Enseñanza de la Matemática Moderna,

por JOSE R. PASCUAL IBARRA

¿Qué es la Matemática Moderna? ¿Es que hay una Matemática Moderna que viene en sustitución de otra antigua, ya fenecida? No; el calificativo de «moderna» se contrapone más bien al de «clásica», aunque no sea fácil el distinguir totalmente el porqué. No es cierto en absoluto, que la Matemática llamada clásica se haya derrumbado y ahora sea falso lo que antes se reputaba como verdadero. La diferencia entre ambas concepciones de la Matemática está más del lado de los métodos y del enfoque de los problemas que del contenido de los mismos. Hay, en efecto, problemas muy clásicos que forman parte hoy de la Matemática Moderna, y hay problemas muy actuales que admiten un enfoque muy clásico.

La Matemática, como toda la Ciencia, es una integración de experiencia y razón, y debe su nacimiento a la necesidad de simplificar la extrema complejidad del mundo físico, para poder manejarlo. El hombre, a través de sus sentidos, percibe los hechos de la Naturaleza. Después estos conocimientos primitivos, experimentales, los ordena y relaciona entre sí por medio de la razón. Y así es como, si llamamos científica a la organización racional de nuestros conocimientos, se constituye en su origen la Matemática como ciencia. Es lo que hicieron los griegos con el descubrimiento de la razón: ordenar y sistematizar los conocimientos empíricos del mundo antiguo, en particular de los egipcios, para construir la Matemática. Esta Matemática de los griegos, que no niega la de los egipcios, sino que la supera, es una Matemática «moderna» con relación a la de éstos, que se hace clásica. El primer libro «moderno» de Matemática ha sido, pues, el de los Elementos de Euclides.

¿Cuáles son las diferencias esenciales entre una y otra Matemática? Fundamentalmente hay una, y es que la Matemática griega se organiza deductivamente. A partir de unos postulados básicos, que se consideran como verdaderos, se demuestran los teoremas. Los conocimientos dejan de ser productos de la experimentación para convertirse en entes de razón. Como consecuencia, las proposiciones matemáticas son más generales, a la vez que más precisas. Más generales por cuanto que abarcan a toda una clase de objetos, no sólo a uno singular. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras es un teorema relativo a toda la clase de triángulos rectángulos, y no sólo al de lados 3, 4 y 5 de los egipcios. Y son a la vez más concretas, puesto que su campo de validez viene precisado por la estructura definida por los postulados.

El valor de utilización práctica en la Matemática egipcia no se disminuye con los griegos. La Matemática sigue siendo tan práctica, y aún más, pero a la vez viene enriquecida con un tesoro conceptual por liberación de la carga realista que pesaba sobre ella. Junto a los problemas de tipo práctico de contar y medir, aparecen también ahora, como un regalo del espíritu, problemas puros de tipo especulativo: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo, los números irracionales, etc.

Tenemos así, dentro de un marco unitario, diversos aspectos de la Matemática: primero, la Matemática como ciencia, organización racional de nuestros conocimientos; en segundo lugar, la Matemática como instrumento de la técnica; después, la Matemática como arte, fuente e inspiración de bellos problemas desprovistos de aplicación práctica inmediata, y, finalmente, una Matemática como filosofía, que investiga los fundamentos de la ciencia y la verdad o falsedad de sus proposiciones. Todos estos aspectos de la Matemática fueron ya cultivados por los griegos, que tienen en Euclides —filósofo y científico— y en Arquímedes —investigador y artista— sus más destacados representantes.

Con el decurso de la historia, esta Matemática griega se ve extraordinariamente acrecida en el caudal de sus deducciones, pero permanece encerrada en sus mismos moldes rígidos hasta el siglo XVII, en el que tienen lugar el descubrimiento, primero, de la Geometría Analítica y, algo más tarde, del Cálculo Infinitesimal. Con estos descubrimientos se abren nuevos horizontes, se utilizan métodos más potentes, surgen nuevos problemas y nace una nueva Matemática, que será «Moderna» con relación a la griega, que pasa a ser clásica.

Todavía, no obstante, permanece la Matemática en su papel de sirvienta de la Física, cuyos fenómenos siguen siendo las motivaciones concretas de las más bellas y útiles teorías matemáticas. La culminación de este proceso vendrá señalada por la aparición de la Mecánica Celeste de Laplace, triunfo apoteósico de las leyes de Newton.

Llegamos así al siglo XIX, llamado el de la revisión de los principios, en el que la aparición, por una parte, de las Geometrías no euclídeas y, por otra, de las paradojas en la Teoría de Conjuntos, hacen tambalear el edificio tan costosamente construido. Como consecuencia de esta revisión de los fundamentos, las «verdades matemáticas» pierden lo que parecía ser su nota característica, la de ser una *constante universal*. Si todavía, en el lenguaje ordinario, el término «matemático» es sinónimo de verdad, los matemáticos saben que esto está muy lejos de ser cierto. Las matemáticas han dejado de ser las «ciencias exactas». Hoy no tiene sentido preguntarse si una proposición matemática es verdadera o falsa. Las proposiciones matemáticas son simplemente «correctas»; esto es, coherentes, demostrables a partir de un sistema de axiomas enunciados a priori, y, por tanto, con un dominio de validez restringido al campo establecido por los axiomas. Estos campos reciben el nombre genérico de *estructuras*, cuyo estudio constituye hoy el objeto de la Matemática. Hay tres tipos fundamentales de estructuras: *algebraicas, de orden* y *topológicas*. En la base común se encuentra la *Teoría de Conjuntos*. El concepto primario de toda la Matemática es, por tanto, la noción de conjunto, noción que confiere al edificio matemático el sentido unitario y armónico que posee, y cuyas columnas básicas son: el *Algebra*, estudio de las estructuras algebraicas (grupo, anillo, cuerpo, etc.), y la *Topología* (noción de límite, continuidad, etc.).

He aquí, pues, en bella metáfora de Puig Adam, «cómo la Matemática, que empezó por desnudar al mundo físico de sus infinitas galas hasta reducirlo a esquemas matemáticos puros, ha terminado desnudándose a sí misma de sus contenidos conceptuales, quedándose en puro esqueleto legislativo. Pero si este esqueleto no sustenta aparentemente carne alguna, es capaz de sostener una infinidad de contenidos vitales, y en esta capacidad está precisamente su gran poder y fecundidad: la paradójica y enorme potencialidad de lo vaciado, de lo abstracto...».

Las dos notas esenciales de la llamada Matemática Moderna, esto es, de la actual, son el grado de máxima abstracción en que se coloca y su construcción axiomática. Se diferencia de la clásica fundamentalmente en el enfoque de los problemas. Mientras que ésta se polariza en cuestiones concretas, la Matemática de hoy encuentra su herramienta más poderosa englobando los problemas en las teorías más generales, dejando los casos particulares como simples ejercicios de aplicación. Así, por ejemplo, la Geometría ha pasado a ser un modelo concreto del Algebra Lineal y de la Topología, según los casos.

La primera obra que se publica en esta línea fue el libro *Algebra Moderna*, de Van der Waerden, aparecido en 1930, y la obra más fundamental —diríamos la biblia de la Matemática actual— es la monumental de N. Bourbaki (seudónimo de un grupo de matemáticos franceses), que lleva el mismo título de los libros de Euclides: *Elementos de Matemática*. Comenzada la publicación en 1939, han aparecido ya más de 30 fascículos.

Paralelamente a la construcción matemática, y para poder manejar con relativa facilidad las proposiciones matemáticas y poder moverse con agilidad entre tantas cadenas de deducciones lógicas, ha sido necesaria la creación de un simbolismo y una nomenclatura que, a la vez que descansen nuestra mente, mecanicen los sucesivos razonamientos. Se caracteriza este lenguaje matemático por tres notas: *concisión, precisión* y *universalidad*. Un número muy reducido de palabras y de símbolos, tomados del lenguaje ordinario, si bien desprovistos de todo significado real, forman hoy el apoyo concreto de las creaciones matemáticas. Cada uno de ellos tiene un significado muy claro, simple y preciso, y responde a una necesidad de comunicación unitaria.

Para muchos «modernos» —los formalistas—, este lenguaje formalizado, si no es la Matemática misma, opinan por lo menos que ninguna teoría puede calificarse de teoría matemática, mientras no haya llegado a organizarse por medio de esta formalización simbólica. Algunos —los intuicionistas— estiman, en cambio, que si detrás de los símbolos y de las palabras no existieran las cosas, con toda su existencia de realidad, la Matemática sería un pasatiempo estéril.

De cualquier forma, la Matemática, nacida para leer el libro de la Naturaleza (Galileo), ha llegado a ser, para prestigio y honor del hombre (Jacobi), la más pura y libre creación del espíritu humano, según se expresa Dedekind. La historia de la Matemática, en su ascensión constante hacia las más altas cumbres de la abstracción, es la historia más bella del hombre en su camino hacia la libertad.

La Matemática Moderna, por otra parte, sigue ofreciendo, y cada vez más, los dos aspectos que siempre ha poseído. Primero, su utilidad práctica, esto es, como instrumento imprescindible de las aplicaciones técnicas, y, después, la Matemática como arte y filosofía, basada en el uso de la razón. Aspectos que son inseparables, ya que en perfecta simbiosis han hecho y hacen progresar incesantemente la edificación de la Matemática. De una parte, las necesidades crecientes de la tecnología han dado nacimiento a nuevas teorías matemáticas, y, de otra, las más puras creaciones matemáticas han resultado ser la herramienta adecuada de aplicaciones técnicas en los campos más imprevisibles.

Si durante siglos fue la Física el terreno casi único de aplicación concreta de la Matemática, hoy puede decirse que, desde la artesanía más modesta hasta la técnica más depurada, no hay parcela del quehacer humano en que la Matemática, de una forma o de otra, no esté presente. Y así, en las dos últimas décadas de este siglo, hemos visto aparecer, a partir de la obra fundamental de Von Neumann sobre teoría de juegos, la aplicación de esta teoría a los campos más diversos, no sólo en el dominio de la Economía, sino también en el de la Sociología y Estrategia, y originar a su vez nuevas técnicas, como la Programación, la Investigación Operativa y los Procesos de Decisión, que son hoy día indispensables en la organización industrial y en la dirección de toda clase de empresas. Las necesidades militares de la última guerra mundial, concretamente la confección de tablas de tiro para las armas automáticas, dieron nacimiento a las primeras máquinas de cálculo electrónico, y después, a los llamados ordenadores o computadoras. Mediante ellos, no sólo por su fantástica rapidez de cálculo, sino esencialmente por la posibilidad de adoptar decisiones lógicas, pueden hoy resolverse en pocos minutos intrincados problemas imposibles de abordar por los procedimientos clásicos. El Algebra de Boole —teoría Matemática «pura» creada por este profesor en el siglo XIX— resultó ser el instrumento indispensable para el diseño de estos ordenadores. Su utilización ha hecho posible éxitos tan espectaculares como los vuelos espaciales y la reciente conquista de la Luna. Como consecuencia de este progreso impresionante, todas las técnicas de la ingeniería y de la industria han sido renovadas. Hoy un problema está resuelto cuando se dispone de un algoritmo, que nos permite, por una cadena de operaciones, llegar a una solución. El factor tiempo ya no cuenta. De aquí que las cuestiones puramente teóricas, que antes interesaban solamente al matemático, pero no al técnico, han llegado a ser enormemente *útiles* e imprescindibles también para éste. La llamada formación *práctica*, a base de formularios y recetas, ya no sirve. Es cada vez más necesario y más útil el conocimiento teórico de los fundamentos de la Matemática.

Así como el origen de la revolución industrial hay que buscarlo en el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, habría que pensar que al nacimiento de la nueva era tecnológica a la que estamos asistiendo no es ajena en absoluto la evolución de la Matemática contemporánea.

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

Frente a este desarrollo impresionante de la Matemática, ¿qué panorama presenta la enseñanza de esta materia? Tenemos que contestar necesariamente con una de las palabras de mayor frecuencia en nuestra época: crisis. Sí, como tantas otras cosas, también la enseñanza de la Matemática, en todos sus niveles, está en crisis, y, por tanto, en estado de profunda renovación.

Abogan por la necesidad de la reforma los siguientes factores:

- La evolución y desarrollo de la propia Matemática.
- Los avances logrados en la experimentación psicológica y psicopedagógica.
- La cada día mayor utilización de la Matemática en las demás ciencias y profesiones, incluso en algunas que antes se consideraban más alejadas.
- El papel preponderante que se concede hoy a la formación matemática de la juventud en orden a la investigación científica, al progreso técnico y al desarrollo de los pueblos.
- El fenómeno social llamado «democratización de la enseñanza», que obliga a dar más Matemática a mayor número de alumnos.
- La constante historia de «vulgarización del saber», por la cual todos los avances llevan consigo el aumento de las necesidades de conocimiento de los hombres.

En relación con la enseñanza de la Matemática, son de importancia relevante los resultados obtenidos por Piaget y su escuela psicopedagógica. La experimentación había mostrado ya que hay una tendencia natural espontánea en la mente infantil para distinguir y agrupar los elementos semejantes de un conjunto, esto es, para la formación de clases de equivalencia basada en la percepción de las formas (Gestalten). Esto prueba que en el niño existe desde muy temprano una capacidad de abstraer, si entendemos por abstracción la facultad que permite ascender de la percepción de la unidad singular a la concepción de la unidad específica. También se había probado que los niños son capaces de relacionar conjuntos *isomorfos*, esto es, de reconocer una estructura común en situaciones concretas aparentemente diversas. Pero, según Piaget, estas acciones infantiles corresponden a un estadio inferior al de la inteligencia, que él llama sensorio-motor. La inteligencia no aparece mientras no exista una coordinación de acciones —ciertamente sugeridas por la percepción— que dé lugar a la formación de esquemas mentales dotados de un dinamismo operatorio, y, sobre todo, del carácter reversible del que carecen las rígidas estructuras perceptivas. Pues bien, el descubrimiento más importante de Piaget, en relación con la didáctica de la Matemática, es que estas estructuras primitivas de la inteligencia, esencialmente operatorias y reversibles, pertenecen a tres tipos de organización que están en correspondencia con las estructuras que los matemáticos consideran como fundamentales: algebraicas, de orden y topológicas. La consecuencia inmediata de este hecho aplicado a la pedagogía, es que la acción didáctica deberá tender a la organización progresiva de estas estructuras operatorias hasta llegar a constituirse en estructuras matemáticas. Naturalmente, en una buena didáctica, como señalaba Puig Adam, no basta que el alumno *pueda*; es necesario que además *quiera*, esto es, habrá que movilizar, junto a la *percepción* y la *acción*, la *afectividad*, hasta lograr lo que escribía Claparède en réplica feliz a sus detractores: «Nuestros alumnos no hacen lo que quieren, sino que quieren lo que hacen.» Afectividad es efectividad. Querer es poder.

Como consecuencia de esta concepción psicopedagógica, y de otros avances en el campo de la pedagogía, veamos someramente cuáles son las nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática.

El carácter instrumental —enseñanza del cálculo— que tradicionalmente venía teniendo la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria ha sido relevado por otro más formativo de la naciente personalidad del niño. Este, ciertamente, debe aprender el mecanismo de las operaciones, pero antes ha debido captar, mediante percepciones y acciones interiorizadas, las relaciones cualitativas —no sólo cuantitativas— y el sustrato lógico y el dinamismo estructural de dichas operaciones. Simultáneamente, las actividades del niño sobre las formas y medidas espaciales deben permitirle la conquista del espacio, considerado ahora en íntima conexión con las relaciones numéricas. Las manipulaciones de conjuntos de objetos concretos con sus relaciones —juegos estructurados— forman la base de esta didáctica de la Matemática elemental, que debe comenzar en los primeros cursos de la escuela maternal o preescolar y que irá unida a la formación del lenguaje y a la adquisición progresiva de hábitos de expresión correctos. La verificación por parte del alumno de sus intuiciones espontáneas contribuirá a una iniciación en el razonamiento y en el rigor lógico. Es esencial, en orden a la movilización de los intereses, resaltar el papel relevante que, con este nuevo enfoque de la enseñanza de la Matemática elemental, se concede a la utilización de un adecuado material didáctico: regletas de Cuisenaire, geoplanos, bloques lógicos, juegos estructurados, etcétera.

El primer ciclo de la enseñanza secundaria, de carácter esencialmente orientador —si bien caben moderadas opciones—, continúa la enseñanza primaria. Ya no se respeta en los programas la tradicional división en unidades lógicas: Aritmética, Geometría, Algebra, etc. Ahora se tiende a organizar los programas cíclicos en torno a unidades funcionales y en correspondencia con las estructuras fundamentales de la Matemática, con base en la teoría intuitiva de conjuntos. En cuanto a los métodos, se buscan las motivaciones —sin descuido de las aplicaciones— en la propia Matemática. La actividad desplegada por el alumno sobre situaciones concretas creadas por el profesor debe conducirle a la adquisición de los conceptos matemáticos y a formar en su mente los hábitos de un quehacer matemático. Se concibe, pues, la Matemática, más que como un acervo de conocimientos, como una forma especial de la actividad intelectual, como suele decirse: «Saber es saber hacer.»

En el segundo ciclo de la enseñanza media, ya moderadamente especializado, se concede a la Matemática, no sólo en las secciones científica, técnica y modernas, sino también en las literarias —con la excepción hasta ahora de España—, la debida importancia con un horario elevado. Naturalmente, ni los programas ni su enfoque son iguales en todas las secciones. Las nociones de la Matemática actual, que han sido introducidas en las etapas anteriores, adquieren en este período una formalización más abstracta, sin dejar de recurrir a planos concretos cuando las necesidades didácticas lo precisen, y sin dejar de cultivar tampoco el sentido de aplicación a las demás ciencias y a la vida profesional.

En la enseñanza superior, concretándonos a la impartida en las facultades de Ciencias, de conformidad con la triple misión de la Universidad: cultivo de la ciencia, fomento de la investigación y formación de profesionales, las secciones de Matemáticas organizan sus estudios en tres direcciones o especialidades. Sobre un tronco común de dos años de enseñanzas básicas —Algebra y Topología— se abren tres ramas, de tres años más cada una, en el período de la licenciatura. Con la primera, dirigida hacia la investigación, se pretende poner al alumno en condiciones de poder asimilar los conocimientos y las técnicas necesarias para poder enfrentarse, en tiempo relativamente breve, con los problemas actuales planteados en una parcela de su especialidad. La segunda se orienta hacia alguna de las aplicaciones más actuales de la Matemática de hoy: Análisis numérico, Estadística matemática, Física matemática, Astronomía. Por último, la especialidad llamada de Metodología tiende a satisfacer la gran demanda de profesores de esta disciplina, debidamente cualificados, en la enseñanza media. La penuria de estos profesores, manifestada en muchos países, ha hecho pensar en una posible licenciatura más corta en esta especialidad, que habilitaría para la docencia en el primer ciclo de dicha etapa educativa.

LA OLIMPIADA MATEMATICA

Y, para terminar, diremos unas pocas palabras sobre la Olimpíada Matemática.

La Olimpíada Matemática es el concurso nacional que organiza todos los años la Real Sociedad Matemática Española, con la colaboración y ayuda de la hasta hace poco Comisaría de Protección Escolar, y hoy Dirección General de Promoción Estudiantil, con el fin de seleccionar 33 alumnos —tres por cada uno de los distritos universitarios— entre los estudiantes del Curso Preuniversitario, los cuales podrán cursar *con beca* los cinco cursos de la carrera de Matemáticas. Es decir, estas becas se conceden exclusivamente como premio al mérito y precisamente para estudiar Matemáticas, con independencia de cualquier clase de factores económicos. Forman, por tanto, un cupo especial, aparte del establecido en la convocatoria general de becas de la Comisaría, constituido en favor de los estudios matemáticos.

¿Cómo se hace el concurso? En dos fases. La primera se realiza en las capitales de cada distrito universitario, donde ya se seleccionan los tres futuros becarios que les corresponden. Para la segunda vienen todos los seleccionados a Madrid, y, de los que obtienen las mayores puntuaciones en una serie de ejercicios, se proclaman un campeón y dos subcampeones. Estos, además de su derecho a la beca, reciben un diploma y un «modesto» premio en metálico. Los campeones de la VI Olimpíada, correspondiente al curso pasado, fueron:

Campeón: Javier Luis García Ruiz, de Barcelona.

Subcampeones: Dolores Carrillo Gallego, de Murcia, y Jorge Bustos Pueche, de Madrid.

La Olimpíada de este curso, Dios mediante, será la VII. Procedentes de la primera tenemos ya 15 licenciados olímpicos. Uno de ellos, el que fue campeón, ya ha formado parte del tribunal de jueces de la VI. Y son 89 alumnos los que, procedentes de las otras, estudian actualmente Matemáticas con una de estas becas. Es una satisfacción para la RSME proclamar que las calificaciones académicas de estos estudiantes son, en general, muy buenas. Se trata, por consiguiente, de una promoción escolar bien dirigida.

Podríamos ahora preguntarnos por las razones que justifican este trato especial en favor de las Matemáticas. Solamente diremos las siguientes:

— España, si bien ha logrado una alta calidad en su investigación matemática, no ha alcanzado todavía el volumen que la corresponde y que su desarrollo necesita.

— La investigación matemática es básica para asegurar el progreso científico y técnico de los pueblos.

— Sólo por este camino podrá un día España aligerarse de la carga económica, que, cual otros gibraltares dolorosos, pesan sobre ella en concepto de patentes y royalties.

— Es evidente que no podemos cumplir estos objetivos si no disponemos de una plantilla eficiente de matemáticos, y no tendremos matemáticos si no se dispone de un buen número de profesores universitarios que los formen y de los profesores suficientes de enseñanza media capaces de fomentar y guiar las posibles vocaciones. Porque si bien es cierto en relación con la enseñanza media, que no es específicamente misión de ésta la formación de matemáticos, también es verdad que los profesores de Matemáticas de este grado seremos responsables ante la sociedad si por nuestra culpa dejaran de seguir esta carrera los alumnos suficientemente dotados.

— Hacen falta por ello centenares de buenos profesores de Matemáticas que, contestando ya a la pregunta que nos ha servido de título para esta charla, sepan enseñar la Matemática de hoy y hagan a la vez una enseñanza moderna de la Matemática.

— Para ello se hace preciso que la pedagogía matemática, adaptándose a la realidad social de nuestra época —necesidad de aumentar la capacidad media matemática de la juventud y orientación de los mejor dotados hacia esta disciplina—, evolucione rápidamente. Hay que modificar profundamente los programas, y no precisamente en el sentido de una rebaja de los niveles exigidos, como alguien equivocadamente pudiera pensar, pero al mismo tiempo hay que elaborar una metodología y una didáctica apropiadas. Es evidente que una enseñanza de tipo dogmático no puede llenar la finalidad formativa que se exige a la Matemática, como tampoco, en el extremo opuesto, una acumulación de fórmulas y técnicas operatorias —como en algunos casos, desgraciadamente, viene haciéndose— puede satisfacer la exigencia utilitaria. Tanto desde un punto de vista cultural como desde el de su utilización, los conocimientos y las actitudes que deben considerarse necesarios son hoy mayores y muy diferentes de los de hace veinte años. Si útil es aquello que permite satisfacer mejor las necesidades de los hombres, podemos decir que la utilidad de una enseñanza es la medida de su humanidad. Humanizar, por tanto, no quiere decir *facilitar* —no hay camino real para la Matemática—, sino hacer la enseñanza de la Matemática más útil, más humana, en el doble sentido de que satisfaga mejor las necesidades del hombre futuro, y, a la vez, más alegre, menos tediosa, para el niño que hoy la aprende. Humanizar, en este sentido, es para mí la razón más poderosa en favor de la introducción de las nociones de la Matemática Moderna en los programas y de una enseñanza moderna de la Matemática en los métodos. No va lo uno sin lo otro. Ambas son facetas inseparable de la misma y única tarea que hay que llevar a cabo: humanizar nuestra enseñanza.

Si hoy más que nunca, en el mundo cambiante en que vivimos, educar es proporcionar la capacidad de reacción ante una situación nueva, la Matemática, como siempre, debe seguir ocupando un lugar de excepción en todo el sistema educativo.