L-clase elemental con un miembro infinito posee un miembro numerable (LSTd),

c) Si K es una colección numerble de L-clases elementales tal que si la intersección de cualquier subcolección finita de K es no vacía entonces la intersección de la familia K es no vacía (CN),"

entonces se verifica que $L_1 = L$.

4. He mencionado, simplemente, un problema de clasificación de sistemas lógicos, apuntando que origina, a su vez, nuevas cuestiones como la de la extensión conservadora o no del teorema de compacticidad y preguntas consecuentes acerca de qué sistemas lógicos satisfacen a la vez el teorema de interpolación y el de compacticidad, si numerable o no numerable, o el de compacticidad general y el de interpolación, o las condiciones de recursividad numerable y de LSTd —y se tiene un segundo teorema de Lindström por el cual el único sistema lógico general efectivo es L_1—... Problemas sólo planteables —al igual que el de los sistemas lógicos de longitud infinita— desde la inversión conceptual señalada: aquélla que quiere que la disciplina Lógica matemática posea un objeto propio, junto a sus métodos de formalización, simbolización y axiomatización. Objeto que es, ahora, el sistema lógico o, en terminología más tarskiana, la teoría deductiva.

Y con ello insisto en el hecho de que son las creencias que contornan una disciplina las que determinan, en cada momento, tanto el objeto de la misma como de los problemas consiguientes que en el trabajo de dicha disciplina se han de plantear y, naturalmente, tratar de resolver. De esta forma, frente a las creencias retórica y analítica de la Lógica, se presentan las creencias calificables de matematizadoras, condicionantes de la disciplina Lógica matemática. Creencias que, como normas de acción, pueden presentar un programa de investigación —en terminología de Popper— de más largo alcance que las restantes creencias, por originar problemas más nítidamente planteados. E incluso en el aspecto de aplicabilidad, la Lógica matemática como disciplina entendida en los términos aquí esbozados, no se limita por modo exclusivo a la retórica argumental sino que, a través de la Teoría de modelos encuentra campo de aplicación tanto en el Algebra como en Teoría de conjuntos o Topología y Cálculo clásico. Aunque, ya he indicado, no se me presenta este campo de pura pragmática como el más importante, desde un enfoque conceptual, para el contraste de la potencia de las creencias que posibilitan el concepto de Lógica.