LIÑAS BÁSICAS PARA UNHA DIDÁCTICA ALTERNATIVA DO CÁLCULO INTEGRAL

Antón Labraña Barrero
José Antonio Cajaraville Pegito
Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais
Área de Didáctica da Matemática
Universidade de Santiago de Compostela

Os pensadores medievais estaban atascados nun mundo no que todo se supoñía que servía a un propósito divino, onde todo se unía nunha realidade estática. En cambio, os pensadores renacentistas querían ser libres para seguir os seus propios pensamentos. Este foi o Zeitgeist, o espírito do tempo, que Newton expresou.

Robin Robertson (*Arquetipos junguianos*)

RESUMO

A investigación realizada arredor da comprensión do Cálculo Integral por alumnos de secundaria, mostra que a maioría carecen dun soporte xeométrico que lles axude a comprender a natureza dos diferentes problemas que se lles presentan, e non posúen criterios relevantes para recoñecer cando un problema pode ser modelado por integración. Planificamos daquela un programa de ensinanza con actividades contextualizadas que promovan a realización de conxecturas, a análise crítica das mesmas e a conseguinte fundamentación.

PALABRAS CLAVE

Educación matemática, cálculo integral.

1. PRESENTACIÓN

No período 96-00 realizamos un estudo sistemático e cualitativo da comprensión do Cálculo Integral Elemental por alumnos de COU e 2º de Bacharelato do ámbito xeográfico galego, en función das dificultades que manifestaban para abordar situacións problemáticas e dos erros e obstáculos de aprendizaxe que mostraban despois do proceso de instrución estándar. O marco conceptual no cal se desenvolveu, circunscribiuse ao programa de investigación *Pensamento Matemático Avanzado (PMA)*, con contribucións da *Teoría das Situacións Didácticas* (TSD, Brousseau, 1997), *Teoría Antropolóxica do Didáctico* (TAD, Chevallard, 1997, 1999) e *Perspectiva Semiótico-Antropolóxica* (TSA, Godino, 1999), situadas na perspectiva epistemolóxica da *Didáctica Fundamental da Matemática*, que, a diferenza do paradigma psicoloxista, postula a natureza singular do coñecemento matemático como elemento esencial que cómpre ter en conta para comprender a problemática da aprendizaxe da Matemática e, como consecuencia, do seu ensino.

Neste marco lévanse a cabo: a) *unha revisión histórica e epistemolóxica do Cálculo Integral*: problemas que se pretendían resolver, dificultades que se atoparon, solucións que se deron, críticas de que foron obxecto e novas alternativas que xurdiron; b*) unha análise do tratamento do tema nos libros de texto de Matemáticas e Física*, correspondentes aos niveis académicos analizados, observándose profundas discrepancias en canto ao campo fenomenolóxico tratado, aos procesos de identificación analítica de elementos diferenciais e de construción de síntese por medio da integral, e aos requirimentos de cálculos de primitivas; c) *unha revisión de anteriores investigacións*, analizando as propostas, resultados e conclusións obtidos por Artigue (1995), Azcárate e outros (1996), Hegedus (1998), Orton (1980, 1983), Schneider (1988), Sierpinska (1985), Tall (1986, 1995), Thompson (1994) e Turégano (1997).

Do estudo que realizamos obtéñense como conclusións máis relevantes que:

a) Moitos estudantes, nos problemas de medida que se asocian coa integral, non conciben esta como un instrumento matemático que serve de modelo para resolver este tipo de problemas, senón que a converten no propio obxecto que hai que calcular.

b) Unha gran parte dos estudantes asumen os métodos de obtención de primitivas como meros automatismos: afróntanos cunha actitude mecanicista, tratando de memorizar modelos de cálculo de primitivas á marxe dos correspondentes modelos de cálculo de derivadas e teñen dificultades para relacionar os ditos métodos cos problemas de áreas, a pesar de ser estes o contexto habitual onde aplican as integrais.

c) Son poucos os estudantes que constrúen un concepto da integral como unha ferramenta que permite tratar os problemas de variación, a pesar de que estes problemas constitúen un aspecto fenomenolóxico fundamental no estudo do concepto de derivada e nas súas aplicacións, aspecto que se recolle explicitamente na instrución estándar, na cal se presenta a integración como a "operación inversa da derivación". Aínda mencionando explicitamente as primitivas, son moitos os que recorren a estratexias que corresponden a estadios cognitivos de precálculo.

d) A identificación implícita da familia das funcións integrables a aquelas que teñen primitiva, e destas ás que son continuas e derivables, constitúe un obstáculo didáctico que produce erros moi frecuentes, manifestándose na ausencia dun soporte xeométrico que lles permita controlar as situacións con algunha singularidade (punto anguloso, descontinuidade).

e) A maioría dos estudantes carecen de criterios para recoñecer cando un problema pode ser modelado por integración. Incluso son moi poucos os que recoñecen a "presenza" da integral cando se enfrontan, dende as matemáticas, a problemas que xiran arredor do cálculo de magnitudes físicas que estudaron previamente na materia de Física, na que se utiliza explicitamente a integral nas súas definicións e situacións-problema. Tamén aquí se manifesta a carencia dun soporte xeométrico que facilite a comprensión da natureza do problema que se lles presenta.

En coherencia co marco conceptual que promovemos e cos resultados anteriores, realizamos un esforzo por contribuír á construción dunha alternativa didáctica ao cálculo integral en secundaria, tentando conservar a máxima xeneralidade dos conceptos, técnicas e procedementos.

2. NOTAS SOBRE METODOLOXÍA DIDÁCTICA

As consecuencias que poderían derivarse dunha planificación educativa que non acomete expresamente a busca dos principios organizativos xerais, senón que se centra en proporcionar e practicar coleccións máis ou menos extensas de técnicas que permiten realizar correctamente cálculos, centraron os debates das conferencias de Massachusetts dos anos 60 (Woods Hole, 1959; Cambridge, 1963), nas que psicólogos, pedagogos e matemáticos propoñían a necesidade dun cambio curricular nas matemáticas.

Entre as influencias negativas sinaláronse as dificultades de transferencia das aprendizaxes a novos contextos, a escasa satisfacción intelectual que lle reportan á maioría dos estudantes –que perciben a matemática como un conxunto de datos e técnicas independentes e non como un conxunto de estruturas de coñecemento interrelacionadas–, a facilidade coa que se esquecen e o difícil que resultan de reconstruír cando se precisan á volta dun tempo.

Algunhas das estruturas que deben ser comprendidas en matemáticas son de tipo algorítmico (técnico); particularmente no cálculo integral aquelas que se refiren á determinación das integrais indefinidas. Os algoritmos son, certamente, simplificadores, e para seren aplicados con corrección non necesitan ser comprendidos máis aló do seu expreso funcionamento. Pero a súa aplicación vai, de xeito natural, precedida dunha resposta individual á pregunta: ¿cando debo utilizalo?, o que implica un nivel de coñecemento máis profundo, no que se ven implicadas decisións práctico-técnicas que deben ser xustificadas por un discurso "tecnolóxico-teórico" (nomenclatura da TAD).

Habitualmente, de maneira implícita, o alumno asocia cada enunciado a un prototipo de tarefa, de sorte que o "ensino algorítmico" non parece resentirse. Pero se é o estudante quen debe asumir esta responsabilidade, terá que establecer que relacións entre os elementos do problema son pertinentes para a súa solución, ou sexa, que ecuacións convén planear e resolver, que cálculos hai que realizar. A representación física, gráfica ou mediante imaxes mentais pode resultar de grande utilidade para o establecemento, selección e secuenciación de relacións entre os datos, e entre estes e as incógnitas, e para a recuperación doutros datos e estratexias da memoria, o que se vería facilitado por un "coñecemento" ben estruturado.

Se as actividades se ocupasen inicialmente do "que", e non tanto do "como", este cobraría sentido a continuación, xustificando na súa precisión e eficacia o desenvolvemento progresivo do xogo simbólico, que non perdería así a súa forza comunicativa, de maneira que sería posible xerar expectación, construír significados e desenvolver o sentido crítico.

Un exemplo diso, precisamente relativo ao Cálculo, móstranolo Apóstol (1984) dende unha perspectiva histórica: os matemáticos dos séculos XVI, XVII e XVIII recorrían a unha mestura de razoamento dedutivo e intuición, impulsados por conxecturas, e aínda que algúns dos seus resultados serían posteriormente vistos como de dubidosa consistencia lóxica, o certo é que constituíu un período sorprendente de grandes descubrimentos. Cando o caudal de novos descubrimentos diminúe, segue un período de análise crítica e de fundamentación.

En certa forma, poderiamos dicir que planificamos este programa de ensino reproducindo o devandito ciclo histórico:

a- Razoamento dedutivo e indutivo combinados coa intuición.
b- Conxecturas sobre as relacións e propiedades descubertas.
c- Análise crítica destas.
d- Fundamentación.

Inicialmente, os alumnos traballan sobre problemas novos para eles, nos que subxacen os contidos propios do nivel e tema, secuenciados e contextualizados de xeito que promovan aprendizaxes significativas. Ao traballo individual ou en pequeno grupo seguen as postas en común, nas que se confirman acertos, se corrixen erros, se clarifican significados, se avanza en precisión, se unifica terminoloxía e simbolismo, e se afonda no rigor e na fundamentación, reconstruíndo os argumentos.

2.1. Antiderivación

Dous aspectos son os que conforman tradicionalmente os contidos escolares da integración:

- A construción do concepto de integral, coas propiedades e teoremas básicos.
- O cálculo de primitivas,

que se refunden nas aplicacións, versando maioritariamente (en non poucas ocasións, exclusivamente) sobre o cálculo de áreas de trapecios mixtilíneos ou de recintos planos limitados polas gráficas de funcións continuas.

Dado que tradicionalmente a integración se estuda inmediatamente despois da derivación, propoñemos incluír no tema de "derivadas" algúns exercicios específicos de "antiderivación", proporcionando a función derivada e preguntando pola/s función/s orixinal/is da/s que provén. Deseguido deberase construír unha táboa completa de "antiderivadas". Deste xeito, cando logo se constrúa a integral definida como un novo concepto e se chegue a establecer o teorema fundamental, aquel reforzarase coas ideas anteriores –cálculo de antiderivadas ou primitivas–, debendo así clarificarse o rol que desenvolven no tratamento do novo campo de problemas que emerxe coa integración.

2.2. Tipoloxía dos problemas de integración

Aínda que o problema da determinación dunha área impulsou decisivamente a construción teórica do cálculo integral, a riqueza de situacións que poden ilustrarse para ser mellor comprendidas a través dunha expresión xeométrica do problema, e concretamente mediante unha área, é extensa (a pesar de que en certos casos, tan clásicos coma os volumes de revolución ou a lonxitude dun arco de curva, a representación xeométrica da situación non a facemos por medio de áreas).

Unha característica das teorías matemáticas é o seu poder unificador: a posibilidade de tratar un extenso campo de problemas, de procedencias do máis diverso. A fenomenoloxía de situacións susceptibles de seren tratadas a través da integración moderna responde ao estereotipo $\Delta M(x)=f(x)\cdot\Delta x$ (máis formalmente: $dM(x)=f(x)\cdot dx$): queremos avaliar unha magnitude que depende dunha variable x; un elemento (diferencial) do que pretendemos calcular obtense como produto do valor dunha función desa variable por un elemento (diferencial) da variable mesma.

As “situacións de integración” poderíanse clasificar segundo dous tipos de percepción:

- *Estático*, que corresponde ao produto de dúas magnitudes: área (altura por base), ingresos (prezo por nº de artigos vendidos), masa (volume por densidade), cantidade de fluxo de campo (intensidade por superficie),..., o que conecta coa idea de “suma” de todas as pequenas cantidades $f(x)dx$, que forman a integral definida.
- *Dinámico*, que corresponde coa taxa de variación instantánea: variación de espazo/tempo (velocidade), aumento da poboación/tempo (taxa de crecemento), ingreso/produción (ingreso marxinal), ... que permite conectar coa idea de antiderivación ($M'(x)=f(x)$), na medida en que se teña asimilada *a derivada como a taxa de variación instantánea*.

A integral reúne as dúas perpectivas baixo un mesmo concepto:

- Se contemplamos dinamicamente a masa dun corpo (estático) que imaxinariamente imos percorrendo, a densidade indicaría precisamente o aumento de masa que vai corresponder nun novo elemento de volume.
- Reciprocamente, se contemplamos estaticamente un movemento (dinámico), como se xa acontecese e o percibísemos globalmente, a cantidade de espazo “obtida” nun elemento de tempo determinado viría indicada pola velocidade nese momento.

En canto *método*, a integración conxuga dous procesos xerais:

- Un *analítico*: estratexia ou procedemento xeral de descomposición dun todo en partes o suficientemente sinxelas, que poidan ser tratadas dende a perspectiva do problema que se nos presenta (tramos de forza supostamente constante, figuras simples: rectángulos...). Isto daría lugar á obtención de aproximacións, sendo teoricamente posible diminuír tanto como se desexe o erro cometido. Levado ás últimas consecuencias, chegaríase á parcelación en elementos diferenciais nos que se poidan aplicar relacións xa coñecidas.
- Outro inverso, de *síntese*: tamén de carácter xeral, globalizando as partes nun todo único con identidade propia e que na tesitura creada polo proceso analítico anterior incorpora, especificamente, os infinitos elementos nun único obxecto: a integral definida, pola que se obtería o valor exacto (íntegro) da magnitude en cuestión.

A investigación revela que, malia que a práctica totalidade dos estudantes recorda que tivo un contacto con estas ideas ao serlles presentado “o problema da área”, para a maioría careceron da intensidade e explicitación suficientes como para producir unha toma de conciencia delas, o que vai supoñer un lastre na súa comprensión do cálculo integral, ademais de perder a oportunidade formativa de desenvolver estes procedementos esenciais na matemática e, en xeral, no pensamento.

Dende unha perspectiva metacognitiva, intentaremos que os estudantes se pregunten (1):

a. Se un determinado problema pode fragmentarse en pequenas partes de inferior dificultade, de maneira que a reunión das correspondentes solucións parciais proporcione unha aproximación á solución global que están buscando.
b. Se a dita aproximación melloraría ao seren as partes máis pequenas.
c. Se poden expresar analiticamente un elemento diferencial.
d. Se a dita expresión responde ao modelo .

2.3. Actividades introdutorias: a potencia do método

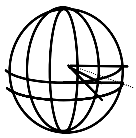
En coherencia co anterior, propoñemos unhas actividades introdutorias que, nun estado aínda preformal, recreen o dobre proceso analítico-sintético e mostren a potencia do método, ao tempo que imos adoptando a notación específica.

Moi interesante resulta o cálculo atribuído a Keppler do volume dunha esfera, coñecida a súa superficie:

- O proceso analítico que se segue é o de descompoñer a esfera en minúsculas pirámides, das que deberá recordarse oportunamente o volume.
- O proceso de síntese conséguese ao integrar as bases desas pirámides nun único obxecto: a superficie da esfera, magnitude previamente coñecida.

Esquematicamente, respondería ao seguinte:

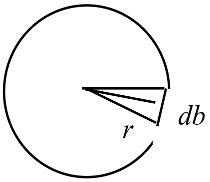
$$dV = \tfrac{1}{3} dB \cdot r \qquad V_{esfera} = S_{uma} dV$$



$$V = S_{uma} \tfrac{1}{3} dB \cdot r = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uma} dB = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uperficie\ da\ esfera} = \tfrac{1}{3} r \cdot 4\pi \cdot r^2 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Como actividade tipicamente de reforzo e consolidación, na cal emula a anterior a un nivel máis alcanzable, proponse o cálculo da área dun círculo, coñecido o seu perímetro.

Esquematicamente, respondería ao seguinte:



$$dA = \tfrac{1}{2} db \cdot r$$

$$A_{círculo} = S_{uma} dA = S_{uma} \frac{db \cdot r}{2} = \tfrac{1}{2} r \cdot S_{uma} db = \tfrac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

2.4. Aproximacións sucesivas

Outro feito que constatamos é que moi poucos viviron un proceso de aproximacións sucesivas a unha medida buscada, máis alá da explicación que se lles proporciona cando se introduce o concepto de integral definida, pero sen que eles se involucren nos cálculos parciais que conducen á avaliación da magnitude.

Propoñemos un proceso de aproximacións sucesivas a unha magnitude que responda á tipoloxía referida (sinxela de avaliar e suficientemente coñecida dos estudantes); proceso que imite os antecedentes históricos do cálculo integral, baseados en métodos numéricos ideados a través de representacións xeométricas:

- Presentación da situación.
- Cálculo individual dunha aproximación.
- Comparación das aproximacións.
- Valoración delas mediante o paso ao cadro xeométrico.
- Mellora das aproximacións, con representación gráfica.
- Intuición da existencia dun límite e busca del mediante o cadro analítico. Introdución significativa do elemento diferencial *dx*.
- Identificación dos procedementos analítico e xeométrico: límite e área.

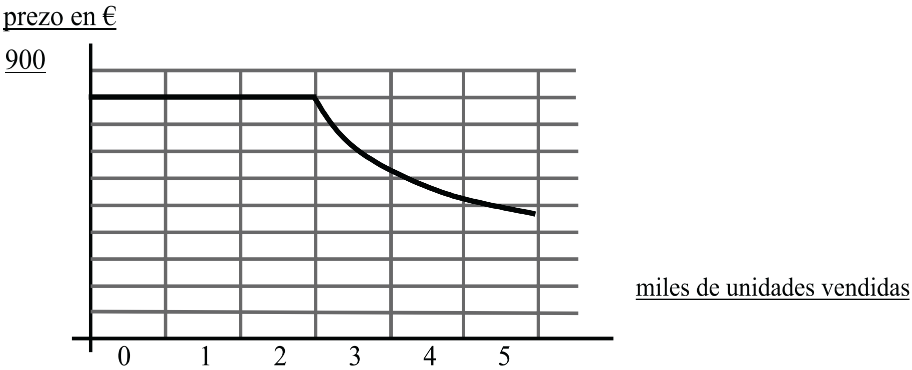
Aínda que os antecedentes históricos aos que nos referiamos trataban de cálculos de áreas, o contexto sociocultural e académico dos nosos alumnos permite tratar problemas diversos, como, por exemplo, sobre a *competencia dos prezos* na telefonía móbil –afrontándoo dende o cadro xeométrico–, ou sobre *o resorte elástico* (lei de Hooke, acudindo ao cadro xeométrico como recurso.

Esquematicamente, responderían ao seguinte:

a) *Competencia dos prezos*

Unha compañía saca á venda 5.000 teléfonos móbiles de 3ª xeración, nunha operación comercial pioneira en España. Inicialmente estipula un prezo de venda de 900 /unidade, pero, cando leva vendidos 3.000 aparellos, unha segunda compañía irrompe no mercado e entran ambas as dúas nunha competencia que os obriga a baixar continuamente os prezos.

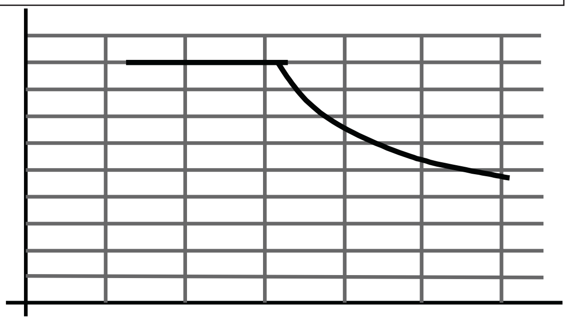
Na seguinte gráfica recollemos o sucedido:



Saberiamos como calcular canto ingresou nos primeiros 3.000 teléfonos vendidos, pois o prezo mantívose constante: $I=p \cdot n$.

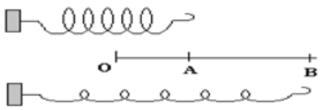
Apartir de aí, se non podemos dar a resposta exacta, intentemos unha aproximación.

A aproximación podemos mellorala facendo os tramos cada vez máis pequenos.



b) *Resorte elástico*

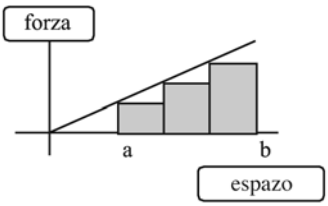
"A forza *f* que exerce un resorte elástico varía proporcionalmente á estirada. ¿Como calcular o traballo físico realizado entre dous puntos dados?"



Saberiamos como calcular o traballo se a forza fose constante: $T = f{\cdot}e$ (coñecida dende cursos anteriores).

Se considerásemos tramos moi pequenos, a forza apenas tería marxe para variar, polo que, aínda non sendo exacto de todo, poderiamos calcular con aproximación o traballo en cada anaco empregando a fórmula $T = f{\cdot}e$; despois sumámolo todo e teremos unha aproximación ao total entre os puntos A e B do problema.

A función (forza) que se aplica é moi sinxela (por exemplo, $f(x) = \frac{1}{3}x$, onde a constante $\frac{1}{3}$ é unha característica do resorte) e ao trasladar ao gráfico a magnitude calculada (traballo), obtemos sumas de rectángulos que converxen a un trapecio:



2.5. Estudo ampliado por ordenador

A identificación do punto medio dun intervalo é especialmente sinxela, o que nos ofrece a posibilidade de sistematizar o cálculo realizando o que se coñece como *regra do punto medio*:

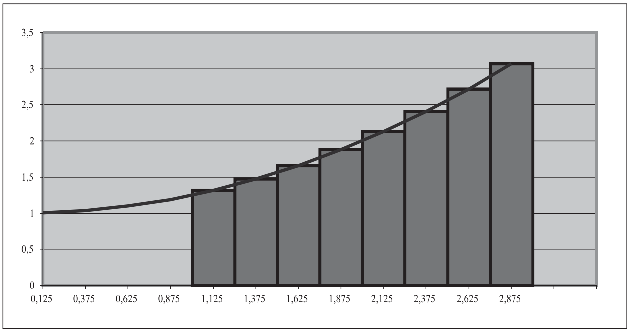
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x_i})\cdot(x_{i+1} - x_i), \quad \overline{x_i} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

Funcións tan sinxelas como $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, xa esixen un nivel de cálculos importante nas aproximacións.

Esquematicamente, respondería ao seguinte:

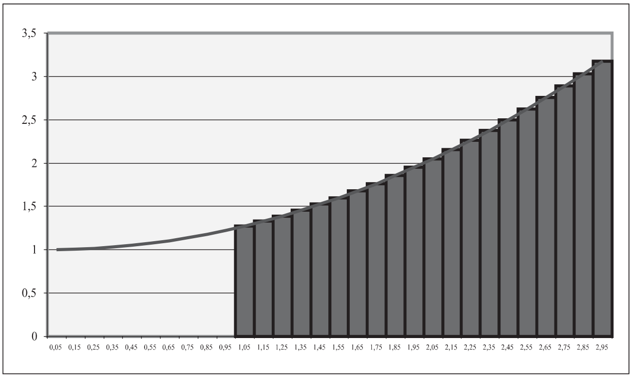
Tomando intervalos de 0´25 de longo

x	f(x)	f(x)·0´25
1,125	1,316	0,329
1,375	1,472	0,368
1,625	1,660	0,415
1,875	1,878	0,469
2,125	2,128	0,532
2,375	2,410	0,602
2,625	2,722	0,680
2,875	3,066	0,7666
	Suma	= 4,1640



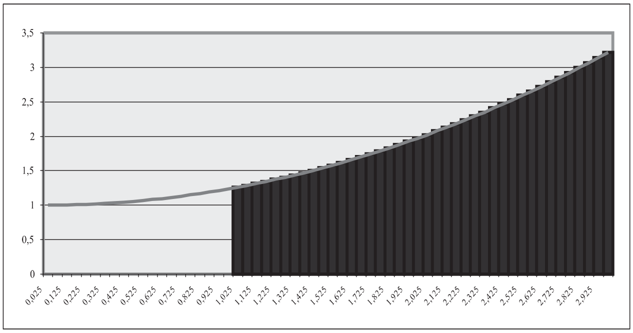
Tomando intervalos de 0´1 de longo

x	f(x)	f(x)·0´1
1,05	1,275	0,1275
1,15	1,330	0,1330
1,25	1,390	0,1390
1,35	1,455	0,1455
....	.....	.....
2,75	2,890	0,289
2,85	3,030	0,303
2,95	3,175	0,317
	Suma	= 4,1662



Tomando intervalos de 0´05 de longo

x	f(x)	f(x).0´05
1,025	1,262	0,063
1,075	1,288	0,064
1,125	1,316	0,065
1,175	1,345	0,067
.....	.....	.....
2,875	3,066	0,153
2,925	3,138	0,156
2,975	3,212	0,160
	Suma	= 4,1665



2.6. Teoremas de integración

As demostracións da relación fundamental que detectamos nos textos fan uso da continuidade da función base (que se establece como requisito no enunciado) e da aditividade da integral definida sobre o intervalo (que, loxicamente, se proba antes), e dos teoremas de Weierstrass ou Bolzano, respectivamente. Se tal grao de rigor se considera necesario neste nivel educativo, iso deberá ser a parte culminante dos procesos demostrativos, pero non a parte inicial e única, pois nin os estudantes conseguen comprender a súa pertinencia (Azcárate, 1996), nin desvela a natureza da integración, as características subxacentes da fenomenoloxía á que se enfrontan a través deste novo concepto.

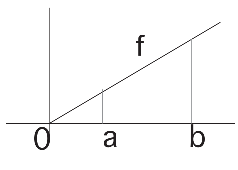
Pero, en calquera caso, unha argumentación non pode consistir nun cúmulo organizado de felices coincidencias; esixe unha reflexión sobre os significados e unha busca intencionada das súas relacións: ¿por que queremos probar precisamente isto? e ¿que conexións podemos establecer entre as ideas de partida e as de chegada?

Por exemplo, a regra de Barrow preséntase como un corolario do teorema fundamental, pero o certo é que aquela foi anterior a este, aínda que nunha reconstrución formal se prefira inverter a orde para gañar coherencia lóxica na exposición e xeneralidade nos resultados.

Exemplos sinxelos, como o do resorte elástico ou o da telefonía facendo rectilínea a gráfica, facilitarían unha aproximación significativa a estas ideas.

Esquematicamente responde ao seguinte:

Traballo dende *a* ata *b* = Traballo total ata *b* - Traballo feito ata *a*
Área do trapecio =
= triángulo en *b* - triángulo en *a* = $\frac{b^2}{6} - \frac{a^2}{6}$



Poñendo a énfase nestas ideas, estableceremos un diálogo co alumno en termos que lle desvelen as nosas exploracións, para formalizalas posteriormente. A pregunta que non deberamos deixar pasar dentro dun comportamento científico será: ¿que relación ten a función "ingresos" coa función "prezo", e cal a función "traballo" coa función "forza"?. Responderemos dende dous puntos de vista, conceptual e algorítmico:

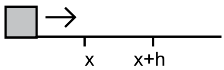
- Relacionando a derivada co crecemento/decrecemento, xa que é esta unha das aplicacións, clásicas, comúns, ordinarias e inescusables da derivación, o valor do prezo nun punto concreto das vendas, permítenos prever se os ingresos aumentarán "moito ou pouco"; analogamente, a forza nun punto concreto, verbo do traballo, dinos canto este tende a aumentar; infórmanos do seu estado de cambio. Logo o prezo, garda relación coa *derivada* dos ingresos e a forza, coa *derivada* do traballo.

- Estando recente o estudo das derivadas, e concretamente os exercicios de antiderivación, intentaremos ver a relación entre as correspondentes expresións (función $f(x) = \frac{x}{3}$ base) e $T(x) = \frac{x^2}{6}$ (función traballo, dende a orixe ata o punto *x*).

Atopámonos a continuación con outra cuestión actitudinal: unha vez comprobado que efectivamente $T' = f$, debemos aínda xustificalo: analizaremos se a relación entre as funcións "traballo" e "forza", $T' = f$, ten fundamentación lóxica ou se, pola contra, é un resultado casual debido ás fórmulas concretas que estamos estudando. Para iso, situámonos no caso xeral dunha función forza calquera *f(x)* e desenvolvemos a derivada da función traballo.

Esquematicamente, responde ao seguinte:

$$T'(x) = lim_{h\to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h}$$



O numerador expresa o traballo realizado ao desprazarnos do punto *x* ao *x+h*:

*T*raballo total ata *x+h* - *T*raballo xa feito ata *x*

Cando *h→0*, por tratarse dun elemento infinitesimal de espazo, a forza *f* apenas ten marxe para variar, xa que varía precisamente co espazo, logo *podemos supoñer* que o seu valor *f(x)* permanece constante nese tramo.

Se a forza fose constante:

*T*raballo entre o punto *x* e o punto *x+h* = forza · espazo = *f(x)·h*

Logo $T'(x) = lim_{h\to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} f(x) = f(x).$

O erro cometido nesta *suposición* pódese facer tan pequeno como se desexe; abonda con tomar *h* o suficientemente próximo a 0.

2.7. Modelos de integración

Agora, nótese que a validez desa última suposición implica:

a) Que a "oscilación" da función f sexa moi pequena en pequenos subintervalos $[x,x+h]$, o que se garante se f é *continua*, para un h suficientemente pequeno.

Antes xa aceptaramos:

b) Que a magnitude a calcular (traballo) era *aditiva* no intervalo:

$$\text{traballo entre } 0 \text{ e } x+h =$$
$$= \text{traballo entre } 0 \text{ e } x + \text{traballo entre } x \text{ e } x+h$$

c) Que no caso de ser constante a función nun intervalo de amplitude h, a magnitude buscada obtense polo produto $f \cdot h$.

E máis oculta estaba estoutra aceptación:

d) Que aínda non sendo constante, unha función g moi próxima a f proporciona un valor moi próximo para a magnitude calculada.

Efectivamente, no intervalo $[x,x+h]$ a forza non é constante, pero substituímola por unha forza constante $f(x)$; pero, en xeral, non é o mesmo a similitude entre forzas que a similitude entre os traballos que proporcionan: soamente sabiamos iso se ambas as dúas forzas son constantes. Isto vén garantido pola propiedade de monotonía: a maior forza, maior traballo, e viceversa.

Pero na xustificación da relación fundamental $T' = f$ non se empregou ningunha propiedade concreta das magnitudes físicas en cuestión, nin sequera fórmulas matemáticas específicas! En realidade, o que fixemos foi estudar como calcular o valor, *dende unha orixe preestablecida ata un punto determinado*, de calquera magnitude F aditiva no intervalo, se no caso de que certa función f, continua nese intervalo e coa cal se relaciona, se mantivese constante nun subintervalo de lonxitude h ao cal pertenza o punto, sucedese que $F = f \cdot h$, e se a maior f correspondese maior F.

2.8. Campo fenomenolóxico

A investigación revela que a maioría dos estudantes só citan os problemas de áreas entre as aplicacións do cálculo integral ou engádenlles os problemas de velocidade/espazo/tempo. Son esporádicas as alusións a outros fenómenos, feito moi sorprendente entre o colectivo de estudantes "de ciencias" porque cursan unha disciplina de física onde múltiples conceptos lles son presentados mediante integrais.

Propoñemos levar a cabo unha *exploración guiada* de situacións dentro do campo de problemas da integración, que á súa vez, poida ir acompañada cunha variedade ampla de funcións a integrar, constituíndo a un tempo tarefas para desenvolver técnicas de cálculo de primitivas.

a) Os problemas de espazo/velocidade sonlles moi familiares a estes estudantes. Con eles pretendemos inicialmente estenderlles o campo fenomenolóxico e, aproveitando que é coñecido por eles que “a velocidade é a derivada do espazo respecto do tempo”, reafirmar a relación fundamental entre os dous grandes conceptos, derivada e integral, que xa procuramos no apartado anterior. Neste contexto intentaríase un primeiro achegamento ao “teorema do valor medio”, concretamente tocante a tal *valor medio*, dado que a *velocidade media* é un excelente representante desta idea.

b) Os volumes de revolución porque nos conducen á tesitura máis xeral, que nós coidariamos de facer explícita para potenciar os aspectos metacognitivos. Os volumes, e non unicamente os de revolución, facilitan a descomposición analítica do problema ao ser doada a identificación do elemento diferencial dV. Pero como con calquera outro método de traballo, podemos polo menos intentar reformular determinadas problemáticas novas para ver se é posible que encaixen no modelo anterior (expresar o elemento diferencial como), loxicamente cando teñamos algún estímulo para facelo. Resulta tamén interesante dende o punto de vista de *xogo de marcos de representación* (Douady, 1986), pois ao ser un exercicio xenuinamente xeométrico supón unha recreación visual novidosa, que desborda o esquema da área do recinto plano e segue a ser moi sinxela de imaxinar.

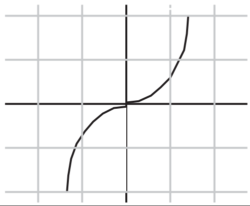
c) O problema da área abordaríase agora explicitamente, dando significado á problemática que leva asociada: a investigación puxo de manifesto que está moi estendida a confusión arredor do signo da área e da súa relación coa integral; particularmente preocupante manifestase a confusión cando asignan o valor 0 á área dunha rexión plana da que se visualiza claramente a zona que ocupa.

Sería pertinente introducir a cuestión do signo da integral/área cunha función impar, provocando como resultado 0, requirindo que se tome unha decisión ao respecto, a cal debera ser consensuada, fortalecendo así as compoñentes metacognitivas da aprendizaxe, ao tempo que constituiría unha achega emocional de interese.

Esquematicamente, responde ao seguinte:

Calcula a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x) = \frac{1}{3} x \cdot e^{x^2}$ e o eixe horizontal entre os puntos de abscisas -1´25 e 1´25 (Sombréaa).

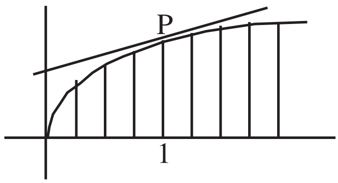
Se obtés 0, toma unha decisión que che permita dar un valor coherente para esa área.



d) Os exercicios de aplicación á Economía, por tres razóns:

- Ser un dos ámbitos de aplicación emerxentes, que gañou presenza nos tratados de divulgación, e tamén nas aulas.
- Tratarse dunha modelización dun proceso discreto por medio dunha función continua, o que estende significativamente o dominio da problemática susceptible de ser tratada por integración. Psicoloxicamente é moi suxestiva esta situación, pois inverte a liña de desenvolvemento anterior.
- Coincide cos avances preliminares de Leibniz na construción do Cálculo, proporcionando unha excelente exemplificación.

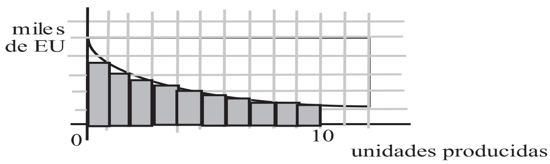
Tomando intervalos de 1 unidade, Leibniz aproximaba a área baixo a curva pola suma das ordenadas. Esta aproximación sería cada vez mellor canto máis pequena fose a unidade elixida.



Esquematicamente, responde ao seguinte:

O custo de fabricar 10 artigos: *f(1)+f(2)+f(3)+ ..... + f(10)*, tratariamos de expresalo como unha suma de produtos:

$$f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \ldots\ldots\ldots + f(10)\cdot 1$$

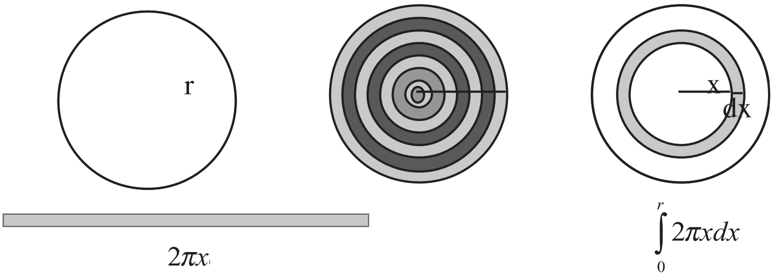


Se o facemos graficamente, resulta obvio que estamos obtendo unha aproximación por defecto da área baixo a curva, o que nos sitúa no contexto da integración.

e) Rematariamos esta epígrafe cun exercicio recreativo que nos permite "revivir" as orixes de todo o proceso analítico-sintético obtendo, por outra vía *integral*, a área do círculo. A un tempo, a "escenificación" do proceso resulta moi suxestiva para ampliar as expectativas de aplicación do Cálculo. Así mesmo, dado que anteriormente xa teriamos resolto o problema por "integración clásica" (triangulación), volveremos sobre aquela solución para presentala nos termos da "integración moderna": identificando a función pertinente. Isto proporciónanos, ademais, a posibilidade de realizar un cambio de variable significativo, tendo que axustar os extremos de integración.

Esquematicamente, responde ao seguinte:

Descompoñemos o círculo en figuras das que podemos calcular facilmente a área: coroas circulares, porque son como rectángulos enrolados.



2.9. Expresión dunha función como combinación doutras máis simples

Esencialmente, propoñémonos traballar nesta epígrafe o procedemento analítico de descomposición dunha situación en situacións máis sinxelas, agora cunha perspectiva máis abstracta e xeral, sen recorrer a ningunha técnica específica de integración: se non recoñecemos a función a integrar como correspondente a ningunha clase da táboa de antiderivadas (esta reúne os seus coñecementos ao respecto), tentaremos transformala.

Certamente, este tipo de instrución require procesos de indagación e elaboración, que indubidablemente esixen un tempo de reflexión que queda obviado se o profesor/a proporciona a priori esquemas para que os estudantes os apliquen directamente. Pero isto último, como pon de manifesto a nosa investigación, implica deficiencias formativas importantes, en varios aspectos:

- Nos metacognitivos, por carecer da consciencia das posibilidades da transformación, crendo que se trata de técnicas novas de integración.
- Nos creativos, en canto que reduce a tarefa do alumno a unha aplicación mecánica do método correspondente que, como moitos declaran, "é a maneira (única) de facelo", cando en realidade se abría diante deles un interesante abano de posibilidades.
- Nos actitudinais, en canto que se afán a satisfacer as novas demandas con nova información que puntualmente lles debe ser proporcionada, e non adquiren hábitos nin actitudes proclives a "moldear" a información xa dispoñible.

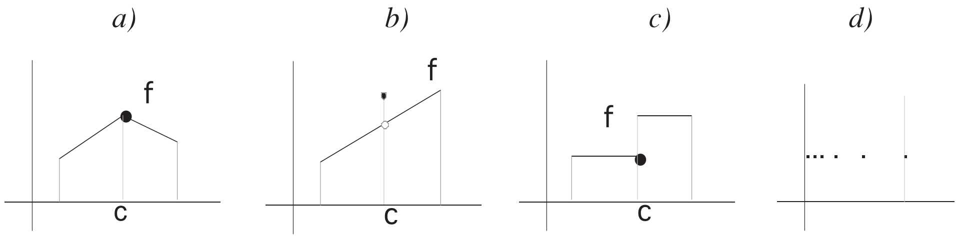
2.10. Formalización dos conceptos e propiedades

Aínda que as presentacións habituais dos contidos matemáticos están inmersas nos aspectos formais, máis ou menos profundos e rigorosos segundo o nivel ao que se traballe, aqueles formúlanse aprioristicamente e non como consecuencia dun proceso intencionado de dotar de rigor o contido e de fornecernos dun método estrito e eficaz de analizar criticamente conxecturas e deducir resultados.

Consideramos que unha verdadeira formación matemática debera facer explícita a dita “intención”, debera facerlles sentir aos estudantes a necesidade de organizar, explicar e xustificar o coñecemento, sexa cal sexa o grao de rigor que se considere pertinente en función do seu nivel académico.

A maioría dos textos que revisamos decántanse polo emprego das sumas superiores e inferiores. Pero non parece didacticamente coherente establecer a existencia e a definición da integral na igualdade dos límites de sucesións decrecentes e crecentes, respectivamente, construídas con elas facendo cada vez máis finas as particións do intervalo, ou na igualdade do ínfimo daquelas co supremo destas, ou outras condicións desa natureza, cando unicamente se manexan funcións continuas, nas que as ditas condicións se cumpren trivialmente.

A nosa proposta consiste, apoiándonos no marco xeométrico, en someter a estudo funcións con “irregularidades” que susciten precisamente esa conveniencia. Con isto, aínda non esgotando a casuística, permitiremos unha visión do tema moito máis xeral e interesante que a que habitualmente se proporciona:



- Os exemplos *a)* e *c)* permiten imaxinar particións nas que o punto *c* sexa extremo (superior ou inferior, segundo conveña) dun subintervalo e simplemente a propiedade asociativa dos números reais soluciona todo o problema que o dito punto podería causarnos. (Nótese que esta mesma idea xustifica a aditividade sobre o intervalo).
- Pero o caso *b)* non permite ese tipo de saída, pois o punto *c* non pode por si só constituír un intervalo. Lonxe do que poida parecer, esta situación é a verdadeiramente interesante, pois obriga a pensar, polo menos intuitivamente, en termos de medida do intervalo que contén a descontinuidade:

- É precisamente no cálculo do límite cando conseguimos solucionar a perturbación: $f(c)\cdot(x_{i+1}-x_i) \to f(c)\cdot 0 = 0$.
- Na diferenza entre as sumas superior e inferior correspondentes, teriamos tamén un único elemento "estraño": . $\big(f(c)-m_i\big)(x_{i+1}-x_i) \to \big(f(c)-m_i\big)0 = 0$

- Continuando con esta última idea, o exemplo *d)* introdúcenos en funcións con infinitas descontinuidades pero, agás un número finito delas, pódense pechar nun intervalo tan pequeno como se desexe (hai un punto de acumulación). Combina, pois, as dúas casuísticas anteriores, e supón un avance cualitativo na comprensión teórica da integrabilidade; propiedade que se perdería se as descontinuidades non puidesen illarse ou pecharse nun contorno de "amplitude" desprezable.

2.11. Ecuacións diferenciais

Son moi escasas as actividades explícitas sobre ecuacións diferenciais nos textos de secundaria, aínda que algúns problemas de aplicación ao crecemento de poboacións ou desintegración radioactiva, por exemplo, respondían implicitamente a elas. Sendo a resolución de ecuacións diferenciais o gran campo de aplicación das técnicas de integración, sería unha pena non poder deixar constancia diso, mesmo que se faga por medio de selectos exemplos de dificultade menor. De feito, é posible atopar situacións de contexto suxerente, como os crecementos de poboacións ou a desintegración radioactiva que xa citamos, pero que ademais poden tratarse cunha metodoloxía construtiva, o que favorece a consolidación do *Cálculo* ao considerar explicitamente xuntos os problemas de diferenciación e integración, ao tempo que se afonda nos procedementos xerais do coñecemento.

Os casos máis sinxelos que atopamos pertencen ao modelo $y' = a\cdot y$ (ou $\frac{dy}{dx} = a\cdot y$), que indica que a derivada é proporcional ao valor da función en cada punto. Correspóndenlle a el os procesos de crecemento e de desintegración desinhibidos, nos que é razoable supoñer que a taxa de variación é proporcional á "cantidade" dos elementos presentes:

- Resolver a ecuación diferencial equivale a responder a pregunta: ¿coñeces algunha función que sexa igual, salvo quizais un coeficiente, á súa derivada? E claro que a coñecen, ¡a función expoñencial!
- Outra estratexia exitosa é a manipulación da expresión seguindo o método ordinario de reunir as variables homólogas, inmediata neste caso, para transformala en $\frac{1}{y}\cdot dy = a\cdot dx$.

- Isto tan maior interese, xa que nos abre unha vía que resultará frutífera: *a separación de variables*.
- Agora a pregunta é: ¿coñeces algunha situación que dea lugar a $\frac{1}{y}\cdot dy$? É claro que a coñecen, ¡a derivada da logarítmica!

3. BIBLIOGRAFÍA

ALVAREZ, B., LABRAÑA, A. e CAJARAVILLE, J. A. (2000) Unha introdución ás integrais. *Boletín das Ciencias (*44) 35-40.

ANDERSEN, K. (1984) Las técnicas del cálculo, 1630-1660 (Capítulo 1). En GRATTAN-GUINNES (Ed.) *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid, Alianza Universidad.

APOSTOL, T. (1984) *Calculus*. Barcelona, Reverté.

ARTIGUE, M. (1995) La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos (98-140). En ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. e GÓMEZ, P. (Eds.) *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. México, Grupo Editorial Iberoamericano.

AZCÁRATE, C. e Outros (1996) *Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid, Síntesis.

BOS, H. J. M. (1984) Newton, Leibniz y la tradición leibniziana (Capítulo 2). En GRATTAN-GUINNES (Ed.) *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid, Alianza Universidad.

BOYER, C. (1986) *Historia de la Matemática*. Madrid, Alianza Editorial.

BRADLEY, G. L. e SMITH, K. J. (1997) *Cálculo de una variable*, 2 (1). Madrid, Prentice Hall.

CHEVALLARD, Y. (1997) Concepts fondamentaux de la Didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (12:1) 73-112.

DOUADY, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* (7: 2) 5-31.

FREUDENTHAL, H. (1983) *Didactical phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht-Holland D. Reidel Publishing Company.

GERE, B. H. e Outros (1972) *Curso programado de cálculo*. Barcelona, Reverté.

GRATTAN-GUINNES, I. e Outros (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid, Alianza Universidad.

HAWKINS, T. (1984) Los orígenes de las teorías de integración modernas. En GRATTAN-GUINNES (Ed.) Capítulo 4. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid, Alianza Universidad.

HEGEDUS, S. (1998) A study of the metacognitive behaviour of mathematics undergraduates in solving problems in the Integral Calculus. Doctoral Thesis. UK, University of Southampton.

LABRAÑA, A., RODRÍGUEZ, M. e CACHAFEIRO, L. (1994) *Sobre integrais*. Muros, Toxosoutos.

LARSON, R. E., HOSTETLER, R. P. e EDWARDS, B. H. (1999) *Cálculo* (2: 1). Madrid, Mc. Graw Hill.

LINÉS, E. (1991) *Principios de Análisis Matemático*. Barcelona, Reverté.

ORTON, A. (1983) Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics* (14: 1) 1-18.

PISKUNOV, N. S. (1977) *Cálculo diferencial e integral*. Moscú, H. C. Hckyhob.

PUIG ADAM, P. (1979) *Cálculo integral*. Madrid, Gómez Puig.

SCHNEIDER, M. (1988) *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*. Tese doutoral. Universidad Católica de Lovaina.

SIERPINSKA, A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* (6:1) 5-67.

SPIVAK, M. (1992) *Calculus*. Barcelona, Reverté.

STEWART, J. (1999) *Cálculo diferencial e integral*. México, Internacional Thomson.

TALL, D. (1986) A graphical approach to integration and the fundamental theorem *Mathematics Teaching* (113) 48–51.

THOMPSON, P. (1994) Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics* (2) 229-274. Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

TURÉGANO, P. (1997) El aprendizaje del concepto de integral. *SUMA* (26) 39-52. Zaragoza, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

4. NOTAS

1. Os dous primeiros puntos reúnen a esencia do que poderiamos chamar "integración clásica", e os dous seguintes a da "integración moderna" que nos conduce ao cálculo de primitivas.

Data de aceptación definitiva: 01/03/04