SOBRE EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS (*)

GRUPO ANAGA (**)

INTRODUCCIÓN

Los números juegan un papel central en la enseñanza de las matemáticas y de todas las ciencias, incluidas las sociales. Sin embargo, la experiencia cotidiana de los profesores pone en evidencia que el aprendizaje de los números obtiene poco éxito. Podemos decir que la enseñanza de las matemáticas y, en particular, la de los números alcanzan un alto fracaso escolar, tanto desde el punto de vista de los índices de suspensos, como desde la perspectiva de un aprendizaje útil (en el sentido de las matemáticas como instrumento y también como disciplina formadora de cualidades intelectuales).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de los números está plagado de importantes dificultades y las investigaciones acerca de este problema son numerosas, constituyendo una de las fértiles líneas de investigación que se desarrollan sobre la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los aspectos que, a nuestro juicio, no ha sido suficientemente estudiado es la determinación de lo que realmente los alumnos llegan a conocer tras el proceso de aprendizaje y cuáles son las dificultades principales que surgen a lo largo de la enseñanza de los números. En esta línea se encuentra nuestro *Estudio sobre el aprendizaje de los números en las Enseñanzas Básica y Media* (Grupo Anaga, 1989-1990); en adelante nos referiremos a él de forma abreviada con la denominación de *Estudio*.

(*) Este trabajo forma parte de un proyecto seleccionado en el Concurso Nacional de Proyectos de Investigación Educativa de 1988, convocado por el Ministerio de Educación y Ciencia y financiado por el Centro de Investigación y Documentación Educativa de ese Ministerio.

(**) Dirección: Antonio Martinón. Coordinación: Teresa Vázquez, Ana A. Pérez, Justo Fernández, Juan R. Rojas, José M. Álamo y M. Dolores Sauret. Realización: Además de los anteriores, Catalina D. García, Francisca García, Emilio M. Hernández, Isabel Ledesma, M. Carmen Manrique, Juan M. Moreno, M. Mercedes Paniagua, Pedro S. Perestelo, M. Dolores Prieto, M. Ángeles Rodríguez, M. Teresa Sánchez y M. Luisa Torres.

Algunas investigaciones previas abordan esta cuestión, pero de forma parcial, y no llegan a cubrir todos los niveles educativos ni todos los objetivos propios de la enseñanza de los números. Trabajos anteriores a nuestro *Estudio* desarrollados en Canarias (el mismo ámbito geográfico que el nuestro) son los siguientes: Afonso Martín y otros, 1986; Balbuena y Pérez, 1982; Bonilla y otros, 1979; Hernández Domínguez y otros, 1986; Molina y Martinón, 1982.

En nuestro *Estudio* nos propusimos analizar el aprendizaje de los números desde Primero de la Enseñanza General Básica (EGB) hasta Primero del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP). Se trataba de conocer, con precisión, qué sabían y qué no sabían los alumnos, así como de detectar cuáles eran las dificultades que se les presentaban. Se excluyeron los números complejos. Los sistemas numéricos que se estudian son, por lo tanto, los naturales, racionales no negativos, enteros, racionales y reales. Para ello decidimos realizar una amplia encuesta entre los alumnos y estudiar los resultados de la misma.

Debemos mencionar que se han tenido en cuenta numerosos trabajos, además de los citados anteriormente. Entre ellos destacamos los siguientes: Behr y otros, 1984; Bell, 1986; Bezuszka y Kenney, 1983; Comas i Mongay, 1986; Fischbein, 1985; Gascón Pérez, 1985; Grisvard y Leonard, 1983; Grossman, 1983; Grupo Cero, 1984; Kilian y otros, 1980; Laing y Meyer, 1982; Lamarca, 1985; Leonard y Grisvard, 1981; Lessen y Cumbland, 1984; Maraschini y Mayer, 1983; Mialaret, 1977; Palacios y Ron, 1986; Perret, 1985; Rico y Sáenz, 1982; Roseman, 1985; Siders y otros, 1985.

Basándonos en los datos de nuestro *Estudio,* hemos desarrollado posteriormente diversos trabajos: Díaz, 1990; Fernández, 1990; Martinón y Sauret, 1990; Perestelo, 1990; Pérez y Torres, 1990; Vázquez y Álamo, 1990.

En este artículo presentamos la metodología de nuestro *Estudio* y ofrecemos las conclusiones que tienen carácter general, y a las que habría que añadir otras muchas particulares.

METODOLOGÍA

Se resume a continuación la metodología utilizada. Una amplia exposición se encuentra en el capítulo 1 del *Estudio.*

Objetivos operativos

Nuestra primera tarea consistió en la elaboración de un listado con los contenidos acerca de los números, desde Primero de EGB a Primero de BUP. Estos contenidos se redactaron en forma de *objetivos operativos;* es decir, lo que, a nuestro juicio, constituían las *unidades básicas del aprendizaje,* detalladas al máximo, o los *items* en los que se podía dividir el aprendizaje.

La confección de una relación de tales objetivos operativos se nos presentó llena de escollos, dado el carácter difuso de la propia idea de *objetivo operativo.* Desde un comienzo fuimos conscientes de que cualquier relación de *objetivos operativos* era discutible, y realmente fue muy discutida entre nosotros mismos. Casi siempre permaneció la duda acerca de si un determinado *objetivo operativo* debía dividirse en varios o si, por el contrario, debían agruparse varios en uno solo.

Un ejemplo ilustrará mejor lo que decimos. Los objetivos operativos que redactamos correspondientes a la escritura de números naturales en Primero de EGB fueron los siguientes:

Escribir un número del 0 al 9.
Escribir un número del 10 al 99, sin 0.
Escribir un número del 10 al 99, con 0.

Resulta razonable plantearse si, en lugar de los dos últimos *objetivos operativos*, debían haberse incluido los nueve siguientes:

Escribir un número del 10 al 19.
Escribir un número del 20 al 29.
... ...
Escribir un número del 80 al 89.
Escribir un número del 90 al 99.

Los resultados obtenidos permiten ahora valorar, con cierto rigor, lo acertado de haber considerado un cierto conocimiento como *objetivo operativo*. Continuando con el mismo ejemplo, se ha puesto de manifiesto en el *Estudio* que algunos alumnos confunden los números de la forma *sesenta y* ... con los de la forma *setenta y* ...; por lo que, a la hora de redactar los *objetivos operativos*, esto debió haberse tenido en cuenta, de manera que se hubiera podido apreciar con más detalle las dificultades que los alumnos tenían en el aprendizaje.

Se redactaron en total 1.025 *objetivos operativos*, que fueron sometidos a cuatro grandes clasificaciones:

1) Según el *nivel:* Primero de EGB, Segundo de EGB, ..., Octavo de EGB y Primero de BUP.

2) Según el *sistema numérico:* naturales, racionales no negativos, enteros, racionales y reales.

3) Según el *tema:* conjunto, suma, diferencia, producto, división, potenciación, radicación, divisibilidad y orden y representación gráfica.

4) Según el *subtema.*

Ejercicios y pruebas

Para cada *objetivo operativo* se redactaron *ejercicios* (uno o varios, según los casos), que se propusieron a los alumnos para su resolución. Estos *ejercicios* han supuesto, en muchos casos, lo que podríamos denominar *subobjetivos operativos.*

Si en la bibliografía que se ha manejado existían ejercicios adecuados para cierto objetivo operativo, han sido éstos los elegidos.

El número de ejercicios propuestos a los alumnos fue de 1.592. Los *ejercicios* se agruparon en *pruebas* y éstas se pasaron a los alumnos del nivel inmediatamente superior al que correspondían los *objetivos operativos.*

Las *pruebas* se pasaron, para su resolución por parte de los alumnos, en distintos centros de enseñanza. En total colaboraron 60 centros, en su mayoría, situados en el área metropolitana de la isla de Tenerife (municipios de Santa Cruz de Tenerife y La Laguna), aunque también hubo centros de zonas rurales y de otras islas del archipiélago de Canarias.

Cada prueba se pasó entre cinco y ocho centros diferentes, procurando siempre que la elección de los centros para cada una de las pruebas garantizara una cierta variedad geográfica y, consecuentemente, económica y social. Cada pregunta fue respondida por un número de alumnos que oscilaba entre 83 y 229.

A continuación se indica el número de pruebas pasadas en cada uno de los niveles, los números de centros y alumnos que participaron; señalándose también las edades aproximadas de la mayoría de los alumnos.

Nivel	Número de pruebas	Número de alumnos	Número de centros	Edad aprox. de alumnos
Segundo de EGB	12	1.071	24	7-8
Tercero de EGB	9	1.162	26	8-9
Cuarto de EGB	25	1.197	31	9-10
Quinto de EGB	23	1.568	27	10-11
Sexto de EGB	7	2.008	31	11-12
Séptimo de EGB	20	1.570	29	12-13
Octavo de EGB	14	1.555	33	13-14
Primero de BUP	17	2.939	21	14-15
Segundo de BUP	17	1.281	18	15-16

Corrección de las pruebas

La corrección de los ejercicios se efectuó con el criterio de *bien* (1) o *mal* (0), sin considerar otras calificaciones. El procedimiento fue el siguiente:

1) Los profesores responsables de un ciclo fijaron criterios de corrección para cada ejercicio. Luego corrigieron las pruebas y sumaron los aciertos de cada ejercicio por grupo de alumnos.

2) Los coordinadores del trabajo revisaron, mediante una muestra, las correcciones y las sumas de los aciertos de cada ejercicio por grupo de alumnos.

3) Posteriormente, las sumas de los aciertos de cada ejercicio, por grupo de alumnos, se trataron mediante un programa informático, y se obtuvieron los resultados para cada ejercicio.

Obtención de conclusiones

Una vez conseguidos los resultados totales para cada uno de los ejercicios, se inició la fase de obtención de conclusiones.

En primer lugar, cada grupo de profesores (por ciclos educativos) estudió los porcentajes de aciertos obtenidos y elaboró con ellos los *Primeros Informes de Conclusiones.*

Se contrastaron los distintos *Primeros Informes de Conclusiones* y con ellos se elaboró un *Segundo Informe de Conclusiones,* en el que la metodología de exposición fue idéntica para todos los niveles.

La redacción de este *Segundo Informe de Conclusiones* se hizo atendiendo a los siguientes aspectos: conjuntos numéricos, significado y propiedades de las operaciones, cálculo, problemas, algoritmo, divisibilidad, orden y representación gráfica. Una versión, mejorada y sintetizada, del *Segundo Informe de Conclusiones* constituye el capítulo 2 del *Estudio.*

El *Segundo Informe de Conclusiones* fue discutido en el *Primer Seminario sobre el Aprendizaje de los Números,* organizado por nosotros, en el que participaron 56 de los profesores que colaboraron en la aplicación de las pruebas a sus alumnos.

Teniendo en cuenta el *Segundo Informe de Conclusiones* y los resultados del *Primer Seminario sobre el Aprendizaje de los Números,* se redactó el *Informe Definitivo de Conclusiones,* que constituyen los capítulos 3 a 11 del *Estudio.*

CONCLUSIONES GENERALES

Se obtuvo multitud de conclusiones. Aquí presentamos aquellas que tienen un carácter general y que resultan, a nuestro juicio, las más interesantes.

El progresivo empeoramiento del aprendizaje

Podemos resumir esta primera conclusión diciendo que los alumnos aprenden menos a medida que aumenta el nivel educativo en el que se encuentran. Fijando la atención en los niveles extremos, los alumnos de Primero de EGB aprenden casi todo lo que se les enseña, mientras que los de Primero de BUP aprenden muy poco. Aunque ésta es la tendencia general, debe señalarse que, a la hora de analizar los datos, surgen excepciones, como ahora se verá. Los porcentajes medios de aciertos por alumno para cada nivel fueron los siguientes:

Nivel	Aciertos (%)
Segundo de EGB	80
Tercero de EGB	73
Cuarto de EGB	68

Nivel	Aciertos (%)
Quinto de EGB	58
Sexto de EGB	43
Séptimo de EGB	48
Octavo de EGB	57
Primero de BUP	52
Segundo de BUP	42

Se puede apreciar que, en general, los porcentajes van disminuyendo. Del 80 por 100 de Segundo de EGB se desciende progresivamente hasta el 43 por 100 de Sexto de EGB; pero al llegar a Séptimo de EGB, el porcentaje aumenta en relación al nivel anterior, y vuelve a subir en Octavo de EGB; aunque a partir de aquí decrece de nuevo en Primero y Segundo de BUP, hasta llegar al 42 por 100.

Lo anterior tiene diversas explicaciones: A medida que aumenta el nivel, los contenidos crecen en dificultad. También se puede argumentar que el aprendizaje de las matemáticas tiene carácter acumulativo, de manera que las deficiencias de un nivel se multiplican en los niveles superiores. Por otro lado, no podemos olvidar que una mayor abstracción lleva consigo una disminución del interés en la mayoría de los alumnos.

En el trabajo de Perestelo (1990) se encuentra un más amplio análisis de lo comentado en esta sección.

La asimetría en el aprendizaje

A lo largo de todos los niveles de EGB y BUP se detecta un fenómeno en la enseñanza de las matemáticas, particularmente en la de los números, que hemos denominado *asimetría en el aprendizaje*. Esta situación de *asimetría* se presenta en temas muy variados. Presentamos ahora varios ejemplos que corresponden a diferentes tipos de *asimetría*.

Hay operaciones con los números que tienen más de un significado, y ocurre que estos significados alcanzan un aprendizaje desigual. Veamos un ejemplo que aclare la idea. El cociente de la división entera de a entre b tiene dos significados, aunque en el aprendizaje no se ponen de manifiesto con igual intensidad:

1. El significado de *número de grupos* que aparecen al repartir a objetos en grupos de tamaño b.
2. El significado de *tamaño de cada grupo* al repartir a objetos en b grupos de igual tamaño.

El siguiente problema corresponde al significado de *número de grupos:*

«Cuento 18 ruedas de bicicleta. ¿Cuántas bicicletas hay?»

Este otro enunciado corresponde al significado de *tamaño de cada grupo:*

«He comprado 5 bombones por 45 pts. ¿Cuánto cuesta un bombón?»

En los problemas propuestos a los alumnos de 4.º y 5.º de EGB, los porcentajes de aciertos se sitúan en los intervalos que se indican en el siguiente cuadro:

Nivel	Número de grupos (%)	Tamaño del grupo (%)
4.º EGB	57-67	72-82
5.º EGB	28-41	24-74

Concluimos que los dos significados de la división tienen un aprendizaje asimétrico, en el sentido de que los alumnos conocen y manejan mejor el segundo significado.

Hay cierto tipo de procesos en los que puede considerarse inverso uno del otro, de modo que los resultados que obtienen los alumnos son diferentes en uno y otro proceso. Ejemplos de este tipo de procesos son: la *lectura/escritura* de números y la *representación/lectura* de números en una recta.

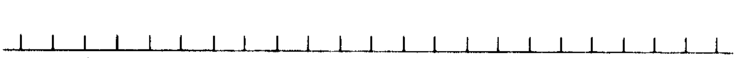
La *lectura* (escribir con palabras un número dado con cifras) y la *escritura* (escribir con cifras un número dado con palabras) de números naturales arrojan resultados diferentes, tal como se pone de manifiesto en el siguiente cuadro:

Nivel	Escritura (%)	Lectura (%)
2.º EGB	79-85	85-96
3.º EGB	74-83	85-95
4.º EGB	34-92	81-97
5.º EGB	66-90	69-92

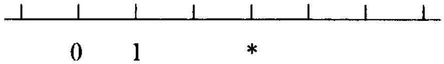
Por lo tanto, es más difícil la *escritura* que la *lectura* de números naturales. Otros resultados permiten afirmar que también es más difícil la *escritura* que la *lectura* de decimales con parte entera nula. Por el contrario, es más difícil la *lectura* que la *escritura* de decimales con parte entera no nula.

La *representación* de números sobre una recta, en la que se han señalado un origen y una unidad, arroja mayores porcentajes de aciertos que la *lectura* de un número ya representado. Por ejemplo, a los alumnos de 4.º de EGB se les plantearon los siguientes ejercicios:

«Representa sobre la recta el número 3.»



*«Escribe el número cuya representación gráfica es la marcada con *.»*



A los alumnos de 5.º de EGB se les propuso la resolución de ejercicios similares, pero con fracciones. Los resultados fueron los siguientes:

Ejercicio	4.º EGB (%)	5.º EGB (%)
Representar un número	80	8-57
Leer un número representado	39	0-19

En los casos de operaciones conmutativas ocurre, en cierto tipo de cálculos, que los resultados dependen del orden en el que se den los elementos que intervienen. Veamos tres ejemplos.

A los alumnos de 7.º de EGB se les propuso el cálculo de la suma de un número natural más una fracción. Según el orden de los sumandos, los resultados fueron los siguientes:

Orden de sumandos	Aciertos (%)
Natural + fracción	26
Fracción + natural	44

Se concluye que es más difícil para los alumnos el cálculo del tipo *natural* + *fracción* que el del tipo *fracción* + *natural.*

La lectura de igualdades no se asimila de la misma manera en los dos sentidos. Por ejemplo, la igualdad que relaciona la potencia de exponente natural con el producto de factores iguales, $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ *(n veces)*, es comprendida de manera asimétrica. He aquí los ejercicios propuestos a los alumnos de 1.º de BUP, con sus correspondientes porcentajes de acierto:

Ejercicio	Aciertos (%)
$(1/3)^4 =$	49
$(-7/8)^6 =$	43
$2{,}9^3 =$	69
$(-0{,}65)^5 =$	38

Ejercicio	Aciertos (%)
$\frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} =$	60
$\frac{-8}{27} \cdot \frac{-8}{27} =$	44
$0{,}71 \cdot 0{,}71 \cdot 0{,}71 \cdot 0{,}71 =$	84
$(-38{,}6) \cdot (-38{,}6) \cdot (-38{,}6) =$	73

Son sensiblemente mejores los resultados al escribir un producto de factores iguales como potencia que al escribir una potencia como producto de factores iguales.

También se produce *asimetría* en la lectura de equivalencias. Si se considera la equivalencia $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$, resulta que es más difícil transformar potencias en sus equivalentes radicales (45 por 100 de aciertos) que convertir radicales en sus correspondientes potencias (54 por 100 de aciertos).

La *asimetría* se manifiesta de manera especialmente clara con las *nociones duales* en algún sentido. Así ocurre con las de *doble/mitad* y *triple/tercio;* también con los conceptos derivados de la divisibilidad *(múltiplo/divisor)* y del orden *(creciente/decreciente).*

En 4.º de EGB se preguntó por el doble, el triple, la mitad y el tercio de un número natural dado. Igualmente se hizo con los alumnos de 7.º de EGB, pero preguntándoles sobre una fracción dada. Los porcentajes de aciertos fueron los siguientes:

Nivel	Doble (%)	Triple (%)	Mitad (%)	Tercio (%)
4.º EGB	48	10	34	4
7.º EGB	42	14	21	12

Se observa que se obtienen mejores resultados al preguntar acerca del *doble* que al hacerlo sobre la *mitad.* De forma análoga son mejores los resultados sobre el *triple* que sobre el *tercio.*

A los alumnos de 7.º de EGB se les plantearon diversas cuestiones relacionadas con las nociones de *múltiplo* y *divisor;* concretamente, cuestiones de los siguientes tipos:

«Elegir de entre varios números los que sean múltiplo/divisor de uno dado.»

«Escribir un múltiplo/divisor de un número dado.»

«Saber que un número es múltiplo/divisor de sí mismo.»

«Escribir los primeros/todos los múltiplos/divisores de un número dado.»

Los resultados a las anteriores preguntas se situaron en los intervalos que se indican, según se refiera a los conceptos de *múltiplo* o *divisor:*

Concepto	Aciertos (%)
Múltiplo	33-78
Divisor	41-97

Puede observarse que son mejores los resultados relativos a las cuestiones sobre los *divisores* que los relativos a los *múltiplos.* Otros resultados permiten concluir que los alumnos conocen más y trabajan mejor la noción de *mínimo común múltiplo* que la de *máximo común divisor.*

También aparece *asimetría* en cuestiones relacionadas con el orden. A los alumnos de 2.º, 3.º y 4.º de EGB se les preguntaron cuestiones de los siguientes tipos:

«Dado un natural, escribir el siguiente/anterior.»

«Dados dos, tres o cuatro naturales, escribir el mayor/menor.»

«Ordenar un conjunto de naturales en orden creciente/decreciente.»

«Escribir los naturales, entre dos, en orden creciente/decreciente.»

Los porcentajes de aciertos se sitúan en los intervalos que se indican:

	2.º EGB (%)	3.º EGB (%)	4.º EGB (%)
Orden creciente	77-98	74-82	62-79
Orden decreciente	53-95	62-73	46-77

Queda puesto de manifiesto que las nociones asociadas al *orden creciente* obtienen mejores resultados que las correspondientes al *orden decreciente*.

Una más detallada exposición sobre la *asimetría* se encuentra en Martinón, Sauret y Grupo Anaga (1990).

La automatización de las respuestas

Los alumnos no suelen leer los enunciados de los ejercicios, sino que se limitan a una visión de los mismos con objeto de «catalogarlos» y aplicar el correspondiente automatismo de respuesta. Aclaramos esto con los dos ejemplos siguientes:

En aquellos problemas en los que sólo se pide *indicar la operación*, la mayoría de los alumnos efectúa cálculos.

Había varios ejercicios, relacionados con el orden, en los que se pedía comparar dos números sin hacer cálculos; pese a lo cual, buena parte de los alumnos los efectuó.

La comprensión de los conceptos operacionales

En general, la comprensión de los conceptos es deficiente. Particularmente lo es la comprensión del significado de algunas de las operaciones. Buena parte de los alumnos no concibe una expresión como $2 + 3$ como *un* número, sino como *dos* números.

En lo relativo a la suma, el conocimiento del símbolo «+» es alto, ya que las respuestas correctas sobre este particular están en un 85-86 por 100 entre los alumnos de 2.º de EGB. Los resultados obtenidos en la resolución de problemas, en los cursos que se indican, son los siguientes:

Nivel	(%)
2.º EGB	68-86
3.º EGB	68-86
4.º EGB	63-87

Podemos concluir que los alumnos tienen una aceptable comprensión de la noción de suma.

En lo que se refiere a la diferencia, se ha detectado una insuficiente maduración del significado del símbolo «=» en los primeros niveles de la EGB.

La resolución de problemas obtuvo porcentajes de acierto en los intervalos que se indican a continuación:

Nivel	(%)
2.º EGB	55-79
3.º EGB	49-75
4.º EGB	19-58

En relación con el producto, observamos que para los alumnos de 3.º de EGB es alto el conocimiento del símbolo «X» (93 por 100), pero bajo su conocimiento de que el producto es una suma de números iguales (24-28 por 100). La resolución de problemas obtuvo los siguientes intervalos de aciertos:

Nivel	(%)
3.º EGB	67-75
4.º EGB	44-87

La noción de división reviste especial dificultad; así se refleja en el bajo conocimiento de que *a:b* significa el número de grupos que aparecen al hacer el reparto de *a* en grupos de tamaño *b* y también el tamaño de cada grupo al hacer el reparto de *a* en *b* grupos de igual tamaño. Los alumnos de 4.º de EGB tuvieron porcentajes de aciertos, en este tipo de problemas, entre el 57 y el 82 por 100.

La noción de radicación está llena de confusiones. Por un lado, no se distingue entre las nociones de raíz y radical. Por otro lado, no se sabe que no existen raíces cuadradas reales de números negativos (sobre este particular, ver Martinón y otros, 1990).

En Díaz y Grupo Anaga (1990) se desarrollan más ampliamente estas consideraciones.

La singularidad del cero

Observamos que existen dificultades con el cero en la lectura y la escritura de números, en los cálculos sencillos con operaciones y en los algoritmos.

En general, los alumnos de 2.º a 5.º de EGB realizan bien los ejercicios de *escritura* y *lectura* de números naturales, aunque cometen errores cuando aparece la cifra cero. En Grupo Cero (1984) se estudia esta dificultad y se concluye que desaparece con el avance del aprendizaje. Un ejemplo típico de los errores cometidos es el siguiente: Escriben *5.720.817* por *cinco millones setenta y dos mil ochocientos diecisiete.*

En la *escritura* de números decimales es mayor el porcentaje de aciertos si la parte entera es no nula que si es nula. En la *lectura* se produce la situación contraria. Con *parte entera no nula,* los peores porcentajes se obtienen cuando hay ceros en la parte decimal, y tanto en la *escritura* como en la *lectura.* Con *parte entera nula,* no hay diferencia si la parte decimal contiene, o no, la cifra 0. He aquí los datos obtenidos:

	Sin 0 en parte decimal (%)	Con 0 en parte decimal (%)
Escritura		
parte entera nula	45-59	43-60
parte entera no nula	70-80	56-74
Lectura		
parte entera nula	48-86	52-80
parte entera no nula	43-76	35-52

Merece destacar el bajo conocimiento que tienen los alumnos de que el cero como última cifra decimal es superfluo. Los alumnos de 5.º de EGB obtuvieron el 54 por 100 de aciertos en el siguiente ejercicio:

Rodea con un círculo las parejas que sean iguales:

70,2	7,02	0,71	0,710
2,5	2,05	3,4	3,40

El 76 por 100 de los alumnos de 2.º de BUP desconoce que la división entre 0 no está definida. Wheeler y Fegali (1983) obtuvieron también bajos porcentajes de aciertos al presentar seis divisiones del tipo $a/0$ ($a \neq 0$) a 52 personas que se preparaban para ser profesores de Enseñanza Básica. Como indican dichos autores, el origen de algunas dificultades de los alumnos puede ser la confusión de sus profesores. También Mariotti (1986) relata una experiencia similar. Las divisiones del tipo $0/a$ ($a \neq 0$) alcanzan entre los alumnos de 2.º de BUP mejores porcentajes de aciertos (64 por 100), aunque no óptimos.

En el cálculo de potencias, los peores porcentajes se obtienen para el exponente nulo, si bien parece que en 2.º de BUP ya es sabido que $a^0 = 1$ ($a \neq 0$). La noción de que 0^0 no está definido obtuvo un resultado bajísimo (13 por 100). Hacemos notar que Gagnaire (1984) se inclina por considerar $0^0 = 1$.

Finalmente, el 0 también es un problema en los algoritmos. Por ejemplo, en las divisiones entre naturales aparecen importantes dificultades si la cifra 0 está en el cociente o si es nulo el cociente; tal como puede observarse en la siguiente tabla, que corresponde a los porcentajes de aciertos de alumnos de 4.º de EGB (divisor de una cifra):

	(%)
Cociente nulo	42-85
Cociente con cifra 0	50-81
Cociente sin cifra 0	63-88

Por otra parte, la división entre decimales y la unidad seguida de ceros presenta mayor dificultad si el decimal tiene parte entera nula que si no la tiene.

Se produce una situación de *asimetría* relacionada con el 0. A partir de la igualdad $a + 0 = a$ se pueden plantear dos tipos de ejercicios que obtienen resultados diferentes: Se encuentra mayor dificultad si se pide completar $a + \_ = a$ o $\_\_ + a = a$, que si se trata de completar $\_\_ + 0 = a$ ó $0 + \_\_ = a$. He aquí los resultados obtenidos por los alumnos de 7.º y 8.º de EGB y de 1.º de BUP:

Nivel	$a + \_\_ = a$ o $\_\_ + a = a$ (%)	$\_\_ + 0 = a$ ó $0 + \_\_ = a$ (%)
7.º EGB	48	86
8.º EGB	76	96
1.º BUP	49	77

En relación con la igualdad $a \times 0 = 0$ se advierte una mayor dificultad en completar $a \times 0 = \_\_$ que en completar $a \times \_\_ = 0$; tal como se pone en evidencia en el siguiente cuadro:

	Aciertos (%)
$a \times 0 = \_\_$	58
$a \times \_\_ = 0$	86

Una amplia exposición sobre este asunto se encuentra en Pérez, Torres y Grupo Anaga (1990).

Las fracciones y los decimales

La enseñanza de los números racionales no negativos se inicia de forma casi simultánea con las fracciones y los números decimales. Sin embargo, pocos son los alumnos que identifican el conjunto de las fracciones con el de los números que tienen un desarrollo decimal finito o periódico.

En casi todos los tipos de ejercicios se pone de manifiesto que a los alumnos les resulta más difícil el trabajo con fracciones que con decimales. Por ejemplo, encuentran dificultades en la suma de fracciones sencillas, y los porcentajes de aciertos en problemas que presentan datos en forma de fracción son sensiblemente inferiores a los que se obtienen en los problemas que ofrecen datos en forma decimal. Quizá resulte procedente reconsiderar la presencia de las fracciones en la Enseñanza Básica.

La lectura y la escritura de números

En la *escritura* de números (escribir con cifras un número dado con palabras) y en la *lectura* de números (escribir con palabras un número escrito con cifras) se observan dificultades que tienen su origen en el mal conocimiento de las reglas de escritura y lectura.

Se ha detectado cierta confusión con el subíndice ($_1$) de millón; así ocurre que algunos alumnos lo interpretan como una cifra más. También ocurre que se confunden la *coma decimal*, para la que siempre hemos usado el símbolo de *coma superior* ('), y el *punto de mil* (.). Por otro lado, se usan mezclas de las diversas formas que suelen utilizarse para leer un número escrito en forma decimal.

Las normas sobre escritura de números contenidas en el *Sistema Internacional de Unidades SI* (1974) son totalmente desconocidas por los alumnos y los profesores.

La terminología

En general, la terminología es mal conocida, especialmente porque se produce cierta confusión de términos.

Los términos *suma* y *sumando* no son dominados por los alumnos de los primeros niveles de EGB, y aproximadamente la mitad de los alumnos de los cursos iniciales de BUP desconoce el significado del término *opuesto*.

Muy pocos alumnos conocen los términos *diferencia*, *sustraendo* y *minuendo;* existe confusión entre estos dos últimos términos.

No se conocen los términos *producto* y *factor*. Hay menor conocimiento del término *triple* que del *doble*, y menor también del *cuádruple* que del *triple*.

En lo que se refiere a la división hay una cierta confusión entre los términos *dividendo* y *divisor*. Existe una dificultad mayor en conocer las nociones de *mitad* y *tercio* que en conocer las de *doble* y *triple*, respectivamente; lo que constituye un ejemplo de asimetría en el aprendizaje.

En la potenciación se produce una cierta confusión entre los términos *exponente* y *base*.

Las expresiones literales

En las expresiones literales aparecen ciertas dificultades. Los resultados con sumas literales son medios o bajos. Los alumnos de Segundo de BUP, por ejemplo, tienen dificultades para decidir si es cierta o falsa la expresión $a - (b + c) = a - b - c$. Las igualdades en forma literal en las que aparecen sumas, diferencias, productos y cocientes son mal conocidas.

La jerarquía de las operaciones y los paréntesis

Hay ciertas dificultades en los cálculos con una sola operación; pero las principales se encuentran cuando se ha de efectuar un cálculo en el que intervienen varias operaciones o en el que aparecen paréntesis, aunque intervengan números pequeños y los cálculos sean sencillos. Con una sola operación, aparecen dificultades en el cálculo de la suma de dos enteros negativos y en el de las expresiones de la forma $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$. Si intervienen varias operaciones, surgen graves dificultades; tal como ocurre en ejercicios del tipo $a + b - c$ y $a - b + c$.

Se encuentran dificultades en la lectura de expresiones escritas *en horizontal*, como, por ejemplo, $8 + 6 : 3$; posiblemente por no estar habituados los alumnos a ellas.

El principal problema radica en el desconocimiento de la *jerarquía de las operaciones* y en el correcto uso de los paréntesis. Pocos alumnos realizan bien un cálculo si el orden en el que aparecen los números difiere del orden en el que se deben realizar los cálculos.

Aparece una clara dificultad con los paréntesis, especialmente si delante de ellos aparece un «—».

Los problemas

No queda claro que la presencia de ilustraciones ayude al alumno a resolver un problema. Puede afirmarse, por el contrario, que una mala ilustración puede inducir a error; de forma que las ilustraciones pueden convertirse en una dificultad, en lugar de ser una ayuda.

La forma del enunciado juega un papel importante. Se obtienen mejores resultados cuando primero se describe la situación y luego se pregunta que cuando se procede de forma inversa.

El contexto del problema es también de gran importancia, de manera que si es extraño a las vivencias del alumno, se obtienen peores resultados.

Asimismo tiene importancia la terminología que se utiliza, y ello, en dos direcciones. Por un lado, si se emplean términos que los alumnos no comprenden bien, se obtienen porcentajes de aciertos bajos. Por otro lado, la presencia de términos que sugieran una operación puede confundir al alumno. Por ejemplo, la aparición en los enunciados de expresiones con la palabra *más* induce a pensar que se trata de una suma, y algo similar ocurre en expresiones con la palabra *menos*. Igualmente en los problemas en los que aparece una división, las dificultades son mayores si no se emplea el término *repartir*.

En las operaciones de suma, diferencia, producto y cociente se han obtenido siempre mejores resultados cuando los datos del problema estaban expresados en forma decimal que cuando lo estaban en forma de fracción.

En general, los problemas en los que intervienen varias operaciones ofrecen mayor dificultad al alumno que aquellos otros en los que sólo aparece una operación.

Sorprendentemente, en los últimos cursos de la EGB no se obtienen peores resultados en problemas literales que en problemas numéricos. En BUP, sin embargo, aparece una elevada dificultad en los problemas que presentan los datos en forma literal.

Los algoritmos

Una primera dificultad en la aplicación de los algoritmos se presenta en conocer la correcta colocación de los términos; de tal forma que se obtienen peores resultados si los términos de la operación se dan *en horizontal* (por ejemplo, 43 + 765) que cuando se dan colocados *en vertical*, para aplicar directamente el algoritmo, como ocurre en

$$\begin{array}{r} 43 \\ +\ 765 \\ \hline \end{array}$$

La dificultad, lógicamente, aumenta si además hay que *llevarse*. La variedad de las dificultades es grande. Resaltamos ahora las que son comunes a varias operaciones: cuando los términos no tienen el mismo número de cifras, cuando hay términos naturales y decimales (o fraccionarios), o cuando uno de los términos es el número 0.

BIBLIOGRAFÍA

Afonso Martín, M. C.; Hernández Domínguez, J.; Palarea Medina, M. M. y Socas Robayna, M. M. «Experiencia didáctica: Resolución de problemas interesantes y poco frecuentes en la EGB». *Números, 13*, 1986, pp. 35-48.

Balbuena Castellano, L. y Pérez Hernández, A. A. «Investigación sobre el nivel matemático en 3.° de BUP». *Números, 2*, 1982, pp. 85-94.

Behr, M. J.; Wachsmuth, I.; Post, T. R. y Lesh, R. «Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment». *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 1984, pp. 323-341.

Bell, A. «Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros». *Enseñanza de las Ciencias, 4,* 1986, pp. 199-208.

Bezuszka, S. J. y Kenney, M. J. «Challenges for enriching the curriculum: Arithmetics and number theory». *Mathematics Teacher, 76,* 1983, pp. 250-252.

Bonilla Paz, B.; González de Santa Cruz, A. y García, J. C. «Investigación sobre el nivel matemático en 1.° de BUP». *Boletín de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, 2,* 1979, pp. 10-19.

Comas i Mongay, M. D. «Autocontrol y comportamiento: Efectividad de las técnicas autoinstruccionales en el aprendizaje de las operaciones aritméticas». *Enseñanza de las Ciencias, 4,* 1986, pp. 23-29.

Comisión Nacional de Metrología y Metrotecnia. *Sistema Internacional de Unidades SI.* Madrid, Presidencia del Gobierno, 1974.

Díaz, F. y Grupo Anaga. «La comprensión de los conceptos numéricos». *I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Sevilla, 1990.

Fernández, J. y Grupo Anaga. «La influencia de la edad en el aprendizaje de los números». *X Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton».* Las Palmas de Gran Canaria, 1990.

Fischbein, E.; Deri, M.; Nello, M. S. y Marino, M. S. «The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division». *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 1985, pp. 3-17.

Gagnaire, P. «0^0 existe! je l'ai recontré». *Bulletin de L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 346,* 1984, pp. 624-626.

Gascón Pérez, J. «El aprendizaje de la resolución de problemas de planteo algebraico». *Enseñanza de las Ciencias, 3,* 1985, pp. 18-27.

Grisvard, C. y Léonard, F. «Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux». *Bulletin de L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 340,* 1983, pp. 450-459.

Grossman, A. S. «Decimal notation: An important research finding». *Arithmetic Teacher, 30,* 1983, pp. 32-33.

Grupo Anaga. *Estudio sobre el aprendizaje de los números en las Enseñanzas Básica y Media.* Santa Cruz de Tenerife, 3 volúmenes, 1989-1990.

Grupo Cero. *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas.* Valencia, 1984.

Hernández Domínguez, J.; Afonso Martín, M. C.; Palarea Medina, M. M. y Socas Robayna, M. M. «Propuesta didáctica sobre resolución de problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en la EGB». *Números, 13,* 1986, pp. 13-34.

Kilian, L.; Cahill, E.; Ryan, C.; Sutherland, D. y Tacetta, D. «Errors that are common in multiplication». *Arithmetic Teacher, 27,* 1980, pp. 22-25.

Laing, R. A. y Meyer, R. A. «Transitional division algorithms?». *Arithmetic Teacher, 29,* 1982, pp. 10-12.

Lamarca Paris, J. M. «Una investigación del aprendizaje del cálculo aritmético». *Enseñanza de las Ciencias, 3,* 1985, pp. 121-130.

Léonard, F. y Grisvard, C. «Sur des règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs». *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 327,* 1981, pp. 47-60.

Lessen, E. y Cumbland, C. «Alternatives for teaching multiplication facts». *Arithmetic Teacher, 31,* 1984, pp. 46-48.

Maraschini, W. y Mayer, G. «Una indagine sui fattori che influenzano le abilità di calcolo». *L'Educazione Matematica, 2,* 1983, pp. 31-40.

Mariotti, M. A. «Lo zero è un problema». *L'Educazione Matematica, 3,* 1986, pp. 263-277.

Martinón, A.; Pérez, A. A.; Sauret, M. D. y Vázquez, T. «Nota sobre radicales y raíces». *Números, 20,* 1990, pp. 25-35.

Martinón, A.; Sauret, M. D. y Grupo Anaga. «La asimetría en el aprendizaje de las matemáticas». *I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Sevilla, 1990.

Mialaret, G. *Las Matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan.* Madrid, Pablo del Río Editor, 1977.

Molina Iglesias, C. y Martinón Cejas, A. «Reflexiones sobre la didáctica de los números». *Números, 1,* 1982, pp. 17-34.

Palacios, M. C. y Ron, M. «La prueba de exploración inicial como diagnóstico de dificultades». *Apuntes de Educación (Naturaleza y Matemáticas), 22,* 1986, pp. 4-7.

Perestelo, P. S. y Grupo Anaga. «La comprensión de los conceptos numéricos». *I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Sevilla, 1990.

Pérez, A. A.; Torres, M. L. y Grupo Anaga. «La singularidad del cero en el aprendizaje de los números». *I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Sevilla, 1990.

Perret, J.-F. «Evaluation et évaluations». *Math École, 118,* 1985, pp. 2-8.

Rico, L. y Sáenz, O. «El concepto de fracción en el ciclo medio». *Apuntes de Educación (Naturaleza y Matemáticas), 6,* 1982, pp. 11-14.

Roseman, L. «Ten essential concepts for remediation in mathematics». *Mathematics Teacher, 78,* 1985, pp. 502-507.

Siders, J. A.; Siders, J. Z. y Wilson, R. M. «A screening procedure to identify children having difficulties in arithmetic». *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 1985, pp. 356-363.

Vázquez, T.; Álamo, J. M. y Grupo Anaga. «Sobre el aprendizaje del orden». *I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Sevilla, 1990.

Wheeler, M. M. y Feghali, I. «Much ado about nothing: Preservice elementary school teachers' concept of zero». *Journal for Research in Mathematics Education, 14,* 1983, pp. 147-155.