APRENDER A ENSEÑAR MATEMÁTICAS Y CONOCIMIENTO DEL PROFESOR: UNA PANORÁMICA DESDE LAS INVESTIGACIONES

Mª MERCEDES GARCÍA BLANCO (*)

INTRODUCCIÓN

En los últimos años de la década de los ochenta y principios de los noventa se ha desarrollado un amplio abanico de investigaciones en Educación Matemática cuyo centro es el conocimiento del profesor de matemáticas. Estos estudios han intentado responder a cuestiones y preocupaciones de distinta índole y desde distintas perspectivas como, por ejemplo, la relación entre concepciones, conocimiento y práctica de enseñanza (Thompson, 1984), y conocimiento y cogniciones del profesor de matemáticas en el proceso de aprender a enseñar (Fennema y Loef, 1992). Por otro lado, una de las ramificaciones que se están desarrollando y que presumiblemente se ampliará en el futuro dentro las investigaciones sobre el conocimiento/pensamiento matemático de los profesores se está enfocando hacia áreas de contenido específico (Llinares, 1991b; Cooney y Wilson, 1993; Wilson, 1994).

Esta situación hace necesaria la explicitación de variables organizativas de las investigaciones realizadas recientemente como una forma de ayudar a organizar el campo de investigación y describir las diferentes aproximaciones metodológicas que se están desarrollando para acceder al análisis del conocimiento del profesor, vinculado a tópicos concretos. De esta forma, la organización de la información se convierte en un tema en el que profundizar y es precisamente uno de los focos de este estudio. Uno de los primeros aspectos objeto de nuestra atención ha sido cómo se ha abordado el problema en las investigaciones. En ellas hemos detectado lo que podíamos denominar dos dimensiones, entendiéndose de forma amplia y no siempre estrictamente excluyente, atendiendo al proceso de aprender a enseñar y la relación conocimiento-práctica. En este artículo nos centraremos en la primera de las dimensiones identificadas[1], y teniendo en cuenta que otra variable organizativa han sido los tópicos y contenidos matemáticos.

El avance de las investigaciones desarrolladas dentro de este campo, que ha supuesto una enorme expansión en temas, tópicos, etc., hace necesario establecer una reflexión que permita sentar bases que fundamenten futuros trabajos de investigación, contribuyendo a dotarlos de un punto de partida para la futura labor. Es en este contexto donde adquiere significado este trabajo que a continuación presentamos.

(*) Universidad de Sevilla.

(1) Un estudio de la segunda dimensión puede encontrarse en GARCÍA, 1997.

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y APRENDER A ENSEÑAR. IMPLICACIONES PARA LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN

Un gran número de investigaciones que se han ocupado de la formación de profesores tanto inicial como permanente se han desarrollado en contextos preocupados por la preparación en relación con la enseñanza de estudiantes para profesor y profesores. Dentro de estos estudios, los contenidos matemáticos que más frecuentemente aparecen son: la estructura multiplicativa, fracciones y numeros racionales y noción de función. Estos tres contenidos tienen aspectos transversales como: los modelos implícitos en la comprensión de la estructura multiplicativa, diferentes modos de representación, la noción de «verdad» en matemáticas, relación entre conocimiento de matemáticas y posibles errores de los alumnos, y conocer qué / conocer por qué. De manera más puntual se han realizado investigaciones centradas en conceptos geométricos, probabilidad, componentes subjetivas del proceso de resolución de problemas, etc. Podemos apreciar dos grupos en estos estudios, los que describen un momento o situación y los que describen cambios producidos en el conocimiento de los participantes como influencia de una intervención específica. El motivo de los apartados siguientes son estos grupos, siendo el eje articulador de ambos el contenido matemático en el que se han centrado y que hemos comentado anteriormente.

ESTUDIOS CENTRADOS EN DESCRIBIR «MOMENTOS»

Contemplados de una forma global los trabajos que situamos en este apartado, plantean preguntas o problemas de investigación en las que se intenta profundizar en un momento determinado, aunque el estudio puede ser longitudinal. Atendiendo a los tópicos matemáticos podemos considerar diferentes subapartados.

INVESTIGACIONES CENTRADAS EN LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Una de las áreas de contenido matemático específico más estudiada ha sido la división y multiplicación, unido en algunos casos a los problemas de *estructura multiplicativa*. Ésta ha sido el foco de algunos trabajos de Ball (1990a), centrándose en el conocimiento y razonamiento de los futuros profesores cuando entran en los programas de formación (conocimiento sustantivo de matemáticas), examinando aspectos como qué es lo que ellos creen que hace que «algo» se considere verdad o razonable en matemáticas, y qué se considera una justificación matemática. Los participantes eran *futuros profesores de educación primaria y de secundaria* (10) que eran entrevistados al empezar el primer curso de formación. Los tres contextos en los que se situó el tópico a estudiar fueron: división con fracciones, división por cero y división con ecuaciones algebraicas. En cada caso, se les preguntaba que explicaran o generaran representaciones; un ejemplo de las preguntas efectuadas a los participantes aparece en el cuadro I.

Esta autora deduce del análisis de los resultados de este trabajo que los futuros profesores mostraron una comprensión fragmentada; ellos asumían que presentar una regla es equivalente a resolver cuestiones matemáticas y su conocimiento parecía estar fundado más sobre memorización que sobre una comprensión conceptual. Una implicación de este estudio es la necesidad de saber mucho más de lo que sabemos en realidad acerca de cómo se puede ayudar a los profesores a transformar y aumentar su comprensión de las matemáticas, trabajando con lo que ellos traen y ayudándolos a trasladarse hacia la clase de comprensión matemática necesaria para enseñar matemáticas orientadas conceptualmente.

CUADRO I

Preguntas realizadas a los participantes en el estudio de Ball (1990a)

«Las personas tienen diferentes aproximaciones para resolver problemas que conllevan división con fracciones. ¿Cómo resolverías 1 3/4: 1/2? Algunas veces los profesores intentan acercarse con situaciones o problemas de enunciado para mostrar el significado o aplicación de alguna parte del contenido. Esto puede ser un bonito desafío. ¿Cuál dirías que sería un buen enunciado para 1 3/4: 1/2, algo real para lo que 1 3/4 : 1/2 es una formulación matemática apropiada?».

«Supón que un alumno te pregunta cuánto es 7 dividido entre 0. ¿Cómo responderías? ¿Cuál es la razón de esa respuesta?».

«Supón que uno de tus alumnos te pregunta para que le ayudes con lo siguiente: Si x/(0,2 = 5, entonces x= ¿Cómo le responderías?, ¿Por qué haces eso?».

Por otra parte, basándose en el marco teórico proporcionado por los estudios de Fischbein et al. (1985) sobre los modelos implícitos asociados con la multiplicación y la división, investigadores como Graeber, Glover y Tirosh también se centran en estos tópicos en diversos estudios (Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Tirosh y Graeber, 1989, 1990a, 1990b). Los participantes en estos trabajos fueron *futuros profesores de primaria* matriculados en cursos de métodos y contenido matemático. Algunos de los objetivos que pretendían sus investigaciones eran: evaluar con qué extensión las creencias «multiplicación siempre hace mayor» y «división siempre hace más pequeño» son mantenidas explícitamente por los futuros profesores de primaria (Tirosh y Graeber, 1989); estudiar la «enseñanza conflicto» (uso del conflicto cognitivo) como un medio para investigar el error conceptual de que «el cociente de un problema de división debe ser menor que el dividendo» (Tirosh y Graeber, 1990a, 1990b); errores respecto a las operaciones que necesitan para resolver problemas de estructura multiplicativa (Graeber, *et al.* 1989).

Para profundizar en el uso del «conflicto cognitivo» como medio para investigar los errores conceptuales y concretamente planteando si «el cociente de un problema de división debe ser menor que el dividendo», estas investigadoras diseñaron un estudio teniendo como hipótesis del trabajo que, si los futuros profesores se enfrentan con la inconsistencia entre sus errores conceptuales expuestos y los resultados de sus cálculos, los investigadores pueden aprender más sobre la resistencia de y las fuentes que originan los errores conceptuales. Para ellas, el conflicto cognitivo resultante puede permitir al futuro profesor resolver tales inconsistencias y formar una más acertada concepción de la división. Si se admite que la forma de escribir expresiones para problemas de estructura multiplicativa está influenciado por los conceptos de las operaciones, podría pensarse que si se producen cambios en las concepciones podría esperarse que produjeran cambios sobre las realizaciones de los problemas de estructura multiplicativa.

Los instrumentos utilizados en esta investigación fueron un pretest un postest y una entrevista a aquéllos que después pasarían el postest. En el espacio de tiempo comprendido entre ambos test los participantes no recibían ningún curso sobre multiplicación y división. El pretest tenía varias partes: en primer lugar, se realizaban cálculos con decimales, después respuestas a afirmaciones sobre multiplicación y división y por último debían dar la expresión escrita que llevara a la solución de problemas que se les proponía. En el cuadro II se muestran algunas de las cuestiones planteadas. Este estudio muestra: i) cómo la dependencia de los futuros profesores del dominio de los números enteros y su comprensión instrumental del algoritmo de la división son la base de sus errores conceptuales; ii) que los futuros profesores no están familiarizados con la interpretación de medida de la división, así como su predisposición a cambiar reglas de procedimiento para no modificar sus errores conceptuales. Estos resultados sugieren que, cuando la aproximación «conflicto» es cuidadosamente aplicada, los futuros profesores pueden formar una concepción más acertada sobre el tamaño relativo del cociente y el dividendo, y mejorar sus realizaciones en expresiones escritas para problemas de estructura multiplicativa, asumiendo que la conceptualización y realizaciones no mejoran con la sola consciencia de los errores conceptuales.

CUADRO II
Cuestiones presentadas en el pretest. Tirosh y Graeber 1990a

Cálculo con números decimales:

• 3,25 x 5,14 • 0,38 x 5,14 • 3,75 : 0,75 • 5,00 : 15

Afirmaciones sobre división:

- *En un problema de división, el cociente debe ser menor que el dividendo.*
- *El cociente en el problema 10 : 0,65 es más grande que 10.*
- *El cociente en el problema 70 : 1/2 es menor que 70.*

Expresiones escritas para problemas de estructura multiplicativa:

- *Una caja de arena tiene un volumen de 0,80 metros cúbicos. ¿Cuál es el volumen de 0,25 de la caja?*
- *Una moto recorre 40 millas por galón. ¿Cuánto viajará con 0, 75 galones?*
- *Tu preparas 5 litros de ponche. Tienes copas de ponche que contienen 0,2 litros. ¿Cuántas copas puedes llenar con el ponche preparado?*
- *Las galletas «girls-club», son empaquetadas de forma que en cada estuche hay 0,8 libras. ¿Cuántos paquetes pueden ser llenados con 7,2 libras de galletas?*

También dentro de la estructura multiplicativa situamos los trabajos de Simon (1993), en los que el foco es el conocimiento de *futuros profesores de primaria* de dos aspectos de la comprensión de la división: cómo está «conectado el conocimiento» de la división que poseen y su conocimiento de las unidades implicadas en los contextos de división. Examina tres tipos de conexiones entre: i) el conocimiento conceptual y procedimental, ii) conceptos y iii) operaciones aritméticas y situaciones reales sobre las que están basadas.

Los participantes en el estudio estaban realizando un curso de métodos. Los datos fueron recogidos a través de dos instrumentos, un cuestionario de cinco problemas (cuadro III), realizado por 33 futuros profesores, y una entrevista individual a ocho de ellos, sobre tres de los problemas anteriores (3, 4 y 5) con el fin de profundizar en los procesos de pensamiento y comprensión de los sujetos respecto de los dos temas en cuestión.

CUADRO III

Problemas diseñados por Simon (1993) para su estudio

1.— Problemas con enunciado:

«Escribe tres enunciados distintos de problemas que se puedan resolver dividiendo 51 entre 4 y para los que las contestaciones sean respectivamente: a) 12 3/4, b) 13, c) 12. Deberás hacer tres problemas reales»

2.— División por una fracción:

«Escribe el enunciado de un problema que se pueda resolver mediante la operación 3/4 dividido por 1/4»

3.— Resto con calculadora:

«¿Cómo podrías hallar el resto de 598473947 dividido entre 98762 usando la calculadora? La calculadora hace sólo las cuatro operaciones básicas, adición, sustracción, multiplicación y división (no hay tecla de resto). Notar que al dividir en la calculadora da una respuesta decimal. Describe cómo podrías usar la calculadora para hallar el resto y por qué funcionaría. Describe un segundo método si puedes»

4.— Galletas:

«Serge tiene 35 tazas de harina. El hace galletas que requieren 3/8 de una taza cada una. Si hace tanto galletas como harina tiene, ¿cuánta harina le sobrará?»

5.— División larga:

«En una división larga realizada como en el ejemplo siguiente, se repite la secuencia, dividir, multiplicar, sustraer, poner debajo. Explica qué información da el paso de multiplicar y el de sustraer y cómo contribuyen a llegar a la respuesta»

```
  715 / 12
- 600  ---
  ---  59
  115
- 108
  ---
    7
```

Como consecuencia de este estudio, Simon (1993) considera que los futuros profesores de primaria parecen tener un conocimiento apropiado de los algoritmos y símbolos relativos a la división pero muestran una organización del conocimiento muy discreta como consecuencia de que no tienen interiorizadas conexiones importantes. El conocimiento matemático de los futuros profesores en este estudio era procedimental y escasamente conectado. En su preocupación por la Formación de Profesores, este investigador hace un llamamiento a los formadores de profesores para que busquen un equilibrio apropiado entre la atención sobre lo que los futuros profesores deberían conocer y lo que conocen. Así mismo, plantea la necesidad de que las investigaciones futuras profundicen en el conocimiento, creencias y actitudes de los futuros profesores de matemáticas.

Algunos de estos trabajos están comenzando a ser replicados y ampliados por otros investigadores incluyendo estos estudios características contextuales, metodológicas, de contenido, incluso sociales. Concretamente, Campos *et al.* (1996) en relación con el trabajo de Simon llevan a cabo un estudio para investigar las posibles dificultades que las *operaciones que transforman referentes* (multiplicación y división) tienen para los profesores y cómo son superadas. Los participantes en el proyecto fueron 40 *profesores*, 20 de la escuela *primaria* y 20 de la escuela *secundaria*. Este informe sugiere una serie de cuestiones para la formación de profesores, entre ellas: ¿Pueden los profesores aprender más matemáticas en su formación de profesores sin perder contacto con su conocimiento de las matemáticas de la calle? ¿Están los profesores en posición de evaluar diferentes aproximaciones si sus alumnos las utilizan? ¿Pueden ellos reconocer las formas diferentes de razonamiento que fundamenta los diferentes métodos? ¿Qué papel pudiera jugar la discusión de esos diferentes métodos en la formación de profesores?

Por otra parte, el conocimiento pedagógico de la estructura multiplicativa que poseenn *futuros profesores de primaria*, cuando aún no han recibido enseñanza sobre el tema, fue el objetivo del estudio de Castro y Castro (1996). Los participantes fueron 69 estudiantes para profesor. El instrumento utilizado fue una prueba en la que se le pedía a los participantes que redactaran dos problemas para dos expresiones numéricas que se les daba (15 x 5 = [ ] y 72: 6 = [ ]). A partir del análisis de los enunciados propuestos por los participantes, estos autores indican que la formación de profesores debería incluir: estudios sobre la diferenciación de problemas de cálculo aritmético expresados verbalmente y problemas aritméticos verbales, estudios sobre aquellas categorías semánticas que surgen con más dificultad y la distinción entre los diferentes significados de la división.

Siguiendo en esta área de contenido matemático, uno de los últimos trabajos presentados es el de Campbell (1996), que tiene como centro el estudio del conocimiento de los futuros profesores de la división con resto. Para ello, las tareas elegidas estaban descontextualizadas, y recorrían distintos aspectos de la materia: división con calculadora, descomposición en factores primos y el algoritmo de la división (cuadro IV).

CUADRO IV

Cuestiones presentadas a los participantes en el estudio. Campbell, 1996

Cuestiones:

1.— ¿Si divides 21 por 2, cuál sería el cociente?, ¿cuál sería el resto?

2.— Considera $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. ¿Si divides M por 15, cuál sería el resto?, ¿cuál sería el cociente?

3.— Supón que te preguntan por la división con resto de 10561/24. ¿Te ayudará la calculadora?, ¿cómo?

4.— Considera el nº 6 x 147 + 1, nos referiremos a él como A.

a) Si divides A por 6, ¿cuál sería el resto?, ¿cuál sería el cociente?

b) Si divides A por 2, ¿cuál sería el resto?, ¿cuál sería el cociente?

Se entrevistaron 21 *futuros profesores de primaria*, cuando estaban en un curso de desarrollo profesional. El análisis se centró en la relación entre la división con resto, y los distintos conceptos de división, multiplicación, y divisibilidad. Según este autor, existe entre los futuros profesores una relación entre la interpretación partitiva de división y las unidades fraccionarias por un lado, y la interpretación cuotativa (medida) y las unidades enteras por otro.

INVESTIGACIONES CENTRADAS EN FRACCIÓN Y Nº RACIONAL

Uno de los contenidos matemáticos específicos más abordados en las investigaciones sobre el conocimiento del profesor es el de fracción y número racional, en distintos contextos y desde perspectivas diversas (Ball, 1990b; Marks, 1990; Post, Harel, Behr, y Lesh, 1991; Llinares, 1991a, 1994; Llinares y Sánchez, 1991, 1996; Sánchez y Llinares, 1992; Llinares, Sánchez y García, 1994; Philippou y Christou, 1994; Pinto y Tall, 1996). La información obtenida sobre el aprendizaje de los números racionales fue utilizada ya en los ochenta para analizar el conocimiento de contenido pedagógico de los *profesores de primaria* sobre esa área y ha sido revisado en trabajos como el de Llinares, 1991b.

Podemos aquí encuadrar los trabajos de Post y sus colaboradores (Post *et al.* 1991), uno de cuyos objetivos es la elaboración de un programa de formación de profesores, que ayude a la comprensión de las nociones que enseñan. Estas investigaciones se fundamentan en la idea de que a través de las respuestas de los profesores se pueden extraer los argumentos que basan sus acciones. El procedimiento utilizado consistía en tres partes: un cuestionario de preguntas cortas, sobre distintos aspectos de los números racionales (orden, equivalencia, concepto de unidad, etc.); resolución de seis problemas; y una entrevista que proporcionara explicaciones y comentarios sobre los procesos y procedimientos empleados para resolverlos. Algunas de las cuestiones se recogen en el cuadro V:

CUADRO V

Cuestiones de la Parte 1. Post, Harel, Behr y Lesh, 1991

«Ordenar de menor a mayor: 5/8, 3/10, 3/5, 1/4, 2/3, 1/2»,
«¿Qué le sucede al valor de la fracción a/b si "a" se multiplica por 4 y "b" se divide por dos?»
«Marisa compró 0,46 libras de harina por 0,83$. ¿Cuántas libras de harina puede comprar con 1$?»

Los resultados muestran que muchos profesores tenían dificultades en resolver las cuestiones y problemas. Además, en algunos casos, aún resolviendo correctamente los problemas, las explicaciones que proporcionaban para justificar el procedimiento empleado en la resolución del problema eran difícilmente aceptables.

Por otro lado, Ball (1990b) analiza el conocimiento de la «división con fracciones» de *futuros profesores de primaria y secundaria*, pasando después a una discusión, más general, de dimensión cualitativa del conocimiento matemático. Los participantes fueron 252 futuros profesores (217 de primaria y 35 de secundaria) en el momento en que ellos entran en el programa de formación de profesores en diversas Universidades. El proyecto diseñado es longitudinal; en intervalos repetidos se les administró un cuestionario a todos los participantes, y se entrevistó y observó una muestra más pequeña de ellos en el programa de formación y en el primer año de enseñanza. Un ítem del cuestionario es mostrado en el cuadro VI.

CUADRO VI
Item del cuestionario. Ball, 1990b

¿Cuál de los siguientes enunciados sirve para ilustrar lo que significa 1/4 :1/2?
Elige todos los que sean aplicables.
a) En un recipiente caben 41/4 vasos de leche. ¿Cuánta leche es necesaria para la mitad del lote?
b) Se tarda 4 1/4 horas para conducir 200 millas. ¿Cuánto recorrerás en media hora?
c) Jim necesita 4 1/4 libras de lentejas. ¿Cuántos sacos de media libra debería comprar?
d) Ninguno de éstas. En cambio: ----------
e) No estoy seguro.

La mayoría de las cuestiones eran analizadas a través de varias dimensiones: comprensión de la materia específica, ideas sobre enseñanza, aprendizaje y papel del profesor, y sentimiento y actitudes sobre matemáticas, alumnos o sí mismo. Los resultados del análisis de las cuestiones y entrevista al comenzar el curso revelan las comprensiones matemáticas que los candidatos a profesores de primaria y secundaria traen con ellos a la formación de profesores desde sus experiencias matemáticas universitarias y preuniversitarias, comprensiones que tienden a estar limitadas al uso de reglas y compartimentadas. Basándose en estos datos, la autora cambia tres suposiciones comunes sobre aprender a enseñar matemáticas de primaria o secundaria, que según ella están en las prácticas de formación de profesores: i) el contenido matemático escolar tradicional no es difícil, ii) la educación preuniversitaria proporciona a los profesores mucho de lo que ellos necesitan conocer sobre las matemáticas y iii) la especialización en matemáticas asegura conocimiento de la materia específica. Una propuesta de este estudio es reformar la preparación de los profesores, trabajando con lo que traen a los cursos de formación y ayudándoles a trasladarse hacia la comprensión matemática necesaria para enseñar matemáticas de una manera coherente con las recomendaciones y tendencias que sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se sugieren desde distintos ámbitos (NCTM, 1989, 1991).

Desde una perspectiva distinta, Marks (1990) intenta describir el conocimiento de contenido pedagógico en matemáticas de profesores realizando un estudio centrado en el tópico «la equivalencia de fracciones». Los participantes fueron ocho *profesores de primaria,* seis experimentados y dos noveles. A cada uno de ellos se le realizó una entrevista, basada en tareas sobre la enseñanza de la fracciones en el curso de quinto. La información obtenida sugiere modificaciones en la concepción del conocimiento de contenido pedagógico del profesor y que se revise la práctica de la formación de profesores. Desde este trabajo se sugiere que: el conocimiento de contenido pedagógico está compuesto de cuatro áreas (comprensión de los estudiantes, medios de instrucción, matemáticas para la instrucción y procesos de instrucción); dado que el conocimiento de contenido pedagógico contiene elementos del conocimiento pedagógico general y del conocimiento de la materia, presenta ambigüedades y su definición es difícil; y sería conveniente plantear una aproximación al conocimiento de contenido pedagógico en la formación profesional a través de distintos caminos.

Así mismo, investigadores cómo Llinares y Sánchez han dedicado gran parte de sus estudios al tópico «fracción», centrándose en diversos aspectos del conocimiento de los futuros profesores. El objetivo del proyecto desarrollado por ellos fue examinar el conocimiento de contenido pedagógico (Shulman 1986) de *futuros profesores de primaria* sobre fracciones. A lo largo del proyecto (Llinares y Sánchez, 1996), se van explicitando distintos focos de atención: i) estudiar el empleo de diferentes representaciones instruccionales para dotar de significado a la noción de fracción (Llinares, 1991a); ii) la comprensión de los estudiantes para profesores de primaria de la noción de unidad en dos tipos de tareas con dos sistemas de representación instruccional (Llinares y Sánchez, 1991); iii) relación entre la idea de fracción y el uso de un referente concreto, y cómo los futuros profesores utilizan esos referentes para generar explicaciones sobre los procesos seguidos para obtener las fracciones equivalentes (Sánchez y Llinares, 1992); iv) análisis de las características del «pensamiento recurrente» (Kieren, 1994), que los estudiantes para profesor de primaria pueden desarrollar al pensar en los conceptos matemáticos como un «conocimiento a enseñar» (Llinares *et al.* 1994; Llinares y Sánchez, 1996).

El análisis del conocimiento de contenido pedagógico del futuro profesor sobre las fracciones se hace a través de la teoría sobre el desarrollo de la competencia con los símbolos matemáticos propuesta por Hiebert (1988). Esta teoría describe una sucesión jerárquica de cinco procesos cognitivos. El estudio del uso de diferentes representaciones instruccionales para dar significado a las fracciones (Llinares, 1991a) se centró en dos de los procesos cognitivos: la conexión de los símbolos individuales con algún referente concreto y la elaboración de procedimientos de manipulación de símbolos. Por la necesidad de una triangularización metodológica para el desarrollo del proyecto, se diseñaron una serie de instrumentos metodológicos: entrevistas, cuestionario y estudio de caso (cuadro VII).

CUADRO VII

Ítems del cuestionario presentado. Llinares et al. 1994

«Si ——— es el todo ¿Qué es ———— —— ? a) 2 b) 2/3 c) 1+1/2 d) ninguna»

«Si 000 es la unidad ¿Cuánto es 2/3? a) 000 b) 000 c) 000 d) ninguna».
000
000
000

Las conclusiones y puntos de discusión a la que llegan los autores están referidos a los distintos centros de atención reseñados. En el primero de ellos se plantea que las mayores dificultades se le presentaron a los estudiantes en las tareas con fracciones mayores que la unidad; la fuerte vinculación de la noción de fracción a la interpretación parte-todo en la mayoría de los casos; la incapacidad de algunos futuros profesores de primaria para identificar la unidad, para representar algunas fracciones con fichas y para trabajar con fracciones mayores que uno. Además, se discute con detalle la conexión de símbolos individuales con referentes concretos, y cómo esos referentes son usados para generar explicaciones sobre los procesos seguidos (equivalencia y orden). Según este estudio, las dificultades de los futuros profesores se originan en dos situaciones: i) en relación con el tipo de ítem dado, cuando no se le pide generar la fracción sino cuando el numerador o denominador es dado, lo que puede entrar en conflicto con su procedimiento de generar fracciones, y ii) en un intento de explicar con referentes concretos los procesos seguidos. Desde la perspectiva de considerar que el conocimiento de contenido pedagógico se genera desde la comprensión del contenido matemático, el tipo de comprensión descrita en algunos de estos casos puede no ser lo más conveniente cuando se tienen que usar representaciones instruccionales para modelar procesos matemáticos en enseñanza primaria.

En relación con las características del «pensamiento recurrente» que los estudiantes para profesor de primaria pueden desarrollar al pensar en el concepto de fracción como un «conocimiento a enseñar» (Llinares *et al.* 1994; Llinares y Sánchez, 1996), el foco fue la existencia de relaciones entre: el significado dado al concepto de fracción por los estudiantes para profesores de primaria, el sistema de representación empleado y el tipo de tarea planteada. Se intentó a través del análisis realizado explicar los valores observados a partir de la influencia de las variables anteriores, consideradas aisladas o en grupos. La discusión de este estudio fue a dos niveles: profundización del análisis del problema conceptual planteado, factores en el proceso de aprender a enseñal (basándose en la idea de que cuando el estudiante para profesor se plantee la posibilidad de que otros construyan el conocimiento matemático se apoyará, inicialmente, en el significado que él había dado a esas nociones en la escuela, pensamiento recurrente) y aspectos concretos de la propia contextualización al caso de fracciones.

Respecto al primer nivel, los resultados aportan nuevas ideas en relación con dos aspectos de la enseñanza de las matemáticas en primaria. En primer lugar, para estos autores el tener una formación matemática específica, en principio, no implica el que se tenga la capacidad de pensamiento recurrente entre las características de la comprensión de un concepto o noción matemática a un nivel elemental. En segundo lugar, se observó en el estudio sobre las respuestas al cuestionario: poca influencia sobre el porcentaje de éxito del modo de representación frente a las otras dos variables consideradas, magnitud de la fracción, donde las fracciones mayores que uno aumentan la dificultad, y tipo de tarea planteada[2]. Este estudio hace una llamada a los programas de formación del profesorado para que parte de su atención vaya dirigida al desarrollo del pensamiento recurrente vinculado a tópicos concretos, como núcleo sobre el que se articula el conocimiento de contenido pedagógico del profesor.

Por otro lado, Philippou y Christou (1994), como parte de un amplio programa cuyo objetivo es profundizar en el conocimiento, actitud y capacidades matemáticas de futuros profesores de primaria, al entrar en un programa de formación de profesores, se centran en la comprensión procedimental y conceptual de las fracciones de los futuros profesores. Los participantes eran 83 *futuros profesores de primaria,* y el instrumento utilizado un cuestionario con 30 preguntas, algunas de las cuales provienen de los trabajos de Simon (1993), con las que se pretendía evaluar los distintos conocimientos; un ejemplo de los ítems y del conocimiento evaluado aparece en el cuadro VIII. Entre la información obtenida destacamos que, aunque los futuros profe-

(2) Ver *Revista de Educación,* núm. 304, pp. 199-225, para un desarrollo más amplio de estas cuestiones.

sores tienen un conocimiento simbólico y algorítmico de las fracciones bastante apropiado, sin embargo no parecen tener conexiones entre ellos. Las conclusiones de este estudio están en consonancia con las obtenidas por otros investigadores como Ball (1990a) y Simon (1993), y vuelven a hacer una llamada a los responsables de los cursos de preparación de profesores en la línea de potenciar las conexiones antes que impartir más información.

CUADRO VIII

Ejemplo de ítems usado en el estudio. Philippou y Christou, 1994

PROBLEMAS	***CONOCIMIENTO EVALUADO***
1.— a) 1/5 + 7/5, b) 16 - 3/5, c) 1/2 x 4 1/2, d) 1/3 :1/6 e) En la multiplicación de fracciones el resultado es siempre más grande que los factores. Sí No.	*Procedimental*
2.— Escribe tres diferentes problemas con enunciado que se resuelvan dividiendo 51 entre 4, y para las que las respuestas fueran respectivamente: a) 12 1/4 b) 13 c) 12	*Conexión entre situaciones del mundo real y computación simbólica*

El céntro de atención del trabajo de Pinto y Tall (1996) son las imágenes sobre los números racionales que tienen *estudiantes para profesor de primaria y secundaria*. Basándose en los estudios sobre la definición del concepto («concept definition») y la imagen del concepto («concept image»), así como de la relación del concepto con la definición, realizado por diversos investigadores (Sierpinska, 1992; Vinner, 1991, entre otros), este trabajo analiza los datos recogidos de las entrevistas realizadas a siete estudiantes. En las distintas entrevistas se les preguntaba las definiciones de número racional e irracional, y se les pedía que clasificaran una lista de números reales, en racionales e irracionales. La información obtenida a través de los datos y posterior análisis muestra que los participantes tienen una gran diversidad de imágenes sobre los números racionales. Así mismo, estos autores afirman que *«una presentación formal de la materia específica y trabajo formal con números no anima a los estudiantes a preocuparse de la reconstrucción de su "concepto imagen" desde la definición de número racional»* (Pinto y Tall, 1996, p. 141).

INVESTIGACIONES CENTRADAS EN EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Siguiendo con las variables que articulaban este estudio, otra área a la que se ha prestado un interés muy especial es la relacionada con las funciones, contenido por otra parte clásico en las Matemáticas escolares. Un esquema analítico de conocimiento de las matemáticas para enseñar conceptos matemáticos en general, y la función en particular ha sido construido por Even (1990, 1993). Apoyándose en él, investiga el conocimiento de las matemáticas de los profesores y sus interrelaciones con el conocimiento de contenido pedagógico en el contexto de enseñanza del concepto de función. Este esquema está compuesto de siete aspectos que según la autora constituyen facetas principales del conocimiento de matemática de los profesores sobre un tópico específico: rasgos esenciales, representaciones diferentes, formas alternativas de aproximación, el valor del concepto, repertorio básico, conocimiento y comprensión del concepto y conocimiento sobre las matemáticas.

Los participantes en la investigación de Even fueron 152 *futuros profesores de secundaria* en el último año de su preparación formal (10 de éstos fueron entrevistados en profundidad). Respecto de los instrumentos, utiliza en un primer momento un cuestionario que incluía dos tipos de ítems, problemas no usuales dirigidos a los diferentes aspectos del conocimiento de funciones de los profesores y soluciones erróneas o malos entendidos de los estudiantes para ser analizados (cuadro X). Más tarde se realizaba una entrevista y de nuevo el mismo cuestionario. La entrevista constaba de dos partes: en la primera se le presentaba a los sujetos ítems que requerían respuestas más largas, generales, y más pensadas que las del cuestionario (cuadro IX); en la segunda parte, a los entrevistados se les pedía que reflexionasen sobre sus pensamientos, y explicasen y clarificasen sus contestaciones al cuestionario (las sesiones eran grabadas y transcritas).

CUADRO IX

Ejemplos de ítems. Even, 1993

Ejemplos de ítem del cuestionario:

1.— «a) Dar una definición de función.
b) Un estudiante dice que él/ella no entiende esta definición. Dar una visión alternativa que pueda ayudar a la comprensión del alumno.»

2.— «¿Cómo están relacionadas las funciones y las ecuaciones?».

Ejemplos de ítem de la entrevista:

1.— «Dar un ejemplo de función»

2.— «¿Es importante enseñar el test de línea vertical para gráficas de funciones a los estudiantes? ¿Por qué? ¿Qué es el test de línea? ¿Qué enseñarías a tus alumnos? ¿Cómo lo enseñarías? ¿Puedes darme un ejemplo» ?

El análisis y categorización de las respuestas de los cuestionarios y las entrevistas permitió señalar que el conocimiento de los futuros profesores de las funciones tiende a ser «débil» y «frágil», en el sentido de que no se puede asumir que tengan un conocimiento bien articulado y comprensivo de las matemáticas que tienen que enseñar. Como consecuencia, y según esta autora, los futuros profesores necesitan cursos especiales además de los cursos regulares de matemáticas en los que puedan aprender «matemáticas para profesores»; en ellos necesitan encontrar el contenido de las matemáticas que tienen que enseñar en formas diferentes de las que ellos habían usado previamente. Sugiere que los cursos sean desarrollados a la luz de los aspectos del marco descrito anteriormente y necesario para profundizar e integrar el conocimiento que se necesita para enseñar (Even, 1990; Even, Tirosh y Markovits, 1996). Un interés más profundo por el primero de los aspectos, «rasgos esenciales del concepto de función», lleva a esta autora a preguntarse por los rasgos esenciales del concepto de función que actualmente se maneja. Tratando de proporcionar una respuesta, investiga las interrelaciones entre el conocimiento de contenido y el conocimiento de contenido pedagógico de los profesores relativo a dos rasgos esenciales del concepto de función: arbitrariedad y univalencia. El análisis muestra que algunos de los sujetos no tienen una concepción de función de acuerdo con la definición actual del concepto de función. La apreciación de la naturaleza arbitraria de las funciones estaba ausente y muy pocos podían explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Esta concepción limitada de función influencia el pensamiento pedagógico de los sujetos. Por lo tanto, cuando describen funciones para los alumnos, muchos usan su «concepto imagen» (Vinner, 1983) y tienden a no emplear términos modernos. Además, muchos eligen dar a los estudiantes reglas para seguirlas sin tener en cuenta la comprensión.

Una conclusión inmediata de este estudio (Even, 1993) es la necesidad de mejorar la preparación en Matemáticas de los profesores si queremos una mejora de la enseñanza. Esto no significa cambiar el número de cursos, sino diseñarlos de forma diferente, en línea con el punto de vista constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. Pero esto no es suficiente; también los profesores han de desarrollar un repertorio diferente de herramientas de enseñanza. El razonamiento pedagógico (Shulman, 1987) depende, además de reforzar el conocimiento de Matemáticas, de una integración de diferentes dominios de conocimiento. Por lo tanto, una buena «preparación pedagógica» de matemáticas también es necesaria. Esta preparación estaría basada en una comprensión conceptual y capacitaría a los profesores para enseñar con el espíritu de los Estándares Profesionales para la Enseñanza de las Matemáticas (NCTM, 1991).

El indagar sobre el conocimiento de contenido pedagógico del *profesor de secundaria* centrado en las funciones lleva a esta misma autora en colaboración con Markovits (Even y Markovits, 1991) a realizar un estudio centrado en dos aspectos interrelacionados del mismo: el conocimiento de los profesores y la comprensión de los errores, concepciones y preconcepciones de los estudiantes, y las respuestas de los profesores a cuestiones de los alumnos. Otro de los objetivos de este estudio es investigar sobre *«el uso potencial del instrumento de investigación y los resultados en la formación de profesores»* (Even y Markovits, 1991). El instrumento utilizado fue un cuestionario formado por tareas que describían situaciones en las que los profesores debían contestar a ideas o preguntas de los alumnos (cuadro X).

CUADRO X

Tarea presentada en el cuestionario. Even y Markovits, 1991

«Un alumno te pregunta por qué es necesario requerir una imagen única para todos los elementos del dominio de definición de la función. ¿Qué responderías?»

Las respuestas al cuestionario de los profesores participantes eran analizadas con respecto a tres dimensiones: conocimiento de contenido, conciencia de las dificultades de los estudiantes y clases de respuestas de los profesores. La información obtenida de estos análisis lleva a estos autores a pensar que, asumiendo que el conocimiento de contenido pedagógico es fundamental para la enseñanza, debería ser un aspecto fundamental de la formación de futuros profesores. Pero esta formación, evidentemente, no puede abarcar todos los aspectos del mismo, por lo que se debería, a lo largo de la misma, dar una base fuerte para que los profesores pudieran ir construyendo su propio conocimiento de contenido pedagógico. En este sentido, comentan que las tareas que ellos proponen, que conllevan conocimiento de las matemáticas y estilos de enseñanza, pueden ayudar a tal fin.

La importancia de las formas de presentación del contenido por parte de los profesores, y en dos fuentes de la misma. el «conocimiento sobre el contenido» y el «conocimiento sobre los estudiantes» en relación con las funciones y las operaciones matemáticas no definidas, hace que Even y Tirosh (1995) profundicen en esas fuentes. Para ello, diseñaron un cuestionario que realizaron 33 *profesores de secundaria* participantes en un curso de formación permanente para indagar sobre sus concepciones de cuatro *operaciones no definidas* (4/0, 0/0, 0^0 $(-8)^{1/3}$). Posteriormente fueron entrevistados sobre sus opiniones y reacciones a una lista de definiciones de tales operaciones que se suponían habían dado los alumnos. La información obtenida del análisis de los cuestionarios y entrevistas lleva a estas autoras a distinguir entre conocer-qué y conocer-por qué (Even y Tirosh, 1995, p. 17) y comentan que no siempre está claro qué significa conocer-qué para funciones, o conocer-por qué para operaciones no definidas. Además, a veces era imposible precisar si un profesor conocía-qué. Una sugerencia importante para próximas investigaciones es profundizar en el conocimiento de las matemáticas de los profesores.

Respecto del conocimiento de los profesores sobre los estudiantes, sugieren que puede ser útil usar los términos anteriores. En relación con conocer-qué, comentan que, a la luz de los resultados de su estudio, los profesores no intentan comprender las fuentes de las respuestas de los estudiantes. Explícitamente proponen que el estudio de tópicos incluidos en el currículum de secundaria, como los dos presentados, formen parte de la formación de profesores, ya que, aunque estos contenidos ya han sido estudiados por ellos en su propia formación secundaria, no se analizan las concepciones de los estudiantes y las formas de pensar en matemáticas.

Así mismo, Norman (1992) examina lo que «conocen» los *profesores de secundaria* con experiencia sobre las funciones. La aproximación usada en la descripción del conocimiento de los profesores de las funciones contempla examinar el conocimiento matemático de los profesores en un contexto que refleje habilidades para describir e ilustrar los conceptos relevantes en formas apropiadas para los alumnos. Norman incluye en el término función una familiaridad con un amplio espectrum de aspectos del concepto, así como una profundidad en la comprensión. Y, entendiendo la comprensión como asimilación dentro de un esquema apropiado, este autor considera útil distinguir entre comprensión instrumental y relacional. La primera se refiere a una comprensión algorítmica de un concepto o proceso, y la segunda viene de una comprensión de relaciones profundas entre los conceptos y procesos asociados con un concepto o situación particular. Al preguntarse por las formas de comprensión que un profesor puede mostrar, este autor considera varios aspectos generales: ejemplificación y caracterización de funciones, habilidad para usar funciones en una variedad de formas y contextos y la expresión de razonamiento funcional. Los participantes fueron 8 *profesores que enseñaban o habían recientemente enseñado matemáticas en el nivel de secundaria*. Todos habían realizado cursos de análisis, álgebra, etc., aunque dos de ellos eran especialistas en música.

El instrumento utilizado fue la entrevista. Cada una de ellas se dividía en cinco áreas: a) definiciones formales e informales y ejemplos, b) emparejar ejemplos con las definiciones, c) identificación y producción de ejemplos y contraejemplos, d) interpretación del concepto de función para los alumnos y e) razonamiento funcional, aplicaciones y funciones en marcos matemáticos más sofisticados (cuadro XI).

CUADRO XI

Parte de un ítem de la entrevista. Norman, 1992

Identificar la funcionalidad de gráficos, tales como:
El gráfico de f: Z -- N donde f(z) es el menor positivo módulo 3. Este gráfico era dibujado como una colección de puntos discretos sobre un sistema de ejes cartesianos.

Según este autor, los resultados del estudio no indican una comprensión profunda uniforme del concepto de función entre los profesores participantes. La mayoría de los profesores tenían lagunas en su conceptualización. Haciendo las siguientes observaciones: aprueban las definiciones informales de función que son útiles para determinar la funcionalidad de las relaciones; prefieren representaciones gráficas de funciones a simbólicas o numéricas; algunas veces exhiben un concepto único fijado cuando interpretan funciones; no han construido conexiones fuertes entre sus definiciones informales de función y las ven como la definición matemática formal; identifican ejemplos estándares de funciones, pero en situaciones más complejas algunas veces se fían de test inapropiados e incorrectos de funcionalidad; tenían algunas dificultades inventando e identificando situaciones físicas que ocasionan relaciones funcionales; están bastante enterados de la evolución del concepto de función a través de sus textos; y parecen cómodos con aproximaciones tradicionales para la introducción y desarrollo del concepto de función en marcos de enseñanza. Basándose en los resultados de esta investigación, sugiere que puede que no todos los profesores de matemáticas de secundaria dominen su campo matemático, particularmente cuando se trata de la comprensión de funciones y la articulación de su conocimiento de ellas. Por lo tanto, dada la importancia de este concepto, es esencial que los educadores matemáticos presten atención a la tarea de determinar qué conocen nuestros profesores de las funciones y cómo su conocimiento se expresa en la clase (Norman, 1992).

INVESTIGACIONES CENTRADAS EN OTROS CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Algo que llama la atención es el interés despertado por los tópicos matemáticos anteriormente tratados frente a otros que también están presentes en las matemáticas a través de los distintos niveles de enseñanza. Estos últimos contenidos son el centro de este apartado.

Una línea de investigación desarrollada por Vinner y sus colaboradores en la década de los ochenta ha sido la base de gran número de estudios. Entre ellos está el realizado por Gutiérrez y Jaime (1996) con el fin de analizar la comprensión de *estudiantes para profesores de primaria,* del concepto de *altura de un triángulo.* El instrumento utilizado fue un test, con el que se quería ver dicha comprensión y la influencia que sobre ella ejercían los conocimientos previos. Este trabajo se completa profundizando en la relación que puede existir entre el conocimiento de los conceptos más elementales que giran alrededor de la altura de un triángulo y la utilización de dicho concepto. El análisis de los resultados de los tests lleva a estos autores a afirmar que las imágenes conceptuales de los estudiantes para profesor de primaria y los propios alumnos de primaria están muy próximas. Así mismo, apuntan que los tipos de errores detectados tienen su origen en imágenes conceptuales basadas en ejemplos o figuras prototípicas. De igual forma, comprueban a través de su análisis que el desconocimiento de conceptos básicos en los que se fundamenta el concepto de altura de un triángulo es uno de los orígenes de los errores de los futuros profesores. A partir de esta información, sugieren una serie de ideas con respecto a la formación de los futuros profesores, ven la necesidad de que en su preparación realicen análisis matemático de los conceptos y didáctico de la comprensión de los conceptos y subconceptos por los niños, seguido de las ideas necesarias para la instrucción de los mismos.

Por otro lado, Baturo y Nason (1996) han desarrollado un proyecto de investigación, uno de cuyos principales objetivos es describir la comprensión de *estudiantes para profesores de primaria* del «conocimiento de contenido matemático», centrado en el tópico matemático de «área». Para estos investigadores este conocimiento incluye: conocimiento sustantivo, conocimiento sobre la naturaleza y discurso de matemáticas, su disposición hacia las matemáticas y su conocimiento sobre matemáticas en sociedad. Los participantes en el proyecto eran entrevistados individualmente mientras realizaban ocho tareas diseñadas con el fin de profundizar en los aspectos anteriores. El análisis de la información obtenida lleva a estos investigadores a afirmar que el «conocimiento de la materia» (en el caso del área) que tiene la muestra de futuros profesores a los que se le ha realizado la entrevista es de naturaleza pobre. Esto podría conducir, según los autores, a limitar sus habilidades para ayudar a sus alumnos a desarrollar una comprensión significativa e integrada de los conceptos y procesos matemáticos.

Los intentos de describir el conocimiento de las matemáticas y el conocimiento de contenido pedagógico del *concepto de límite*, así como las creencias que tenían sobre esos conocimientos futuros profesores de matemáticas de secundaria ha llevado a autores como Lee (1994) a desarrollar investigaciones en esta línea. Para ello diseñó un cuestionario que realizaron ocho *futuros profesores de secundaria*, en su último año de formación profesional; cuatro de los participantes eran entrevistados posteriormente. En el cuadro XII mostramos uno de los ítems del cuestionario y las preguntas en relación con ellas que este investigador realizó en las entrevistas. A partir del análisis de los datos obtenidos, considera que el grupo estudiado no está capacitado para comprender realmente el contenido matemático, y sus inseguridades sobre dicho contenido permanecen.

CUADRO XII

Ítem y cuestiones relacionadas presentadas a los participantes. Lee, 1994

Ítem del cuestionario:

«Es 0, 999. . . igual a 1 o menor que 1» ¿Por qué?

Cuestiones de la entrevista:

1.— ¿Piensas realmente que 0,999. .. =1 ? ¿Explica por qué?

2.— Si uno de tus alumnos dice «mi profesor me dice que 0,999. . . =1, pero no lo comprendo» ¿Cómo explicarías eso?

Las concepciones de los *futuros profesores de primaria* sobre las nociones de *aleatoriedad y probabilidad* es el centro de un trabajo de investigación desarrollado por Azcárate (1996). A través de un cuestionario y una entrevista posterior a un grupo de estudiantes para profesores de primaria, se intenta profundizar en las concepciones que sobre este contenido tiene el colectivo estudiado. Otros investigadores han centrado su atención en las heurísticas de resolución de problemas de profesores de matemáticas de secundaria (Carrillo, 1996).

También el conocimiento de los profesores sobre los *errores de sus alumnos* ha sido objeto de algunas investigaciones; en concreto, en relación con el álgebra mencionaremos el trabajo de Wanjala y Orton (1996), parte de un proyecto más amplio con diversos objetivos. Los participantes fueron *profesores de secundaria,* que respondieron a un cuestionario con tres partes en las que se les pedía: ordenar en orden de dificultad una serie de subtareas, predecir los posibles errores de sus alumnos en una serie de tareas, identificar errores en una serie de ejemplos realizados por los alumnos y sugerir estrategias de enseñanza para remediarlo. Entre otras consideraciones obtenidas por el análisis de los datos, estos autores comentan que existe un grupo, que aunque pequeño es preocupante, de profesores que no tiene una clara apreciación de los niveles de dificultad de las tareas. Además, muchos profesores parecen poner el énfasis en la manipulación simbólica frente a aspectos de significado. Esta reflexión relativa a su área matemática de estudio nos parece que puede ser extendida a otros campos y áreas de las matemáticas escolares.

Estudios centrados en describir «cambios»

Sin negar la indudable importancia de las investigaciones centradas en momentos, otros autores consideran necesario un seguimiento del problema que permita apreciar la consistencia o no de los resultados obtenidos, así como aportar nueva información. De este modo, como habíamos comentado, existe un grupo de investigaciones que se centran en los cambios producidos en el conocimiento del profesor y los factores que influyen en ellos, durante un espacio de tiempo en el que se han desarrollado una serie de actividades entendidas en un sentido amplio; son estudios que intentan describir «cambios» por efecto de algún tipo de intervención instruccional. Estos estudios son el centro de los párrafos siguientes.

En relación con los *futuros profesores de primaria,* Llinares (1994) lleva a cabo un estudio cuyo propósito fue tratar de dibujar el papel que tienen las concepciones previas de los estudiantes para profesor durante su proceso de aprender a enseñar. Estas concepciones están unidas a la cultura matemática escolar que caracteriza nuestras escuelas. Los objetivos en este trabajo eran: analizar las características del conocimiento de contenido pedagógico y los aspectos que influyen en su generación, evaluar los factores que influencian los procesos de razonamiento pedagógico y estudiar cómo y por qué se desarrollan y cambian el conocimiento de contenido pedagógico y el razonamiento pedagógico a través de una experiencia concreta de enseñanza. Los participantes como parte de las tareas instruccionales del curso realizaron análisis de casos. El uso de los casos tenía como objeto identificar características del razonamiento pedagógico de los futuros profesores en situaciones hipotéticas.

La discusión de este trabajo aporta varias ideas: el conocimiento de tópicos matemáticos de los estudiantes para profesores de primaria está muy ligado al uso de símbolos y a la realización de tareas específicas; el aprendizaje matemático se entiende como el medio a través del cual conseguir habilidad y maestría en realizar una serie de pasos con algunos procedimientos aritméticos; las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje están centradas sobre el «profesor como transmisor» y el «alumno como repetidor». Las implicaciones generales desde estos datos señalan que: las matemáticas escolares son concebidas como «un conjunto de hechos y procedimientos para ser aprendidos»; las creencias de los EPs son consecuencia del proceso de enculturación en la cultura escolar actual en nuestras escuelas.

Por otro lado, Wilson (1994) examina el conocimiento y creencias desarrollado por un futuro profesor de matemáticas, cuando participa en un curso de educación matemática que enfatiza la conexión matemática y pedagógica, y las aplicaciones al concepto de *función*. En este trabajo describe cómo una *futura profesora de matemáticas de secundaria* comprende una parte importante de matemáticas, que espera enseñar. Concretamente, la intención del autor en este estudio era explorar los cambios en los significados y comprensiones que la futura profesora comunica sobre las matemáticas en general, y el concepto de función en particular.

La participante era una estudiante universitaria de 20 años, integrada en un curso diseñado con el objetivo de que los futuros profesores determinasen el contenido para el currículum de matemática de secundaria y demostrasen competencia en este contenido. Dicho curso se desarrolló durante 10 semanas, dos horas dos veces en semana. Durante las primeras cuatro semanas se obtuvieron, mediante una unidad de «prefunción», las concepciones iniciales respecto a las funciones. La unidad de funciones desarrollada consistía en actividades diseñadas para ayudar a los futuros profesores a desarrollar una apreciación de la importancia y potencialidad de las funciones y una habilidad para interpretar situaciones funcionales para resolver problemas relativos a funciones. Se grabó una sesión de resolución de problemas matemáticos junto con una serie de entrevistas con distintos objetivos complementarios. La segunda de ellas, con el fin de demostrar la forma de organizar su conocimiento sobre distintas clases de funciones comunes en el currículum de secundaria, se basó en la técnica de rejillas de Kelly (1955). Se le daban diferentes funciones, representadas mediante gráficas, algebraicamente, en tablas, y como situaciones reales, y se le pedía que clasificara, o hiciera subconjuntos de las distintas funciones, de diferentes formas, describiendo y justificando su pensamiento mientras clasificaba. Algunas de las funciones presentadas se recogen en el cuadro XIII.

CUADRO XIII

Funciones presentadas en el estudio. Wilson, 1994

«x // -2 -1 0 1 2»

y // 6 3 0 -3 -6

«y = $log_4(x+4)$»

«El censo de 1990 mostró que "Central City" tiene una población de 40.000 personas. Los sociólogos predijeron que experimentará un crecimiento del 2 por 100 por año en los próximos 20 años. ¿Cómo se puede predecir la población de cada uno de los próximos 15 años?»

Además, la estudiante planificó y condujo una entrevista con un alumno, futuro profesor de la escuela media, para valorar la comprensión de la función de los estudiantes. Por otro lado, el investigador observó todas las sesiones del curso de educación matemática donde estaba la participante, tomó notas y además utilizó los trabajos escritos de ella. El análisis de los datos lleva este autor a formular una serie de ideas sobre la comprensión de las funciones antes de la unidad de funciones: su concepción de las funciones era consistente con su punto de vista de las matemáticas, que ella veía como una colección de procedimientos concretos para ser aplicados en contextos aislados y obtener contestaciones correctas a problemas bien definidos; además, demostraba una comprensión débil de las relaciones entre varias representaciones y procedimientos. Por otro lado, mostraba poca apreciación por la utilidad de las funciones y estaba extremadamente limitada en su habilidad para operar con y usar funciones de formas significativas; el conocimiento que tenía en esta área era limitado y estaba fragmentado.

Después de la unidad de funciones, los resultados le llevan a pensar que se ha producido un cambio en la comprensión de las funciones de la estudiante para profesor, ya que comprendió un importante aspecto de las funciones, describir relaciones entre las matemáticas y el mundo real; esto la llevó a poder operar flexiblemente con clases de funciones dadas en diferentes representaciones, usar funciones para resolver problemas e identificar otras conexiones importantes en medio del concepto de función. Así mismo, este autor comenta que, aunque la futura profesora ha visto formas alternativas de enseñanza de las matemáticas, su punto de vista de las matemátieas y enseñanza de las matemátieas era todavía relativamente poco amplio al final del estudio.

Los resultados del estudio llevan a Wilson (1994) a pensar, que, aunque es importante para los futuros profesores considerar tópicos matemáticos avanzados, quizás se puede facilitar mejor los cambios en el punto de vista de los profesores sobre las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas dándoles la oportunidad de reflexionar sobre sus propias concepciones, durante el aprendizaje de las matemáticas que ellos mismos tendrán que enseñar. La idea sería que estas experiencias les permitieran hacer acomodaciones en su sistema de creencias para reconocer formas alternativas de matemáticas y enseñanza de las matemáticas y quizás asumirlas. Así mismo, los modelos de formación de profesores de matemáticas deberían integrar contenido matemático y pedagogía, poniendo énfasis en actividades en las que los profesores reflexionen sobre lo que ellos piensan de las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas (Wilson, 1994).

Otro de los centros de atención de las investigaciones que se ocupan del conocimiento del profesor en relación con tópicos o áreas de contenido matemático es la *resolución de problemas*. En este contexto se encuentra el trabajo de Puig (1996), en el intento de elaborar lo que él denomina «un modelo teórico local de la pura resolución de problemas». A través del estudio de un grupo de *estudiantes para profesor de primaria,* especialmente preparados, se intentan describir los elementos de un modelo de competencia (herramientas heurísticas, sugerencias heurísticas, destrezas con potencial heurístico, métodos de resolución con contenido heurístico, patrones pausibles...) que este autor propone. El instrumento empleado fue la técnica de rejillas (Kelly, 1955), en la que los elementos fueron 4 problemas en cada una de las dos pruebas que se les hizo a los alumnos, (inicial-antes de la instrucción y final-después de la instrucción); un ejemplo de ellos aparece en el cuadro XIV.

CUADRO XIV

Problemas planteados en la prueba inicial. Puig, 1996

1.— Unas personas pensaban realizar un viaje de 5.000 Km. En su presupuesto habían incluido una cierta cantidad de dinero para gastarse en gasolina. Sin embargo, una oportuna bajada del precio de la gasolin les permitió ahorrar 0,4 pesetas por kilómetro, con lo cual pudieron recorrer 250 Km más. ¿A cuánto ascendía su presupuesto para gasolina?
2.— Sea S_n = {1, 2, 3, ..., n}. ¿Para qué valores de n se puede dividir Sn en dos subconjuntos tales que la suma de los elementos de cada subconjunto sea la misma?. Por ejemplo, S_7 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} puede dividirse en {1, 6, 7} y {2, 3, 4, 5}.
3.— Dividir un triángulo en dos partes iguales mediante una paralela a la base.
4.— Probar que el cuadrado de un número impar cualquiera da resto 1 al dividirlo por 8.

Después de la resolución de los problemas, los estudiantes para profesor debían resumir en pocas palabras en qué había consistido para ellos la tarea de resolver el problema. El examen de las respuestas condujo a la elaboración de una lista de 21 frases que constituyeron los denominados «juicios o componentes subjetivas» (constructos). El relleno de la rejilla se hizo mediante una valoración de 0 a 10 según la importancia que había tenido cada juicio en cada uno de los cuatro problemas considerados. A las matrices resultantes de las distintas pruebas se le realizó un análisis taxonómico.

La información obtenida de dichos análisis permite a este autor hacer una serie de consideraciones; entre ellas: la relación de las componentes subjetivas antes de la instrucción hace pensar que hay una ausencia total de acciones relacionadas con la fase de revisión-extensión del modelo de Polya; y los estudiantes para profesor consideran muy importantes para la resolución de problemas un grupo de componentes formado por acciones relacionadas con la comprensión de los problemas. A partir de las consideraciones realizadas en este estudio, hay dos observaciones que se presentan en esta investigación. En primer lugar, se sugiere que lo que para un alumno es un problema de matemáticas dependerá de las prácticas escolares vividas. Por otro lado, parece que los aspectos heurísticos no forman parte de la historia escolar de los estudiantes para profesor, y que además tampoco son «componentes espontáneas» del proceso de resolución de un problema de matemáticas. Al comparar los análisis correspondientes a la prueba inicial y final, se pueden observar los cambios producidos en las valoraciones de las componentes subjetivas. Algunos de los aspectos destacados por este autor son: los estudiantes para profesor, después de la instrucción, amplían el número de aspectos que creen que intervienen al resolver un problema; y las componentes de contenido heurístico se consideran más importantes, al terminar el período de instrucción, aunque depende de los problemas concretos.

Otro trabajo que investiga las estrategias de resolución de problemas y más concretamente sobre el conocimiento «procesual» (*«conocer y usar con éxito las estrategias para resolver problemas por ellos mismos»*) es el realizado por Taplin (1996). Para este autor, este aspecto es una componente esencial que deben poseer los profesores si desean enseñar con éxito mediante la resolución de problemas matemáticos. Los participantes en el estudio eran *futuros profesores de enseñanza primaria,* que formaban parte de un proyecto para desarrollar y evaluar una tutoría asistida por ordenador. Los datos se recogieron a través de un test, compuesto de 12 problemas cuyo contenido matemático correspondía a primaria, al empezar el trabajo en la tutoría, y otro test similar, al terminar el período tutorial en el que habían trabajado con seis de los problemas que habían presentado más dificultad en la prueba inicial. El análisis de estos datos indica que los futuros profesores tienden a escoger un método y no lo cambian a pesar del período de tutoría. Por otro lado, se muestra la existencia de unas categorías de estrategias más usadas que otras, como son las verbales y numéricas en detrimento de las visuales y concretas. Así como un rango reducido de estrategias utilizadas por los estudiantes. Toda esta información lleva a esta autora a cuestionarse si no sería conveniente animar a los futuros profesores a ampliar y flexibilizar el rango de sus estrategias para resolver problemas, con el fin de poder ofrecer a sus futuros alumnos una gran variedad de formas de resolución de problemas.

Por último, haremos mención a un estudio realizado por Simon y Blume (1994), sobre el *razonamiento multiplicativo*, considerado un aspecto del razonamiento cuantitativo. Así, el centro del trabajo era el razonamiento cuantitativo implicado *«en comprender la evaluación del área de una región rectangular como una relación multiplicativa entre la longitud de los lados»* (Simon y Blume, 1994, p. 472). Los participantes en el proyecto fueron 26 *futuros profesores de primaria* en su primer curso de matemáticas; el estudio se basó en las primeras ocho sesiones. Todas las clases se grabaron y el trabajo de uno de los pequeños grupos fue grabado en vídeo y audio. En cuanto a la estructura de las clases, normalmente, el profesor proponía un problema o varios problemas, después los estudiantes trabajaban en grupos, y por último se desarrollaba una discusión en la clase entera. De los análisis de los trabajos y discusiones de los estudiantes para profesor, estos autores deducen que muchos de ellos no tenían una idea clara de por qué la relación existente entre «la longitud y el ancho de un rectángulo» y «su área» es un modelo de multiplicación. En este estudio intentan concretar algunas de las componentes que hacen que surja este problema, entre ellas: un primer paso en el razonamiento cuantitativo implicado en el área de un rectángulo es la estructura de área cuantificada, y el razonamiento multiplicativo implica dos dimensiones. Una de las propuestas de estos investigadores va en la línea de resaltar la importancia de construir «modelos de pensamiento» de los estudiantes, con el objetivo de ofrecer herramientas útiles a los profesores, para comprender el razonamiento y pensamiento de sus alumnos (Simon y Blume, 1994).

Como hemos podido constatar, las investigaciones que hemos ido analizando muestran una preocupación clara sobre los aspectos relacionados con la formación de profesores de matemáticas, tanto en lo referente a su conceptualización, como en el diseño de programa, ya sea en el contexto inicial y/o permanente. Este interés aparece ligado de forma inseparable a la profundización en el conocimiento del profesor o futuro profesor y tópicos matemáticos específicos, manifestándose la necesidad de seguir indagando desde una perspectiva global. Se aprecia en estos trabajos la amplitud del abanico de investigaciones que se han realizado o se están realizando en el campo de la Educación Matemática, centrados en el conocimiento del profesor de matemáticas y vinculado a un área de contenido específico, teniendo en cuenta los colectivos que se estudiaban, objetivos, instrumentos, conclusiones... (en los cuadros XV y XVI, aparecen agrupados los trabajos bajo distintos criterios). Así mismo, estos estudios sirven para fundamentar otros aspectos que comentaremos en el apartado siguiente.

CUADRO XV

Esquema de las investigaciones revisadas siguiendo las dos variables de organización

INVESTIGACIONES CON ÉNFASIS EN EL PROCESO DE APRENDER A ENSEÑAR	
Estudios centrados en descripción de «momentos»	**Estudios centrados en descripción de «cambios»**
• Graeber *et al.*, 1989	• Llinares, 1994
• Tirosh y Graeber, 1989, 1990a, 1990b	• Simon y Blume, 1994
• Ball, 1990a, 1990b	• Puig, 1996
• Marks, 1990	• Wilson, 1994
• Even, 1990, 1993	• Taplin, 1996
• Even y Markovits, 1991	
• Llinares, 1991a, 1994	
• Llinares y Sánchez, 1991, 1996	
• Post et al., 1991	
• Norman, 1992	
• Sánchez y Llinares, 1992	
• Simon, 1993	
• Lee, 1994	
• Llinares *et al.*, 1994	
• Philippou y Christou, 1994	
• Azcárate, 1996	
• Even y Tirosh, 1995	
• Baturo y Nason, 1996	
• Campbell, 1996	
• Campos *et al.*, 1996	
• Castro y Castro, 1996	
• Gutiérrez y Jaime, 1996	
• Pinto y Tall, 1996	
• Wanjala y Orton, 1996	

CUADRO XVI

Esquema de las investigaciones revisadas por contenido matemático y colectivo estudiado

TÓPICO	FUTUROS PROFESORES		PROFESORES EN EJERCICIO	
	Primaria	**Secundaria**	**Primaria**	**Secundaria**
Estructura multiplicativa	• Graeber *et al.*, 1989 • Tirosh y Graeber, 1989, 1990a, 1990b • Ball, 1990a • Simon, 1993 • Simon y Blume, 1994 • Campbell, 1996 • Castro y Castro, 1996	• Ball, 1990a	• Campos *et al.*, 1996	• Campos *et al.*, 1996
Números racionales/ Fracciones	• Ball, 1990b • Llinares, 1991a, 1994 • Llinares y Sánchez, 1991, 1996 • Sánchez y Llinares, 1992 • Llinares *et al.*, 1994 • Philippou y Christou, 1994 • Pinto y Tall, 1996	• Ball, 1990b • Llinares *et al.*, 1994 • Pinto y Tall, 1996	• Marks, 1990 • Post *et al.*, 1991	
Funciones		• Even, 1990, 1993 • Wilson, 1994 • Even y Tirosh, 1995		• Even y Markovits, 1991 • Norman, 1992
Geometría	• Baturo y Nason, 1996 • Gutiérrez y Jaime, 1996			
Probabilidad	• Azcárate, 1996			
Resolución de problemas	• Puig, 1996 • Taplin, 1996			• Carrillo, 1996
Otros	• Llinares, 1994	• Lee, 1994		• Even y Tirosh, 1995 • Wanjala y Orton, 1996

ALGUNAS REFLEXIONES

A lo largo de los párrafos anteriores hemos ido mencionando diversas investigaciones que, sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, unido a un tópico o área de contenido específico de matemática, se han desarrollado o se están desarrollando en los últimos años. Esto nos ha permitido hacer una reflexión global sobre estos estudios. Esta reflexión nos lleva a establecer inferencias en una doble vertiente. Por un lado, en relación con las componentes del conocimiento del profesor de matemáticas. Por otro, nos permite una visión conjunta de diseños de investigación y metodologías que se han adaptado más a las particularidades de este campo de estudio.

CONOCIMIENTO DE CONTENIDO PEDAGÓGICO Y CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS: UNA PERSPECTIVA EMPÍRICA DE LA INTEGRACIÓN COGNITIVA

En relación con las componentes del conocimiento del profesor de matemáticas, éstas han sido motivo de estudio desde distintas perspectivas por muchos investigadores. El modelo base y sobre el que se ha trabajado y discutido con más profusión y profundidad es el de Shulman y sus colaboradores, a pesar de los comentarios que se han hecho sobre la ambigüedad de determinados conceptos (por ejemplo, conocimiento de contenido pedagógico, Nodding, 1992; Cooney, 1994), o la inclusión/relación entre algunos de los dominios por ellos propuestos (McEwan y Bull, 1991). Dicho modelo nos parece conveniente utilizarlo como eje de una segunda lectura de las investigaciones comentadas, aunque la categorización no está exenta de dificultades. Además, a veces aún estando explícitamente detallado en las investigaciones el dominio o componentes consideradas el centro de las mismas, el propio desarrollo del estudio muestra una mezcla entre ellos.

A través de las anteriores investigaciones podemos constatar que, junto a las preguntas que pueden ser asociadas al conocimiento de matemáticas como: ¿qué conocen?, ¿cómo conocen?, ¿qué errores muestran?, etc. los profesores o futuros profesores sobre determinadas áreas o tópicos matemáticos, aparecen cuestiones como: ¿qué conocen de los errores de los alumnos?, ¿qué representaciones conocen y utilizan?, etc., que pueden ser formuladas para indagar en el conocimiento de contenido pedagógico. Aún cuando la relación entre ambas componentes del conocimiento del profesor de matemáticas no esté claramente manifestado en todos los estudios, está presente implícitamente en los planteamientos y discusiones que se realizan en las implicaciones. De alguna forma, la integración cognitiva entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de contenido pedagógico centrado en un contenido específico puede verse desde una perspectiva empírica a través de estas investigaciones.

Por otro lado, se puede constatar que hay una serie de lagunas tanto en preguntas que surgen a distintos niveles, como en respuestas dadas a determinar cuestiones que la comunidad de educadores e investigadores se plantean. Estas ausencias se dan tanto en los estudios centrados en distintas fases temporales de la profesión o formación, futuros profesores y profesores en ejercicio, como en los que se ocupan de distintos niveles de enseñanza, primaria, secundaria y universitaria, y abren nuevos campos de estudio que pueden ser fuente de futuros trabajos de investigación.

ACCESO A LAS COGNICIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Otro aspecto que se constata es el profundo desarrollo y concretización de las investigaciones en las cogniciones del profesor, lo que conlleva problemas de muy distinta índole que a lo largo de las páginas anteriores han manifestado (conceptos demasiados vagos o ambiguos, otros muy concretos, significados distintos para una misma «etiqueta», «etiquetas» distintas para un mismo significado, entre otros). También un aspecto problemático al que se han de enfrentar estos estudios es la forma de acceder a las cogniciones del profesor. El deseo de intentar estudiar y analizar lo que un profesor conoce, siente, cree, sobre la enseñanza, el contenido, los alumnos, desde los mismos profesores, dando la oportunidad de «expresarse» al profesor, ha llevado a un amplio rango de metodologías: estudio de casos, observación participante, cuestionario, entrevista, red semántica, observación directa, análisis de casos, metáforas, etc., solos o combinados entre sí (Kagan, 1990; Solas, 1992; Pope y Denicolo, 1993). Parte de estas cogniciones se tienen inconscientemente, lo que hace que difícilmente puedan ser expresadas directamente por el profesor. Por ello, en los instrumentos utilizados se intenta, en general, acceder a ellas de forma indirecta (Kagan, 1990; Solas, 1992). Una idea de la situación en la que se encuentra este tema en Educación Matemática, y concretamente en las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas en relación con un tópico específico, podemos obtenerlo a través de una lectura de los estudios comentados en este capítulo, teniendo como eje los instrumentos utilizados para dar respuestas a las distintas preguntas formuladas (cuadro XVII).

CUADRO XVII
Instrumentos utilizados en las investigaciones revisadas

Cuestionario	**Entrevista**	**Técnica de rejillas**	**Otros (Redes semánticas, visionado de videos...)**
• Graber *et al.*, 1989	• Graeber *et al.*, 1989	• Wilson, 1994	• Llinares, 1994
• Tirosh y Graeber, 1989, 1990a, 1990b	• Tirosh y Graber, 1989, 1990a, 1990b	• Puig, 1996	• Simon y Blume, 1994
• Ball, 1990b	• Ball, 1990a, 1990b		• Wilson, 1994
• Even, 1990, 1993	• Even, 1990, 1993		
• Even y Markovits, 1991	• Marks, 1990		
• Post *et al.*, 1991	• Llinares, 1991a, 1994		
• Simon, 1993	• Llinares y Sánchez, 1991, 1996		
• Lee, 1994	• Post *et al.*, 1991		
• Llinares *et al.*, 1994	• Norman, 1992		
• Philippou y Christou, 1994	• Sánchez y Llinares, 1992		
• Wilson, 1994	• Simon, 1993		
• Azcárate, 1996	• Lee, 1994		
• Even y Tirosh, 1995	• Wilson, 1994		
• Castro y Castro, 1996	• Azcárate, 1996		
• Gutiérrez y Jaime, 1996	• Even y Tirosh, 1995		
• Llinares y Sánchez, 1996	• Baturo y Nason, 1996		
• Taplin, 1996	• Campbell, 1996		
• Wanjala y Orton, 1996	• Campos *et al.*, 1996		
	• Pinto y Tall, 1996		

Teniendo siempre presentes las preguntas y problemas anteriormente comentados: ¿Qué instrumentos son usados con mayor profusión por los investigadores? Sin lugar a dudas, son la entrevista y el cuestionario. Bajo estas etiquetas encontramos una gran diversidad de formas y estructuras. Nosotros las utilizaremos entendiéndolas en un sentido amplio. Así, entre los cuestionarios podemos encontrar: i) cuestionarios con preguntas cerradas de elección múltiple (Llinares *et al.*, 1994); ii) cuestionarios con problemas, a resolver, redactar, comentar, situaciones hipotéticas... (Even, 1990, 1993; Even y Markovits, 1991; Post *et al.*, 1991; Castro y Castro, 1996, entre otros). Respecto a las entrevistas, en general, son semiestructuradas, con el objetivo general de acceder con mayor facilidad a las cogniciones del profesor, dejándole una cierta libertad para expresar sus ideas, y efectuadas alrededor de la realización de tareas (Ball, 1990a, 1990b; Tirosh y Graeber, 1989, 1990a, 1990b; Graeber *et al.*, 1989; Post *et al.*, 1991; Llinares, 1991a, 1994; Even, 1990, 1993; Llinares y Sánchez, 1991, 1996 etc.). Otros recursos que aparecen en las investigaciones son: el análisis de casos, las redes semánticas, las grabaciones de una lección o clase impartida por el profesor, la observación de una clase del profesor en la que el investigador toma notas, el visionado por parte del profesor de vídeos con sus alumnos resolviendo tareas, la técnica de rejillas, etc.. Recientemente se han retomado instrumentos metodológicos habituales en otros campos y que están sirviendo de base a nuevas aproximaciones a las cogniciones del profesor. En este sentido, el trabajo de García (1997) basándose en la técnica de rejillas ha supuesto una nueva aportación al campo metodológico.

Desde otro punto de vista, podríamos mirar a los instrumentos utilizados por los investigadores como medios con posibilidad de actuar sobre y, en su caso, potenciar cambios en las conductas y cogniciones de los profesores involucrados en los estudios. Los recursos metodológicos, en cierta medida, repercutirían en los elementos que intervienen en una clase y en las relaciones que pueden darse entre ellos. Como consecuencia intervendrían en el desarrollo de los procesos del aula; esta característica puede encontrarse en la literatura sobre el tema con distintas denominaciones, «validez ecológica», según Kagan (1990), o «perfomance verification», según Leinhardt (1990), y es un aspecto a tener en cuenta en el diseño de instrumentos metodológicos.

BIBLIOGRAFÍA

AZCÁRATE, P.: *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad,* Granada, Colección MATHEMA, COMARES, 1996.

BALL, D: «Prospective elementary and secondary teachers'understanding of division», en *Journal Research in Mathematics Education,* vol. 21, núm. 2, (1990a), pp. 132-144.

— «The Mathematical Understandings That Prospective Teachers Bring to Teacher Education», en *The Elementary School Journal,* vol. 90, núm. 4, (1990b), pp. 449-467.

BATURO, A.; NASON, R.: «Student Teachers' Subject Matter Knowledge within the Domain of Area Measurement», en *Educational Studies in Mathematics,* vol. 31, núm. 3, (1996), pp.235-268.

CAMPBELL, S.: «On preservice teachers'understanding of division with remainder», en *Proceedings of the XX PME,* Valencia, 1996.

CAMPOS, T.; MAGINA, S.; DA CUNHA, M.C.; CANOAS, S.: «Referent transforming operations: Teachers'solutions», en *Proceedings of the XX PME,* Valencia, 1996.

CARRILLO, J.: *Métodos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunos aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones,* Tesis Doctoral Inédita, Universidad de Sevilla, 1996.

CASTRO, E.; CASTRO, E.: «Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de Magisterio sobre la estructura multiplicativa», en Giménez, Llinares, y Sánchez (Eds): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática,* Granada, Colección Mathema, 1996.

COONEY, T.: «A beginning teacher's view of problem solving», en *Journal for Research in Mathematics Education.* vol. 16, (1985), pp. 324-336.

— «Research and Teacher Education: In search of common ground», en *Journal for Research in Mathematics Education.* vol. 25, núm. 6, (1994), pp. 608-636.

COONEY, T. y WILSON, M.: «Teachers'Thinking about Functions: Historical and Research Perspectives», en Romberg, Fennema, and Carpenter (Eds): *Integrating Research on the Graphical representation of Functions,* Lea (London), 1993.

EVEN, R.: «Subject matter knowledge for teaching and the case of functions», en *Educational Studies in Mathematics,* núm. 21, (1990), pp. 521-544.

— «Subject-Matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept», en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 24, núm. 2, (1993), pp. 94-116.

EVEN, R. y MARKOVITS, Z.: «Teachers' pedagogical knowledge: The case of functions», en *Proceeding XV PME,* Assis, (Italia), 1991.

EVEN, R.; TIROSH, D.: «Subject-matter knowledge and knowledge about as sources of teacher presentations of the subject-matter», en *Educational Studies in Mathematics,* vol. 29, núm. 1, (1995), pp. 1-20.

EVEN, R. TIROSH, D.; MARKOVITS, Z.: «Teacher subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: Research and development», en *Proceeding XX PME,* Valencia, 1996.

FENNEMA, E.; LOEF, M.: «Teachers' Knowledge and its impact», en D. Grouws (Ed): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* MacMillan, New York, 1992.

FISCHBEIN, E.; DERI, M.; NELLO, M.; MARINO, M.: «The role of implicit models in solving problems in multiplication and division», en *Journal for Research in Mathematics Education,*vol. 16, (1985), pp. 3-17.

GRAEBER, A.; TIROSH, D.; GLOBER, R.: «Preservice Teacher'Misconceptions in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division», en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 20, núm. 1, (1989), pp. 95-102.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.: «Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio», en Giménez, Llinares y Sánchez (Eds): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática,* Granada, Colección Mathema, 1996.

HIEBERT, J.: «A Theory of Developing competence with written mathematical symbols», en *Educational Studies in mathematics,* núm. 19, (1988), pp. 333-355.

KAGAN, D.: «Ways of Evaluating Teacher Cognition: Inferences Concerning the Goldilocks Principle», en *Review of Educational Research,* vol. 60, núm. 3, (1990), pp: 419-469.

KELLY, G.: *The psychology of personal constructs,* vol. 1, Norton, New York, 1995.

KIEREN, T. E. (1994): «Bonuses of understanding Mathematical Understanding», en *Proceedings VII ICME,* Quebec, (Canada), 1994.

LEE, B.: «Prospective Secondary Mathematics Teachers'Beliefs about "0,999... =1», en *Proceedings XVIII PME*, Lisboa, (Portugal), 1994.

LEINHARDT, G.: «Capturing craft Knowledge in teaching», en *Educational Researcher*, núm. 19, (1990), pp. 18-25.

LINARES, S.: «La naturaleza de la comprensión de las nociones matemáticas curriculares: variables en la formación de profesores de matemáticas», en C. MARCELO y otros (Eds): *El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica*, ICE, Secretariado de publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1991a.

— «Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. El caso de las nociones aritméticas», en *Trabajo presentado en el III Simposio Internacional sobre Investigación Matemática*, Valencia, 1991b.

— «The Development of Prospective Elementary Teachers'Pedagogical Knowledge and Reasoning. The School Mathematical Culture as Reference», en *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, Modena, (Italia), 1994, pp. 165-172.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V.: «The knowledge about unity in fraction tasks of prospective elementary teachers», en *Proceedings XV PME*, Assisi (Italy), 1991.

— «Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de Primaria», en Giménez, Llinares, y Sánchez (Eds): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, Granada, Colección Mathema, 1996.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V.; GARCÍA, M.: «Conocimiento de Contenido Pedagógico del Profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones», en *Revista de Educación*, núm. 304, (1994), pp. 199 225.

MARKS, R.: «Pedagogical Content Knowledge: From a Mathematical Case to a Modified Conception», en *Journal of Teacher Education*, vol. 41, núm. 3, (1990), pp. 3-11.

MCEWAN, H.; BULL, B.: «The Pedagogic Nature of subject matter Knowledge», en *American Educational Research Journal*, núm. 28 (2), (1991), pp. 316-334.

NCTM: *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*, Traducción al español, 1991, SAEM «Thales», 1989.

— *Professional Standards for Teaching Mathematics*, NCTM: Virginia, Reston, 1991.

NODDING, N.: «Professionalization and Mathematics Teaching», en D. Grouws (Ed): *Handbook of Research on Mathematics Teachiny and Learning*, New York, Macmillan, 1992.

NORMAN, A.: «Teacher'Mathematical Knowledge of the concept of function», en Harel and Dubinsky (Eds): *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA (USA), 1992.

PHILIPPOU, G.; CHRISTOU, C.: «Prospective elementary Teachers'Conceptual and Procedural Knowledge of Eractions», en *Proceedings XVIII PME*, Lisboa, (Portugal), 1994.

PINTO, M.; TALL, D.: «Student teachers' conceptions of the rational number», en *Proceedings XX PME*, Valencia, 1996.

POPE, M.; DENICOLO, P.: «The art and science of constructivist research in teacher thinking Teachin», en *Teaching & Teacher Education*, vol. 9, núm. 5/6, 1993, pp. 529-544.

POST, T.; HAREL, G.; BEHR, M.; LESH, R.: «Intermediate teachers'knowledge of rational number concepts», en Fennema, Carpenter y Lamon, (Eds): *Integrating research on teaching and learnig mathematics*, Albany, SUNY University Press, 1991.

PUIG, L.: *Elementos de resolución de problemas,* Granada, Colección MATHEMA. COMARES, 1996.

SÁNCHEZ, V.; LLINARES, S.: «Prospective elementary teachers'pedagogical content knowledge about equivalent fractions», en *Proceedings XVI PME,* Durham (USA), 1992.

SHULMAN, L.: «Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching», en *Educational Researcher,* febrero, 1986, pp. 4-14.

SHULMAN, L.: «Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform», en *Harvard Educational Review,* vol. 57, núm. 1, (1987), pp. 1-22.

SIERPINSKA, A.: «On understanding the notion of function», en G. Harel y E. Dubinsky, (Eds): *The Concept of Function: Aspects of epistemology and Pedagogy,* MAA: Washington, DC, 1992.

SIMON, M.: «Prospective elementary Teachers' Knowledge of division», en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 24, núm. 3, (1993), pp. 233-254.

SIMON, M.; BLUME, G.: «Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers», en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 25, núm. 5, (1994), pp. 472-494.

SOLAS, J.: «Investigating Teacher and Student Thinking About the Process of Teaching and Learning Using Autobiography and Repertory Grid», en *Review of Educational Research,* vol. 62, núm. 2, (1992), pp. 205-225.

TAPLIN, M.: «Pre-service teachers'problem solving estrategies», en *Proceedings of the XX PME,* Valencia, 1996.

THOMPSON, A.: «The relationship of teacher'-conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice», en *Educational Studies in Mathematics,* núm. 15, (1984), pp. 105-127.

TIROSH, D.; GRAEBER, A.: «Preservice elementary teachers'explict beliefs about multiplication and division», en *Educational Studies in Mathematics,* núm. 20, (1989), pp. 79-96.

TIROSH, D.; GRAEBER, A.: «Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers'thinking about division», en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 21, núm. 2, (1990a), pp. 98-108.

— «Inconsistencies in Preservice Elementary Teachers'Beliefs About Multiplication and Division», en *Focus on Learning Problems in Mathematics,* vol. 12, núms. 3 y 4, 1990b, pp. 65-74.

VINNER, S.: «Concept definition, concept image and the notion of function», en *International Journal of Mathematics Education in Science and Techonology,* núm. 14, (1983), pp. 293-305.

— «The Role of Definitions in Teaching and Learnig Mathematics», en D. TALL, (Ed): *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer: Dordreeht, 1991.

WANJALA, E.; ORTON, A: «Teaehers "knowledge of pupils" errors in algebra», en *Proceedings of the XX PME,* Valencia, 1996.

WILSON, M.: «One preservice secondary teacher's understanding of function: the impact of a course integrating mathematical content and pedagogy», en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 25, núm. 4, (1994), pp. 346-370.