C. Materias especiales de Ciencias

El Proyecto de Instrucciones de Santander dedica a las materias especiales de ciencias en el C. P. U. el apartado C) de la segunda parte, titulada "Materias, ejercicios y didáctica". En un primer párrafo se exponen los principios generales y comunes a las prácticas de Matemáticas, de Física y Química y de Ciencias Naturales, y en los Apéndices 7.º y 8.º se reseñan más extensamente las prácticas de Matemáticas y de Física.

PRINCIPIOS GENERALES

Con estos alumnos se insistirá a lo largo del curso sobre las teorías fundamentales de Ciencias ya estudiadas en el Bachillerato, adoptando un punto de vista elevado, de modo que resalte la unidad interna en cada disciplina y la armonía del conjunto. Las prácticas en estas materias estarán orientadas por la idea de que una práctica sólo es formativa en la medida en que se comprenden su esencia y su fundamento.

1) Prácticas de Matemáticas (*)

El Curso preuniversitario, que la nueva ley de Ordenación de la Enseñanza Media establece en su artículo 38, está llamado a ser una de sus piezas fundamentales. Quienes rigen nuestra Enseñanza Media también lo estiman así, a juzgar por la atención que le vienen prestando. Unas instrucciones provisionales enviadas el pasado curso a los Centros, y la reciente disposición de que hasta que se dicten otras definitivas sigan considerándose normativas de este Curso, confiesan, como era de esperar, que el Preuniversitario no ha pasado todavía de ensayo, por lo que está sujeto a constante vigilancia. El pasado verano, en Santander, en unas reuniones de profesores oficiales y privados, se elaboró un informe, que fué elevado a la superioridad. Este informe y otros asesoramientos de personas relevantes de la docencia española tal vez sean datos valiosos para quienes hayan de dictar las instrucciones definitivas. Pero hemos de confesar nuestro miedo de que estas instrucciones definitivas puedan salir demasiado pronto. El Preuniversitario es niño aún; no ha mucho que le hemos visto nacer, y tememos que se desarrolle con excesiva rapidez, se vista de largo, ya hecho un hombrecito, y pueda defraudarnos quedándose en menos de lo que habíamos soñado.

El nuevo plan de estudios está todavía pendiente de observación, y tal vez amenazado de algún pequeño retoque. Consecuencia de este plan será el Preuniversitario, que con mayor razón, por ser pieza nueva en la Enseñanza Media, necesita someterse a una detenida experiencia antes de articularlo definitivamente. Su organización y su didáctica se prestan a la sugestión. Al trasladar aquí algunos de mis puntos de vista sobre

---

(*) *"Los alumnos se ejercitarán en la resolución de problemas relativos a todas las ramas de la Matemática estudiada en el Bachillerato, y el profesor cuidará de imbuirles la idea de que no hay diferencia esencial alguna entre un teorema y un problema. En la resolución de cada problema se utilizarán los métodos aritméticos, algebraicos, geométricos y gráficos ya estudiados. Para la enseñanza de las Matemáticas se dedicará una sesión diaria de una hora." (Proyecto de Instrucciones; Materias, ejercicios y didáctica, ap.* c), *núm.* 1).

El apéndice 7.º dice así: "Pretendiendo, entre otras cosas, que el alumno de matemáticas en el Curso Preuniversitario alcance a ver en parte el desarrollo formal de esta ciencia, y puesto que se le supone ya en posesión de los conocimientos adquiridos en los seis primeros cursos del Bachillerato, la labor a realizar durante este curso especial, aparte de la resolución de problemas y comentarios de textos de contenido científico-matemático, versará sobre el estudio o revisión de aquellos conceptos fundamentales o temas que quedaron como vacío o lagunas en esta disciplina tan compleja. Sirvan como ejemplo los siguientes: el número natural y la ampliación de número, leyes formales del cálculo, la proporcionalidad y sus aplicaciones en aritmética y geometría, el concepto de eliminación de una incógnita en un sistema de ecuaciones y el teorema de la equivalencia, potencia de exponente cero, negativo y fraccionario, operaciones con números aproximados, conceptos de función, límite aritmético y funcional, punto del infinito, radios y cambio de unidad en la medida de arcos y ángulos..., etc...

En cuanto a la resolución de problemas, y según la naturaleza de éstos, se cuidará que el alumno aprenda a discernir en el empleo de los métodos de resolución: análisis, síntesis, lugares geométricos, semejanza, rotación, simetría..., etc., adiestrándolo de esta suerte en la labor de discurrir por cuenta propia, que ya habrá iniciado en cursos anteriores.

Los problemas de física se tratarán de común acuerdo en las materias afines, con la colaboración mutua entre los profesores de Física y Matemáticas."

la didáctica de la Matemática, tengo en cuenta que cada maestrillo tiene su librillo. Por ello no aspiro a modificar una sola línea del "librillo" de los demás.

El alumno del Preuniversitario de ahora ha sabido en su día, mejor o peor, casi todas las materias contenidas en los cuestionarios de los seis cursos y ha resuelto ejercicios y problemas relacionados con las teorías estudiadas. Pero es evidente que, por las muchas asignaturas que ha tenido en cada curso y otros imponderables, no ha podido darse perfecta cuenta del camino recorrido, con prisas las más de las veces. Algunas cuestiones de su agrado, que llegó a dominar, ya apenas le suenan; muchos conceptos los tiene completamente olvidados y otros los posee con inseguridad. El Preuniversitario viene a subsanar estas deficiencias, a dar actualidad a cosas ya vividas, buscando su valor formativo.

Admito que en cada curso se establecieron las relaciones más elementales entre las teorías o prácticas del mismo y con las cuestiones que se estudian en las asignaturas afines (principalmente con la Física), por lo que, sin excluir la tarea de relacionar conocimientos siempre que haya ocasión para ello, creo que son más propias de este curso las siguientes:

1.ª Repasar y actualizar conceptos.
2.ª Fomentar la agilidad de cálculo.
3.ª Sedimentar teorías fundamentales y prácticas de frecuente aplicación.
4.ª Resolver problemas.
5.ª Ejercitar en la buena expresión oral y escrita.

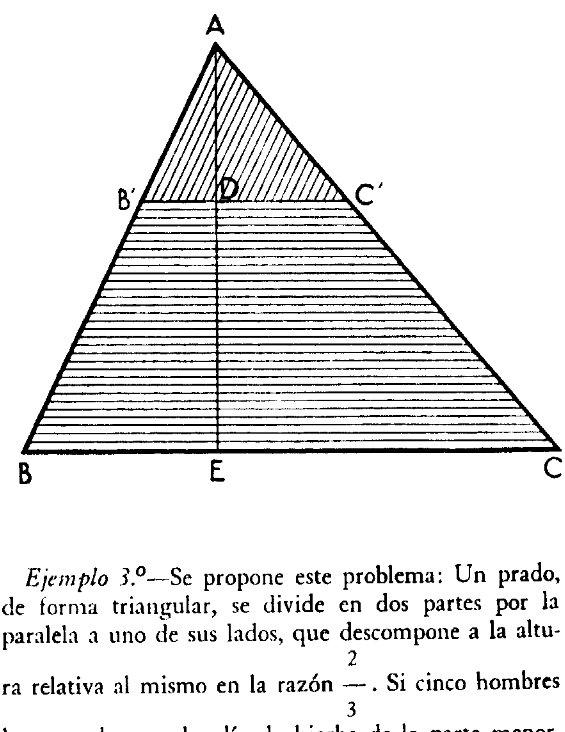
REPASO DE CONCEPTOS

Es sabido que el niño se resiste a la adquisición de los conceptos matemáticos, por el carácter abstracto de los mismos. Muchos, al dar una definición, lo hacen como si se tratara de algo perteneciente a las ciencias de la Naturaleza; no alcanzan a ver que se trata de definiciones nominales. Esto obliga, *siempre*, a ir muy despacio en las lecciones densas en conceptos fundamentales, pues de nada servirá pasar adelante si aquello de que se va a seguir hablando no se ha captado bien.

El valor educativo del repaso de conceptos es grande, pues si el alumno ha de percibir con claridad, está obligado a fijar su atención, acto intelectual éste al que Balmes califica como el más indispensable en todos los trabajos intelectuales. Y la realidad nos muestra que los alumnos del Preuniversitario, o no tienen algunos conceptos claros, o los tienen olvidados. De aquí la necesidad de volver sobre ellos. Este repaso puede hacerse mediante la proposición de cuestiones o ejercicios relacionados con el concepto o conceptos que se deseen repasar.

Ejemplo 1.º—El profesor deja caer un objeto y pregunta por qué cae. Se le contesta que por la acción de la gravedad. De aquí, se pasa a la consideración de que el peso es una fuerza (magnitud vectorial), y se llega así al concepto de vector y a definir su módulo y su argumento. Con ejemplos variados se insistirá para establecer la diferencia entre magnitudes escalares y vectoriales. Se advertirá que la Matemática tiene capítulos dedicados al estudio de vectores en el espacio de tres dimensiones. Tal vez baste todo esto para la sesión de un día. En la clase del día siguiente pueden prodigarse los ejercicios de aplicación y reafirmación de lo estudiado. Como el número complejo es la versión analítica del vector (ente geométrico), debiera repasarse el estudio de estos números en clases inmediatas.

Ejemplo 2.º—Con motivo del anuncio en la prensa de una emisión de acciones u obligaciones de una empresa o entidad bancaria, se hará leer el anuncio a uno de los alumnos. Ello da pie para recordar conceptos relativos a esta parte de la Matemática financiera: emisiones a la par, cambio, tanto por ciento efectivo, gastos del suscriptor, etc., y otros puntos de interés contenidos en el anuncio. Podría iniciarse el repaso sistemático de la aritmética comercial, que puede continuarse en otras sesiones. Unos ejercicios típicos intercalados ayudarán a actualizar este capítulo, de tan constante presencia en la vida diaria.



Ejemplo 3.º—Se propone este problema: Un prado, de forma triangular, se divide en dos partes por la paralela a uno de sus lados, que descompone a la altura relativa al mismo en la razón $\frac{2}{3}$. Si cinco hombres han segado en ocho días la hierba de la parte menor, ¿cuántos días tardarán catorce hombres en segar la parte mayor, si siete de éstos siegan como cinco de aquéllos?

Por ser

$$\frac{AD}{DE} = \frac{2}{3}, \text{ es } \frac{AD}{AE} = \frac{2}{5}; \quad \frac{\text{Area de } AB'C'}{\text{Area de } ABC} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25},$$

y $\dfrac{\text{Area de } AB'C'}{\text{Area de } B'BCC'} = \dfrac{4}{21}$. La regla de tres compuesta:

Segadores	*Días*	*Area*	*Rendimiento*
5	8	4	7
14	X	21	5

nos conduce a

$$\frac{8}{x} = \frac{14}{5} \cdot \frac{4}{21} \cdot \frac{5}{7} = \frac{8}{21} \quad \text{de donde } x = 21 \text{ días.}$$

La resolución de este problema se presta a repasar la semejanza de triángulos; la importante propiedad, frecuentemente olvidada por los alumnos, de que la razón de las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza; el concepto de razón, la proporcionalidad de magnitudes, la regla de tres compuesta, etc.

Ejemplos análogos a éstos pueden conducir fácilmente a la clase, hábilmente dirigida por el profesor, a la necesidad de actualizar y relacionar conceptos, precisando el alcance de los mismos. Atinadas preguntas o sencillas cuestiones impulsarán la participación activa de los escolares. No importa que sean elementales; por el contrario, deben serlo si encierran verdadero interés y contribuyen a iluminar rincones oscuros.

Ejemplo 4.º—Si un metro de tela cuesta 10 pesetas, ¿cuánto importarán 6 metros? Si por una peseta nos dan 10 metros de cuerda, ¿cuántos nos darán por 6 pesetas? Las contestaciones a estas preguntas, son: 60 pesetas a la primera, y 60 metros a la segunda.

He aquí un ejemplo que mueve a repasar la multiplicación con números concretos y obliga a fijarse en que el producto es de la misma naturaleza del multiplicando. La operación inversa (división) da lugar a un problema de "partición" si dados el producto y el multiplicador se pide el multiplicando, y de "medición" si dados el producto y el multiplicando se pide el multiplicador. Se llega así a las puertas del problema de la medida, que el profesor puede explicar con la extensión y detalle que estime conveniente. A ser posible, la clase debe iniciarse con una cuestión o problema extraídos de la vida cotidiana, que susciten en el alumno el interés o la curiosidad.

Los conceptos fundamentales de la Matemática elemental no son muchos, y entre otros, consideramos merecedores de una mención en el Preuniversitario: el número natural y las ampliaciones de los campos de números; las unidades angulares y de arcos, deteniéndose en el radián; la proporcionalidad y sus aplicaciones en geometría (semejanza); el concepto de ecuación, el de raíz o solución; equivalencia de ecuaciones y sistemas; la igualdad de figuras, y en particular la de triángulos; las simetrías axial y central; lugares geométricos; potencia de un punto respecto de una circunferencia; las razones trigonométricas; logaritmo de un número y sus primeras propiedades; el concepto de límite de una sucesión, el de función y el de límite funcional; el de función continua y el de derivada.

AGILIDAD DE CÁLCULO

El cálculo, y en particular el cálculo con expresiones literales, suele ser de lento aprendizaje. Es un instrumento indispensable, que ha de manejarse con soltura. Muchos de nuestros escolares no pueden seguir una explicación que se les hace en la pizarra porque, poco hábiles en las transformaciones del cálculo, se pierden a mitad del camino. Lograr que el alumno posea facilidad de cálculo es como fortalecer al deportista mediante los ejercicios físicos apropiados; es inyectarle confianza en sí mismo, es poner a punto los instrumentos que va a emplear en su trabajo. Además, el logro de un buen calculador no sólo proporciona el fin apetecido de dotar al alumno de una aptitud de gran utilidad, sino que a lo largo del camino ha producido frutos de alto valor educativo, pues ha desarrollado, entre otras virtudes, la constancia y la paciencia.

Sin olvidar los ejercicios de cálculo numérico y de cálculo mental, para mantener una mínima rapidez en los mismos, en el Preuniversitario deben prodigarse los ejercicios de cálculo con expresiones literales. Posiblemente sea el cálculo con estas expresiones la parte más árida y repugnante para los escolares. Se trata de repasar y cimentar las propiedades de las operaciones y las transformaciones basadas en las leyes formales. Los ejercicios, en su mayor parte, se refieren a simplificar expresiones, que dicen poco a la intuición y a la resolución de ecuaciones y sistemas. Forzoso es admitir mucha paciencia en el profesor, para obtener, por la vía de ejemplo, que la tenga el alumno.

El cálculo ágil y seguro es la humilde "mano de obra" de la Matemática; y es sabido que los edificios los proyectan los arquitectos, pero los levantan los obreros. Hemos conocido alumnos con especiales aptitudes para la Matemática, que oponían resistencia a una mínima seguridad y rapidez en las operaciones; y otros que, por el contrario, con facilidad para calcular, eran incapaces de asimilar un sencillo razonamiento. Estas aptitudes opuestas obedecen a especiales disposiciones de cada individuo. Y aquí está una fundamental labor del profesor: percibir la aptitud de cada alumno para fomentar la facultad de razonamiento en los que, fáciles para el cálculo, carezcan de ella, y ejercitar en la adquisición de tan valioso instrumento a los bien dotados. Porque no hay que olvidar que el cálculo literal encierra en sí un estimable valor educativo desde el punto de vista matemático. No consiste exclusivamente en operar con rapidez y sin equivocarse; esto es lo de menos. Lo importante es que cada ejercicio coloca al alumno ante una situación, que debe resolver con claridad de visión eligiendo el mejor camino.

Ejemplo 1.º—Sea simplificar la expresión:

$$\left[\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{4\,.\,x}\right] : \left[\frac{1}{(x+1)^2-(x-1)^2}\right]$$

El alumno debe comenzar por fijar su atención en la misma, para percibirla en su conjunto. Se trata del cociente de dos fracciones, que deben simplicarse previamente. Para ello, en vez de desarrollar las potencias indicadas, convendrá aplicar la propiedad "diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia" (de tan frecuente uso). Con este primer paso se reduce a

$$\frac{(2\,.\,x)\,.\,4}{4\,.\,x} : \frac{1}{(2\,.\,x)\,.\,2},$$

de la que se deduce inmediatamente la expresión final: $8\,.\,x$.

Ejemplo 2.º—Si se trata de simplificar la expresión

$$\left[\frac{5.x+y}{x}-\frac{3.y-x}{y}\right].\frac{x.y}{x+y}$$

consideraríamos poco hábil al alumno que no se diera cuenta en seguida de que el producto $x.y$ aparecerá en los dos términos de la fracción producto, por lo que debe considerarse suprimido de antemano. Queda en un primer paso:

$$\frac{5.x.y+y^2-3.x.y+x^2}{x+y}$$

y como el numerador se reduce a $(x+y)^2$, se llega a

$$\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y$$

Ejemplo 3.º—La ecuación

$$(a+b).x^2-(a^2-b^2).x-(a+b)^2x+$$
$$+(a^2-b^2).(a+b)=0,$$

de complicada apariencia, da ocasión para practicar la operación de sacar factor común, pues sacando x de los dos primeros términos, $a+b$ de los dos últimos y después $(a+b).x-(a^2-b^2)$, se escribe:

$$[(a+b).x-(a^2-b^2)].[x-(a+b)]=0,$$

que se descompone en dos ecuaciones de primer grado, de soluciones: $x=a-b$ y $x=a+b$.

Ejemplo 4.º—De las relaciones:

$$a+b=m^2\ [1],\ a=-m.p\ [2],$$
$$b=-m.n\ [3],\ c=-n.p\ [4].$$

obtener la relación $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

Multiplicando [2] y [3], se obtiene: $a.b=m^2.n.p$, y teniendo en cuenta [1] y [4]: $a.b=-c.(a+b)$. De aquí, dividiendo por $a.\ b.\ c$ y transponiendo términos:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

Muy conveniente es la proposición de problemas que obliguen al alumno a perfeccionarse en el cálculo. Asimismo, deben seleccionarse algunos antiguos o curiosos, para llamar su atención y despertar su interés.

Ejemplo 5.º—En la expresión

$$\left((x^4+x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right)$$
$$\left((x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x+1}\right).$$

se pueden suprimir las fracciones sin que se altere el producto. Explíquese esta particularidad.

El primer paréntesis equivale a $\frac{x^5+1}{x-1}$, y el segundo a $\frac{x^5-1}{x+1}$.

El producto de estas dos *fracciones* se puede escribir:

$$\frac{x^5-1}{x-1}.\frac{x^5+1}{x+1},$$

que no difiere del producto

$$(x^4-x^3+x^2-x+1),$$
$$(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

obtenido suprimiendo las fracciones.

Ejercicios análogos a éstos, previamente seleccionados y ordenados por su dificultad creciente, ayudan a que los alumnos se familiaricen con el cálculo. Las demostraciones de identidades trigonométricas y las operaciones con radicales y potencias de exponente racional son también recomendables.

SEDIMENTO DE TEORÍAS Y PRÁCTICAS

Son variados los capítulos de la Matemática que por su carácter formativo o sus ulteriores aplicaciones piden un lugar en el Preuniversitario. Suelen ser unos predominantemente teóricos, y otros, de marcado valor instrumental. Con los primeros, se revisan, dando actualidad y vivencia a materias ya casi olvidadas, cuestiones fundamentales e indispensables a la formación matemática de un bachiller medio; con los segundos, se proporciona al alumno una eficaz ayuda para sus estudios posteriores. Con esta manera de hacer queremos interpretar la segunda de las direcciones que prepugna la orientación metodológica 4.ª de las instrucciones de Santander. Citamos, a título de ejemplo, sólo dos de cada clase.

Entre las cuestiones teóricas a revisar, nos vienen a la pluma: las ampliaciones sucesivas de los campos de números, las operaciones con ellos y las leyes formales de éstas (téngase en cuenta que el número es el personaje central de la Matemática) y el concepto de función; su clasificación y propiedades; límite funcional, función continua, derivada, función creciente, concavidad, máximos y mínimos relativos.

En cuanto a las cuestiones de índole *práctica:* lo relativo a áreas y volúmenes y los determinantes (sus propiedades elementales, aplicación inmediata y, en particular, a los sistemas de ecuaciones). Basta con recordar las reglas o propiedades y saber de dónde se deducen o cuál es el caso general que las comprende. Así, nos parece suficiente que el alumno recuerde el área de la zona esférica y tenga clara idea de que se obtiene por paso al límite del área descrita por un segmento que gira en torno de un eje coplanario con él y que no le atraviesa. La demostración no importa en el Preuniversitario.

Es cierto que las materias que hemos calificado de teóricas o prácticas no lo son de manera exclusiva. Al dar la definición de función continua y estudiar sus propiedades, se está obligado a resolver ejercicios prácticos relativos a ellas; y al repasar las aplicaciones de los determinantes no se puede evitar la revisión de su concepto y la mención de sus propiedades. En la Matemática, la teoría y la práctica se mezclan y entrelazan ayudándose mutuamente; si una se da sin la otra es por poco trecho. Con las denominaciones de teóricas o prácticas queremos resaltar solamente una cualidad predominante; esto es, según que constituyan el esquema de un modo de pensar o de un modo de hacer.

Como introducción a las materias objeto de repaso debe tratarse de justificar la necesidad de su inclusión en el programa. El alumno no siente interés por aquello cuya utilidad posterior no alcanza a ver. Hay que convencerle con ejemplos de que se estudia por algo y para algo; que tiene contacto con la realidad en que vive. Hay que explicarle cómo la Matemática debe gran parte de sus conquistas al impulso de los problemas planteados por las ciencias de la Naturaleza.

Ejemplo.—Una misma longitud l ha sido medida por Juan, Pablo y Jaime. El primero, empleó un listón de $\frac{15}{14}$ de metro; el segundo, de $\frac{33}{16}$ de metro, y el tercero, de $\frac{55}{24}$ de metro. Los tres obtuvieron por medida un número entero. ¿Cuántos metros mide l, sabiendo que es la menor longitud que cumple las condiciones anteriores?

Nuevamente vuelve a aparecer aquí el problema de la medida. Puede hacerse observar la conmensurabilidad de l con los listones elegidos y, de paso, preguntar cuáles serían las medidas de los listones si la unidad fuese l. Se hace inevitable un recuerdo al número racional, que debe aprovecharse para insistir en su concepto. Pasando a más, podría preguntarse que si el listón de Jaime es el radio de una circunferencia, ¿la longitud de ésta y l son conmensurables entre sí? Se llega de esta forma al número irracional, y ello da pie para actualizarlo y repasar las ampliaciones de los campos de números.

La resolución del problema exige, además, un previo razonamiento para deducir que la medida de l es un número fraccionario, que tiene por numerador el *m.c.m.*, de 15, 33 y 55, y por denominador, el *m.c.d.*, de 14, 16 y 24. De esta forma queda justificado el repaso de las teorías del *m.c.d.* y *m.c.m.*, su cálculo y las primeras propiedades.

LOS PROBLEMAS

En la didáctica de la Matemática elemental consideramos los problemas como un medio, no como un fin. Para simplificar, reducimos a cuatro los tipos de cosas que el alumno de bachiller se encuentra en la Matemática: los *conceptos*, las *propiedades* (teoremas), las *reglas* y los *problemas*. Tener formación matemática es poseer los conceptos y conocer las propiedades, sabiendo relacionarlas. Las reglas emanan de las propiedades, y no hacen otra cosa que traducirlas al lenguaje vulgar o verter su contenido en aplicaciones prácticas. "Si los dos términos de una fracción se multiplican o dividen por un número, se obtiene otra fracción equivalente." Las reglas para simplificar fracciones, o para reducirlas a común denominador, son meras aplicaciones prácticas de esta propiedad. Una fórmula matemática, por ejemplo la del interés simple, es una regla que puede obtenerse aplicando a un caso concreto la propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta.

En cuanto a los problemas, constituyen un campo de pruebas para contrastar si los conceptos y propiedades han sido bien adquiridos, y un auxilio eficaz para sedimentar estos conceptos y propiedades y establecer relaciones mutuas. El problema plantea un caso concreto que se ha de resolver por el conocimiento de una propiedad abstracta, que de esta forma encuentra justificación ante la tendencia utilitaria del niño, o viene a ser el cauce para la perfecta comprensión de la propiedad. Otras veces, contribuye a retener fórmulas o reglas operativas; con frecuencia, activa en el alumno el interés por el quehacer matemático, sobre todo si el enunciado contiene, dentro de lo posible, un mínimo atractivo por su carácter histórico o anecdótico, o por su contacto con las cuestiones que la vida plantea. Además, es un reactivo eficaz para juzgar sobre los conocimiento del alumno.

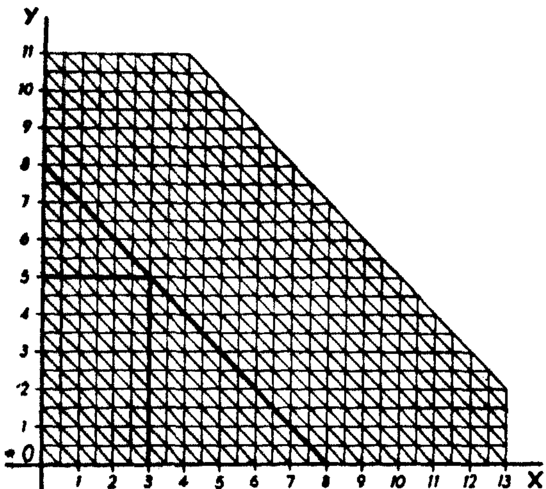
En el Preuniversitario adjudicamos al problema un lugar preeminente, como cauce que lleva al auténtico pensar matemático. La Matemática no se estudia para resolver problemas, sino que los problemas se proponen y resuelven para adquirir formación matemática. Esto es otro modo de decir que el Preuniversitario tiene la misión primordial de completar la formación del alumno, no de prepararle para que salga airoso de una prueba. Un problema poco vale en sí mismo si no lleva consigo algo más (y para hacerlo ver está el profesor), ya sea aquilatar un concepto, fijar una propiedad, o repasar una regla. Ello no quiere decir que no se ilustre a los alumnos en los métodos elementales de resolución.

Partes más o menos amplias de esta ciencia tienen en los textos capítulos enteros dedicados al estudio sistemático de estos métodos. Como ejemplo citamos los métodos especiales de la Geometría métrica elemental: traslación, simetría, rotación, semejanza, lugares geométricos, etc. Todos ellos contribuyen a la práctica del método deductivo, de tan alto valor educativo en la enseñanza de la Geometría.

Así entendido, no pondríamos inconveniente a que la Matemática del Preuniversitario se diese casi en su totalidad mediante problemas, en un sentido amplio, esto es, incluyendo preguntas sencillas, observaciones y todo género de cuestiones que por su interés promuevan la colaboración activa de la clase y permitan establecer relaciones.

No cabe en el marco de este artículo una selección de problemas propios de este Curso. El buen criterio del profesor, de acuerdo con el conocimiento de sus alumnos, de sus partes débiles y de sus necesidades más inmediatas, elegirá los más idóneos. Pero no es sólo el problema que empieza: "Hallar un número que cumpla tal condición", o "calcular el área de...", etc. Una propiedad elemental o cualquier relación sencilla puede ser punto de partida del diálogo conducente a repasar cosas, a dar formación.

La Geometría analítica y la teoría de funciones, entre otras, son veneros inagotables de temas que pueden estimular el interés de los escolares.



- Fig. 1 -

La figura 1 consiste en dos ejes rectangulares graduados, un haz de rectas paralelas a cada uno de ellos y otro de perpendiculares a la bisetriz de su ángulo. Las rectas de este último haz tienen por ecuación $x + y = s$. Por ser $y = s - x$, se puede emplear como tabla de restar. Por ejemplo, si $s = 8$ y $x = 3$, para hallar esta diferencia seguimos la perpendicular al eje OX, que pasa por su punto 3, hasta que encuentre a la transversal $s = 8$. La paralela por este punto a OX encuentra a OY en el punto $5 = 8 - 3$.

La consideración de este sencillísimo ejemplo sirve para afianzar la idea de ecuación de la recta y cómo en este caso es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los ejes es constante; cuál es la ecuación de un haz de rectas paralelas, y así por el estilo pueden sacarse a relucir otras cuestiones de esta parte elemental de la Geometría analítica.

Las figuras 2 y 3 representan: la 2, la hipérbola equilátera $x \cdot y = 1$, referida a sus asíntotas; y la 3, las curvas $y = a^x$ e $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ (o si se quiere, la curva $y = m^x$, para dos valores recíprocos de m). Mediante la figura 2, dado un punto en el eje OX, por ejemplo 4, encontramos su recíproco $\left(\frac{1}{4}\right)$ en el eje OY, siguiendo la línea de puntos. Por otra parte, comprobamos que la figura 3 nos hace corresponder sobre las curvas los puntos 4 y $\frac{1}{4}$ de la regla, cuando ésta se desliza paralelamente al eje OY.

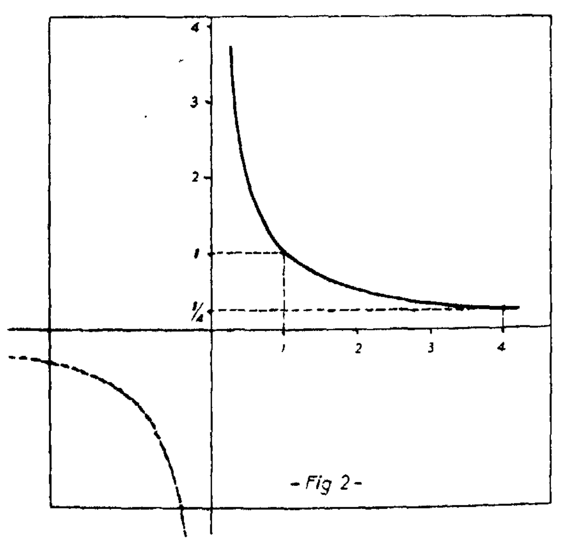
La hipérbola equilátera y la función exponencial nos muestran aquí excelentes posibilidades de repasar multitud de conceptos y propiedades relativos a estas curvas y, en general, de la Geometría analítica y las funciones. Si no se ha hecho en otra ocasión, podrá aprovecharse ésta para recordar la relación entre la hipérbola equilátera y la proporcionalidad inversa.

Cualquiera de estos temas, sacados al azar, puede abrir las puertas a una revisión, en panorámica, de campos más o menos extensos, descubriendo nuevos horizontes; y pueden aprovecharse para mostrar la esencia del pensamiento matemático como ciencia pura, o sus múltiples aplicaciones como auxiliar de otras, y para explicar el papel que desempeña en el progreso científico de la Humanidad.

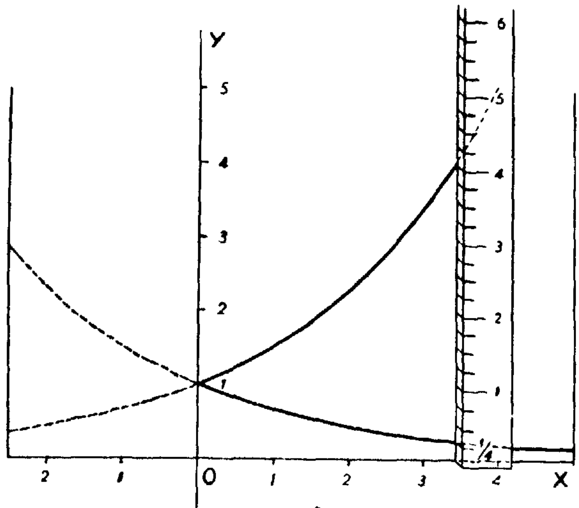
EXPRESIÓN ORAL Y ESCRITA

El niño se opone a la concisión del lenguaje matemático. El estilo rápido, cortado y preciso de esta ciencia no encaja bien con la edad de los alumnos de los primeros cursos. No me refiero a los razonamientos, sino sólo a la simple enunciación de reglas, a las definiciones, al decir las cosas, en general. Es verdad que en los primeros cursos no debe aspirarse a una perfección en este sentido, pues hemos de conformarnos, en la mayoría de los casos, con que lo entiendan y, a su modo, lo digan menos mal. Pero sí creo que el profesor debe preocuparse desde estos primeros años de rectificarles cuando sea necesario, sin dejarlo para más adelante. Es labor de mucha paciencia, sin fruto inmediato, pero a la larga, este fruto se cosecha. Tal vez sea a partir del tercer curso donde convenga insistir más en esta labor, muy pesada, es cierto, pero ineludible. Paulatinamente debe iniciárseles en la buena expresión oral y escrita, de que tanto se resienten nuestros bachilleres. Para rellenar estas lagunas que puedan quedar del Bachillerato, debe dedicarse algún tiempo, en el Preuniversitario, a la práctica del bien hablar; a ejercitar en el empleo de la palabra apropiada, en el uso adecuado de los conceptos; a ordenar y relacionar fácilmente las ideas, esto es, a decir bien, de palabra o escrito, lo que saben. Puede adquirir el alumno esta agilidad de expresión oral y escrita mediante estos caminos:

1.º *Comentario de textos.*—Elegido uno o dos textos de contenido científico-matemático, se dedicará alguna clase a la lectura de alguno de sus capítulos por uno de los alumnos. El profesor interrumpirá la lectura cuando lo crea necesario, para explicar términos y ayudar a la perfecta comprensión. A continuación, o al día siguiente, varios alumnos, designados en forma no previsible, harán de palabra el comentario. Esta exposición podrá ser discutida por



- Fig 2 -



-Fig 3-

otros alumnos designados por el profesor, o por los que voluntariamente se presten a ello. Por último, el profesor hará el resumen y señalará los aspectos positivos y negativos del trabajo. Otras veces el comentario será motivo de un tema de redacción, que podrá ser leído por los propios alumnos y, en todo caso, devuelto debidamente corregido.

Entre otros textos para comentar, se nos ocurren: algunos capítulos, previamente seleccionados, de *La Ciencia y la Hipótesis* o de *El valor de la Ciencia,* de Enrique Poincaré, y del *Ensayo sobre las probabilidades,* de Laplace.

2.º *Síntesis de lecciones y conferencias.*—En la tercera tarea que antes exponemos aconsejamos la revisión de teorías o prácticas fundamentales más o menos extensas. Las lecciones correspondientes a esta tarea pueden ser objeto de preguntas orales o de temas escritos. El profesor corregirá la exposición oral del alumno, en cuanto a contenido científico y forma, o los ejercicios escritos, en su caso.

Igualmente, toda conferencia sobre un tema relacionado con la Matemática será objeto de resumen y comentario por parte de los alumnos, que lo expondrán en forma oral o escrita. El profesor los corregirá, atendiendo al contenido, a la perfecta comprensión, al modo de ordenar y relacionar ideas, a la precisión de los conceptos, al empleo adecuado de las palabras. Como éstas son portadoras de ideas, de aquí el apoyo que estos ejercicios prestan a la perfecta adquisición de los conceptos y, por tanto, a la formación matemática.

Los temas de estas conferencias, así como su número, serán determinados de modo que encajen en el ciclo de conferencias organizado por cada Centro, pues se persigue unidad de acción y compenetración entre los profesores encargados del Curso. Sí creemos que han de elegirse, a ser posible, temas sugestivos, incluso de carácter histórico o biográfico, con el fin de excitar la curiosidad, despertar inquietudes y fomentar vocaciones. He aquí algunos títulos que consideramos apropiados, siempre que se adapten a la edad y conocimiento de estos alumnos: Los orígenes de la Matemática. Matemática antigua y Matemática moderna. La Matemática pura y la Matemática aplicada. Qué es la Geometría analítica. La Matemática y la belleza.

RESUMEN

En las anteriores líneas hemos expuesto los que, a nuestro juicio, son los principales objetivos del Preuniversitario, reduciéndolos a cinco mediante otras tantas tareas. Las enunciaciones de conceptos, teorías, prácticas, etc., no pretenden ser exhaustivas. Otros muchos, quizá con más méritos, habrán quedado en el tintero. Sólo hemos querido señalar tipos.

Es evidente que en el Preuniversitario no se puede repasar toda la Matemática de los seis cursos. Sin embargo, sí debe aspirarse a revisar el meollo, lo fundamental. De aquí la necesidad de seleccionar las materias y coordinar las tareas en un programa a seguir. Esto hacemos a continuación, interpretando las dos direcciones que aconsejan el proyecto de Instrucciones de Santander:

"a) *Dotación de hábitos intelectuales,* mediante el comentario de textos, síntesis de lecciones y conferencias, redacción y exposición oral de temas."

"b) *Preparación específica,* haciendo revivir en forma sistemática teorías y prácticas más o menos extensas, ya conocidas de cursos anteriores."

La primera dirección se corresponde con nuestra tarea 5.ª, y la segunda, con las cuatro primeras.

He aquí una marcha a seguir, suponiendo que se dispone de seis horas semanales:

1.º Antes de comenzar el curso, el profesor redactará un programa en el que seleccionará las teorías y prácticas que en forma sistemática se han de repasar, proponiéndolo a la Junta de profesores del Centro para su aprobación. Esto es necesario, pues de otra forma se desvirtuaría la acción conjunta. Se dedicarán dos horas semanales. Este programa realiza la tarea 3.ª

3.º Dos horas semanales se dedicarán a la resolución de problemas y otras cuestiones que puedan presentarse, interpertando el sentido de las tareas 1.ª, 2.ª y 4.ª

3.º Las dos horas semanales restantes se dedicarán a comentar textos y a hacer, de palabra o por escrito, las síntesis de lecciones o conferencias. Se cumple así la tarea 5.ª

4.º Cada alumno llevará un cuaderno en el que escribirá los resúmenes de las explicaciones de cada clase, las síntesis de las conferencias y las soluciones dadas por él a los problemas propuestos. El profesor corregirá estos cuadernos con la frecuencia necesaria, para evitar que unos puedan copiar de otros. El cuaderno debe reflejar la personalidad del alumno, por lo que ha de redactarlo sin consultas a personas o libros. No importa que lleve tachaduras o correcciones. Lo importante es que auxilie al profesor a la hora de juzgar sobre el aprovechamiento del alumno y los progresos realizados.

5.º No se recomendará texto alguno. Si se encarga el repaso de una materia determinada, se indicará el curso a que pertenece, para que cada alumno la estudie por el libro que tenga. En ciertos casos podrá remitírseles a un texto de la biblioteca del Centro, que contenga una cuestión o problema de interés.

6.º Si la dotación de material del Centro lo permite, es aconsejable emplear algunas horas (que pueden ser de las que incluímos en el párrafo 3.º) en adiestrarles en el manejo de algunos instrumentos o en prácticas de ulterior aplicación: regla de cálculo, manejo del teodolito, medición de alturas o distancias inaccesibles, agrimensura, etc.

Nos falta decir que al asignar dos horas a cada uno de los párrafos 1.º, 2.º y 3.º, les damos sólo un valor de aproximación. Las necesidades de la clase motivarán, en cada caso, la alteración de estos números, que el buen juicio del profesor determinará a principio del curso, o modificará en cualquier fecha de éste.

Quede nuestra satisfacción por la oportunidad que se nos ha brindado de aportar nuestro grano de arena al Curso preuniversitario.

FRANCISCO BERNARDO CANCHO
Catedrático del Instituto de Oviedo.

BIBLIOGRAFIA ESENCIAL

a) *Del profesor*:

Félix Klein: *Matemática elemental desde un punto de vista superior.*

Rey Pastor y Puig Adam: *Metodología y didáctica de la Matemática elemental* y *Curso cíclico de Matemáticas.*

G. Zadon, Naisky: *Les sciences Physico-matemátiques.*

Enrico Rufini: *Il "Metodo" di Archimede e le origini dell' Analisi infinitesimale nell'antichità.*

b) *Del alumno*:

Entre otros textos españoles de Enseñanza Media, los de los señores Rey Pastor y Puig Adam (incluyendo los de planes antiguos), Sixto Ríos, Pérez Carranza y Rodríguez Vidal.

Asimismo, pueden consultar textos extranjeros de este grado: de F. Brachet y J. Dumargue, G. Bisconcini, etc.

2) Prácticas de Física y Química (*)

Las Instrucciones provisionales para el Curso preuniversitario de 1953-54 adolecían de improvisación en lo referente a Ciencias y eran especialmente vagas e imprecisas en el tema concreto de las prácticas de Física y Química. En efecto, la Instrucción primera, referente a Materias y Ejercicios, se limitaba a decir textualmente: "Prácticas elementales de laboratorio de Física y Química", y la Instrucción segunda, referente a Orientaciones metodológicas, decía al pie de la letra: "Tanto en los problemas como en las prácticas se procederá a establecer conexiones entre las varias disciplinas científicas, pero nunca serán exigidos conocimientos teóricos superiores a los cursados en el bachillerato."

Y aunque, ciertamente, el espíritu del Curso preuniversitario es opuesto a la formulación de cuestionarios, también es cierto que eso no implica la no existencia de unas orientaciones oficiales que establezcan con precisión los métodos de trabajo. En conformidad con este criterio, las Instrucciones eran bastante precisas y extensas en lo referente a las orientaciones pedagógicas y a los métodos de trabajo en cuanto a las materias comunes e incluso a las materias especiales de Letras, pero no así en las materias especiales de Ciencias, donde en Matemáticas se notaba un grave defecto de improvisación, y en Física, Química y Ciencias Naturales se trataba de salvar el olvido con una lacónica mención.

En la reunión de Santander se entendió que era menester corregir ese defecto y quedó redactada la propuesta de Instrucción referente a prácticas de Física y Química de forma muy general y muy concreta a la vez (*). Se eleva hasta enunciar los altos principios pedagógicos que deben informar las prácticas, y desciende hasta la relación detallada de aquellos puntos cuyo estudio no se puede eludir en una experiencia científica; deja en libertad al profesor para escoger la materia en los campos de la Física y la Química que más le plazcan, siempre que sean variados, y hasta advierte a los alumnos sobre un escollo en el que no suelen reparar.

En un Curso preuniversitario las prácticas deben hacerse iniciando al alumno en el "estilo" universita-

(*) *"Las Prácticas de esta materia serán variadas sin necesidad de ser numerosas, y tendrán un carácter eminentemente formativo, estimulando el espíritu analítico y crítico del alumno, haciéndole observar y meditar sobre la precisión de las medidas, error relativo y absoluto de los resultados, el valor de las correcciones, la influencia de las distintas variables y sobre cuantos factores contribuyen a la correcta experimentación científica. En la resolución de los problemas numéricos, el alumno tendrá siempre presente que toda medida es un número aproximado y concreto. Para esta enseñanza se dedicarán tres sesiones de hora y media semanales.* (Proyecto de Instrucciones de Santander; "*Materias, ejercicios y Didáctica*", *apartado* C), *número 2.)*

"La enseñanza de la Física y Química se hará tomando como base una selección de prácticas fundamentales que sirvan como núcleos para satisfacer las dos exigencias del Curso preuniversitario: perfeccionamiento de los hábitos instrumentales y repaso de las teorías fundamentales y captación de las relaciones entre ellas. Por vía de ejemplo, proponemos las siguientes prácticas:

De Física:

1.ª Práctica de medidas de longitudes, superficies y volúmenes.

2.ª Prácticas de la caracterización de un movi-