La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad

Wim Van Dooren[1], *Dirk De Bock, y Lieven Verschaffel*
Universidad Católica de Lovaina

Resumen

En varios lugares de la literatura sobre educación matemática y científica se indica que los estudiantes tienden a aplicar modelos lineales en situaciones en las que éstos no son aplicables. Esta tendencia recibe el nombre de «ilusión de linealidad». El objetivo del presente trabajo es hacer una revisión de distintas ocurrencias de este fenómeno, y ofrecer un análisis conceptual del mismo. En primer lugar, investigamos el concepto de linealidad y sus propiedades. Después, resumimos y comentamos varios casos de razonamiento lineal inadecuados —tomados de la literatura y de nuestras propias investigaciones— a fin de desvelar las semejanzas y las diferencias conceptuales entre las ocurrencias de la ilusión de linealidad. Finalmente, consideramos los factores psicológicos y educativos que parecen encontrarse en la raíz de la ocurrencia y persistencia del exceso de dependencia de la linealidad.

Palabras clave

Linealidad, proporcionalidad, ideas equivocadas, sobregeneralización, resolución de problemas.

Abstract

Several places in the literature on mathematics and science education indicate that students tend to apply linear models where they are not applicable. This tendency is called «illusion of linearity». The present paper aims at giving an overview of different utterances of this phenomenon, and at providing a conceptual analysis. First, we investigate the concept of linearity and its properties. Second, we summarise and comment on several cases of unwarranted linear reasoning —coming from the literature and from our own empirical research— in order to unravel the conceptual similarities and differences between the utterances of the illusion of linearity. Finally, we consider the psychological and educational factors that seem to be at the roots of the occurrence and persistence of the over-reliance on linearity.

Key words

Linearity, proportionality, misconceptions, overgeneralization, problem solving.

[1] Wim Van Dooren es investigador posdoctoral de la Fundación Nacional para la Investigación Científica de Flandes.

Introducción[2]

Muchos aspectos de nuestro mundo operan de acuerdo a reglas de proporcionalidad. Es por ello que el razonamiento proporcional o lineal es un instrumento fundamental para que los seres humanos puedan interpretar los fenómenos del mundo real (Post, Behr, & Lesh, 1988; Spinillo & Bryant, 1999). No es sorprendente que el predominio de la linealidad se refleje también en la propia naturaleza de las matemáticas. Como estableció Rouche (1992b), la idea de función lineal atraviesa toda la construcción del edificio de las matemáticas. Es esencial para comprender, resolver e incluso para formular un amplio espectro de problemas matemáticos y científicos, tanto los elementales como los más avanzados (Spinillo & Bryant, 1991).

Los niños descubren muy pronto (5-7 años) la fortaleza de la herramienta de la proporcionalidad para manejar situaciones en su entorno extraescolar (Resnick & Singer, 1993; Sophian & Wood, 1997; Spinillo & Bryant, 1991, 1999): 4 puñados de arena llenan 1 cubo, así que harán falta 12 puñados para llenar 3 cubos; 1 coche de juguete tiene 4 ruedas, así que 2 coches de juguete tendrán 8 ruedas, etc. Al comenzar la escuela primaria, el conocimiento informal preescolar de los niños acerca de las relaciones de proporcionalidad queda en un segundo plano temporalmente, cuando la suma y la resta se convierten en el foco principal del currículo matemático escolar. Pero en segundo y tercero de primaria, el foco de atención del currículo escolar se mueve de las relaciones aditivas a las multiplicativas, y los niños aprenden a multiplicar y a dividir y a reconocer cuándo aplicar estas operaciones en problemas verbales sencillos, que son los predecesores de las tareas de razonamiento proporcional. En cuarto de primaria y después, el concepto de proporcionalidad se desarrolla con más profundidad. A partir de esta edad en adelante, los estudiantes se enfrentan frecuentemente a problemas de proporcionalidad, en su mayoría planteados en la llamada «estructura del valor faltante» tales como: «10 huevos cuestan 2 euros. ¿Cuál es el precio de 30 huevos?» Más tarde, los estudiantes aprenden, por ejemplo, sobre la relación de proporcionalidad entre el diámetro y la longitud de la circunferencia, entre el tiempo y la distancia recorridos por un tren a velocidad constante, entre la masa y el volumen de una sustancia, entre el voltaje y el amperaje en un circuito eléctrico, etc. El esquema de proporcionalidad se va convirtiendo, gradualmente, en el «leitmotiv», desde los problemas bastante sencillos de la escuela elemental a los modelos lineales y las aproximaciones en el cálculo y la estadística de la escuela secundaria, y a las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales en el nivel universitario (ver, por ejemplo, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002).

La creciente familiaridad y experiencia de los estudiantes con los modelos proporcionales tiene algunas ventajas innegables, pero puede también tener serios inconvenientes. Puede conducir a los estudiantes a la tendencia de aplicar los modelos lineales en cualquier situación, incluso en las que no es aplicable en absoluto. Es habitual referirse a este abuso de la generalización de la linealidad como «ilusión de linealidad». Freudenthal (1983, p. 267) lo formuló como sigue: «La linealidad es una propiedad de las relaciones tan sugestiva

[2] Este trabajo ha sido traducido del inglés por Carlos de Castro Hernández

que uno se sien
la seducción d
numérica como

Hasta donde sc
antes intentos d
diferentes ejem
este fenómeno
co. En este trab
visión y un análisi
dencia de los
modelos lineale
de aplicabilidad
presentamos un
de linealidad co
rias propiedades
ales. Estas prop
marco para la se
discutiremos y
ejemplos de apli
(de ciertas prop
dad por estudiar
des en una diver
ejemplos están t
y de nuestra pro
pírica acerca de
tercera parte del
mos en los factor
cativos que pare
la ocurrencia y p
de dependencia

Linealidad
propiedade
Un análisis

En la actualidad
como en la investi
matemática, el té
re generalmente
forma «$f(x) = ax$» (
gráfica de este tip
línea recta que p

Hay una conexión
linealidad y los c

que uno se siente inclinado a caer en la seducción de tratar cada relación numérica como si fuese lineal».

Hasta donde sabemos, no ha habido antes intentos de analizar y categorizar diferentes ejemplos y apariciones de este fenómeno de un modo sistemático. En este trabajo, ofrecemos una revisión y un análisis conceptual de la tendencia de los estudiantes a usar modelos lineales más allá de dominio de aplicabilidad. En la primera parte, presentamos un análisis del concepto de linealidad como tal, e ilustramos varias propiedades de las relaciones lineales. Estas propiedades sirven como marco para la segunda parte, en la que discutiremos y clasificaremos varios ejemplos de aplicaciones injustificadas (de ciertas propiedades) de la linealidad por estudiantes de diferentes edades en una diversidad de campos. Los ejemplos están tomados de la literatura y de nuestra propia investigación empírica acerca de este fenómeno. En la tercera parte del trabajo, nos centraremos en los factores psicológicos y educativos que parecen estar en la raíz de la ocurrencia y persistencia del excesó de dependencia de la linealidad.

Linealidad y sus propiedades: Un análisis conceptual

En la actualidad en matemáticas, así como en la investigación en educación matemática, el término «lineal» se refiere generalmente a las funciones de la forma «$f(x) = ax$» (con $a \neq 0$). La imagen gráfica de este tipo de funciones es una línea recta que pasa por el origen.

Hay una conexión muy estrecha entre la linealidad y los conceptos de razón y proporción: Una razón se refiere a la relación fraccional entre dos cosas (a/b), por ejemplo: «este refresco está hecho con 10 naranjas por cada litro de agua». Una proporción se refiere a la igualdad de dos razones $a/b = c/d$ (y por ello a la relación entre cuatro cosas), tal como: «En una urna hay 20 bolas blancas y 40 bolas negras. La otra urna tiene 50 blancas y 100 negras. La probabilidad de sacar una bola blanca es igual en ambas urnas dado que 20/40 = 50/100.» El concepto de linealidad o proporcionalidad (o relación lineal o proporcional entre cantidades) se refiere a una igualdad de una multitud de razones iguales: $a/b = c/d = e/f = \ldots$ Por ejemplo, «un bote de 0.75 litros de pintura es suficiente para pintar 6 m^2, así que necesito 1.50 litros para 12 m^2, 1.75 litros para 14 m^2, etc.» En el sentido funcional, cada dos razones que son «elegidas» cumplen la proporción: 14/1.75 = 6/0.75.

Dos propiedades esenciales adicionales de las funciones lineales en el sentido mencionado arriba dicen que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(kx) = k\, f(x)$. Para cubrir 18 m^2 (que son 6 m^2 + 12 m^2), necesito 2.25 litros (0.75 litros + 1.50 litros) de pintura, y para 28 m^2 (2 × 14 m^2) necesito 3.50 litros (2 × 1.75 litros) de pintura.

La propiedad multiplicativa de arriba —$f(kx) = k\, f(x)$— se refiere a la igualdad de razones internas («*k* veces *a*, *k* veces *b*»), un aspecto que suele ponerse en la vanguardia cuando los educadores matemáticos se refieren al razonamiento proporcional de los estudiantes: «Para cubrir el triple de esa área, necesito el triple de pintura, y con la décima parte de la pintura podré cubrir la décima parte del área».

Como mostraremos extensamente en la sección siguiente, cada una de estas propiedades (y a menudo varias de ellas a la vez) pueden ser transgredidas por los estudiantes, es decir, aplicadas en situaciones en las que no son aplicables. En esta sección, describiremos varios casos en que los estudiantes de diversas edades hacen esto en una gran variedad de subdominios de las matemáticas y la ciencia.

Apariciones de la ilusión de linealidad: Hacia un análisis

La literatura sobre educación matemática y científica menciona la tendencia de los estudiantes a confiar en exceso en los modelos lineales. Hasta ahora, no ha habido ningún intento de relacionar entre sí todos estos ejemplares observados de la aparición de la ilusión de linealidad, o de buscar semejanzas y diferencias entre ellos. Éste será el objetivo de la presente sección. Mostraremos cómo son de diversas (y universales) las apariciones de la ilusión de linealidad, y estableceremos algunas distinciones conceptuales.

Aplicaciones impropias de la linealidad en la resolución de problemas aritméticos verbales

En la introducción de este trabajo, ya mencionamos que a partir de cuarto de educación primaria, a los estudiantes se les introduce formalmente en el razonamiento proporcional. Una parte importante de estas actividades de aprendizaje consisten en resolver problemas verbales de proporcionalidad, «típicos». Se asume implícitamente que estos problemas ofrecen un razonable sustitutivo para las situaciones de la vida diaria en las que los estudiantes necesitarán estas destrezas matemáticas (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Sin embargo, varios estudios señalan que los estudiantes muestran una tendencia a usar los métodos de resolución propios de la proporcionalidad también para la resolución de problemas verbales aritméticos, para los que estos métodos no son apropiados.

En primer lugar, hay estudios principalmente dirigidos a suministrar evidencias de la «suspensión de dotación de significado» en las matemáticas escolares (e.g., Greer, 1993; Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1994; para una revisión, ver Verschaffel et al., 2000). En estos estudios, los estudiantes de los últimos cursos de primaria eran, entre otras situaciones problemáticas, confrontados con los llamados problemas de «pseudo proporcionalidad» (tales como, por ejemplo, «El mejor tiempo de Juan corriendo los 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tardará en recorrer 1 kilómetro?, «Una tienda vende 312 postales navideñas en diciembre. ¿Cuántas venderá en total entre los meses de enero, febrero y marzo?). A pesar de que modelizar a través de la proporcionalidad directa ofrece, como mucho, una aproximación, parecía que sólo unos pocos estudiantes eran conscientes de que la proporcionalidad directa daría solamente una respuesta aproximada (para el problema de arriba del atleta, los porcentajes de estudiantes que mostraron consciencia iban del 0% al 7%) (Verschaffel et al., 2000). Típicamente, este tipo de problemas explicitan muchas respuestas basadas en un razonamiento del tipo k veces a, k veces b (esto es, para el primer problema: «Juan necesita 10 veces más de tiempo para llegar corriendo 10 veces más lejos»), o una solución mediante el cálculo del valor que falta en una proporción. Mas que tener en cuenta el conocimiento que da el sentido común y consideraciones realistas sobre la situación descrita en el problema, ellos se limitan a jugar al «juego de los problemas escolares», en el que se asume que los jugadores no deben fijarse demasiado en el realismo de la situación problema sino que deben simplemente identificar la (s) operación (ones) aritmética (s) con los números dados dando lugar a la respuesta correcta (ver también Reusser & Stebler, 1997; Wyndhamn & Säljö, 1997). Un problema para la interpretación de las repuestas proporcionales de los estudiantes en estos estudios es que la mayoría de estos problemas eran «irresolubles» (es decir, no hay relación lógico-matemática entre los datos en estos ítems, así que no puede darse una respuesta exacta al problema) y por tanto «inusuales» o incluso «engañosos» porque los estudiantes no esperan que se les ponga problemas «irresolubles» en el contexto de un examen. Así que no es seguro que los estudiantes en estos estudios realmente «creyeran» que había una relación proporcional en juego. Debido al «contrato didáctico» (Brousseau, 1997), los estudiantes al resolver estos problemas pueden haber asumido que dichos problemas debían tener una respuesta numérica exacta y que ellos deberían hacer algunos cálculos con los números dados en el problema para producir una respuesta. Hay numerosas evidencias empíricas sobre este fenómeno (por ejemplo, en el estudio de Reusser & Stebler, 1997; para una revisión extensiva, ver Verschaffel et al., 2000).

Existe, sin embargo, una investigación sistemática sobre el exceso de dependencia de la linealidad en la resolución de problemas aritméticos verbales, en la que la interpretación alternativa de arriba (en términos del contrato didáctico) resulta evitable, porque con los números dados podía obtenerse una respuesta numérica exacta. Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel (2005) investigaron cuándo se originaba la tendencia a depender en exceso de la linealidad en la resolución de problemas y cómo se desarrollaba con la edad en relación con las destrezas de razonamiento lineal emergentes de los estudiantes. Se pasó una prueba escrita —compuesta por problemas verbales lineales y no lineales— a un numeroso grupo de estudiantes desde tercero a octavo curso. Dentro de los problemas no lineales, se hizo una distinción atendiendo al modelo matemático (no lineal) subyacente: aditivo, afín o constante. Ilustramos el tipo de problema que fue utilizado y los resultados típicos obtenidos con un problema no lineal basado en el modelo afín: «La locomotora de un tren tiene 12 metros de largo. Con cuatro vagones conectados con la locomotora, el tren tiene 52 m de largo. Si hubiera ocho vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería la longitud del tren?» (La respuesta lineal es: 2×52 m = 104 m, la respuesta correcta es: 12 m + (8×10 m) = 92 m). Se encontró que las destrezas para resolver correctamente problemas lineales aumentaba considerablemente con la edad: desde el 53% de las respuestas correctas en tercero de primaria al 93% en 2.° de secundaria. El mayor incremento en el aprendizaje se produjo entre 3.° y 5.° de primaria. Además, los investigadores mostraron que la tendencia a aplicar injustificadamente métodos lineales a situaciones no lineales se desarrollaba de forma marcadamente paralela a las destrezas emergentes de razonamiento proporcional. En 3.° de primaria, el 30% de los problemas no lineales fueron resueltos linealmente, y esta situación experimentó un aumento considerable hasta alcanzar un 51% en 5.° de primaria (y un descenso posterior hasta el 22% en segundo de secundaria). Esta evolución, con forma de U invertida, de las respuestas lineales injustificadas fue advertida en todos los problemas no lineales, pero se observaron algunas diferencias menores dependiendo del modelo matemático subyacente (aditivo, afín o constante) de los problemas. Los investigadores concluyeron que los estudiantes —a medida que iban adquiriendo destrezas de razonamiento lineal mediante la práctica de la resolución de problemas lineales «típicos»— tendían a sobre-generalizar los modelos lineales y aprendían a aplicarlos fijándose en características superficiales del problema. Esta tendencia estaba ya presente en segundo de primaria, aumentó hasta 5.°, antes de descender suavemente de 6.° de primaria a 2.° de secundaria.

El exceso de dependencia en entornos gráficos

La excesiva adhesión de los estudiantes a la linealidad ha sido observada también en actividades de dibujo de gráficas. Por ejemplo, Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) categorizaron varias «ideas equivocadas» de los estudiantes en el dibujo de gráficas, y etiquetaron una de las categorías como «linealidad». Estos autores mencionan varios estudios en los que se muestra que estudiantes de diferentes edades tienen una fuerte tendencia a producir patrones lineales que pasan por el origen cuando se les pide que dibujen gráficos correspondientes a relaciones no lineales, por ejemplo la evolución del peso de una persona desde el nacimiento hasta los 30 años. Markovits, Eylon y Bruckheimer (1986) descubrieron que cuando se solicitaba a estudiantes de 14 y 15 años que presentaran ejemplos de funciones o dibujaran gráficos de funciones pasando por dos puntos dados, se aferraban al pensamiento sobre las funciones lineales. Recientemente, un estudio ha mostrado que los maestros en formación también tienen la idea equivocada de que la noción de función sólo se refiere a la relación lineal (Evangelidou, Spyrou, Elia, & Gagatsis, 2004).

Además de en el dibujo de gráficas, los estudiantes también suelen a menudo aferrarse a la linealidad al decidir, basándose en una representación gráfica, si hay relación entre dos variables. Por ejemplo, en un experimento de enseñanza con estudiantes de 3.° de Bachillerato, Van Deyck (2001) ofreció a los estudiantes un gráfico de puntos en el que el patrón de puntos mostraba una parábola. A pesar de que estos estudiantes ya se habían encontrado con varios modelos no lineales en su currículo matemático (entre ellos, modelos cuadráticos), solían argumentar que no había relación entre las dos variables representadas, y veían como argumento que demostraba la ausencia de relación, que el coeficiente de correlación de Pearson del correspondiente conjunto de datos estaba cercano a cero. Aparentemente, al mirar al gráfico, los estudiantes solo buscaban un patrón formado por una línea recta, y además no parecían darse cuenta de que el coeficiente de correlación de Pearson sólo puede indicar la presencia de relaciones lineales.

La aplicación impropia de la linealidad en situaciones probabilísticas

Como se ha argumentado por muchos autores (p. ej., Shaughnessy, 1992), el dominio del razonamiento probabilístico es muy sensible a la presencia de todo tipo de ideas equivocadas, falacias, sesgos, etc. Además, las nociones de «probabilidad» y «proporción» están, desde el punto de vista cognitivo e intuitivamente, muy próximas entre sí (Fischbein & Gazit, 1984). «Dado que la comparación de probabilidades supone la comparación de dos fracciones, el razonamiento proporcional puede ser considerado como una herramienta básica del razonamiento probabilístico» (Lamprianou & Lamprianou, 2002, p. 273). Así, no resulta sorprendente que muchos de los errores que aparecen en el dominio de la probabilidad puedan ser interpretados como aplicaciones impropias de la proporcionalidad (Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens, & Verschaffel, 2003).

Un ejemplo típico es la creencia equivocada de los estudiantes de que la probabilidad de tener al menos un éxito en un juego de azar es proporcional al número de intentos (p. ej., la probabilidad de obtener «al menos un seis» en un dado normal es de 1/6, la probabilidad utilizando dos dados es de $2 \times 1/6$, con tres dados es $3 \times 1/6$, etc.). Este problema está relacionado con el histórico «problema del dado»: A través de la experimentación, de Méré conocía la ventaja de apostar al suceso «al menos un seis en cuatro lanzamientos de dado» y él dedujo que debería ser igualmente ventajoso apostar a «al menos un seis doble en 24 lanzamientos de dos dados». De 4 a 24 lanzamientos, el número de posibilidades de alcanzar un resultado favorable se multiplica por 6, pero, del mismo modo, la probabilidad de obtener un resultado favorable con dos dados en vez de con uno, se divide por 6, de modo que los dos efectos se cancelan y la probabilidad permanece igual.

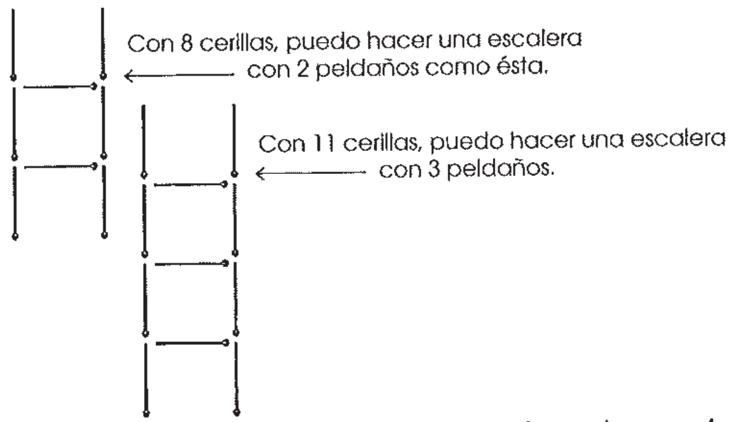
Recientemente, la presencia de la ilusión de linealidad en la aplicación del dominio del razonamiento probabilístico ha sido investigada más sistemáticamente por Van Dooren y otros (2003). Basándose en una revisión de la literatura sobre ideas equivocadas sobre la probabilidad, estos autores realizan un inventario de aquellas ideas equivocadas que pueden estar relacionadas conceptualmente con la ilusión de linealidad. El inventario contenía una amplia variedad de razonamientos erróneos, y también algunas ideas equivocadas famosas e intensivamente estudiadas y otros fenómenos anecdóticos. Un ejemplo típico es la conocida «paradoja del cumpleaños» al estimar la probabilidad de que al menos dos estudiantes en una clase de 30 tengan el mismo cumpleaños, muchos estudiantes consideran la razón entre el número de cumpleaños «disponibles» en la clase (30) y el número de cumpleaños posibles (365 en un año no bisiesto), lo que nos lleva a una probabilidad de $30/365 = 0.08$, que es una subestimación muy baja para la probabilidad real. Estos estudiantes asumen implícitamente una relación lineal entre el número de estudiantes de la clase y la probabilidad de un doble cumpleaños, lo cual les conduciría de hecho «a la intuición de que debería haber 180 estudiantes o más para que fuera igual de probable que se produjera la coincidencia de dos cumpleaños en un día o que no» (Shaughnessy, 1992, p. 480) porque $180/365 \approx {}^1/_2$.

Van Dooren y otros (2003) también proporcionaron evidencias empíricas sistemáticas del exceso de dependencia de los estudiantes de la linealidad dentro de situaciones de probabilidad binomial. Se demostró que los estudiantes de 16 a 18 años tienen por lo general una buena capacidad de comparar situaciones de probabilidad binomial de un modo cualitativo (por ejemplo, en el contexto de lanzar dados, entienden que la probabilidad de obtener al menos un seis aumenta con el número de intentos), pero al mismo tiempo, cuantificaban incorrectamente esta intuición cualitativa sobre las relaciones lineales entre las distintas cantidades (por ejemplo, en el mismo contexto, pensaban que si el número de lanzamientos se duplicaba, la probabilidad de obtener al menos un seis se duplicaba también). Esta tendencia se manifestó con mucha fuerza en todos los estudiantes implicados en esta investigación, incluso entre aquellos que ya se habían encontrado con la distribución de probabilidad binomial en su currículo matemático.

De los patrones numéricos al álgebra y al cálculo

Algunos estudios en el ámbito de los patrones numéricos y la generalización algebraica mencionan que los estudiantes confían en exceso en ciertas propiedades de los modelos lineales. Stacey (1989) estudió la modelización, que hacían estudiantes de 9 a 13 años, de patrones de la forma $f(n) = an + b$ (con $b \pi 0$) tales como el siguiente problema de la «escalera» (Figura 1). Las respuestas equivocadas observadas con más frecuencia fueron debidas a la asunción de proporcionalidad en lugar de la determinación de la relación afín correcta entre el número de los escalones y el número de cerillas («número de cerillas» = 3 × «número de escalones» + 2). Los estudiantes hicieron uso de la propiedad $f(ka) = k\,f(a)$ de las funciones lineales (p. ej., «para una escalera con 4 peldaños, hace falta el doble de cerillas que para una escalera con 2 peldaños»), de la propiedad $f(a + b) = f(a) + f(b)$ (p. ej., «hacen falta 8 + 11 cerillas para hacer una escalera con 5 (= 2 + 3) peldaños») o emplearon combinaciones de ambas propiedades. Observaciones análogas del «error proporcional de multiplicación» (para emplear el término introducido por Linchevski, Olivier, Sasman, & Liebenberg, 1998) para problemas similares de generalización de patrones se pueden encontrar en otros muchos estudios (p. ej., Linchevski y otros, 1998; Sasman, Linchevski, & Olivier, 1999).

Otros «errores de linealidad» parecidos se han descrito en el campo del álgebra y en el del (pre)cálculo. También en este contexto, los estudiantes tienden a sobre-generalizar la propiedad $f(a + b) = f(a) + f(b)$ y $f(ka) = k\,f(a)$ de las funciones lineales a las funciones no lineales. Cualquier profesor de secundaria podría seguramente recordar ejemplos de estudiantes aplicando «propiedades» del tipo: «la raíz cuadrada de la suma es igual a la suma de las raíces cuadradas», «el logaritmo de un producto es igual al producto de los logaritmos»,... Este tipo de errores ha sido discutido e ilustrado por Berté (1993), Gagatsis y Kyriakides (2000) y Matz (1982).



¿Cuántas cerillas hacen falta para hacer el mismo tipo de escalera con 4 peldaños?
¿Cuántas cerillas se necesitan para hacer la escalera con 5 peldaños?

Figura 1. Problema de las escaleras utilizado por Stacey (1989, p. 148).

La aplicación injustificada de la linealidad en diversos contextos científicos

Además de los muchos casos en los que la proporcionalidad es aplicable en un contexto científico (Spinillo & Bryant, 1999), hay también numerosos problemas científicos para los que no es aplicable un modelo lineal, pero para los que se han propuesto soluciones lineales. Durante la edad media y el renacimiento, los científicos sostenían firmemente varios principios básicos de la física que habían sido establecidos por Aristóteles (Grant, 1977). En la teoría aristotélica sobre la caída libre de los cuerpos, hay al menos dos asunciones injustificadas de proporcionalidad. La primera es la creencia de Aristóteles de que un objeto que pesa 10 veces más que otro debe caer 10 veces más rápido que el otro objeto, cuando se dejan caer desde la misma altura. El segundo es que los objetos caen a una velocidad constante, lo que significa que la distancia recorrida por un objeto podría ser proporcional al tiempo de caída. (Y que, p. ej., a un objeto le llevaría el doble de tiempo alcanzar el suelo al dejarlo caer desde el doble de alto). Fue sólo después de 1600 se demostró que estas asunciones impropias de proporcionalidad eran erróneas, precisamente cuando Galileo Galilei llevó a cabo sus experimentos y los describió en sus *Discursos sobre dos nuevas ciencias* (Galilei, 1638). También en nuestros días, suelen aparecer a menudo estudiantes que tienen una visión aristotélica de la física (lo que incluye las asunciones injustificadas de proporcionalidad), y hay estudios que han mostrado que esas concepciones son muy fuertes y resistentes a la instrucción (Ebison, 1993; Weller, 1995).

Además de en la física aristotélica, hay también otros ejemplos de uso injustificado de la linealidad en tareas de física. Anderson (1983) observó una «tendencia general a la linealización» en una tarea en la que se pedía a estudiantes universitarios que predijeran cuánto avanzaría una bola en un plano inclinado al ser golpeada por un péndulo, como función del ángulo de oscilación del péndulo (con ángulos de 10°, 20°, 30° etc.) y de la masa del péndulo (con 1, 2, 3 o más pesas pegadas al péndulo). Cuando las predicciones de los estudiantes fueron representadas en una gráfica, parecía que las «curvas predichas eran más rectas que las curvas físicas reales» (Anderson, 1983, p. 245).

Varios casos de razonamiento lineal injustificado en geometría

En el dominio de la geometría, se ha informado de varios casos de exceso de dependencia de los estudiantes de los modelos lineales. Por ejemplo, se sabe que frecuentemente se producen razonamientos lineales incorrectos en problemas sobre las relaciones entre los ángulos y los lados de las figuras geométricas (ver, p. ej., Bold, 1969; De Block-Docq, 1992; Rouche, 1992a). De acuerdo con Rouche (1992a), muchos estudiantes e incluso adultos piensan que un ángulo puede bisecarse o trisecarse mediante la aplicación de las construcciones sugeridas en la Figura 2. Ambas construcciones se basan en asunciones impropias de linealidad. La primera construcción asume una relación lineal entre un ángulo agudo y el lado opuesto en un triángulo rectángulo. La segunda construcción asume una relación lineal entre el ángulo superior y la base de un triángulo isósceles (o entre un ángulo inscrito en un círculo y su correspondiente cuerda).

Otros ejemplos de la ilusión de linealidad en el dominio de la geometría pueden encontrarse en la tesis doctoral de De Block-Docq (1992). Ella describe varios procesos de razonamiento erróneos todos basados en una aplicación inapropiada de la proporcionalidad directa (o inversa) entre cantidades no proporcionales (p. ej., «El ángulo de un dodecágono regular puede obtenerse dividiendo el ángulo de un hexágono regular por 6 y multiplicando este resultado por 12», «Para construir un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia, se debe tomar como lado del triángulo el diámetro de la circunferencia; un dodecágono regular puede construirse tomando como lado la mitad del radio de la circunferencia», De Block-Docq, 1992, p. 199).

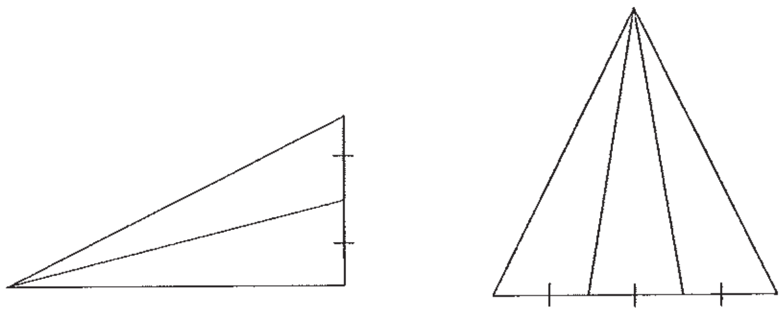


Figura 2. Construcciones de la bisección y la trisección de un ángulo basadas en asunciones erróneas de linealidad.

Uno de los casos más conocidos y frecuentemente estudiados de uso indebido de la linealidad por parte de los estudiantes es el relacionado con los problemas sobre el efecto que tiene el agrandamiento o reducción de una figura sobre su área o su volumen. El principio que gobierna este tipo de problemas es bien conocido: un aumento o reducción de cualquier figura geométrica (cuadrado, círculo, cubo, figura irregular,...) por un factor r, multiplica las longitudes por un factor r, las áreas por un factor r^2 y los volúmenes por un factor r^3.

Como señalan varios autores (National Council of Teachers of Mathematics, 1989; Outhred & Mitchelmore, 2000; Tierney, Boyd, & Davis, 1990), alcanzar una intuición adecuada sobre las relaciones antes indicadas entre longitudes, áreas, y volúmenes de figures similares, suele ser lento y penoso, en las que los estudiantes a menudo resultan desorientados por la ilusión de linealidad, pensando que si una figura se aumenta o se reduce r veces, el área y el volumen se hacen r veces mayores o menores también. Hay un ejemplo famoso en el diálogo de Platón «Menón», en el que a un esclavo se le pedía que dibujara un cuadrado que tuviera el doble de área que un cuadrado dado y el esclavo propuso en primer lugar duplicar el lado del cuadrado (ver Berté, 1993). En el mismo sentido, leemos en los estándares del NCTM que «... la mayoría de los estudiantes de 5.° de primaria a 2.° de Secundaria creen incorrectamente que si los lados de una figura se duplican para producir una figura semejante, el área y el volumen también se duplicarán» (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, pp. 114-115). En otras palabras, los estudiantes tienden

a ver las relacione
o entre longitud y
les en lugar de, re
cuadráticas o c
cuencia, aplican
neal en lugar de
para determinar
de la figura ampl

En los últimos año
de que el área y
gura aumentan r
de la figura aum
extensivamente
Verschaffel, & Jan
Bock, Van Doore
chaffel, 2002a; D
Janssens, Van Do
Modestou & Gag
rie de estudios e
Bock y otros (1998
ministraron a grup
tudiantes de 12 a
critas con pr
proporcionales y
bre longitudes, pe
lúmenes de distint
ejemplo, utilizaron
proporcional sobr
drado: «El granjero
ximadamente 8 h
terreno cuadrado
¿Cuántas horas n
nar un terreno cu
lado? La gran ma
tes (más del 90% de
del 80% de los de
este tipo de proble
temente fuerte ten
todos lineales. Inclu
ayuda (como la p
un dibujo de la situ
antes de resolver e
tro de un dibujo ya
o cuadriculado), s
diantes hicieron el
correctas no lineale
petición de hacer
nudo desatendida

a ver las relaciones entre longitud y área o entre longitud y volumen como lineales en lugar de, respectivamente, como cuadráticas o cúbicas, y, en consecuencia, aplican el factor de escala lineal en lugar de su cuadrado o cubo para determinar el área o el volumen de la figura ampliada o reducida.

En los últimos años, la idea equivocada de que el área y el volumen de una figura aumentan r veces cuando el lado de la figura aumenta r veces, ha sido extensivamente estudiada (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998, 2002b; De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002a; De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren, & Claes, 2003; Modestou & Gagatsis, 2004). En una serie de estudios experimentales de De Bock y otros (1998, 2002b, 2003), se administraron a grupos numerosos de estudiantes de 12 a 16 años, pruebas escritas con problemas verbales proporcionales y no proporcionales sobre longitudes, perímetros, áreas y volúmenes de distintos tipos de figuras. Por ejemplo, utilizaron el siguiente ítem no proporcional sobre el área de un cuadrado: «El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado? La gran mayoría de los estudiantes (más del 90% de los de 12 años y más del 80% de los de 16 años) fallaron en este tipo de problemas por su alarmantemente fuerte tendencia a aplicar métodos lineales. Incluso con considerable ayuda (como la petición de elaborar un dibujo de la situación del problema antes de resolver el mismo o el suministro de un dibujo ya hecho en papel liso o cuadriculado), sólo unos pocos estudiantes hicieron el cambio a respuestas correctas no lineales. Se encontró que la petición de hacer un dibujo fue a menudo desatendida y que los dibujos hechos rara vez se usaron de forma efectiva. En los casos en los que los estudiantes hicieron un dibujo, éste era a menudo una representación de muy baja calidad y, por tanto, no fue de gran ayuda para encontrar la respuesta correcta. La única manipulación experimental que tuvo algún impacto significativo sobre los estudiantes fue el replanteamiento de los problemas de valor faltante como problemas de comparación (p. ej., para el ítem mencionado anteriormente: «Hoy, el granjero Carlos ha abonado un terreno cuadrado. Mañana, tiene que abonar otro terreno cuadrado con el lado el triple de grande. ¿Cuánto tiempo necesitará aproximadamente para abonar este terreno?). En este caso, el número de respuestas correctas aumentó del 23% (en el grupo que recibió problemas de valor faltante) hasta el 41% (en el grupo en que se pasaron problemas de comparación). Resulta también remarcable que, cuando como consecuencia de la ayuda proporcionada en estos estudios, los estudiantes descubrieron que algunos de los problemas no eran lineales, comenzaron a aplicar métodos no lineales a problemas lineales también. En un estudio posterior con entrevistas en profundidad, De Bock et al. (2002) trataron de desvelar los procesos de resolución de problemas y los mecanismos subyacentes a los hallazgos de los estudios de papel y lápiz. Este estudio indicó que:

- La mayoría de los estudiantes utilizaron un modelo proporcional de forma espontánea, casi intuitiva (en el sentido de Fischbein, 1987) no siendo conscientes de su elección de un modelo proporcional, mientras que otros estaban realmente convencidos de que las funciones lineales eran aplicables «en todas partes»;
- Muchos estudiantes mostraron limitaciones en su conocimiento geo-

métrico (p. ej., la creencia errónea de que el concepto de área sólo se aplica a las figuras regulares, o que una figura aumentada en tamaño y semejante a otra no aumenta necesariamente en la misma proporción en todas sus dimensiones);

— Muchos estudiantes tenían hábitos inadecuados, creencias y actitudes hacia la resolución de problemas aritméticos verbales en el contexto escolar (p. ej., la creencia de que los dibujos no sirven de ayuda, que la primera solución es siempre la mejor, etc.), que demostraron ser un abono fértil para un proceso de modelización superficial o deficiente. A menudo, esto impedía a los estudiantes desenmascarar por inadecuado su solución proporcional, y descubrir la solución correcta al problema.

La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad

Hasta aquí, hemos hecho una revisión de una amplia variedad de diferentes apariciones de la ilusión de linealidad, según las hemos identificado en la literatura sobre educación matemática y científica y en nuestras propias investigaciones experimentales. Ellas ilustran el carácter generalizado del fenómeno del razonamiento proporcional ilícito que afecta a estudiantes de un amplio rango de edades en diversos dominios de contenido. El objetivo de la presente sección es identificar los diferentes factores explicativos de las ilusiones de linealidad de los estudiantes. Sostendremos que los elementos explicativos pueden dividirse en tres categorías principales: (1) elementos relacionados con la linealidad/proporcionalidad como tal, su carácter intuitivo, su simplicidad y presencia en la vida diaria, (2) elementos relacionados con las experiencias de los estudiantes en el sistema escolar formal, y (3) elementos relacionados con el dominio matemático o científico específico en el que el fenómeno se produce.

Linealidad, intuitividad y situaciones de la vida diaria

La primera y más importante razón para la aparición del exceso de dependencia de las relaciones lineales parece ser su carácter intrínsecamente simple y auto-evidente. Como indicaba Rouche «Es la idea de proporcionalidad la que primero viene a la mente, porque no hay duda de que no hay funciones más simples que las lineales» (Rouche, 1989, p. 17). No resulta sorprendente que, para muchos estudiantes, un razonamiento del tipo «*k* veces *a*, *k* veces *b*» se impone casi de forma natural en un amplio rango de situaciones. En la entrevista en profundidad realizada en su investigación, De Bock et al. (2002a) observaron que los estudiantes empleaban un modelo lineal inmediatamente, espontáneamente y con mucha confianza en su corrección, sin ninguna necesidad de ofrecer una justificación. Al mismo tiempo, fue virtualmente imposible para la mayoría de los estudiantes en esta investigación explicar por qué el modelo lineal empleado era apropiado para aquella particular situación problema. También Stacey (1989, p. 162) escribió que «los modelos asociados con la proporcionalidad directa se insinuaban a los estudiantes por poderosas razones cognitivas. Cuando se encuentra una idea así, los estudiantes pueden mostrarse reticentes a cuestionarla, tanto por su efectividad proporcionando respuestas (una respuesta es mejor que nada) como por su simplicidad».

Estas características del razonamiento lineal impropio parecen muy similares al concepto de intuición en el trabajo de Fischbein (1987), que describió el conocimiento intuitivo cono un tipo de cognición inmediata, implícita, evidente en sí misma, que conduce de forma coercitiva generalizaciones, produce gran confianza y a menudo persiste a pesar del aprendizaje formal. Nuestras intuiciones son resistentes al cambio por que están profundamente relacionadas a la totalidad de nuestro sistema adaptativo, que consiste en esquemas. Un esquema es definido por Fischbein (1999, p. 39) como «un programa que permite al individuo a) almacenar, procesar, controlar e integrar mentalmente información, y b) reaccionar significativa y eficientemente a los estímulos del entorno». Fischbein consideraba la proporcionalidad como un esquema de este tipo, y comentaba lo siguiente sobre el aumento de su impacto con la edad de los estudiantes:

> «El esquema de proporcionalidad es, en la terminología piagetiana, un esquema operacional, esto es, muy general e influyente. Se desarrolla con la edad y en su forma cuantitativa plena se manifiesta durante la etapa de las operaciones formales. Junto al impacto de otros esquemas intelectuales, el esquema de proporción profundiza su impacto sobre el razonamiento del individuo, como efecto de la edad» (Fischbein, 1999, p. 45).

A pesar de que arriba se sugiere que el esquema de proporcionalidad gana influencia a edad más tardía y — como defenderemos más adelante— la escolaridad puede jugar un papel importante en este desarrollo y las primeras versiones de los modelos proporcionales parecen aparecer ya bastante antes de adquirirse en la educación (ver sección 1). Puede sostenerse firmemente que los razonamientos de Aristóteles (en el desarrollo de su teoría física) o del esclavo en el diálogo «Menón» de Platón fueron un producto de la educación matemática escolar. Lo mismo ocurre probablemente con los estudiantes de segundo y tercero de educación primaria del estudio de Van Dooren y otros (2005) que ya dieron numerosos ejemplos de respuestas proporcionales ilícitas aunque el tema de la proporcionalidad no había sido todavía tratado sistemáticamente en la escuela. Podríamos argumentar que varias de las experiencias más primitivas que los humanos afrontan (como el conteo de objetos, en el que se utiliza nuestro sistema de numeración) son ya inherentemente lineales, y muchas aplicaciones de las matemáticas a la vida diaria están basadas también en la proporcionalidad (Spinillo y Bryant, 1999).

Los efectos de la escolaridad

A pesar de que el párrafo anterior sugiere que hay una tendencia «natural» a razonar proporcionalmente, hay una amplia evidencia de que la educación matemática tiene un impacto en su posterior desarrollo.

Un primer elemento en la escolaridad es que —en ciertos momentos del currículo de matemáticas— se pone una atención extensiva y casi exclusiva en la linealidad o en alguna de sus propiedades. A menudo, esto sucede sin que se atienda explícitamente al dominio de aplicabilidad de este concepto o sus propiedades. Las consecuencias de esto se muestran, por ejemplo, en el estudio de Van Dooren y otros (2005). Se descubrió que había un aumento considerable del número de respuestas proporcionales ilícitas desde tercero de primaria a quinto, es decir, durante el periodo en el que se produce una atención extensiva a la adquisición del esquema de linealidad. Para algunos problemas, se llegó incluso a constatar que los estudiantes de tercero de primaria daban más respuestas correctas que los de quinto y sexto, debido a la tendencia en estos últimos cursos a utilizar el razonamiento lineal en «cualquier» situación. Sus datos sugieren que, con respecto al razonamiento proporcional, los estudiantes adquieren una «destreza rutinaria» en lugar de una «destreza adaptativa» (Hatano, 1988). Esto enfatiza la importancia de enfocar las matemáticas desde una perspectiva genuina de modelización (Blum y otros, 2002; Lesh y Lehrer, 2003), y hacerlo desde el inicio de la educación primaria (ver, p. ej., Usiskin, 2004). A medida que se van tratando algunos conceptos básicos como la multiplicación, la división, la proporcionalidad directa e inversa, debe enfatizarse inmediatamente en la capacidad de dichos conceptos para modelizar algunas situaciones y su incapacidad para modelizar otras. Pueden utilizarse situaciones prototípicamente claras para desarrollar la destreza de los estudiantes en el reconocimiento y aplicación fluida de nuevos procedimientos (o estrategias), pero regularmente, deben alternarse con ejercicios que relacionen situaciones del mundo real con modelos matemáticos y reflexionar sobre esta relación (Verschaffel y otros, 2000).

En relación con el primer elemento está la observación de que en el currículo habitual de matemáticas, el razonamiento proporcional se practica principalmente por medio de los llamados problemas de valor faltante. En este tipo de problemas, se dan tres números (a, b y c), y se pide al resolutor que determine el valor desconocido x. En un problema de proporciones, esta incógnita x es la solución de una ecuación de la forma $a/b = c/x$. La mayoría de las tareas de razonamiento proporcional que los estudiantes se encuentran en los cursos superiores de la educación primaria están formuladas en el formato de valor faltante. Muchos libros de texto tradicionales incluso tienden a confiar exclusivamente en este formato de problema para aumentar y evaluar el dominio que tienen los estudiantes del razonamiento proporcional (Cramer et al., 1993). Al mismo tiempo, los problemas que no son de proporcionalidad planteados en el formato de valor faltante son muy inhabituales. La investigación de De Bock y otros (2002b) confirmó empíricamente que el formato de valor faltante es un factor explicativo importante para la aparición y persistencia de la ilusión de linealidad. Se paso a estudiantes de 12 a 16 años una serie de problemas de proporcionalidad y otros que no eran de proporcionalidad. A la mitad de ellos se les plantearon los problemas en el formato tradicional del valor faltante, mientras que a los otros estudiantes se les plantearon problemas matemáticamente equivalentes, pero replanteados como «problemas de comparación». Mientras que en el formato tradicional de valor faltante, sólo el 23% de los problemas que no eran de proporcionalidad fueron resueltos correctamente, este porcentaje aumentó significativamente hasta un 41% de respuestas correctas en el formato de comparación.

Finalmente, la escolaridad formal también moldea las destrezas de resolución de problemas (matemáticos) de los estudiantes y sus hábitos en general, y estas destrezas y hábitos juegan un papel indiscutible en la aparición o en la prevención del exceso de dependencia de la linealidad. Varias investigaciones (para una revisión, ver Verschaffel y otros, 2000) han mostrado que los estudiantes a menudo perciben la resolución de problemas matemáticos (verbales) como una actividad del tipo de un puzzle con poca o ninguna relación con el mundo real. De acuerdo con esto, tienden a utilizar claves superficiales para decidir qué operación es necesaria en el contexto de un determinado problema. No resulta sorprendente que la gran mayoría de los estudiantes de educación primaria tiendan a aplicar métodos proporcionales a problemas del tipo: «1 camisa tarda 15 minutos en secarse en el tendedero. ¿Cuánto tardarán en secarse 3 camisas? (ver, p. ej., Van Dooren y otros, 2005). En estos estudios, se muestra también que los estudiantes se muestran reticentes a emplear algunos heurísticos más potentes para la resolución de problemas (es decir, parece que nunca han aprendido a hacer o utilizar un esquema o dibujo para enfrentarse a un problema no trivial) y muestran importantes deficiencias en su conocimiento y destrezas metacognitivas (lo que conduce a una pobre auto monitorización durante la resolución del problema, a ser rápidamente satisfechos por una solución, etc.).

El papel de los elementos de contenido específico

Los elementos explicativos para la ilusión de linealidad que hemos descrito en las secciones precedentes eran todos generales. Pero en muchos casos, también los elementos de contenido específico juegan un papel en la tendencia de los estudiantes a usar impropiamente los modelos lineales. Es difícil describir exhaustivamente todos los elementos de contenido específico que pueden jugar un papel en el razonamiento proporcional impropio. Nos limitaremos a mostrar el papel de cuestiones relacionadas con el contenido específico en cómo se causa o facilita el fenómeno para algunos casos.

La mayor parte de nuestra investigación empírica relativa a la ilusión de linealidad está relacionada con el efecto de un aumento o una disminución de una figura geométrica sobre su área o su volumen (De Bock y otros, 1998, 2002a, 2002b, 2003). Varios autores (Outhred y Mitchelmore, 2000; Tierney y otros, 1990) indican que la ilusión de linealidad se debe en parte a las dificultades de los estudiantes en la adquisición de las nociones de área y volumen (p. ej., a la confusión de área, volumen y perímetro; a la asociación del área exclusivamente con la fórmula de «largo × ancho», etc.). Por ejemplo, Tierney y otros (1990) encontraron que los maestros en formación tenían dificultades en el cambio entre las unidades lineales (como el metro) y las unidades de área (como los metros cuadrados), lo que puede indicar que no captan el carácter bidimensional del concepto de área. También De Bock y otros (2002a) encontraron estudiantes de 12 a 16 años con dificultades con la noción de área (p. ej., creyendo que sólo las figuras regulares tienen área, o que la cantidad de pintura para cubrir la superficie de una figura depende del perímetro o del volumen) y con los principios que gobiernan las semejanzas (muchos estudiantes pensaban que una figura que aumentaba de tamaño manteniendo la forma, no necesariamente aumentaba en la misma proporción todas sus dimensiones).

Tampoco en el dominio de la probabilidad, los elementos de contenido específicos pueden ser ignorados. Como hemos señalado con anterioridad, las ideas equivocadas profundamente enraizadas son ubicuas en el dominio del razonamiento probabilístico, y la historia de la probabilidad está repleta de matemáticos que han cometido errores. Además, «probabilidad» y «proporción» son conceptos muy relacionados, de modo que muchos errores son susceptibles de atribuirse al razonamiento proporcional. Finalmente, es algo característico del dominio de la probabilidad que —a pesar de que las situaciones probabilísticas obedecen ciertas leyes matemáticas claramente distinguibles— siempre se está tratando una incertidumbre intrínseca. Esto implica que la información inmediata y concluyente sobre los resultados de nuestras suposiciones (sean injustificadas o no) no suelen estar disponibles, porque la realidad concreta se basa en un proceso aleatorio. Así, puede ilustrarse de forma sencilla y muy concreta que el área de un círculo no se duplica si el diámetro se duplica, pero es mucho más difícil ilustrar de forma concreta que la probabilidad de obtener al menos un seis no se duplica si el número de lanzamientos con un dado se duplica. En este caso, se debe recurrir o bien a un razonamiento abstracto y a cálculos formales (ambos de los cuales requieren bastantes conocimientos específicos del contenido y son propensos a muchos errores) o a simulaciones con un gran número de intentos (que siempre corren el riesgo de que los datos puedan accidentalmente no producir la evidencia necesaria).

El papel de (las deficiencias en) conocimiento de contenido específico puede mostrarse fácilmente también en otras apariciones de la ilusión de linealidad. Por ejemplo, para responder correctamente a un problema aritmético tan simple como «El mejor tiempo de Juan en los 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tardará en recorrer 1 kilómetro?» (Greer, 1993; Verschaffel y otros, 1994, 2000), uno debe saber que un corredor llegará a cansarse y será incapaz de mantener su máxima velocidad durante un largo periodo de tiempo. Y es comprensible que Aristóteles pensara incorrectamente que un objeto más pesado caería más rápido que un objeto más ligero, porque probablemente no fuera consciente del papel que la resistencia del aire jugaba en sus observaciones. Sin embargo, esto no explica por qué él tradujo su juicio de «más peso-menos tiempo de caída» en una relación proporcional entre el peso y la velocidad de caída de un objeto, estableciendo que un objeto 10 veces más pesado que otro caería 10 veces más rápido que el otro objeto.

Comentarios Finales

En este trabajo, hemos mostrado que las aplicaciones ilícitas de la linealidad están ubicuamente presentes in los razonamientos de los estudiantes en diversos dominios de la matemática y las ciencias, y que en sus raíces subyace una interacción compleja de distintos elementos explicativos. Considerando que probablemente cada error de linealidad está en parte causado por deficiencias en el conocimiento del contenido específico de los estudiantes, parece haber también procesos más generales en juego, que conducen al estudiante a la solución lineal —en vez de a otra solución errónea— en todos estos casos. Kahneman, Slovic y Tversky (1982) hicieron una distinción muy práctica entre las explicaciones positivas y negativas de los errores de juicio en las situaciones probabilísticas, y podemos sostener que esta distinción es válida también para los errores de juicio en todos los dominios de las matemáticas y las ciencias: «Un análisis positivo se centra en los factores que producen una determinada respuesta; un análisis negativo explica por qué no se dio la respuesta correcta» (Kahneman y otros, 1982, p. 504-505). Ellos continúan indicando que «un análisis positivo de los errores es más práctico cuando la misma heurística explica juicios en un conjunto variado de problemas donde se incumplen diferentes reglas normativas» (p. 505).

Con este trabajo,
ñalar que la aplic
porcionalidad es
puede explicar g
res cometidos po
rentes edades en
sos de las matem
por lo tanto pued
un «análisis positi
los estudiantes. (
canismos subya
equivocadas de

Dirección de conta

Wim Van Dooren, D
K. U. Leuven
Department of Edu
Center for Instructio
Vesaliusstraat 2
B-3000 Leuven
Belgium
E-mail: wim.vandoo
lieven.verschaffel@

Con este trabajo, hemos intentado señalar que la aplicación ilícita de la proporcionalidad es un mecanismo que puede explicar gran variedad de errores cometidos por estudiantes de diferentes edades en dominios muy diversos de las matemáticas y la ciencia, y por lo tanto puede considerarse como un «análisis positivo» de los errores de los estudiantes. Comprender los mecanismos subyacentes en las ideas equivocadas de los estudiantes es un importante primer paso en su corrección o prevención mediante una enseñanza adecuada. Esperamos que nuestro conocimiento actual sobre el fenómeno pueda agudizar la conciencia de los profesores y desarrolladores de currículos. Hay algunos objetivos mínimos, fácilmente alcanzables, que podrían suponer ya un paso importante en la ruptura de la tendencia de los estudiantes de abusar de los modelos lineales.

Dirección de contacto:

Wim Van Dooren, Dirk De Bock, & Lieven Verschaffel
K. U. Leuven
Department of Educational Sciences
Center for Instructional Psychology & Technology (CIP&T)
Vesaliusstraat 2
B-3000 Leuven
Belgium
E-mail: wim.vandooren@ped.kuleuven.be, dirk.debock@avl.kuleuven.be, lieven.verschaffel@ped.kuleuven.be

Referencias

ANDERSON, N. H. (1983). Intuitive physics: Understanding and learning of physical relations. In T. J. Tighe & B. E. Shepp (Eds.), *Perception, cognition and development: Interactional analyses* (pp. 231-265). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

BERTÉ, A. (1993). *Mathématique dynamique* (Dynamical mathematics). Paris: Nathan.

BLUM, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education. Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149-171.

BOLD, B. (1969). *Famous problems of geometry and how to solve them*. New York: Dover Publications.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.

CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES (2002). *Des grandeurs aux espaces vectoriels: La linéarité comme fil conducteur*. Nivelles: Author.

CRAMER, K., POST, T., & CURRIER, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan.

DE BLOCK-DOCQ, C. (1992). *Analyse épistémologique comparative de deux enseignements de la géométrie plane vers l'age de douze ans*. Unpublished doctoral dissertation, Faculté des Sciences, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.

DE BOCK, D., VAN DOOREN, W., JANSSENS, D., & VERSCHAFFEL, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 311-334.

DE BOCK, D., VERSCHAFFEL, L., & JANSSENS, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 65-83.

DE BOCK, D., VERSCHAFFEL, L., & JANSSENS, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning, 4*, 65-89.

DE BOCK, D., VERSCHAFFEL, L., JANSSENS, D., VAN DOOREN, W., & CLAES K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction, 13*, 441-463.

EBISON, M. G. (1993). Newtonian in mind, but Aristotelian at heart. *Science and Education, 2*, 345-362.

EVANGELIDOU, A., SPYROU, P., ELIA, I., & GAGATSIS, A. (2004). University students' conceptions of functions. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of PME28* (Vol. 2, pp. 351-358). Bergen, Norway.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht: Reidel.

FISCHBEIN, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 11-50.

FISCHBEIN, E., & GAZIT, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?, *Educational Studies in Mathematics, 15,* 1-24.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

GAGATSIS, A., & KYRIAKIDES, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation, 6*(1), 24-58.

GALILEI, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorna a due nuove scienze*: 1954, *Dialogues concerning two new sciences.* New York: Dover.

GRANT, E. (1977). *Physical science in the Middle Ages.* Cambridge: Cambridge University Press.

GREER, B. (1993). The mathematical modelling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12,* 239-250.

HATANO, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child Development, 41,* 55-70.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P., & TVERSKY, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge: University Press.

LAMPRIANOU, I., & LAMPRIANOU, T. A. (2002). The nature of pupils' probabilistic thinking in primary school pupils in Cyprus. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of PME26* (Vol. 3, pp. 273-280). Norwich, United Kingdom.

LEINHARDT, G., ZASLAVSKY, O., & STEIN, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60,* 1-64.

LESH, R., & LEHRER, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5,* 109-129.

LINCHEVSKI, L., OLIVIER, A., SASMAN, M. C., & LIEBENBERG, R. (1998). Moments of conflict and moments of conviction in generalising. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of PME22* (Vol. 3, pp. 215-222). Stellenbosch, South Africa.

MARKOVITS, Z., EYLON, B.-S., & BRUCKHEIMER, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6*(2), 18-24, 28.

MATZ, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. In D. Sleeman & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (pp. 25-50). London: Academic Press.

MODESTOU, M., & GAGATSIS, A. (2004). Students' improper proportional reasoning: A multidimensional statistical analysis. In D. De Bock, M. Isoda, J. A. G. Cruz, A. Gagatsis, & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of ICME-10 Topic Study Group 2* (87-94). Stellenbosch, South Africa.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

OUTHRED, L. N., & MITCHELMORE, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 144-167.

POST, T., BEHR, M., & LESH, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understanding. In A. Coxford (Ed.), *Algebraic concepts in the curriculum K-12 (1988 Yearbook)* (pp. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

RESNICK, L. B., & SINGER, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

REUSSER, K., & STEBLER, R. (1997). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction, 7*, 309-328.

ROUCHE, N. (1989). Prouver: amener à l'évidence ou contrôler des implications? In Commission inter-IREM Histoire et Epistémologie des Mathématiques (Ed.), *La démonstration dans l'histoire* (pp. 8B38). Lyon: IREM.

ROUCHE, N. (1992a). (Review of the book *Why math?*). *Bulletin de la Société de Mathématique de Belgique (Série A), 44*(2), 245-246.

ROUCHE, N. (1992b). *Le sens de la mesure* (The sense of measurement). Bruxelles: Didier Hatier.

SASMAN, M. C., LINCHEVSKI, L., & OLIVIER, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. In J. Kuiper (Ed.), *Proceedings of the 7th Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* (pp. 406-415). Harare, Zimbabwe.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

SOPHIAN, C., & WOOD, A. (1997). Proportional reasoning in young children: The parts and the whole of it. *Journal of Educational Psychology, 89*, 309-317.

SPINILLO, A. G., & BRYANT, P. E. (1991). Children's proportional judgements: The importance of a half. *Child Development, 62*, 427-440.

SPINILLO, A. G., & BRYANT, P. E. (1999). Proportional reasoning in young children : Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*, 181-197.

STACEY, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

TIERNEY, C., BOYD, C., & DAVIS, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of PME14* (Vol. 2, pp. 307-314). Oaxtepex, Mexico.

USISKIN, Z. (2004). The arithmetic operations as mathematical models. In H.-W. Henn & W. Blum (Eds.), *ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education - Pre-conference volume* (pp. 279-284). Dortmund, Germany.

VAN DEYCK, B. (2001). Correlatie en regressie: Een lesmodule voor de behandeling van een statistisch probleem in de derde graad van het secundair onderwijs. *Unpublished master's thesis*, University of Leuven, Belgium.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., DEPAEPE, F., JANSSENS, D., & VERSCHAFFEL, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 113-138.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., HESSELS, A., JANSSENS, D., & VERSCHAFFEL, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E., & LASURE, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*, 273-294.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B., & DE CORTE, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

WELLER, H. G. (1995). Diagnosing and altering three Aristotelian alternative conceptions in dynamics: Microcomputer simulations of scientific models. *Journal of Research in Science Teaching, 32*, 271-290.

WYNDHAMN, J., & SÄLJÖ, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning: A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction, 7*(4), 361-382.