DISEÑO Y EVALUACION DE UNA PROPUESTA CURRICULAR DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA EN ENSEÑANZA SECUNDARIA BASADA EN EL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

ROSA CORBERAN SALVADOR
ANGEL GUTIERREZ RODRIGUEZ
MANUEL PEDRO HUERTA PALAU
ADELA JAIME PASTOR
J. BAUTISTA MARGARIT GARRIGUES
ANTONIO PEÑAS PASCUAL
ENRIQUE RUIZ PEREZ

C·I·D·E·

DISEÑO Y EVALUACION DE UNA PROPUESTA CURRICULAR DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA EN ENSEÑANZA SECUNDARIA BASADA EN EL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

Autores:

Rosa Corberán Salvador
Angel Gutiérrez Rodríguez
Manuel Pedro Huerta Palau
Adela Jaime Pastor
Juan Bautista Margarit Garrigues
Antonio Peñas Pascual
Enrique Ruiz Pérez

Coordinador: Angel Gutiérrez Rodríguez

ESTUDIO FINANCIADO CON CARGO A LA CONVOCATORIA DE AYUDAS A LA INVESTIGACION DEL C.I.D.E.

Número 95
Colección: INVESTIGACION

Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometna en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele / Rosa Corberán Salvador ; coordinador, Ángel Gutiérrez Rodríguez. -- Madrid : Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia : CIDE, 1994

1. Enseñanza secundaria 2. Aprendizaje 3. Geometría 4. Pedagogía experimental 5. Evaluación I. Corberán Salvador, Rosa II. Gutiérrez Rodríguez, Ángel

EDITA: Secretaría General Técnica
Cenwo de Publicaciones
Tirada: 1.200 ej.
Depósito Legal: M-36.169-1994
NIPO:176-94-119-5
I.S.B.N.: 84-369-2539-4
Imprime: DIN IMPRESORES
Marqués de San Gregario, 5.28026 Madrid

INDICE.

INTRODUCCION

Presentamos a continuación las partes más significativas de la memoria final del Proyecto de Investigación "Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele", aprobado en la convocatoria de 1989 del Concurso Nacional de Proyectos de Investigación Educativa del C.I.D.E.

Los objetivos del presente documento son, como el título del proyecto indica, ofrecer una propuesta curricular concreta de enseñanza de la Geometría Plana surgida de esta investigación y dar cuenta detallada de la actividad realizada por el equipo investigador durante los dos cursos que ha durado la investigación, 1989-91. Durante el primer curso se han desarrollado y experimentado las actividades programadas en el programa de la investigación, y durante el segundo se ha procedido a completar el análisis de la información recogida, a plantear conclusiones y a elaborar nuestra propuesta curricular. A modo de resumen, la investigación se ha desarrollado siguiendo las tres etapas siguientes:

1ª) Organizar y completar la información disponible, para después planificar la secuencia de trabajo del equipo investigador y desarrollo del material que debía ser utilizado en la experimentación. Este material consta, por una parte, de unas unidades para la enseñanza de determinadas partes de la Geometría Plana y, por otra, de dos tests utilizados para evaluar el nivel de Van Hiele de razonamiento de los estudiantes antes y después de haber estudiado el material de enseñanza experimental. Durante esta primera etapa, los tests fueron experimentados en una versión piloto (previa a la versión definitiva) en dos grupos similares a aquéllos con los que se iba a realizar la experimentación.

El equipo investigador está formado por profesores de Matemáticas de E. Secundaria y por miembros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia. Durante el desarrollo del proyecto de investigación, la responsabilidad central de los primeros fue diseñar y experimentar las unidades de enseñanza, mientras que la de los segundos fue evaluar "desde fuera de las aulas" los resultados de dichas unidades y diseñar los tests necesarios para ello. No obstante, todos los miembros del equipo trabajamos de manera conjunta en esta primera etapa del proyecto, diseñando y organizando los materiales de enseñanza y evaluación. Posteriormente, los trabajos de enseñanza y evaluación durante la segunda y tercera etapas se desarrollaron de manera independiente.

2") Experimentación de las unidades de enseñanza y evaluación del progreso de los estudiantes. La experimentación se ha llevado a cabo en varios gmpos de primer curso de F.P. y en uno de Bachillerato experimental, como parte integral del curso de Matemáticas, durante su horario habitual de clase y dando las clases sus profesores oficiales, los cuales eran miembros del equipo investigador. Debido a la organización general de la asignatura de estos gmpos, la expenmentación se desarrolló a lo largo del tercer trimestre de 1990, hasta el final del curso. Los grupos y centros implicados en la expenmentación fueron:

Instituto de F.P. "Alfafar" de Alfafar (Valencia). Profesora: Rosa Corberán. Grupos 1°B y 1°C.

Instituto de F.P. "Cabanyal" de Valencia. Profesor: Antonio Peñas. Gmpos 1°C y 1°F.

Instituto de F.P. "Massamagrell" de Massamagrell (Valencia). Profesor: Juan B. Margarit. Grupos 1°A y 1°B.

Instituto de F.P. "Quart de Poblet" de Quart de Poblet (Valencia). Profesor: M. Pedro Huerta. Grupo 1°A.

Siguiendo la clásica metodología de evaluación de las experimentaciones mediante la administración de pretests y postests, a los gmpos experimentales se les administró un pretest y un postest con el mismo cuestionario en ambos casos. El pretest fue administrado durante la primera quincena del mes de marzo y el postest durante la última quincena del curso.

3ª) Esta última etapa de la investigación se ha desarrollado casi por completo durante el curso 1990-91. Ha consistido en el análisis conjunto del desarrollo de las clases en los gmpos experimentales, en completar la corrección de los tests en la obtención de información (tanto de la experiencia docente como de los tests administrados) y en la posterior obtención de conclusiones.

Este documento consta de **3** capítulos. En el capítulo 1, de carácter teórico, presentamos los elementos principales del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, que ha constituido el marco teórico en el que se ha basado el equipo investigador para estructurar las unidades cumculares que se han diseñado y experimentado, así como para llevar a cabo la evaluación de la experiencia y la eficacia de las unidades de enseñanza.

El capítulo 2 está dedicado a presentar las unidades de enseñanza de la Geometría y la experimentación que hemos llevado a cabo. Este capítulo constituye el núcleo central y el objetivo principal del proyecto de investigación. En él se describen los contenidos de las unidades de enseñanza, junto a sus objetivos y metodología, y se presentan los textos completos de las mismas. **A** continuación, en el mismo capítulo, se describen las características de los Centros de E. Secundaria en los que se ha realizado la experimentación y de los gmpos de estudiantes concretos que han participado en la misma. Este capítulo se completa con un análisis del desarrollo de las clases, presentando ejemplos significativos de los comportamientos y respuestas de diferentes tipos de estudiantes.

Por último, en el capítulo **3** se presentan los resultados de la evaluación llevada a cabo para determinar el progreso de los estudiantes después de la enseñanza de las unidades en cuestión. Esta evaluación se ha realizado con 2 tests diseñados especialmente para su uso en este proyecto, cuyo objetivo es determinar los niveles de Van Hiele de razonamiento de los estudiantes en base a los contenidos geométricos centrales de las unidades de enseñanza experimentadas. Haremos una descripción del proceso de construcción del test, de su administración y un análisis de los resultados, tanto referentes a los niveles de razonamiento de los estudiantes como a la consistencia del test.

CAPITULO 1

BASES TEORICAS: EL MODELO DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE.

Son de sobra conocidas las dificultades con que se encuentran los profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria para conseguir que sus alumnos comprendan los temas que estudian y puedan ir más allá de la simple memorización de las definiciones, demostraciones, algoritmos o métodos de resolución de ejercicios que "van para el examen". Las causas de estas dificultades son múltiples y complejas, tanto de tipo social como académico, siendo una de las principales la falta de preparación de los estudiantes para superar el salto metodológico que supone el paso de la Enseñanza Primaria (hasta este momento E.G.B.) a la Secundaria (actualmente B.U.P. o Formación Profesional).

Por una parte nos encontramos con que, en las clases de Matemáticas de la Enseñanza Primaria, muchos profesores utilizan metodologías inductivas, activas, que están caracterizadas por una enseñanza dc tipo informal (es decir, no formal), basada en la manipulación y la observación por los estudiantes de su propia actividad como base para la comprensión y construcción de los conceptos antes de la memorización de las definiciones, los principales resultados o los algoritmos. Otros profesores de Primaria se inclinan por una enseñanza más deductiva, donde predomina la clase magistral, quedando la comprensión relegada a un segundo plano, en detrimento de la actividad comprensiva de los estudiantes, a los cuales sólo se les pide memorizar definiciones, propiedades, fórmulas y algoritmos. En todo caso, es difícil encontrar cursos de Primaria, ni siquiera del Ciclo Superior, en los que se realicen demostraciones más o menos rigurosas, aunque sean intuitivas, de las propiedades o resultados que se están estudiando.

Por el contrario, las Matemáticas de la Enseñanza Secundaria suelen ser mucho más formales y desde el primer momento están presentes todos los elementos típicos de los métodos matemáticos de trabajo: Definiciones formales, demostraciones lógicas, redes de teoremas, etc. Si unimos este factor a otros de tipo psicológico y social que están también presentes en esta etapa de paso de un nivel de enseñanza a otro, es lógico el desconcierto y la falta de recursos de los estudiantes ante un cambio tan brusco de las reglas del juego. Las consecuencias más evidentes son la mecanización del aprendizaje, el fracaso escolar, el abandono de los estudiantes y la disminución del nivel de exigencia del profesorado.

No se trata de un problema exclusivo del actual sistema educativo español (en fase de sustitución), sino que es internacional, pues la lectura de publicaciones referidas al tema nos permite comprobar que en todos los países de los que se tiene información existen dificultades similares. Sin embargo, el constatar que se trata de una situación universal no significa que no debamos tratar de solucionarla, al menos parcialmente.

Tampoco es un problema nuevo, ni exclusivo de los sistemas educativos o de las metodologías actuales. De hecho, hace casi 40 años, la preocupación ante este problema experimentada por Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, dos profesores holandeses de Matemáticas de Enseñanza Secundaria, les indujo a estudiar a fondo la situación para tratar de encontrarle alguna solución. El propio P.M. Van Hiele explica así el origen de su interés por este tema (Van Hiele, 1986, p. 39):

> "Cuando empecé mi carrera como profesor de Matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la Geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia

parecía ser demasiado difícil. _ De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: ***No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada?*** En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento."

En este párrafo se encuentran varias alusiones a los puntos que identificábamos antes: Los alumnos son incapaces de entender argumentaciones matemáticas formales, incluso cuando son "muy simples". Esta situación se repite año tras año, a pesar de los esfuerzos del profesor por mejorar sus explicaciones y hacerlas más claras. Estos problemas surgen con más claridad en la Geometría, debido a que esta área de las Matemáticas se presta con toda facilidad a desarrollar clases inductivas y en las que la manipulación de materiales didácticos concretos es una componente importante. Por el contrario, en Aritmética hay una componente abstracta y simbólica que no se puede eliminar ni siquiera con los materiales didácticos.

Como respuesta a esta inquietud inicial, los esposos Van Hiele empezaron a investigar sobre los procesos de aprendizaje de la Geometría, lo cual les llevó a formular el **Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele,** en el cual se plantea la existencia de diversos ***niveles de razonamiento geométrico,*** que van desde el puramente visual propio de los niños de los primeros cursos de E. Primaria hasta el lógico-formal que desarrolla un matemático. Junto a esta descripción de diferentes niveles de razonamiento, que sirve para identificar los problemas de aprendizaje a que aludía P.M. Van Hiele en los párrafos anteriores, el Modelo de Van Hiele ofrece también una solución (nunca perfecta, como cualquier otra solución educativa) mediante una sugerencia a los profesores sobre cómo lograr que sus alumnos mejoren la calidad de su razonamiento matemático. Se trata de las ***fases de aprendizaje,*** en las cuales se propone una organización de la enseñanza que ayudará a los estudiantes a construir las estructuras mentales que les permitan lograr un nivel superior de razonamiento.

En sus respectivas tesis doctorales (Van Hiele, 1957 y Van Hiele-Geldof, 1957) se resumen las propuestas de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje que caracterizan el Modelo de Razonamiento de Van Hiele. Las cuatro afirmaciones siguientes pueden servir como resumen, desde un punto de vista global, de sus propuestas, que más adelante desarrollaremos:

1) Es posible encontrar diferentes niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes de Geometría (y, en general, de Matemáticas).
2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las Matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3) Si una relación matemática no puede ser expresada de forma comprensible para el nivel de razonamiento actual de los estudiantes, es necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma; sólo se aprende a razonar mediante la propia experiencia. Pero sí se puede ayudar a esa persona, por medio de una enseñanza adecuada de las Matemáticas, a que adquiera lo antes posible la experiencia necesaria para que llegue a razonar de esa manera.

Así pues, el Modelo de Van Hiele enfatiza la existencia de diferentes formas de razonamiento en Matemáticas y señala la necesidad de que los profesores tengan en consideración la capacidad de razonamiento de sus alumnos al decidir la forma y el rigor de sus clases.

Otro elemento importante en el Modelo de Van Hiele es el significado que se da en el punto 4 anterior a la palabra "enseñar". Como hemos dicho, el modelo de Van Hiele analiza los procesos de razonamiento, por lo que su centro de atención no es el aprendizaje de hechos y destrezas, sino la comprensión de conceptos y el perfeccionamiento de las formas de razonamiento. Por lo tanto, la palabra "enseñar" no hay que interpretarla en el sentido escolar habitual de enseñar una serie de definiciones junto a ciertas propiedades Matemáticas de esos conceptos. Más bien, hay que entenderla como enseñanza de nuevas formas de pensamiento, provinientes de unas estructuras mentales nuevas, más complejas que las anteriores, que no pueden ser construidas más que por el propio estudiante a partir de su experiencia. Los dos ejemplos siguientes pueden ser significativos de esta diferencia: Es fácil enseñar a una persona a poner en marcha un coche sin que utilice ninguno, pero no es posible enseñarle a ir en bicicleta sin que practique durante varias horas con una.

Los niveles de razonamiento matemático de Van Hiele.

Los Van Hiele sugieren la existencia de cinco niveles de razonamiento. Las descripciones que presentamos a continuación son una síntesis de escritos de los propios esposos Van Hiele y de otros autores posteriores que han investigado sobre las características de los niveles: Burger, Shaughnessy (1986); Crowley (1987); Fuys, Geddes, Tischler (1988); Jaime, Gutiérrez (1990), Van Hiele (1957), (1986); Van Hiele-Geldof (1957).

Nivel 1 (Reconocimiento): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Usan propiedades imprecisas de las figuras geométricas para compararlas, ordenarlas. describirlas o identificarlas.
- Hacen referencia a prototipos visuales para caracterizar figuras.
- Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades. Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras.
- Al identificar o describir figuras, incluyen atributos irrelevantes, normalmente de tipo físico o visual (por ej., la orientación en el papel o el tamaño).
- Pueden aprender vocabulario geométrico, identificar formas determinadas y, dada una figura, pueden reproducirla (por ej., dándoles un geoplano o una hoja de papel, los estudiantes podrían construir o dibujar las figuras).
- Perciben las figuras como objetos individuales, es decir que los estudiantes no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
- Comparan y clasifican figuras geométricas basándose en su apariencia global. Por ejemplo, suelen utilizar expresiones

como "... ***se parece a*** ...", "... ***tiene la forma de*** ...", "... es ***como*** ...", etc.

- No reconocen explícitamente como tales las propiedades Matemáticas de las figuras: Aunque los estudiantes de este nivel pueden reconocer algunas propiedades o elementos de una figura, éstas no juegan un papel apreciable en el reconocimiento de dicha figura.
- Identifican partes de una figura, pero:
  a) No analizan una figura en términos de sus componentes.
  b) No piensan en las propiedades como características de una clase de figuras.
  c) No hacen generalizaciones sobre formas ni usan un lenguaje apropiado.

Nivel **2** (Análisis): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden describir sus partes y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal, utilizando vocabulario apropiado para componentes y relaciones (por ejemplo, "lados opuestos", "los ángulos correspondientes son iguales", "las diagonales se cortan en el punto medio", etc.).
- Cuando se les pide que definan una figura, recitan una lista de propiedades necesarias para identificar la figura, en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.
- Comparan figuras mediante el uso explícito de propiedades de sus componentes.
- Rechazan las definiciones dadas por el libro (o el profesor) en favor de las definiciones propias. No comprenden la necesidad ni la misión de las definiciones.
- Reconocen las propiedades Matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos. También pueden deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- Al comprobar la validez de una afirmación, tratan la Geometría como si fuera una ciencia experimental: Observan una variedad de figuras y sacan conclusiones generales sobre ellas.
- Después de utilizar varias veces un tipo de ejemplos con unas

figuras, pueden hacer generalizaciones a la clase de figuras en cuestión.

- No son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.
- No son capaces de deducir unas propiedades de otras, porque perciben cada una de forma aislada y sin relación con las demás.
- Todavía no pueden explicar las relaciones entre las propiedades, no ven las relaciones lógicas entre clases de figuras.
- Muestran una ausencia explícita de comprensión de qué es una demostración matemática.
- No admiten la inclusión de clases entre diversas familias de figuras, por ejemplo de cuadriláteros.

Nivel **3** (Clasificación): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático: Son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de deducir esas implicaciones (de un solo paso). Sin embargo, no comprenden el significado de la deducción como un todo ni el papel de los axiomas.
- Comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, pero no entienden la estructura de una demostración. Pueden entender una demostración explicada por el profesor o el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos. Tampoco ven cómo podría alterarse el orden lógico de una demostración ni saben cómo construir una demostración a partir de premisas diferentes de las que han visto.
- Saben cómo razonar de acuerdo con un sistema lógico deductivo, pero esto no es equivalente a razonar con la fuerza de la lógica formal. En particular, no distinguen con claridad una implicación ($p \to q$) de su recíproca ($q \to p$).
- Son capaces de realizar razonamientos deductivos informales, usando implícitamente reglas lógicas, por ej. la regla de la cadena (si $p \to q$ y $q \to r$ entonces $p \to r$).
- Pueden comprender demostraciones formales cuando se las explica el profesor o el libro de texto.

- Utilizan las representaciones físicas de las figuras más como una forma de verificar sus deducciones que como un medio para realizarlas.
- Pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras a partir de propiedades suyas ya conocidas formuladas con precisión matemática. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación y sus demostraciones son de tipo informal.
- Comprenden el significado de "al menos un", "todo", etc.
- Comprenden el papel de las definiciones y pueden dar definiciones matemáticamente correctas.
- Son capaces de:
  a) Identificar conjuntos diferentes de propiedades que caracterizan a una clase de figuras y comprobar su suficiencia.
  b) Identificar conjuntos mínimos de propiedades que pueden caracterizar a una figura.
  c) Formular y utilizar una definición para una clase de figuras.
- Pueden modificar definiciones y usar inmediatamente definiciones de conceptos nuevos.
- En sus demostraciones, hacen referencias explícitas a las definiciones.
- Son capaces de aceptar formas equivalentes de una definición.

Nivel 4 (Deducción formal): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales. Las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación.
- Realizan con frecuencia conjeturas e intentos de verificar las conjeturas deductivamente.
- Pueden construir, no sólo memorizar, demostraciones y ven la posibilidad de desarrollar una demostración de distintas maneras. Pueden comparar y contrastar demostraciones diferentes de un mismo teorema.
- Comprenden las interacciones entre las condiciones necesarias y las suficientes y distinguen entre una implicación ($p \to q$) y su recíproca ($q \to p$).

- Aceptan la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto y son capaces de demostrar su equivalencia.
- Pueden comprender la estructura axiomática de las Matemáticas, es decir el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas, ...
- Pueden pensar en las mismas cuestiones que en el nivel anterior pero razonando o justificando las afirmaciones de manera rigurosa.
- Dan argumentos deductivos formales, pero no investigan los sistemas axiomáticos en sí mismos ni comparan sistemas axiomáticos diferentes.

Nivel 5 **(Rigor):** El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Se encuentran en el máximo nivel de rigor matemático según los parámetros actuales.
- Son capaces de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática.
- Aceptan la existencia de sistemas axiomáticos diferentes y puede analizarlos y compararlos.

En resumen, podemos decir que la capacidad de razonamiento geométrico de los individuos puede evolucionar a lo largo del tiempo pasando por diferentes grados de calidad:

– Un primer nivel en el que se maneja solamente información visual y cuya forma de razonamiento no puede ser considerada como propiamente matemática.
– Un segundo nivel en el que se empieza a reconocer la presencia de propiedades Matemáticas de los objetos, si bien el razonamiento se sigue basando en la percepción física.
– Un tercer nivel en el que comienza a desarrollarse la capacidad de razonamiento riguroso y se es capaz de manejar los elementos más simples del sistema formal (definiciones o implicaciones de un solo paso).
– Un cuarto nivel en el que se completa la formación del razonamiento matemático lógico-formal de los individuos.
– Por último, un quinto nivel en el que se adquieren los conoci-

mientos y habilidades propias de los matemáticos profesionales.

En los aproximadamente 36 años que han transcurrido desde que fue planteado por primera vez, el Modelo de Van Hiele ha sufrido los avatares típicos de cualquier teoría en evolución: El planteamiento inicial hecho en Van Hiele (1957) constaba de tres niveles, que corresponden a los niveles 2, **3** y 4 de la relación anterior. Posteriormente, como consecuencia de la experiencia, los comentarios y las críticas surgidas, los Van Hiele completaron el modelo definiendo el actual primer nivel. Van Hiele (1986) explica esta modificación:

> "La diferencia está causada por el hecho de no haber observado la importancia del nivel visual (que es el que ahora llamamos primero) en esa época. Aún así, por entonces había personas (como Joh. Wansink) que me decían: ***Creo que tus niveles de pensamiento son muy interesantes; pero no obstante me gustaría saber lo que hay en el nivel 0.***"

En un momento dado, probablemente como consecuencia de las investigaciones realizadas en la Unión Soviética, recogidas en Wirszup (1976), se presenta el modelo como integrado por cinco niveles, que coinciden con los que acabamos de describir. No obstante, Van Hiele (1986) dice:

> "Como se habrá observado, no intentamos describir niveles superiores al cuarto. Aquellos niveles superiores son mucho más difíciles de distinguir que los Niveles **2, 3** y 4. Además, nos hemos dado cuenta de que esos niveles son fácilmente supervalorados. Y ¿qué vamos a hacer con esos niveles? En la escuela tenemos que trabajar con los Niveles **2,** 3 y 4. Si nuestros alumnos no nos comprenden, es en estos niveles y no cuando hablamos del quinto o quizás niveles superiores. Algunas personas están ahora examinando a los alumnos para ver si han alcanzado el quinto o niveles superiores. Creo que esto tiene simplemente un valor teórico."

Algunas investigaciones realizadas en los últimos años para analizar la coherencia interna de los niveles de Van Hiele han puesto de relieve una falta de consistencia del quinto nivel respecto de los anteriores (ver, en particular, Gutiérrez, Jaime, 1987 y Mayberry, 1983). Estos datos, unidos a la realidad de que el quinto nivel sería difícilmente alcanzable fuera de los últimos cursos de una Facultad de Matemáticas (por lo cual es poco interesante desde un punto de vista didáctico), hacen que en una mayoría de investigaciones actuales se considere el Modelo de Van Hiele como formado por los niveles 1 a 4 descritos anteriormente.

Por lo que a nosotros respecta, dado que este proyecto de investigación está dirigido a estudiantes de los primeros cursos de Enseñanza Secundaria (en particular a estudiantes con edades entre 14 y 16 años), vamos a considerar solamente los niveles de razonamiento 1 a 4, siendo conscientes, por la experiencia previa de los miembros del equipo investigador, de que la mayoría de nuestros alumnos estarán en los niveles 1 y 2 y sólo en unos pocos casos se alcanzará el nivel 3.

Principales características de los niveles de Van Hiele.

Naturalmente, desde un punto de vista didáctico, surgen enseguida las preguntas de cómo se produce el paso de un nivel de razonamiento al siguiente y qué se puede hacer (en concreto, qué pueden hacer los profesores de Matemáticas) para facilitar o impulsar ese paso. Sin embargo, antes de contestar a estas preguntas, cosa que haremos más adelante y cuyas respuestas son cruciales para la aplicación del Modelo de Van Hiele en la realización de este proyecto de investigación, es conveniente hacer algunas reflexiones sobre la estructura de los niveles de Van Hiele y sus características centrales.

La primera característica de los niveles es que no son incompatibles o independientes, es decir que la adquisición de un nivel no supone la necesidad de anular y olvidar las habilidades de razonamiento propias del nivel precedente. Al contrario, como indicamos en Jaime, Gutiérrez (1990), resulta evidente que Los 4 niveles tienen una organización jerárquica, pues representan cuatro grados de sofisticación en el razonamiento matemático que puede usar una persona. Además, cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior: Pensar según el segundo nivel no es posible sin la capacidad de razonamiento del primero, pues en el segundo nivel se sigue utilizando la observación de atributos físicos, si bien ahora éstos se interpretan en términos de propiedades geométricas; pensar según el tercer nivel no es posible sin la capacidad de razonamiento del segundo pues en el tercer nivel sigue utilizándose la experimentación como fuente de información y los ejemplos concretos son la base de los argumentos; pensar según el cuarto nivel no es posible sin la capacidad de razonamiento del tercero, pues es en éste en el que se adquieren los elementos básicos de los métodos de razonamiento formal.

En general, en un determinado nivel, los estudiantes utilizan de forma implícita (y por lo tanto inconsciente) determinadas habilidades y herramientas mentales, produciéndose el paso al nivel siguiente cuando esas habilidades y herramientas llegan a utilizarse de forma consciente y voluntaria, por lo que es posible reflexionar sobre ellas. Por lo tanto, **para adquirir un nivel de razonamiento es necesario haber adquirido antes el nivel precedente.** La siguiente tabla resume los principales elementos explícitos e implícitos en los diferentes niveles.

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Objetos geométricos	Propiedades de los objetos geométricos
Nivel 2	Propiedades de los objetos geométricos	Relaciones entre propiedades y/o objetos
Nivel 3	Relaciones entre propiedades y/o objetos	Demostración formal de relaciones
Nivel 4	Demostración formal de relaciones	

Las implicaciones educativas de esta característica de los niveles las encontramos en el momento de diseñar el material de enseñanza para nuestros estudiantes. Según cuál sea su nivel actual de razonamiento, deberemos incluir en las clases problemas y actividades que ayuden a exteriorizar los elementos de razonamiento implícitos, para que los estudiantes los identifiquen, se den cuenta de su importancia y aprendan a utilizarlos. Junto al aprendizaje de conocimientos geométricos propiamente dichos, la explicitación y aprendizaje de estos elementos de razonamiento deberían ser los objetivos centrales de la enseñanza de las Matemáticas.

Otra característica destacada de los niveles de Van Hiele es que **el paso de un nivel al siguiente se produce de forma continua.** Aunque en los escritos de los Van Hiele podemos encontrar afirmaciones en favor de la discretitud (es decir, discontinuidad) de los niveles, las investigaciones posteriores y la línea hacia la que ha evolucionado el Modelo de Van Hiele a lo largo de los años nos lleva actualmente a considerar los niveles de manera continua. En Hershkowitz (1990) y Clements, Battista (1992) se ofrece información detallada sobre los resultados de las principales de estas investigaciones, así como una perspectiva de la forma actual de entender y utilizar los niveles de Van Hiele.

En efecto, el aprendizaje de una nueva forma de razonar no se realiza de golpe. La experiencia en la realización de actividades y la resolución de problemas hace que poco a poco se vayan adquiriendo esas nuevas destrezas. Al principio los estudiantes sólo serán capaces de aplicarlas en situaciones sencillas y con el tiempo adquirirán la confianza y destreza suficientes como para aplicarlas también en situaciones más complejas. Un ejemplo de la realidad de esta situación lo tenemos en el hecho de que los estudiantes del Ciclo Medio de E.G.B. están, generalmente, en los niveles de Van Hiele 1 y 2 y hasta la Enseñanza Media no es fácil encontrar estudiantes que tengan plenamente adquirido el nivel 3. Esto quiere decir que se necesitan varios años para adquirir la experiencia necesaria para pasar del nivel 2 al 3.

La última característica importante de los niveles que vamos a mencionar es que **cada nivel de razonamiento lleva asociado un tipo de lenguaje específico** y, por lo tanto, una determinada forma de entender a las otras personas. Las implicaciones educativas de esta característica de los niveles son evidentes pues, como indica el propio Van Hiele (Fuys, Geddes, Tischler, 1984), dos personas que razonan en diferentes niveles y que, por lo tanto, interpretan los argumentos expuestos de formas diferentes, no podrán entenderse.

El ejemplo más claro de esta diferencia entre los lenguajes de los diferentes niveles lo tenemos en la palabra más típicamente matemática: ***Demostrar.*** En el capítulo 3, dedicado a la evaluación de los estudiantes, encontraremos ejemplos concretos de esto:

En el primer nivel, esta palabra no tiene ningún significado, pues no hay razonamiento realmente matemático ni se utilizan propiedades matemáticas. Esto no quiere decir que las personas en el primer nivel no conozcan y entiendan la palabra, pues también se utiliza en el lenguaje de la vida cotidiana, pero no serán capaces de utilizarla en el contexto de un problema de Geometría.

Para una persona razonando en el segundo nivel, demostrar una propiedad geométrica significa, simplemente, encontrar uno o más ejemplos adecuados y comprobar experimentalmente (midiendo, etc.) que se verifica dicha propiedad. La constatación de unos pocos ejemplos (a veces de uno solo) le bastará para estar seguro de que la propiedad tiene validez universal.

En el tercer nivel la palabra "demostrar" ya adquiere un significado análogo al que le damos los matemáticos, pues las demostraciones son razonamientos lógicos. No obstante, el contenido de esos razonamientos es de tipo informal y está basado en la experimentación y las deducciones obtenidas a partir de casos concretos.

Por último, una persona en el cuarto nivel entenderá por "demostrar" lo mismo que los matemáticos, es decir la organización de una secuencia de implicaciones formales basadas en las hipótesis del problema y en otros elementos del sistema axiomático (definiciones, otras propiedades ya demostradas, etc.).

Son bastantes cientos, o miles, los profesores de Matemáticas de Enseñanza Media que, tras plantear algunos problemas a sus alumnos, ven con desesperación cómo éstos los resuelven limitándose a comprobar la veracidad de los enunciados en uno o varios casos concretos, en vez de redactar la cuidadosa demostración formal que los profesores esperaban. Desde la óptica del Modelo de Van Hiele, el motivo de esta desesperación está totalmente claro: Los profesores estaban preguntando con el lenguaje del nivel 4, mientras que los estudiantes estaban respondiendo con el lenguaje del nivel 2. Y también está igualmente clara la forma de resolver el conflicto: Los profesores deben adaptarse al nivel de razonamiento de sus alumnos, ya que éstos no pueden adaptarse al de sus profesores, por mucho que lo deseen.

Las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele.

Comentábamos al principio de este capítulo que, según el Modelo de Van Hiele, no es posible enseñar a los estudiantes a razonar de una detenninada forma; se les pueden enseñar los aspectos mecánicos y lingüísticos de esa forma de razonar, pero no a razonar realmente. Esto es lo que ocurre habitualmente en la E. Secundaria cuando los estudiantes se ven obligados a memorizar las demostraciones formales de los teoremas que el profesor puede preguntarles en el examen, sin haberlas entendido realmente. Por lo tanto, al evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes se debe tener cuidado para distinguir entre un razonamiento real y uno aparente.

Por otra parte, Van Hiele plantea, distanciándose de Piaget, que "la maduración que lleva a un nivel superior _ debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico" (Fuys, Geddes, Tischler, 1984). También plantea que la adquisición de la experiencia que lleve a un nivel superior de razonamiento es independiente del método de enseñanza seguido, si bien es evidente que hay métodos que pueden facilitarla, gracias a su riqueza de actividades apropiadas, mientras que otros métodos pueden bloquearla, a causa de su pobreza de situaciones sugerentes. En coherencia con estas afirmaciones, el Modelo de Van Hiele tiene una componente de recomendación a los profesores de Geometría para que organicen su enseñanza siguiendo una determinadas pautas, que reciben el nombre de las "fases de aprendizaje".

En varios textos, por ejemplo Crowley (1987), Fuys, Geddes, Tischler (1988) y Jaime, Gutiérrez (1990), pueden encontrarse descripciones detalladas de las fases de aprendizaje. Las características de estas fases son las siguientes:

Fase 1 (Información):

Es una fase de toma de contacto: El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar: Los conceptos que van a manejar, los tipos de problemas interesantes que podrán resolver, los materiales que van a utilizar, el método de trabajo, etc.

Es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar: Puede ocurrir que los estudiantes hayan estudiado con anterioridad este tema, en cuyo caso el profesor debe saber qué conocimientos (correctos o incorrectos) tienen sus alumnos y, en particular, qué nivel de razonamiento tienen en ese tema concreto (ya que los niveles de Van Hiele no tienen un carácter global en toda la Geometría, sino local en las diferentes áreas en que ésta se puede dividir). También puede ocurrir que los estudiantes no hayan abordado con anterioridad el tema en cuestión, pero no es extraño que los estudiantes tengan conocimientos geométricos intuitivos al respecto originados en contextos extraescolares, que no deben despreciarse.

Fase **2** (Orientación dirigida):

En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio, resolviendo actividades y problemas basados en el material que les ha sido proporcionado por el profesor. Los objetivos principales de esta fase son conseguir que los estudiantes tomen contacto con los métodos de razonamiento del nivel superior de Van Hiele al que se espera que accedan y que descubran, comprendan y aprendan los principales conceptos, propiedades, etc. del área de la Geometría que están estudiando.

En esta fase los estudiantes todavía no están en condiciones de realizar, por sí solos, un aprendizaje eficaz (en cuanto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar: No se trata de actividades o problemas abiertos o complejos, sino de unos claramente dirigidos al descubrimiento y demostración (según los métodos del nivel de Van Hiele correspondiente) de los diferentes conceptos y propiedades.

La misión del profesor es dirigir a los estudiantes en la línea de la solución cuando lo necesiten, dándoles indicaciones que les ayuden a superar sus dificultades, aunque evitando siempre llegar a dar la solución por sí mismo, sin la participación activa de sus alumnos.

Fase **3** (Explicitación):

En esta fase los estudiantes intercambian sus experiencias, comentan lo que han observado, explican cómo han resuelto las actividades, etc., todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de sus compañeros), que ordenarlas y que expresarlas con claridad.

Esta fase tiene también la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario; en la tercera fase se tendrá que hacer el paso del vocabulario informal creado por los estudiantes al usual. Es frecuente, sobre todo con niños de E. Primaria, que los profesores eviten introducir al mismo tiempo nuevos conceptos, vocabulario y símbolos, por lo que recurren en un primer momento al uso de nombres puestos por los niños y que resultan significativos para ellos; entonces, en esta fase se debería completar el paso al vocabulario estándar.

En realidad, esta tercera fase no hay que entenderla como un período de diálogo después de haber completado el trabajo de la segunda fase y antes de iniciar el de la cuarta. Habría que considerarla, más bien, como una actitud continua de diálogo tras cada problema o grupo de problemas durante las otras 4 fases.

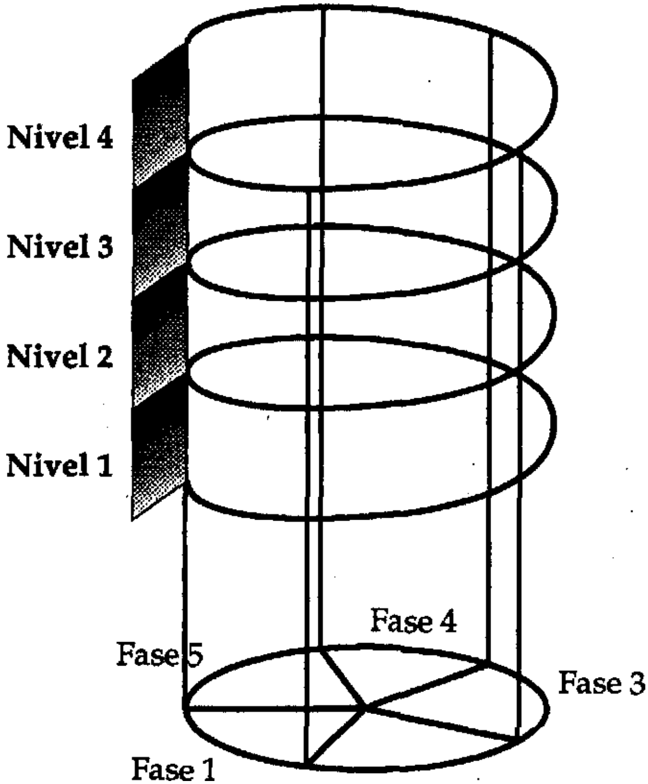
Fase 4 (Orientación libre):

Ahora los estudiantes deberán aplicar y combinar los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para realizar nuevas actividades. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo (tanto en los contenidos geométricos como en las habilidades de razonamiento). Esto se consigue mediante el planteamiento por el profesor de problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que admitan diferentes soluciones.

Los problemas que hay que plantear en esta fase no tienen nada que ver con los ejercicios de "aplicación", tan frecuentes en nuestros libros de texto de E.G.B. y Enseñanza Media, para cuya solución solo hace falta recordar algún hecho o método concreto y utilizarlo directamente. Por el contrario, en estos problemas deben intervenir varios conceptos o propiedades del campo de estudio, que los estudiantes tendrán que combinar de forma adecuada para llegar a su solución. La misión del profesor es dar a los estudiantes indicios sobre la vía de solución de los problemas y fomentar la discusión sobre diferentes alternativas cuando las haya.

Fase 5 (Integración):

A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han aprendido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente. En esta fase el profesor debe fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, mediante una acumulación, comparación y combinación de los conocimientos que ya tienen. El trabajo que se realiza en esta fase, y las actividades que se planteen, no deben tener como objetivo producir conocimientos nuevos, sino que deben ayudar a organizar los que ya se han aprendido.



Completada esta secuencia de cinco fases de aprendizaje para un área de la Geometría (cosa que puede llevar varios cursos en el contexto de la enseñanza ordinaria), los estudiantes deben haber alcanzado un nuevo nivel de razonamiento. Ahora debe comenzar de nuevo el proceso, empezando por una nueva primera fase y, probablemente, retomando los temas que se han estudiado en las fases anteriores, pero dándoles otra perspectiva acorde con el nuevo nivel superior de razonamiento que se desea alcanzar.

Por lo tanto, el Modelo de Van Hiele sugiere una enseñanza cíclica, en la que una parte de la Geometría (o, en general, de las Matemáticas) se retoma para completar y mejorar su comprensión, utilizando unas formas de razonamiento más sofisticadas que cuando se estudió con anterioridad. El diagrama intenta representar este proceso.

Hasta aquí, hemos descrito las líneas maestras del Modelo de Razonamiento geométrico de Van Hiele, que ha servido como marco de referencia para fundamentar el diseño de las unidades de enseñanza y la metodología de trabajo durante las clases. Esto no quiere decir que la elección del Modelo de Van Hiele nos obligue a un seguimiento lineal de sus pautas, pues consideramos que ninguna teoría de enseñanza o aprendizaje debe suponer un corsé que dé rigidez a las clases, sino que su aplicación debe ser lo suficientemente abierta como para permitir a cada profesor actuar de forma diferente según las características de sus propios alumnos. Afortunadamente, no son iguales ni reaccionan de la misma manera todos los estudiantes, cosa que quedará claramente de manifiesto en los próximos capítulos.

CAPITULO 2

UNIDADES DE ENSEÑANZA DE GEOMETRIA.

INTRODUCCION.

En este capítulo presentamos las unidades de enseñanza completas que proponemos como objetivo central de este proyecto de investigación. Pero antes, es necesario explicar, aunque sea brevemente, el contexto en el que se ha desarrollado la enseñanza, pues es una pieza fundamental para entender por qué planteamos las unidades de enseñanza en la forma que lo hacemos.

La experiencia se llevó a cabo simultáneamente en 5 Institutos de Formación Profesional de la provincia de Valencia (en la introducción hemos hecho referencia a ellos): uno en Valencia capital, dos en el cinturón de la capital y otros dos de ámbito comarcal, si bien en uno de estos últimos (por problemas específicos de organización del centro) no fue posible culminar el proceso. Todos ellos participan de características comunes desde un punto de vista sociológico : zonas industriales, con fuerte presencia de individuos inmigrados y con un nivel socioeconómico medio-bajo o bajo.

El número total de alumnos que iniciaron la experimentación fue de 165 chicos y chicas de edades comprendidas entre los 14 y los 15 años, todos ellos de primer curso de Formación Profesional y de primer curso de Bachillerato General (denominado definitivamente en la LOGSE, 3er. Curso de Educación Secundaria Obliga-alumnos y que les fuera posible completar la adquisición del nivel 2 de razonamiento y transitar hacia el nivel **3.**

Las unidades diseñadas que presentamos en la siguiente sección de este capítulo corresponden a Generalidades de Polígonos, Triángulos y Cuadriláteros.

En el desarrollo de las unidades didácticas hemos pretendido la consecución de dos tipos de OBJETIVOS, los relacionados con las habilidades de razonamiento y los relacionados con el aprendizaje de los conocimientos geométricos.

1) <u>Habilidades de Razonamiento</u>. Es necesario desglosar estos objetivos en dos partes, según que estén orientados a la consecución de razonamiento de nivel 2 de Van Hiele o del nivel **3.** Los objetivos que planteamos a continuación son particularizaciones de los descriptores recopilados en el capítulo 1 al contexto de las unidades de enseñanza que hemos diseñado.

A) Objetivos relacionados con la adquisición del Nivel 2:

- Analizar los elementos componentes de un polígono
- Construir polígonos a partir de una propiedad dada.
- Agrupar polígonos atendiendo a sus características.
- Asociar propiedades a tipos de polígonos.

B) Objetivos relacionados con la adquisición del Nivel **3:**

- Establecer relaciones entre propiedades.
- Establecer relaciones entre conceptos.
- Realizar clasificaciones (inclusivas - exclusivas).
- Demostrar de un modo informal diferentes proposiciones.
- Formalizar definiciones.
- Comprender la estructura de una demostración de varios pasos.
- Entender la generalización como herramienta de razonamiento matemático.
- Iniciar a los alumnos en el razonamiento deductivo.

<u>**2.** Aprendiza-ie de conocimientos geométricos</u>. En este caso se trata de objetivos que tienen que ver con el aprendizaje escolar de

conceptos, propiedades, algoritmos, etc. Por supuesto conocimientos geométricos y niveles de razonamiento de los estudiantes no pueden considerarse como realidades absolutas disociadas. Es necesario pensar el progreso a través de los niveles de razonamiento como un proceso constructivo obligatoriamente ligado al dominio de redes conceptuales cada vez más complejas. Ahora bien, desde el modelo de Van Hiele sería erróneo considerar que determinado cuerpo de conocimientos geométricos sean asociahles -en función de su menor o mayor sofisticación o grado de complejidad- a un cierto nivel de razonamiento. Por ejemplo, si pretendiéramos enfrentar el aprendizaje de "movimientos en el plano" o "poliedros" deberíamos asegurar el respeto al carácter jerárquico de los niveles y transitarlos todos en el adecuado orden ascendente.

Los objetivos que nos hemos planteado son:

- Conocer y utilizar adecuadamente los elementos de un polígono: lados, vértices, ángulos interiores y exteriores, diagonales interiores y exteriores.
- Conocer y utilizar adecuadamente los elementos de un triángulo: lados, vértices, ángulos, alturas, medianas, mediatrices y bisectrices.
- Conocer los diferentes tipos de triángulos y cuadriláteros y nombrarlos adecuadamente.
- Adquirir los conceptos de: polígono, polígono cóncavo, polígono convexo, polígono regular, equilátero, equiángulo y, en particular, los relativos a cuadriláteros y triángulos.
- Usar adecuadamente el vocabulario geométrico básico.
- Construir polígonos.
- Utilizar correctamente diferentes instrumentos de medida de longitudes y ángulos.

METODOLOGIA.

Desde un punto de vista teórico el modelo de Van Hiele puede ser aplicado con diferentes planteamientos metodológicos. De hecho la adquisición de los niveles supone una excelente guía para cualquier profesor, se adscriba a una opción metodológica u otra.

Incluso estando aferrado al uso de técnicas expositivas del más tradicional estilo, dicha descripción puede proporcionarle pautas que le ayuden a mejorar su actividad docente. No obstante el equipo de profesores que ha diseñado y puesto en práctica las unidades, considera que un trabajo coherente en el marco del modelo de Van Hiele implica tener en cuenta en "un plano de igualdad" las dos componentes esenciales del modelo: niveles de razonamiento y fases de aprendizaje. De una lectura atenta de la descripción de dichas fases hecha en el capítulo 1 se desprende una clara invitación a la adopción de metodologías activas, sobre todo en el nivel escolar en el que se enmarca la investigación. Hemos dicho antes que ninguna teoría de enseñanza-aprendizaje debe suponer un corsé que dé rigidez a las clases, pero de ello no cabe deducir que "todo vale".

La estructura de las fases de aprendizaje y las características propias de cada fase se compadecen bien con los principios didácticos generales del aprendizaje por descubrimiento en sus formulaciones más recientes.

La fase 1 sirve fundamentalmente para proporcionar información al profesor acerca de las concepciones erróneas o incompletas sobre determinados conceptos de conocimiento. La secuencia de tareas a realizar en la fase 2 debe diseñarse partiendo del conocimiento del alumno y con la intención de que emerjan las ideas previas y se ocasionen conflictos cognitivos tanto personales como grupales. Asimismo, una planificación cuidadosa de la secuencia tendrá en cuenta la necesidad de conseguir pequeños éxitos que estimulen su autoestima y favorezcan una actitud positiva hacia las matemáticas. Puesto que el modelo de Van Hiele concibe el aprendizaje como una construcción personal, el papel del profesor, una vez culminada la fase de diseño, debe ser eminentemente orientador y mediador. A él o ella corresponde la generación de un clima de confianza en el que la consciencia de estar ocasionalmente siguiendo caminos erróneos no signifique instalarse en el fracaso. Debe generar un ambiente propicio para que, sin anular la actividad individual de los alumnos, sea posible el trabajo colectivo de pequeño giupo en la resolución de tareas.

Los alumnos dispusieron habitualmente de reglas, semicírculo graduado, escuadra y cartabón, de manera que las construcciones y medidas pudieran realizarse de la forma más precisa posible. Se les proporcionaron diferentes materiales didácticos en función de las necesidades creadas por las actividades o la complejidad de la tarea planteada. Así, en las tareas de visualizar o construir, se proporcionaron geoplanos o tramas de puntos, para el análisis de los polígonos y embaldosados, juegos de figuras planas (fichas poligonales).

Ya hemos señalado que no entendemos la fase 3 intercalada rigidamente entre la anterior y la posterior, sino como una actitud metodológica, pues compartimos con Bruner (1966) que "el lenguaje es no sólo el medio de intercambio sino el instrumento que puede emplear el que aprende para ordenar su entorno". Por tanto la comparación de respuestas, la puesta en común de opiniones, la participación activa del alumno en debates colectivos deben ser componentes habituales de la dinámica del trabajo grupal.

La fase 4 ofrece una buena oportunidad para la resolución de problemas o el desarrollo de investigaciones, tareas de carácter exploratorio. Es, pues, necesario que los alumnos utilicen estrategias heurísticas de carácter general así como que tomen conciencia de sus propias formas de pensamiento. Esta fase debiera ser también utilizada como mecanismo de control de la "calidad del proceso: la constatación de eventuales fracasos indicará la conveniencia de retornar a la fase de orientación dirigida. Por contra la evidencia de un grado razonable de éxito indicará la conveniencia de pasar, en la fase 5, a organizar lo aprendido haciendo explícita la nueva red conceptual construida y el conjunto de habilidades de razonamiento adquirido.

Los profesores participantes en la investigación han enmarcado su trabajo de aula en los principios generales comentados en los párrafos anteriores. El diseño de las unidades didácticas, se ha efectuado atendiendo a una de las propuestas fundamentales del modelo: una correcta organización de la instrucción que facilite a los alumnos el paso desde un determinado nivel de razonamiento al nivel inmediato superior requiere la propuesta secuencializada de tareas que permitan recorrer todas y cada una de las fases de aprendizaje comentadas por extenso en el capítulo 1.

Con el planteamiento de una tarea pretendemos que el alumno se enfrente a una situación problemática cuyo proceso de resolución le revele un concepto, una forma geométrica o una proposición, de un modo significativo. En muchos casos dicho proceso requerirá de otras actividades (subtareas) dirigidas y más concretas que ayuden en la búsqueda de la solución. Es evidente que el número de actividades que necesitan los estudiantes diferirá de unos a otros, dependiendo de la instrucción recibida previamente a la realización de la tarea; por ello las actividades auxiliares sugeridas, y que nos han servido de apoyo no constituyen una colección completa ni cerrada.

El orden de las tareas en las unidades didácticas diseñadas en un primer momento no fue el mismo en los cuatro institutos, ya que los diferentes profesores trataron de acoplarse a las características específicas de sus alumnos y a su evolución tanto individual como grupal. Así pues, el nivel de los alumnos y dinámica de la clase fueron elementos condicionantes en la labor diaria de cada uno de los profesores en cuanto a la organización de tareas y actividades auxiliares de manera que éstas permitieran alcanzar los objetivos conjuntamente marcados y, obviamente, bajo el mismo modelo teórico. Por lo tanto, el orden y el contenido de las tareas que a continuación se presentan son el resultado del trabajo realizado por el equipo de investigación, después de coordinar las distintas variantes que se estaban poniendo en práctica y valorar el interés de las diversas tareas propuestas.

La realización de los pre-tests permitió al equipo investigador conocer con fiabilidad suficiente la situación de los alumnos en lo referente a su nivel de razonamiento y a sus ideas previas acerca de los aspectos del conocimiento geométrico que se iba a abordar. Todo ello indicó la conveniencia de que la ***Fase de Información*** se viera reducida, para el nivel **2,** a una única tarea introductoria en la unidad de Polígonos. Asimismo se estimó que no era necesaria en las unidades de triángulos y cuadriláteros.

El paso del nivel 2 **al** nivel **3** se ha intentado de un modo vertical (Treffers, 1987), es decir, sin abandonar el dominio conceptual objeto de estudio en cada caso. Ello ha significado en la práctica un solapamiento de la ***Fase de Integración*** del nivel ***2*** con la ***Fase de Información*** del nivel **3.**

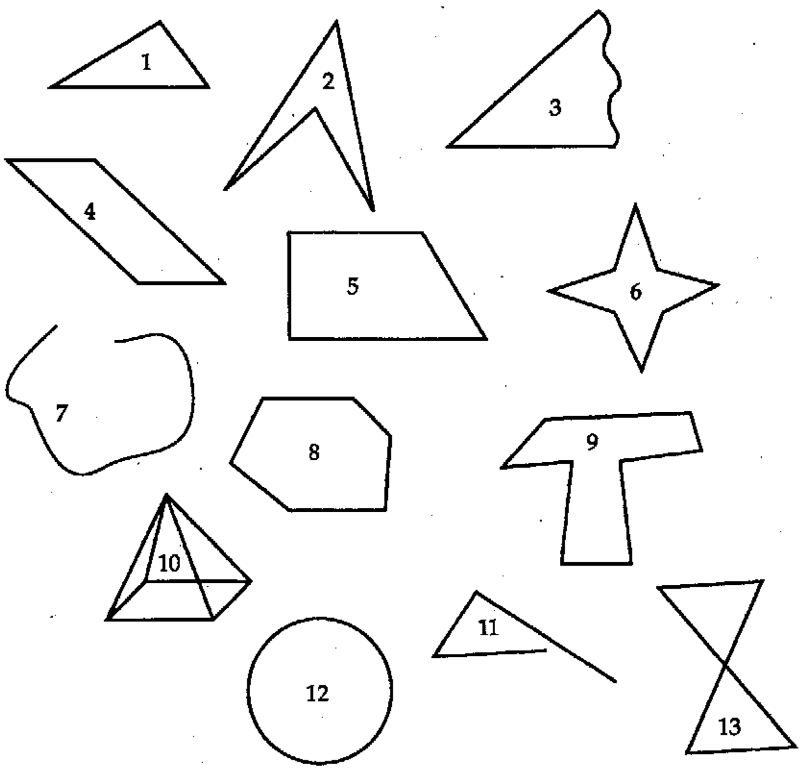
UNIDAD DE ENSEÑANZA : POLIGONOS

NIVEL 2

Fase de Información.

Tarea 1,

Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras. Indica aquellas que no son polígonos. Justifícalo en cada caso.

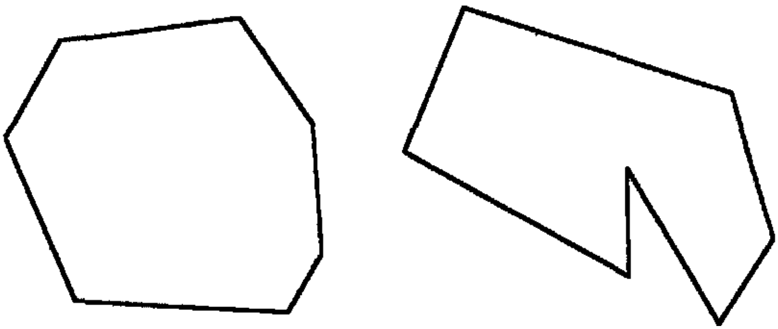


Esta primera tarea servirá para romper el hielo entre el profesor y los alumnos e introducirles en el objeto a estudio: polígonos. Es necesario conocer el grado de conocimiento que los alumnos poseen de polígonos así como el lenguaje que utilizan, para lo cual será necesario forzarles a que todos expresen sus opiniones.

Fase de Orientación Dirigida

Tarea 2.

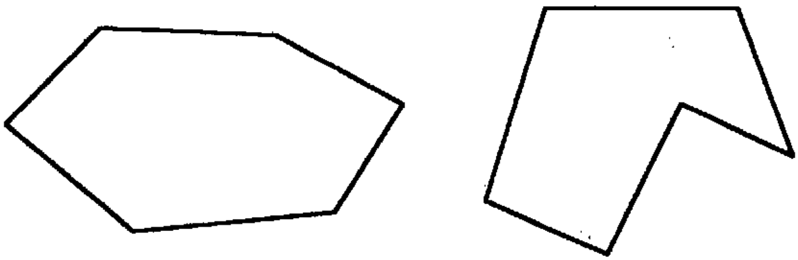
Analiza los siguientes polígonos y confecciona un listado con sus propiedades.



Se presentará esta tarea a fin de que se produzca un análisis de propiedades. No sólo con el objetivo de establecer una correspondencia entre las características de ambas clases de polígonos, sino establecer propiedades que, independientemente de la forma del polígono, pertenezcan a ambos.

Tarea 3.

Traza todas las diagonales de cada uno de los polígonos siguientes.



a) ¿Cuál de los dos polígonos tiene más diagonales?
b) ¿De qué depende el número de diagonales de un polígono?.
c) Completa la tabla siguiente.

Nº de lados	Nombre del polígono	Nº de diagonales
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
50		

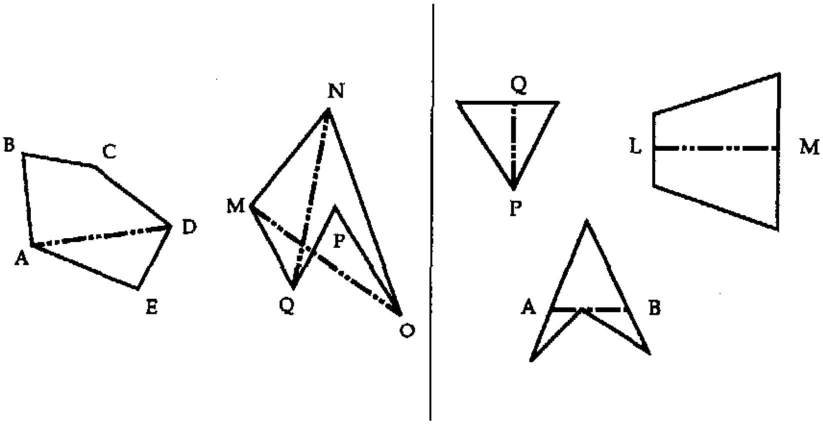
La tarea está planteada con el objetivo de que, considerando ***todas*** las diagonales de los polígonos propuestos, lleguen a concluir que el número de diagonales de cualquier polígono depende del número de vértices (independientemente de la forma del polígono) y puedan establecer una correspondencia entre el número de vértices y el número total de diagonales.

Como actividad previa a esta tarea, para aquellos estudiantes que desconozcan el concepto de diagonal o no lo tengan suficientemente asentado, podría presentarse la siguiente actividad:

Actividad.

Estos segmentos **son** diagonales de un polígono.

Estos segmentos **no son** diagonales de un polígono

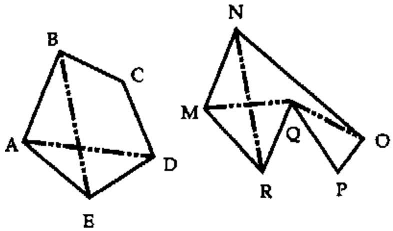


Los segmentos AD, MO y NQ

son diagonales.

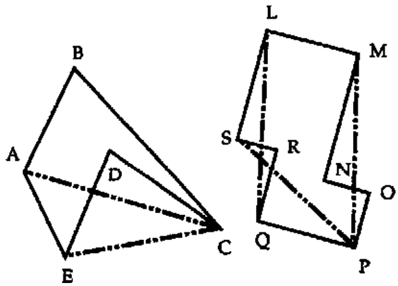
Los segmentos
PQ, LM y AB
no son diagonales

Diagonales interiores.



Los segmentos AD, BE, MQ, NR y OQ son diagonales **interiores**

Diagonales exteriores.

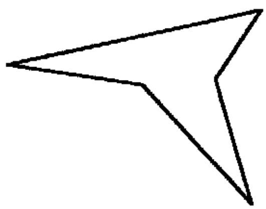


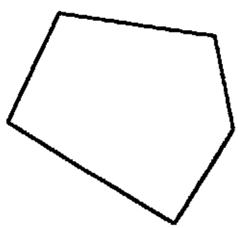
Los segmentos AC, EC, LQ, SP y MP son diagonales **exteriores.**

La DIAGONAL de un polígono es:..............................

Tarea 4

Mide los ángulos interiores de los polígonos siguientes:





a) Al sumar los ángulos interiores, ¿en cuál de los polígonos la suma es mayor?
b) Completa la siguiente tabla:

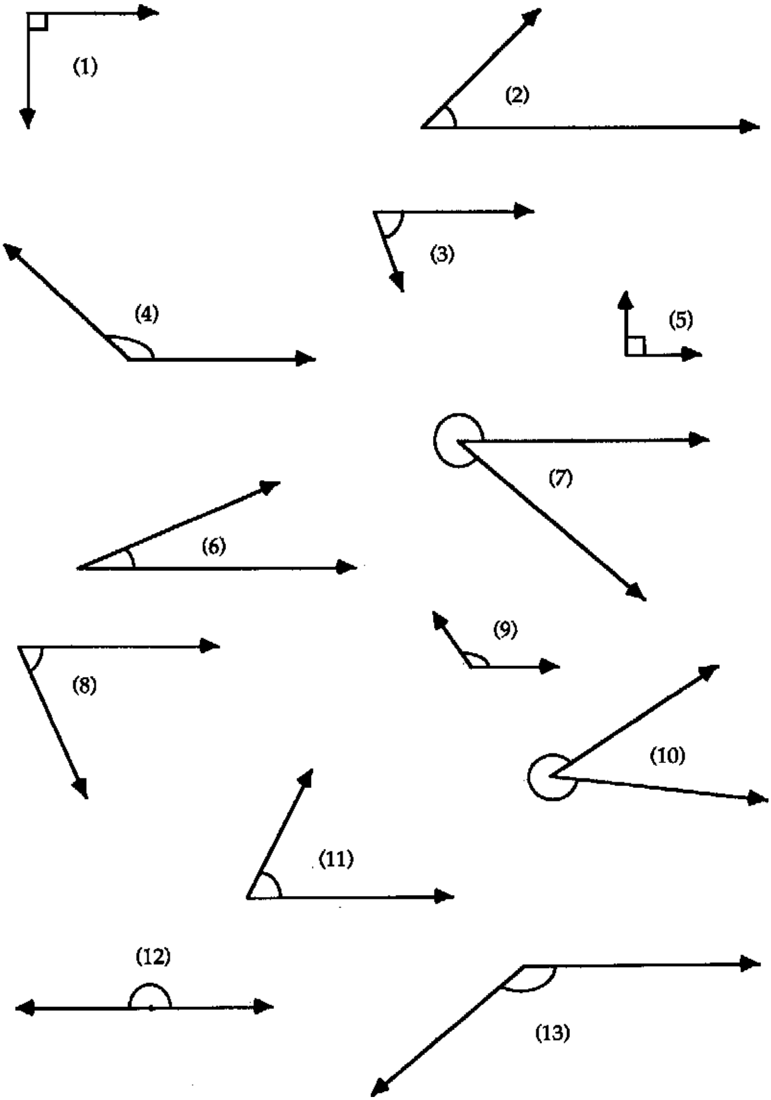
Nº de lados	Nombre del polígono	Nº de diagonales
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
50		

Una vez el alumno sepa medir ángulos, se pretende un doble objetivo: a) establecer la independencia de la suma de los ángulos interiores del polígono, de la forma de éste, y b) completar una tabla que relacione el número de lados con la suma de los ángulos.

Como actividad previa se podrá presentar la siguiente:

Actividad.

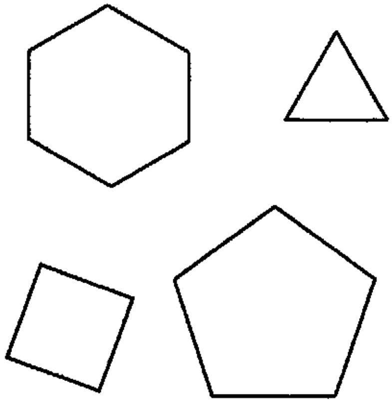
1) Mide cada uno de los siguientes ángulos.
2) Agrúpalos como tú consideres oportuno, indicando el criterio escogido. Si ves otra forma de agruparlos, hazlo, sin olvidar indicar el criterio.


(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)
(9)
(10)
(11)
(12)
(13)

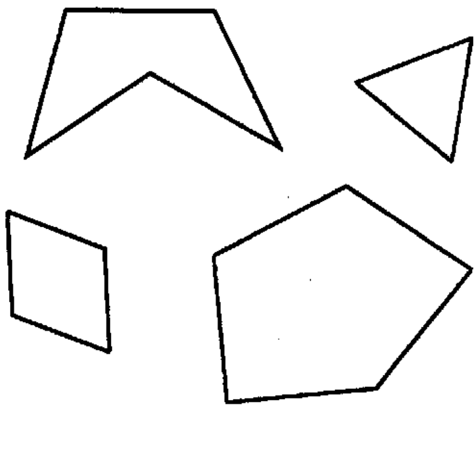
Tarea 5.

a) Analiza los polígonos de cada una de las siguientes clases anotando las propiedades comunes que poseen.

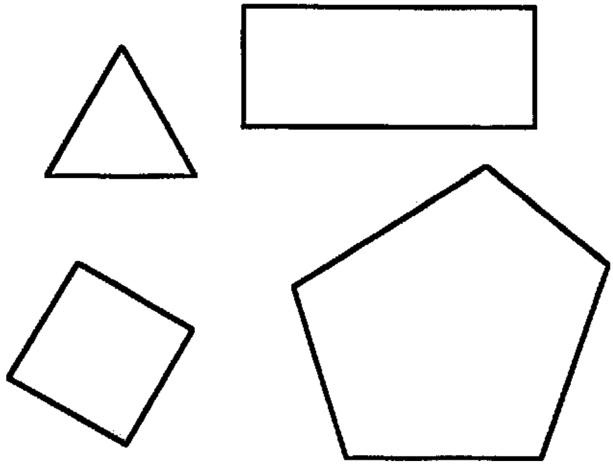
POLIGONOS REGULARES



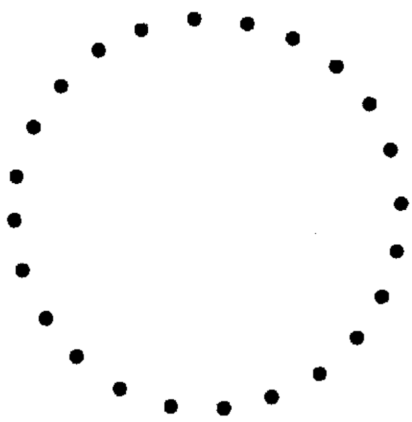
POLIGONOS EQUILATEROS



POLIGONOS EQUIANGULARES



b) Analiza todos los polígonos que puedas trazar sobre el geoplano circular de 24 puntos, de manera que tengan los lados de igual longitud.



El objetivo de esta tarea es analizar los diferentes clases de polígonos atendiendo a los lados y ángulos interiores.

El geoplano circular se introduce como un recurso didáctico útil para representar diferentes polígonos. El que aquí se propone es un geoplano circular de 24 puntos ya que permite construir polígonos regulares con un número de lados divisor de 24.

El concepto de ángulo central de un polígono regular puede ser estudiado con el recurso del geoplano circular.

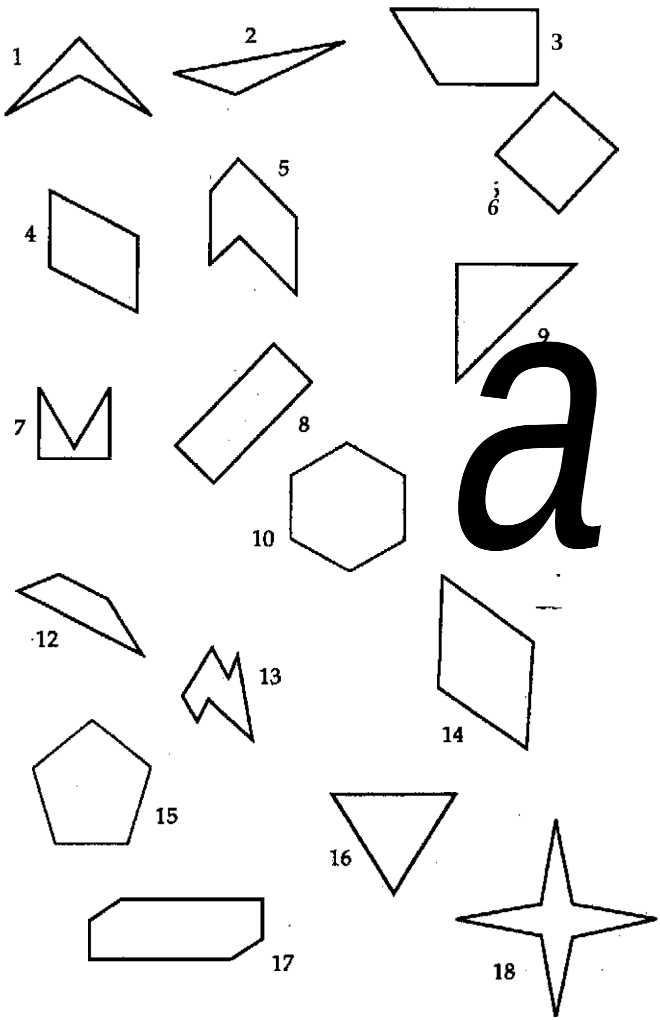
Con la introducción del concepto de ángulo central, es posible dibujar polígonos regulares y completar una tabla que relacione la medida del ángulo central con el número de lados del polígono regular.

Fase de Orientación Libre.

Como el objetivo de esta fase es la consolidación de los conocimientos adquiridos, se proponen tareas abiertas, trabajos con varias etapas, así como posibles problemas que puedan ser abordables por distintos procedimientos, aunque la estructura de éstas sea comparable a las estudiadas en la fase anterior. Por ese motivo no especificamos objetivos propios de cada tarea.

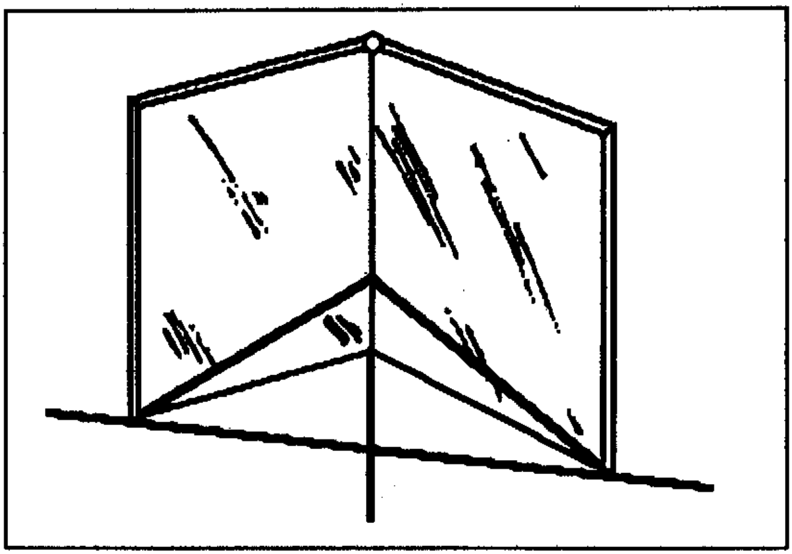
Polígonos.

Agrupar los siguientes polígonos, de diferentes formas, indicando la propiedad o propiedades que hayas considerado en cada caso.



Libro de espejos.

Si sobre una línea recta se sitúa un libro de espejos, puede verse un polígono regular para un cierto valor del ángulo â (ángulo formado por los dos espejos).

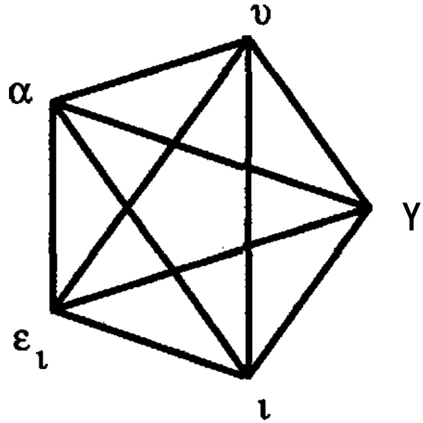


Experimenta con el libro de espejos para determinar las relaciones entre el ángulo â y el número de lados del polígono visualizado. Completa la tabla:

Angulo entre los espejos â	Número de lados del polígono

Polígonos estrellados.

La estrella de cinco puntas, frecuentemente llamada "pentagrama", fue escogida como símbolo sagrado por la sociedad Pitagórica de la Antigua Grecia, por su especial belleza y porque aparece la proporción áurea cuando se comparan algunos de sus segmentos. Este símbolo lo utilizaban sus miembros como distintivo de la Academia y alrededor de las cinco puntas se situaban las letras de la palabra griega "hygeia" que significa salud.



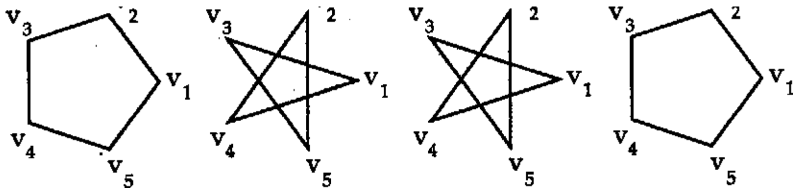
Esta estrella, al igual que el pentágono regular, puede construirse con cinco puntas igualmente espaciadas en un círculo. Empezando por un punto y yendo alrededor de un círculo en una dirección determinada, se van construyendo segmentos cada dos puntos hasta llegar al punto inicial. La estrella es un polígono compuesto y se le llama Polígono Estrellado de cinco puntas.

Si a los puntos anteriores los nombramos por (V_1 V_2 V_3 V_4 V,), la secuencia seguida para la construcción del polígono estrellado sería (V_1 V, V_5 V_2 V_4 V,) y que por comodidad la denotamos por

$$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}$$

, porque se trata de un poligono de 5 vértices y unimos sus vértices de 2 en 2.

Está claro que ésta no es la única forma de unir cinco puntos igualmente espaciados en un círculo. En la figura siguiente analizaremos todas las diferentes posibilidades.



5 puntos unidos consecutivamente (V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_1).	**5 puntos unidos altemativamente (V_1 V_3 V_5 V_2 V_4 V_1).**	**5 puntos unidos en secuencia de 3 (V_1 V_4 V_2 V_5 V_3 V_1).**	**5 puntos unidos en secuencia de 4 (V_1 V_5 V_4 V_3 V_2 V_1).**
No estrellado	**Estrellado $\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$**	**Estrellado $\begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$**	**No estrellado**

Observa que hay exactamente un polígono estrellado de cinco puntas ya que $\{\quad\}$ y $\{\quad\}$ representan el mismo conjunto de puntos y por tanto el mismo polígono estrellado

Realiza un estudio similar al que te hemos presentado tomando en este caso 8, 10 y 12 puntos igualmente espaciados en un círculo.

Cuerdas.

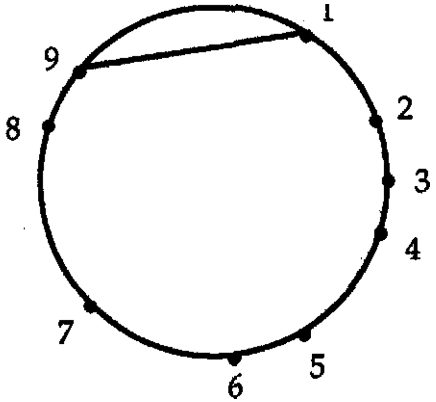
En una circunferencia, una cuerda es un segmento que une dos puntos cualesquiera.

a) ¿Cuántas cuerdas pueden trazarse desde el punto 1?

b) ¿Cuántas cuerdas en total pueden trazarse utilizando exactamente los 9 puntos considerados en la circunferencia?

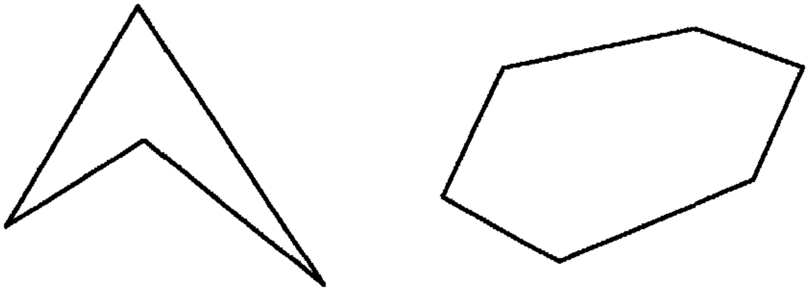
Trata de hallar las respuestas sin dibujarlas.

c) ¿Cuántas cuerdas se podrían trazar en total si tomásemos 50 puntos? ¿ Y si se consideran 100 puntos?



Caminos.

Considera los siguientes polígonos:



Trabaja ***simultáneamente*** en ambos polígonos. Señala con P y Q dos puntos cualesquiera interiores al polígono. Une P y Q mediante un segmento.

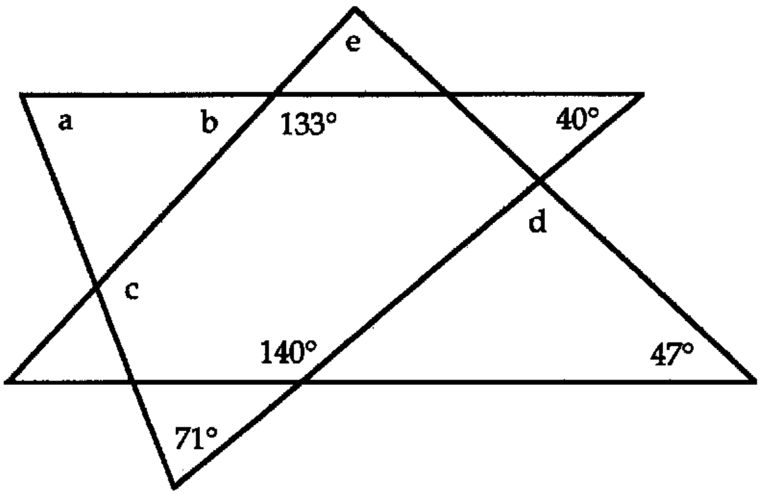
¿ El segmento PQ es interior o exterior al polígono?

Ve variando las posiciones de P y Q, anotando tus observaciones cada vez que constrnyas el segmento PQ, en relación al polígono que pertenece.

¿Qué ocurre si P y Q son, ambos, vértices de los polígonos?

Angulos.

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?
A partir de este dato calcula la medida de los ángulos a, b, c, d, e, de la siguiente figura. No puedes usar el transportador y debes anotar todo el procedimiento seguido.



Embaldosados.

Realiza un estudio sobre los tipos de polígonos que recubran el plano.

Polígono Regular.

De un polígono regular se sabe que sus ángulos miden 7.740 grados. Calcula:

a) La medida de cada ángulo interior.
b) El número de diagonales del polígono.

Fase de Integración.

El objetivo de esta fase es que el estudiante revise, sumarice y unifique los conceptos geométricos estudiados y los procesos de razonamiento utilizados. Para ello se podrían plantear actividades como la que sigue:

Actividad

Las características o propiedades que a continuación se relacionan pertenecen a los polígonos. Asocia a cada propiedad la clase de polígono a la que pertenece.

Propiedad o característica.	Clases de polígonos.
1. Tiene diagonales exteriores,	a) Polígono cóncavo.
2. Tienen sólo diagonales interiores.	b) Polígono convexo.
3. Tienen todos los lados de igual longitud.	c) Polígono regular.
4. Tienen todos los ángulos interiores de igual medida.	d) Polígono irregular.
5. Tienen todos los lados de igual longitud y todos los ángulos de igual medida.	e) Polígono equilátero.
6. Tienen por lo menos, un ángulo que mide más de 180 grados.	f) No existen polígonos con esa propiedad.
7. Todos sus ángulos interiores miden menos de 180 grados.	g) Todos tienen esa propiedad.

Un buen método para conocer si el estudiante ha superado el nivel, consiste en plantearle cuestiones directas como:

- ¿Qué entendemos por diagonal?
- ¿Cuántos tipos de diagonales pueden trazarse en un polígono?
- ¿Qué hacemos para contarlas?

– ¿Cómo obtenemos la medida de la suma de los ángulos de un polígono?
– ¿Qué propiedades tiene un polígono cóncavo?

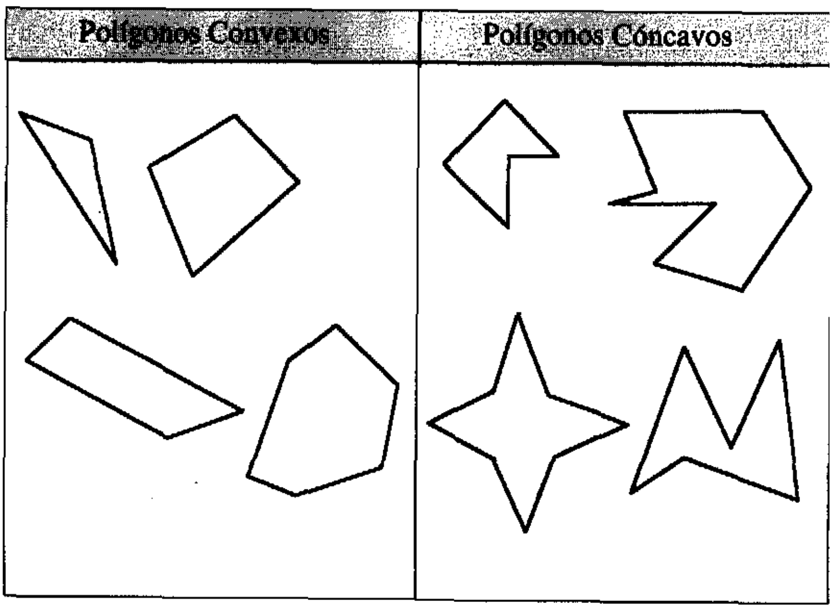
NIVEL 3.

Trabajada en el nivel **2** la estructura geométrica de los polígonos, el objetivo en este nivel es introducir a los estudiantes en el razonamiento inductivo como paso previo al razonamiento deductivo.

Fase de Orientación Dirigida.

Tarea 1

Antes de dar una definición vamos a recopilar las propiedades que sean comunes a todos los polígonos del mismo tipo.



Características comunes polígono convexos	Características comunes polígonos cóncavos

Dar una DEFINICION de un concepto significa establecer un criterio claro y conciso para distinguir el objeto que se está definiendo de otros que no comparten todas sus propiedades. Una buena definición debe ser formulada en términos precisos.

Define polígono convexo y polígono cóncavo.

El objetivo de esta tarea consiste en buscar propiedades mínimas que sean suficientes para caracterizar una forma determinada y en consecuencia establecer definiciones.

El trabajo realizado en esta tarea es extensible a todos los polígonos estudiados.

Tarea 2.

Los polígonos que acabas de definir están relacionados unos con otros. Vamos a intentar descubrir cuáles están relacionados entre sí respondiendo a las cuestiones siguientes de la forma que se indica:

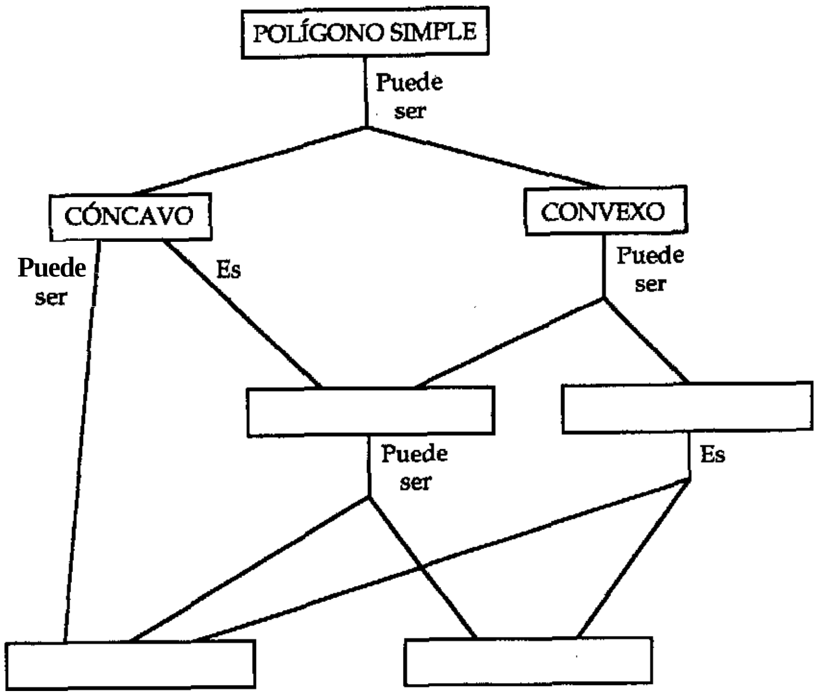
- Si la respuesta es afirmativa, justifícala de algún modo.
- Si la respuesta no es afirmativa, encuentra algún ejemplo que contradiga la afirmación y dibújalo.

1. Todos los polígonos cóncavos son irregulares.
2. Ningún polígono cóncavo es equiangular.
3. Todo polígono equilátero es convexo.
4. Todo polígono regular es equilátero.
5. Todo polígono convexo es equilátero.
6. Todo polígono equiangular es equilátero.
7. Si un polígono es equilátero entonces es un polígono equiangular.

Esta tarea facilitará la clasificación de los polígonos al establecer relaciones entre las diferentes formas.

Tarea 3.

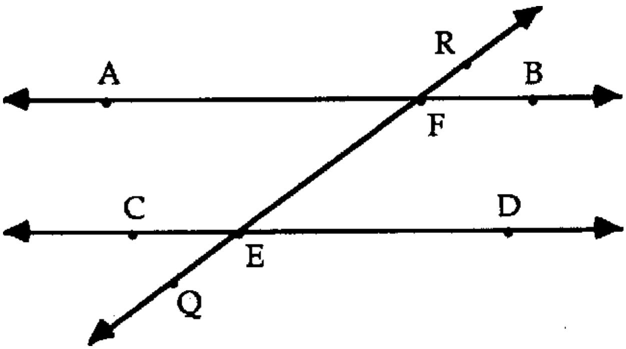
Completa el siguiente esquema de manera que las proposiciones sean válidas.



Una proposición será válida cuando los conceptos y el nexo de unión entre ambos den lugar a una afirmación verdadera. Cuando el estudiante complete el esquema estará en disposición de afrontar una clasificación inclusiva de los polígonos.

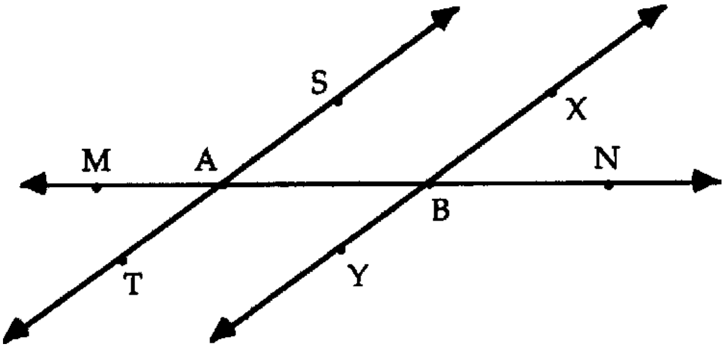
Tarea 4.

a) Si la recta AB es paralela a CD y QR corta a AB y CD, completa la tabla:



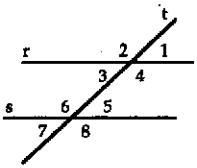
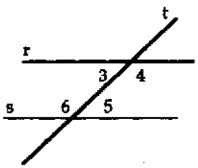
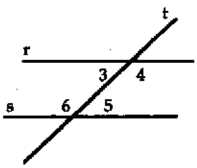
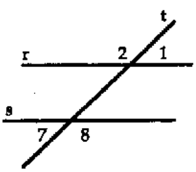
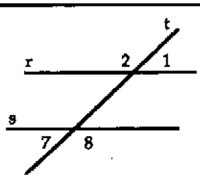
Angulo	Medida	Angulo	Medida	Angulo	Medida	Angulo	Medida
QED		AFR		RFB		AFE	
EFB		CEF		FED		CEQ	

Aqui tienes otro dibujo de dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Completa la tabla:

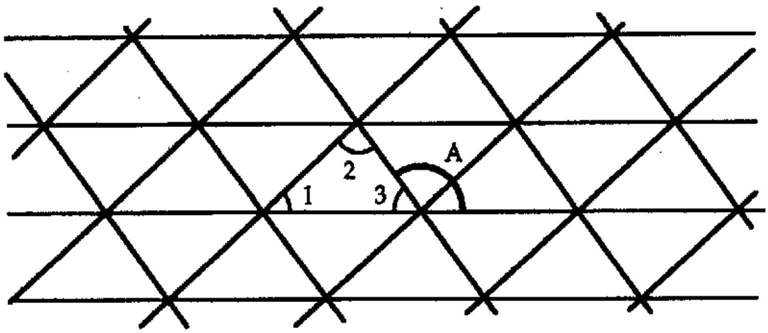


Angulo	Medida	Angulo	Medida	Angulo	Medida	Angulo	Medida
YEN		MAT		MAS		BAS	
TAB		ABY		ABX		NBX	

Completa las columnas tercera y cuarta de la tabla siguiente:

Figura	Nombre de los pares	Relación entre ellos	¿Por qué?
	1 y 5 4 y 8 3 y 7 2 y 6 Correspon- dientes		
	4 y 6 3 y 5 Alternos internos		
	3 y 6 4 y 5 Conjugados internos		
	1 y 7 2 y 8 Alternos externos		
	1 y 8 2 y 7 Conjugados externos		

b) Aquí tienes una malla triangular formada por dos colecciones transversales de líneas paralelas:



– ¿Cuántos triángulos se han formado? ¿Cómo son entre sí esos triángulos?
– Colorea los ángulos de modo que tengan el mismo color aquellos que tengan la misma amplitud. ¿Qué observas?

Con esta tarea se pretende que los estudiantes prueben de un modo informal una propiedad de los triángulos ya conocida.

Comienza con el estudio de las relaciones de ángulos entre paralelas, relación que los estudiantes deben descubrir.

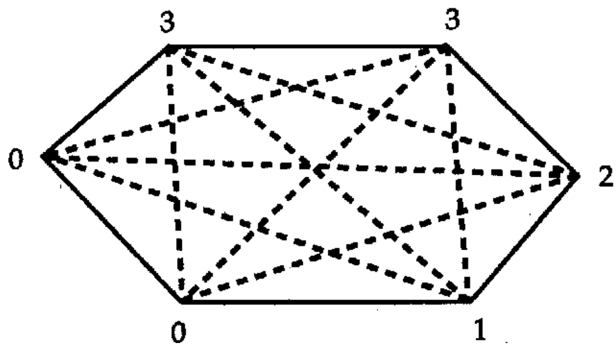
A continuación, mediante el trabajo con la malla triangular deben ser conscientes de la utilidad de las líneas auxiliares para obtener la justificación de que los ángulos de un triángulo suman 180 grados.

Tarea 5

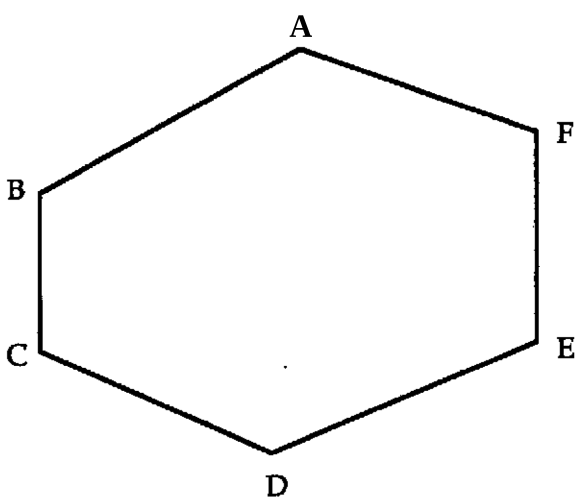
Para encontrar el número *total* de diagonales de un polígono, podemos utilizar diferentes vías de cálculo:

1) Trazar todas las diagonales y contarlas. En el ejemplo de la figura hay 9 diagonales.
2) Sumar todas las diagonales que salen de cada vértice y que no estén ya dibujadas. En nuestro ejemplo: 3+3+2+1+0+0 = 9 diagonales.

3) Obtener el número de diagonales que salen desde cada vértice, multiplicar por el número de vértices y dividir por 2. En el ejemplo de la figura: 3x612 = 9 diagonales.



a) ¿Cuántas diagonales tiene el polígono ABCDEF?.



b) ¿Cuántas diagonales tiene el polígono ABCDEFGHIJK? Explica cómo lo has averiguado.

UNIDAD DE ENSEÑANZA: TRIANGULOS.

NIVEL 2

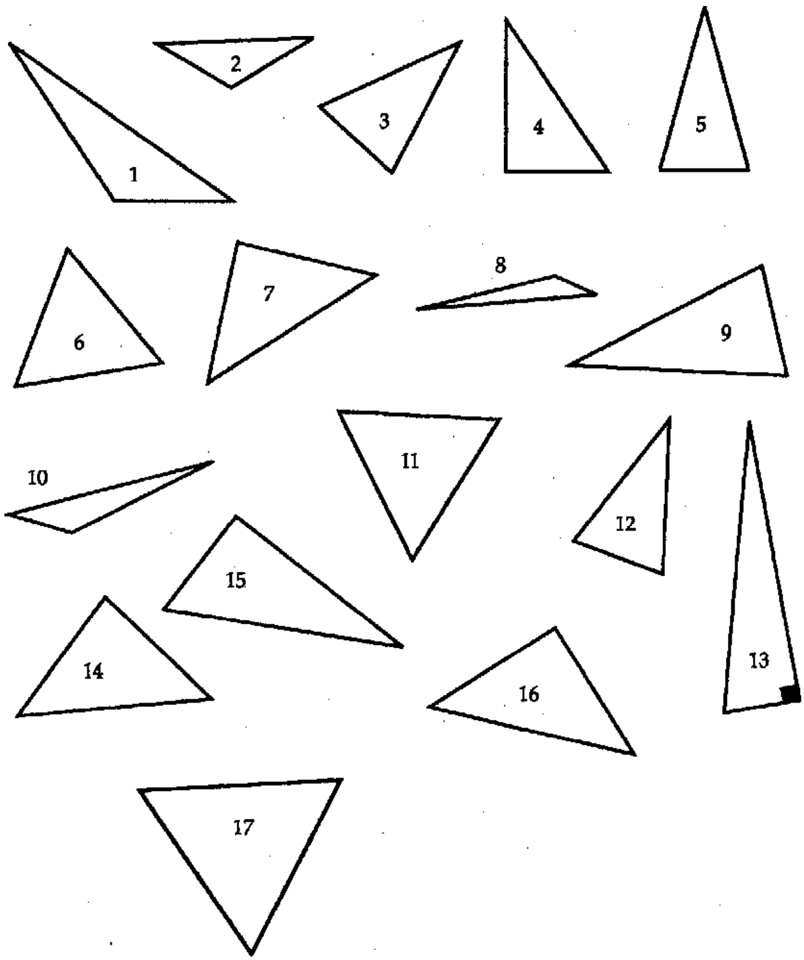
Fase de Información.

Comenzado el trabajo con polígonos, creemos innecesario realizar una fase inicial para determinar el grado de conocimiento de los estudiantes sobre triángulos pues es la clase de polígonos más conocida por ellos. En consecuencia, abordaremos directamente el estudio de los triángulos en la fase de orientación dirigida.

Fase de Orientación Dirigida.

Tarea 1.

Observa detenidamente los siguientes triángulos y confecciona una lista con las propiedades que observes.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

El objetivo será analizar diferentes triángulos con el fin de confeccionar un listado de propiedades. La relevancia o no de las características o propiedades, inicialmente, no será lo importante. Lo verdaderamente importante será que aporten el mayor número de ellas.

Se anotará cada propiedad en una cartulina de modo que con ellas los estudiantes puedan establecer una ordenación de las mismas, como sigue:

IGUALDAD DE LADOS	3 lados iguales 2 lados iguales Ningún lado igual
IGUALDAD DE ANGULOS	3 ángulos iguales *2* ángulos iguales Ningún ángulo igual
AMPLITUD DE ANGULO	**3** ángulos agudos **2** ángulos agudos y un ángulo recto *2* ángulos agudos y un ángulo obtuso

Tarea 2.

Con tres segmentos cualesquiera, ¿siempre se puede construir un triángulo?

El trabajo consistirá en estudiar la condición necesaria para la construcción de triángulos. Puede que sea necesario introducir una actividad previa en la que se pida a los estudiantes que construyan triángulos con dimensiones dadas, por ejemplo:

Construye el triángulo de lados 7, 5 y 4 cm. Posteriormente seguir con los casos 7, 4 y 3 cm. y **7, 4** y *2* cm., de tal modo que la condición necesaria aparezca como conclusión.

Tarea 3.

a) Considera un triángulo cualquiera. Dibuja las tres bisectrices del triángulo.

- ¿Qué descubres al dibujar las tres bisectrices?
- Dibuja la circunferencia inscrita al triángulo, tangente a los lados. ¿Qué observas?

b) Considera un nuevo triángulo ABC. Encuentra los puntos medios de cada uno de los lados y llámales L, M y N.

- Compara el triángulo LMN con los triángulos ALM, CLN y BNM.
- Para cada uno de los tres triángulos que contienen un vértice del triángulo ABC, construye los circuncentros y los ortocentros. Une esos tres circuncentros. De igual manera une los tres ortocentros. ¿Qué descubres?

El objetivo de esta tarea es doble: por una parte el manejo de los instrumentos de dibujo para la construcción de triángulos, y por otra parte, introducir los elementos notables de un triángulo y sus propiedades.

Fase de Orientación Libre.

¿De qué triángulo se trata?

De las siguientes propiedades que describen un triángulo determinado, ¿cuáles de ellas serían suficientes para saber de qué triángulo se trata y cómo dibujarlo?

- Tiene tres lados.
- Tiene dos ángulos agudos.
- Sus ángulos suman 180 grados.
- Es convexo.
- No tiene diagonales.
- Tiene sólo dos lados iguales.
- Sus ángulos agudos suman 90 grados.
- El lado desigual mide 5 cm.

Construcción 1.

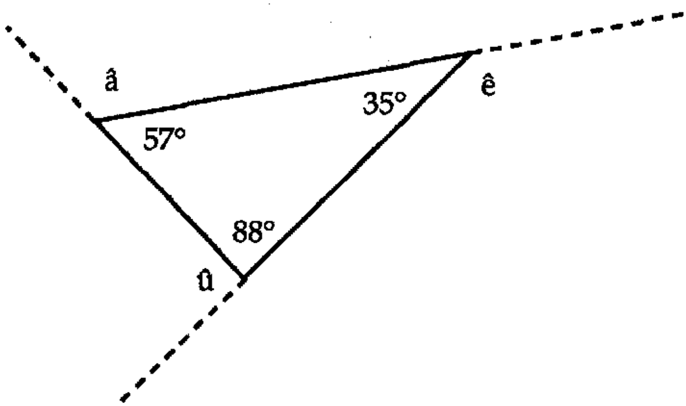
Construye de diversas formas, diferentes triángulos, utilizando para ello instrumentos de dibujo.

Construcción 2.

Construye de diferentes formas un triángulo con ángulos de 30, 60 y 90 grados. Utiliza los instrumentos de dibujo adecuados.

Cálculo de ángulos.

Calcula la medida de los ángulos exteriores â, ê y û, sin utilizar el transportador de ángulos. ¿Cuánto vale la suma de esos tres ángulos exteriores?



Fase de Integración.

El trabajo en esta fase se llevará a cabo de un modo similar al realizado en polígonos. Se incluirán actividades como la siguiente:

Actividad.

Asocia a cada tipo de triángulo la propiedad o propiedades que le correspondan:

Propiedades.	**Tipo de triángulo.**
- Tiene un ángulo de 90 grados.	- Triángulo escaleno.
- Tiene tres lados iguales.	- Triángulo equilátero.
- Tiene dos ángulos iguales.	- Triángulo isósceles.
- Su baricentro, incentro, ortocentro y circuncentro coinciden en el mismo pto.	- Triángulo acutángulo.
- Tiene un ángulo obtuso.	- Triángulo rectángulo.
- Tiene tres ángulos iguales.	- Triángulo obtusángulo.
- Tiene sólo dos lados iguales.	
- Una de sus alturas está fuera del triángulo.	
- Tiene todos sus ángulos desiguales.	

y cuestiones como las que siguen:

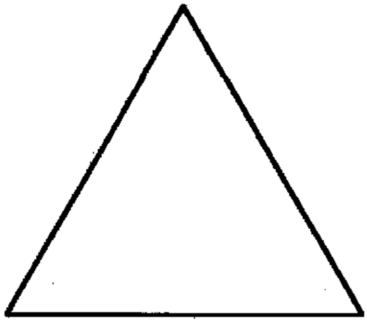
– ¿Podrás construir un triángulo con tres segmentos de longitudes **3, 3** y 6 cm.? Explícalo.
– ¿Podremos construir algún hiángulo cóncavo?
– ¿Qué entendemos por un triángulo acutángulo?
– ¿Qué hacer para construir un triángulo isósceles de lados **3,3** y 5 cm.?

NIVEL 3.

Pase de Orientación Dirigida.

Tarea 1.

Agrupa las fichas de cartulina que contengan las propiedades que posee el triángulo equilátero:



¿Podríamos eliminar alguna de estas fichas de manera que el triángulo equilátero quedase bien caracterizado?

En esta tarea se persigue que el estudiante discrimine propiedades relevantes de las irrelevantes o redundantes, de modo que se aproxime a la definición. Para ello se estudiará las relaciones que existen entre las propiedades de un tipo determinado de triángulo. Por ejemplo, que tres lados iguales es equivalente a tres ángulos iguales.

Esta tarea se repetirá para los otros tipos de triángulos.

Tarea 2.

Completa el cuadro siguiente viendo qué triángulos cumplen simultáneamente las propiedades indicadas, y responde a las cuestiones:

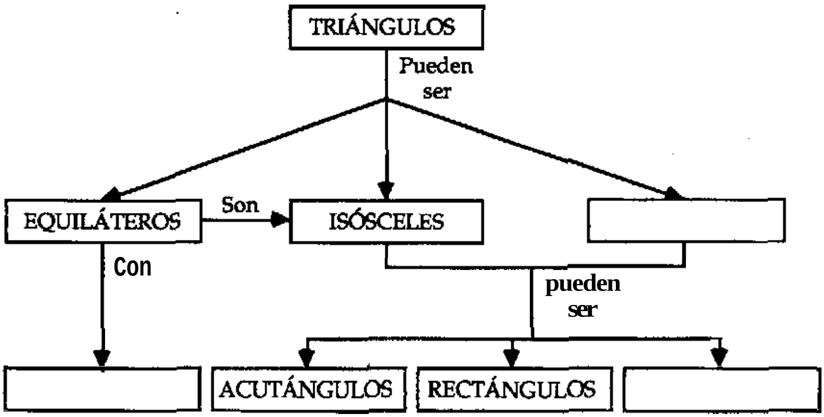
a) ¿Los triángulos equiláteros pueden ser acutángulos? ¿Y rectángulos? ¿Y obtusángulos?
b) ¿Los triángulos isósceles pueden ser acutángulos? ¿Y rectángulos? ¿Y obtusángulos?
c) Idem con los triángulos escalenos.

Lados \ Angulos	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

Se buscarán relaciones entre propiedades de diferentes triángulos con el fin de preparar la clasificación inclusiva de los triángulos. Para ello seguirán siendo útiles las fichas de propiedades.

Tarea 3.

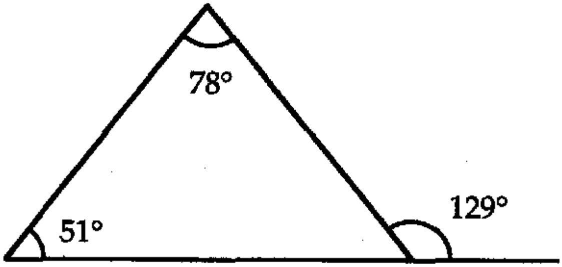
Completa el siguiente esquema de forma que las proposiciones sean válidas.



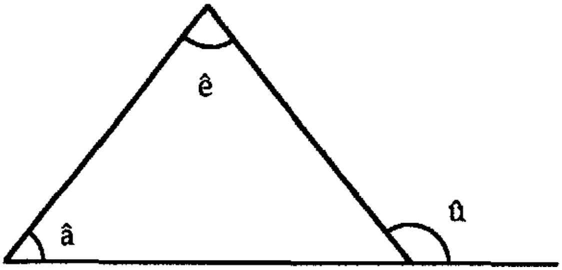
El objetivo de esta tarea es que el estudiante obtenga una clasificación de los iriángulos.

Tarea 4.

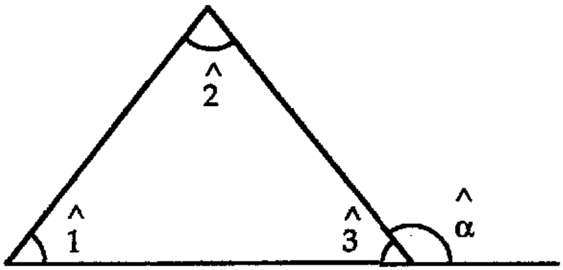
a) ¿Existe alguna relación entre los ángulos señalados en el dibujo? Encuéntrala.



b) ¿Qué relación existe entre los ángulos â, ê y û del dibujo dado? Escríbela.



c) En la demostración que sigue, escribe la propiedad que justifica cada uno de los pasos que en ella aparecen.



$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$ porque...

$\hat{3} + \hat{a} = 180°$ *porque...*

Entonces: $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180'' = \hat{3} + \hat{\alpha}$

De donde: $\hat{1} + \hat{2} = \hat{a}$ porque...

Con este trabajo se pretenderá que el alumno siga los pasos de una demostración que le revele la estructura del razonamiento deductivo.

Fase de Orientación Libre.

Línea de Euler.

En un triángulo cualquiera ABC, dibuja el baricentro, ortocentro y circuncentro. Comprueba si están alineados.

La línea que contiene estos tres puntos se le llama "LINEA DE EULER.

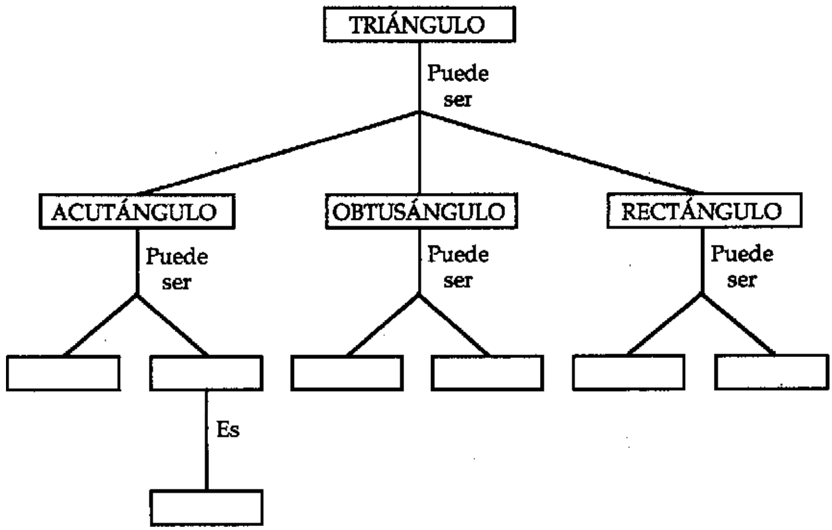
Dibujo de triángulos.

Completa el cuadro siguiente dibujando los triángulos apropiados:

Angulos / Lados	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

Otra clasificación de triángulos.

Completa el esquema siguiente:



Fase de Integración.

En esta fase se deberán plantear actividades que permitan dar una visión conjunta de la unidad de enseñanza trabajada: Concepto de triángulo, los elementos del triángulo, los diferentes tipos de triángulos y las distintas clasificaciones.

UNIDAD DE ENSEÑANZA : CUADRILATEROS.

NIVEL 2.

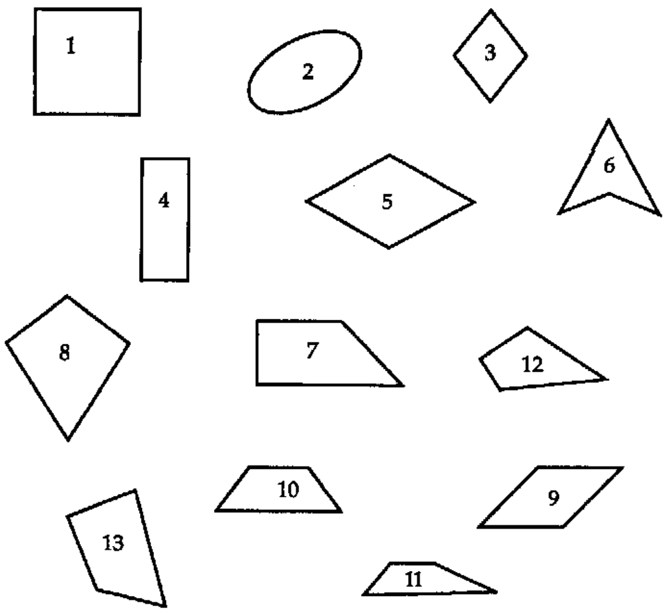
Fase de Información.

Con la experiencia que les habrá proporcionado las unidades de Polígonos y triángulos, la fase' de información sobre cuadriláteros será innecesaria por lo que se abordará directamente la fase de orientación dirigida.

Fase de Orientación Dirigida.

Tarea 1.

Observa detenidamente la colección de cuadriláteros y determina qué propiedades o características poseen. Confecciona una lista con todas ellas.



El proceso de análisis será similar al realizado con los triángulos. Se utilizarán las fichas de propiedades hechas con cartulina para obtener una ordenación de las propiedades del tipo:

PARALELISMO DE LADOS
- Lados paralelos dos a dos
- Un par de lados paralelos
- Sin lados paralelos.

ANGULOS RECTOS
- Cuatro ángulos rectos
- Tres ángulos rectos y sólo tres
- Dos ángulos rectos y sólo dos
- Un ángulo recto y sólo uno.

ANGULOSNORECTOS
- Angulos iguales dos a dos
- Dos iguales y dos desiguales
- Cuatro ángulos iguales

CONGRUENCIA DE LADOS
- Cuatro lados congruentes
- Congruentes dos a dos
- Dos congruentes y dos no congruentes
- Cuatro lados no congruentes.

DIAGONALES
- Diagonales de igual longitud
- Diagonales que se cortan en el punto medio
- Diagonales de igual longitud que se cortan en su punto medio
- Diagonales de distinta longitud que se cortan en su punto medio
- Diagonales perpendiculares
- Diagonales de distinta longitud
- Diagonales que no se cortan en su punto medio
- Diagonales que no se cortan.

Fase de Orientación Libre.

¿De qué cuadrilátero se trata?

Para cada propiedad enunciada, dibuja todos los cuadriláteros que la cumplan.

1. Con lados paralelos dos a dos.
2. Con cuatro ángulos rectos.
3. Con un sólo par de lados paralelos.
4. Con diagonales de igual longitud.
5. Con diagonales que se cortan en sus puntos medios.

Embaldosados.

¿Con qué cuadriláteros podemos recubrir el plano?

Diagonales.

¿Qué relación encuentras entre las distintas longitudes de las diagonales y los distintos tipos de cuadriláteros?

Transformar.

Para transformar un rombo en un cuadrado, ¿qué propiedades cambian'as? ¿Y un paralelogramo en un rectángulo?

Cálculo de las medidas.

Calcula la medida de los ángulos de un rombo si el ángulo obtuso mide 108 grados.

Fase de integración.

Como en fases de integración anteriores, el trabajo tendrá como objetivo la recogida y ordenación de propiedades. Dado que los cuadriláteros poseen más propiedades que los triángulos, el listado será mayor que en aquellos y la fase de sumarización más extensa.

Se incluirán actividades como las que siguen:

Propiedades.	**Tipo de triángulo.**
- Tiene un par de lados paralelos.	- Paralelogramo.
- Tiene tres ángulos rectos y sólo tres.	-Trapecio.
- Cuatro ángulos iguales.	-Rombo.
- Diagonales que se cortan en sus puntos medios.	-Rectángulo.
- Dos pares de lados iguales.	- Cuadrado.
- Dos pares de ángulos iguales.	- Cometa.
- Diagonaies que no se cortan.	- Cuadrilátero cóncavo.
- Lados iguales dos a dos.	
- Sólo un ángulo recto.	
- Las diagonaies no se cortan.	

Y cuestiones como las que siguen:

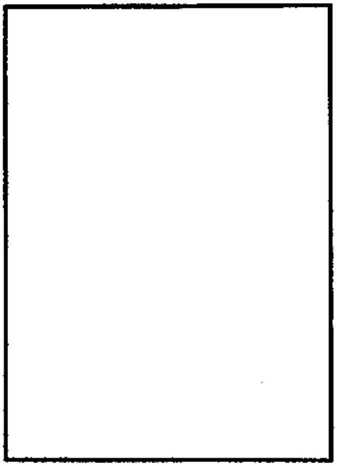
– ¿Qué cuadriláteros cumplen que sus diagonales se cortan perpendicularmente y en su punto medio?
– Dibuja todos los cuadriláteros que tengan sus cuatro lados iguales.
– ¿Qué cuadriláteros tienen dos ángulos agudos y dos obtusos?
– ¿Cómo le describirías verbalmente a un amigo un trapecio isósceles?

NIVEL 3.

Fase de Orientación Dirigida.

Tarea 1.

Agrupa las fichas de cartulina que contengan las propiedades que posee el rectángulo.



¿Podríamos eliminar algunas de estas fichas de manera que el rectángulo quedase bien caracterizado?.

En esta tarea se pretende seguir el mismo procedimiento usado en triángulos: el análisis de las propiedades relevantes e irrelevantes nos llevará a la definición de rectángulo.

Este procedimiento se repetirá para cada uno de los diferentes tipos de cuadriláteros.

Tarea 2.

Completa las tablas siguientes dibujando cuadriláteros que verifiquen simultáneamente las características que se indican:

Pares de lados paralelos

Pares de lados iguales		**0**	**1**	**2**
	0			
	1			
	2			

Pares de lados paralelos

Número de ángulos rectos		**0**	**1**	**2**
	0			
	1			
	2			

Al utilizar en esta tarea tablas de doble entrada estaremos propiciando un estudio sistematizado de la relación entre dos propiedades como paso previo a tareas de clasificación.

Tarea 3.

Completa las siguientes proposiciones:

– Si los cuatro lados son iguales los lados opuestos son
....
– Si las diagonales son iguales entonces los lados son
....
– Si los lados opuestos son paralelos los ángulos opuestos son
....
– Si tienen dos ángulos (opuestos) rectos los lados son
....

Con estas proposiciones se analizan relaciones de implicación.

Tarea 4.

Cada casilla es intersección de una fila y una columna. Anota en cada casilla las propiedades comunes a los cuadriláteros de las correspondientes fila y columna.

	Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Paralelo-gramo	Trapecio	Cometa
Cuadrado	=====					
Rectángulo	=====	=====				
Rombo	=====	=====	=====			
Paralelo-gramo	=====	=====	=====	=====		
Trapecio	=====	=====	=====	=====	=====	
Cometa	=====	=====	=====	=====	=====	=====

El objetivo de esta tarea es propiciar en los alumnos la realización de clasificaciones inclusivas. En el desarrollo de la misma nos parece interesante formular explicitamente cuestiones como:

- ¿Un cuadrado es un rectángulo?
- ¿Un rectángulo es un cuadrado?
- Los cuadrados, ¿son rombos?. ¿Y viceversa?
- ¿Un rectángulo es un paralelogramo?
- Los paralelogramos, ¿son trapecios?. ¿Y viceversa?

Tarea 5.

Completa las siguientes proposiciones, eligiendo y justificando la respuesta que das:

"Lados paralelos dos a dos implica ...."

(Lados: a) congruentes, b) no congruentes, c) congruentes dos a dos.).

Busca contraejemplos si es necesario.

¿Es cierto el recíproco?.

"Pares de lados paralelos dos a dos implica........"

(Angulos: a) iguales, b) desiguales dos a dos, c) opuestos iguales dos a dos.).

Busca contraejemplos si es necesario.

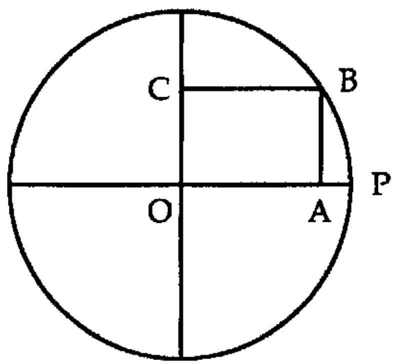
¿Es cierto el recíproco?

Se persigue el establecimiento de condiciones necesarias y suficientes.

Fase de Orientación Libre.

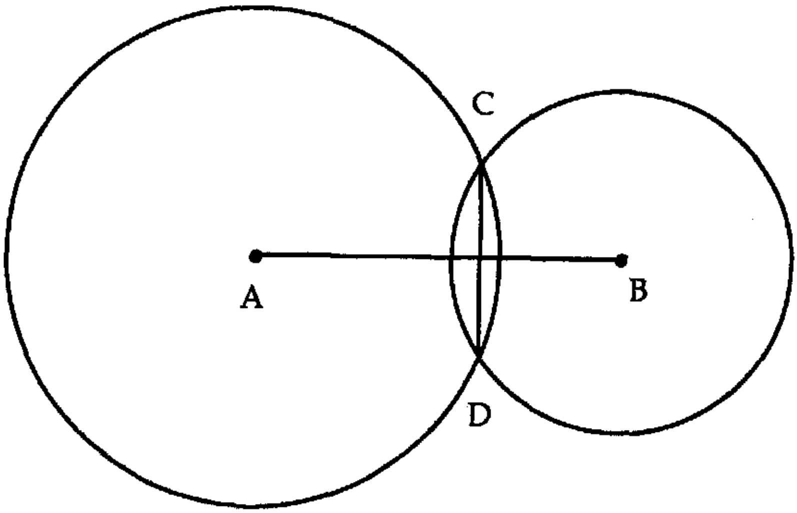
Problema 1.

En la figura, O es el centro de la circunferencia. El cuadrilátero OCBA es un rectángulo, donde OA=5 y AP=1. ¿Cuánto mide CA? Razona la respuesta.



Problema 2.

Dadas dos circunferencias de centros **A** y **B,** de distintos radios que se cortan en dos puntos C y D. Mostrar que el segmento **AB** es perpendicular al segmento CD.



Definiciones.

Justifica que cualquiera de las tres definiciones siguientes caracterizan a un cuadrado:

- Un cuadrado es un Paralelogramo con un ángulo recto y con diagonales perpendiculares.
- Un cuadrado es un rombo con diagonales de igual longitud.
- Un cuadrado es un rectángulo con los lados de igual longitud.

Fase de Integración.

En esta unidad didáctica se ha potenciado el estudio de las diferentes definiciones de los distintos cuadriláteros, así como las posibles clasificaciones a realizar con éstos. Por lo tanto para cerrar este nivel, se deberían retomar para su reflexión las proposiciones ya estudiadas en las fases anteriores que relacionaban propiedades y la equivalencia entre ellas.

COMENTARIO DEL DESARROLLO DE LAS UNIDADES DIDACTICAS.

Como ya se ha dicho en otra parte de esta memoria, el equipo investigador tomó notas de las clases que iba impartiendo y recogió periódicamente trabajos de los alumnos en los que podían observarse las respuestas que éstos daban a las tareas planteadas. Con esas notas de clase y las respuestas de los alumnos, los profesores componentes del equipo investigador hemos dispuesto de material suficiente para realizar el análisis siguiente que pretende dar una visión global de la evolución del razonamiento de los estudiantes y del aprendizaje de los conceptos geométricos previstos.

Hemos planificado de modo distinto las tareas a realizar en el nivel 2 para cada una de las unidades didácticas. Mientras que fue necesaria una mayor orientación dirigida en el tema de polígonos, no lo fue en cuadriláteros y triángulos, dado que el aprendizaje en la unidad de polígonos proporcionó el vocabulario necesario y sirvió de fundamento para las unidades didácticas siguientes.

Por otra parte el trabajo en el nivel **3** no puede decirse que fuese abordable con todos los alumnos ya que una mayona no pudieron con tareas de razonamiento que superaran el nivel 2. El desarrollo de las clases indicó la imposibilidad de recorrer las fases del Nivel **3** de forma sistemática. Unicamente se resolvieron tareas en ese nivel de razonamiento como una prolongación natural de las tareas de nivel 2.

En tareas de reconocimiento de polígonos, inicialmente los alumnos mostraron una gran confusión a la hora de determinar aquellos que eran polígonos y los que no lo eran. Sus respuestas se basaban en referencias visuales que poseían de los años escolares. El vocabulario era poco preciso, poco fluido y poco espontáneo, quizás influenciado por el escaso conocimiento de la terminología propia de la geometría y de los conceptos geométncos más elementales. Como ejemplo pueden citarse las respuestas que dieron dos alumnos a la hora de justificar la elección de los polígonos:

"Todos son polígonos, lo que ocurre es que unos son polígonos normales y los otros son polígonos raros".

"Todos son polígonos aunque unos son polígonos regulares y los otros son polígonos irregulares".

Estas dos respuestas sugieren que estos estudiantes habían visto antes figuras a las que se les denominaba polígonos, que conocían términos asociados a formas geométricas. Pero estas asociaciones se producían de forma poco coherente por cuanto siempre habían estado ligadas a experiencias visuales y nunca a análisis de propiedades.

En las tareas de orientación dirigida, los estudiantes vieron que había argumentos por los que se podía discriminar unas formas de otras cuando lo que se pretendía era buscar polígonos de una colección dada. Estos argumentos aparecieron del análisis de las propiedades de los polígonos. Pronto resultaron familiares términos como lado, vértice, ángulo interior y ángulo exterior, diagonal, diagonal interior y diagonal no interior, etc que utilizaron para describir sus polígonos. Cuando se les pidió que tratasen de definir cierta clase de polígonos, las respuestas se encaminaban hacia la retahila de propiedades o características que acababan de obtener. Así era, por ejemplo, la descripción que de un polígono cóncavo hizo un estudiante:

"Un polígono cóncavo es un polígono que tiene algún ángulo mayor de 180 grados, con un vértice hacia adentro del polígono y con diagonal o diagonales exteriores".

El mismo estudiante describe así el polígono convexo:

" Un polígono convexo es un polígono que tiene todos sus ángulos menores de 180 grados, no tiene vértices hacia adentro, son más redondeados y sus diagonales son todas interiores".

Puede observarse de estas dos respuestas que un alumno trabajando en este nivel de razonamiento confunde características visuales (vértice hacia adentro) con propiedades geométricas que dan lugar a esa característica visual (un ángulo mayor de 180 grados). Este tipo de respuestas es habitual en todos los alumnos que inician su razonamiento de nivel 2.

Las tareas que pretenden un nivel de análisis más complejo, dan lugar a las primeras diferencias entre los alumnos de un mismo nivel. Así, en tareas cuyo objetivo es el establecimiento de propiedades de polígonos que son independientes de la forma de éstos, el alumno que se va asentando en el nivel de razonamiento llega a conclusiones satisfactorias. Por el contrario, los alumnos que no tienen aún cierto grado de adquisición de este nivel, no pueden desligar una propiedad de la forma del polígono que la posee y son incapaces de ver que, por ejemplo, con independencia de su concavidad o convexidad, un pentágono tiene 5 diagonales y sus ángulos interiores suman 540 grados. Un ejemplo del primer caso es la conclusión de una alumna que inicialmente pensaba que la suma de los ángulos de un polígono cóncavo era mayor que la suma de los ángulos del polígono convexo con el mismo número de lados, siendo la razón esgrimida el hecho de poseer un ángulo de más de 180 grados, en el primer caso y no tener ninguno, en el segundo caso. Después de un análisis de diferentes casos y a partir de la triangularización de los polígonos dice:

"Creo que hay una regla para esto (se refiere a la suma de los ángulos de un polígono) ya que en los triángulos la suma total es 180º, en los polígonos de cuatro lados (ya no dice si es cóncavo o convexo), la suma total es 360º, porque son dos triángulos, etc".

En la mayoría de los alumnos existía un preconcepto de polígono regular. Por una parte, entendían como polígono regular el que posee una propiedad, generalmente lados de igual longitud, o el polígono que presenta cierta "regularidad visual". Así, por ejemplo, un alumno, cuando analizó las propiedades del polígono convexo, dijo que siempre eran regulares (quizá aludiendo a la forma redondeada de los convexos). Fue necesario superar ese preconcepto con un análisis de propiedades referidas a polígonos regulares, equiláteros y equiángulos. Ese mismo alumno al resolver la tarea confeccionó el siguiente listado de propiedades del polígono regular :

"– Los polígonos regulares tienen:
– Lados de igual longitud.
– Angulos de igual medida.
– Angulos convexos.
– Todas sus diagonales son interiores.
– Son polígonos convexos.
– Siempre tienen un eje de simetría".

La experiencia acumulada en el análisis de las propiedades de los polígonos y la mayor riqueza en el vocabulario geométrico, permitió abordar las tareas de análisis en triángulos y cuadriláteros de una forma más espontánea por parte de los alumnos. El listado de propiedades que proporcionaron fue tan extenso que requirió una orientación dirigida con el objetivo de ordenarlas y agruparlas.

Así, por ejemplo, al realizar el análisis de las propiedades de los cuadriláteros presentados, apareció en muchos alumnos el siguiente listado:

"– Cuatro lados.
– Cuatro ángulos.
– Algunos tienen ángulo cóncavo.
– Lados paralelos dos a dos.
– Suma de los ángulos interiores 360°.
– Tener dos diagonales.
– Angulo central de 90°.
– Las diagonales no siempre se cortan en el punto medio.
– Al triangularizar se obtienen dos triángulos.
– Tener un ángulo recto.
– Tener dos ángulos iguales y dos desiguales.
– Lados no paralelos.
– Dos ángulos rectos.
– Tener cuatro ángulos rectos.
– Tener un solo par de lados paralelos".

No hubo dificultad en que los estudiantes agruparan los cuadriláteros según propiedades generales tales como:

– Paralelismo de lados.
– Angulos rectos.
– Angulos no rectos.
– Congruencia de lados.
– Diagonales.

Una vez que se consideró cumplido el trabajo en el nivel 2 de razonamiento, con las dificultades y limitaciones que ya se han apuntado en la presente memoria, se plantearon extensiones de ciertas tareas al nivel 3 de razonamiento. Esas extensiones que, de algún modo, pueden llamarse "naturales" surgieron más como consecuencia de la tarea que se llevaba a cabo en el nivel inferior que como un trabajo sistemático que recorriese todas las fases que inicialmente se habían programado. Así, después de que los alumnos conseguían un listado de las propiedades de los polígonos, triángulos o cuadriláteros, y esa lista era revisada para ver la relevancia o irrelevancia de alguna de ellas, el camino "natural" fue buscar la definición de las figuras cuyo análisis se acababan de realizar en el nivel inferior.

La definición, entendida como un listado de propiedades en el nivel 2, era tratada en el nivel siguiente como un conjunto mínimo de propiedades que caracterizaban una figura geométrica. Para ello, los estudiantes tuvieron que acortar sus listados de propiedades, pero manteniendo la figura perfectamente determinada. De nuevo aquí pueden observarse diferencia en las actuaciones de los alumnos que no están asentados en un mismo nivel de razonamiento. Mientras que el trabajo del alumno que se encontraba en el nivel 3 se encaminaba a la búsqueda de propiedades que podían ser equivalentes a otras dentro del listado de propiedades de cualquier figura, el alumno que no estaba en el mencionado nivel de razonamiento respondía que "no" cuando se le preguntaba si la lista de propiedades podía hacerla más corta y respondía "porque ya no se trataría de la misma figura" al cuestionar el por qué de su negación. El primer alumno daba una definición de la figura con un conjunto mínimo de propiedades, mientras que el segundo repetía el listado que ya poseía.

Por otra parte, ciertos alumnos en el nivel 3 presentan dificultades a la hora de establecer definiciones de formas geométricas. Dichas dificultades se concretan en errores del tipo:

a) Al seleccionar propiedades mínimas de un cuadrilátero, los alumnos elegían un número insuficiente de propiedades. Por ejemplo, un alumno definía cuadrado como: "Cuadrilátero con cuatro lados iguales".
b) No eliminar en la selección propiedades redundantes, lo que proporcionaba una lista con un número excesivo de éstas. Por ejemplo, otro alumno definía cuadrado como: "Cuadrilátero con cuatro lados y ángulos iguales, diagonales que se cortan en su punto medio".

Cuando se abordan tareas de clasificación, inicialmente los alumnos hacen clasificaciones no inclusivas. Así, por ejemplo, un alumno no considerará que un cuadrado es un rectángulo, siempre se produce la respuesta "un cuadrilátero o es un cuadrado o es un rectángulo. No puede ser dos cuadriláteros al mismo tiempo". Para lograr que se produzca una clasificación inclusiva es necesaria un orientación dirigida en ese sentido. Se han de relacionar las propiedades comunes que comparten todos los cuadiláteros entre si, comenzando con clasificaciones inclusivas entre unas pocas clases de cuadriláteros de manera que un alumno sea capaz de entender que, por ejemplo, un cuadrado es un rectángulo porque posee las propiedades que definen a esta figura y por el contrario, un rectángulo no es un cuadrado porque no las posee. Siguiendo este proceso, se realizó la clasificación inclusiva de los paralelogramos. El proceso se concluyó completando la clasificación inclusiva de los cuadriláteros mediante diagrama de árbol.

Una dificultad añadida para los alumnos en el momento de definir y clasificar fue el uso de los cuantificadores. Por ejemplo, si definían un triángulo isósceles como "el que tiene dos lados iguales", equiláteros e isósceles aparecen como clases disjuntas (se produce una clasificación de tipo exclusivo). Por el contrario si el triángulo isósceles se definía como "el que al menos tiene dos lados iguales", entonces la clasificación era inclusiva. La misma dificultad aparece derivada de las distintas definiciones que se adopten para los trapecios.

A lo largo de todas las tareas realizadas en esta investigación, los alumnos tuvieron que dar justificaciones a la mayoria de las respuestas que daban. La calidad de las mismas, así como su mayor o menor grado de precisión, fue mejorando con el progreso de nivel 2 al nivel **3.** Por ejemplo, planteada la cuestión de: ¿cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?, las respuestas fueron unánimes:"¡180 grados!". Cuando se pidió una justificación de esa respuesta, las opiniones no fueron tan unánimes:

"Porque en un triángulo rectángulo, uno de los ángulos es de 90 grados y los otros dos pueden ser de 30 y 60 grados, con lo que juntos suman 180 grados".

Esta respuesta es típica en los alumnos que se encuentran en el nivel 2.

"Porque he dibujado varios triángulos y he medido sus ángulos y en todos ellos la suma me da 180 grados".

Esta respuesta que trata de justificar que esa propiedad se cumple en muchos triángulos es propia de alumnos que tienen un cierto grado de adquisición del nivel **3.**

Para lograr que los alumnos buscaran una justificación no basada en ejemplos o casos concretos se dibujó una malla triangular en la que podía verse la relación entre los ángulos de los triángulos que aparecían. Algunos alumnos fueron capaces de justificar, utilizando un argumento informal, por qué los ángulos del triángulo sumaban 180º.

CAPITULO 3

LA EVALUACION DE LOS ESTUDIANTES.

En cualquier investigación de diseño curricular en la que se realizan expenmentaciones en las aulas, la opinión de los profesores que han participado en la experimentación es un elemento importante para la evaluación del material diseñado, pues ellos están en inmejorables condiciones para poder [illegible] nar sobre qué partes ha f[illegible] ien, cuáles mal, dónde ha habido problemas inesperados, cómo han reaccionado los estudiantes, etc.; en nuestro caso, esta opinión está reflejada en el capítulo 2. Sin embargo, siempre es necesario realizar algún tipo de evaluación externa de las unidades de enseñanza que compense las posibles subjetividades o [illegible] rci[illegible] lidades de las opiniones personales. El objetivo de este capítulo es describir el proceso de evaluación de los estudiantes, y por lo tanto de las unidades de enseñanza experimentales, que hemos llevado a cabo. Al abordar el problema de la evaluación en este proyecto de investigación, nos quedó claro que la forma más razonable de evaluar la validez de las unidades de enseñanza era mediante la evaluación del aprendizaje de los estudiantes que participaran en la experimentación. En este sentido, se plantearon dos posibilidades: Evaluar los conocimientos adquiridos oor los estudiantes V evaluar su capacidad de razonamiento matemático.

Como nos [illegible] en el marco del Modelo de Van Hiele, la opción por la segunda alternativa es muy clara, pues en este contexto el objetivo principal de la enseñanza es desarrollar la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes, asumiendo, como hemos visto en el capítulo 1, que este desarrollo sólo se pu[illegible]de conseguir si va acompañado [illegible] un determinado [illegible] de conocimientos geométricos. Por lo tanto, suponemos que una mejora en el nivel de razonamiento geométrico va acompañada necesariamente de un aprendizaje de los contenidos sobre los que se ha trabajado, mientras que la situación inversa (aprendizaje de los contenidos implica mejora en el razonamiento) no tiene por qué ocurrir, como lo demuestran las clases de tipo rutinario y memorístico en las que los estudiantes aprenden nuevas definiciones, enunciados de propiedades, algoritmos, etc., pero realmente no las comprenden y no son capaces de utilizar estos conocimientos fuera de las situaciones en las que se han entrenado.

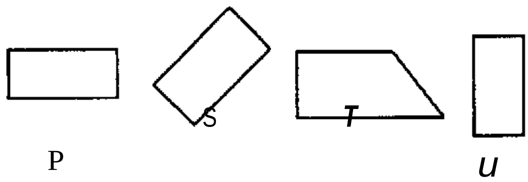
Así pues, la evaluación de las unidades de enseñanza se basará en la determinación del nivel Van Hiele de razonamiento geométrico de los estudiantes en el área concreta de la Geometría que han estudiado durante el curso. Hemos recurrido a la metodología de pretest y postest para comparar ambos resultados y obtener conclusiones al respecto. Esta metodología de evaluación tiene también la ventaja de que el pretest sirve para que los profesores tengan información sobre los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos antes de empezar la enseñanza del tema experimental (una de las componentes de la fase 1 de aprendizaje).

Tenemos a nuestra disposición tres tipos de tests para medir el nivel de Van Hiele de los estudiantes: Tests escritos de elección múltiple, tests escritos de respuesta libre y entrevistas clínicas. Todos ellos han sido utilizados con anterioridad por diversos autores en sus investigaciones sobre el Modelo de Van Hiele:

Zalman Usiskin dirigió un proyecto de investigación (Usiskin, 1982) en el que se observó la actividad de estudiantes de Enseñanza Secundaria (entre 14 y 17 años) mediante diversos tests administrados antes y después de un curso de Geometría. Para ello, se diseñó un test escrito formado por 25 ítems de respuesta múltiple con el que determinar el nivel de Van Hiele de los estudiantes. El análisis de los resultados de este proyecto de investigación y de otros que han utilizado el mismo tipo de test (entre ellos uno nuestro, Gutiérrez, Jaime, 1987) nos han llevado a la conclusión de que los ítems de respuesta múltiple no son idóneos para determinar el tipo de razonamiento de los estudiantes, pues diversos estudiantes pueden elegir una misma respuesta por motivos diferentes. Por ejemplo, éste es uno de los ítems usados en nuestro trabajo citado en este párrafo:

¿Cuáles de estos polígonos son rectángulos?

a) Sólo P.
b) Sólo P y U.
c) Sólo P y S.
d) Sólo P, S y U.
e) Todos son rectángulos.



El profesor D. Fuys, en una comunicación personal, criticaba la validez de este ítem para determinar el nivel de Van Hiele de los estudiantes dando la siguiente justificación:

"Un estudiante podría elegir la respuesta d) porque:
1) T no parece un rectángulo (nivel 1).
2) T no es porque no tiene todos los ángulos rectos (nivel 2).
3) T es un trapezoide y los trapezoides no son rectángulos porque no tienen las propiedades necesarias de los rectángulos (nivel **3,** por haber un razonamiento informal)."

Por lo tanto, optamos por no utilizar ítems de elección múltiple en esta investigación.

La entrevista clínica es, realmente, el método de determinación de los niveles de razonamiento más fiable y eficaz, como ha quedado demostrado en las investigaciones realizadas por otros autores y también por nosotros mismos. Entre estas destaca la desarrollada por W.F. Burger y J.M. Shaughnessy (Burger, Shaughnessy, 1986), que diseñaron un test, en el que se planteaban cuestiones sobre triángulos y cuadriláteros, y lo administraron mediante entrevistas clínicas a alumnos de Enseñanzas Primaria y Secundaria. Sin embargo, en esta investigación desestimamos la entrevista clínica por motivos de tipo práctico: La realización de una entrevista duraría un mínimo de 1 hora por cada estudiante y deberíamos entrevistar a más de 100 alumnos, cosa que desbordaba por completo la capacidad del equipo investigador.

Por consiguiente, se decidió utilizar ítems escritos de respuesta libre, pues se encuentran en una situación intermedia entre los ítems de elección múltiple y las entrevistas clínicas: Un ítem de respuesta libre evita el inconveniente de los ítems de elección múltiple, pues en él se pide a los estudiantes que expliquen con detalle su forma de trabajo y sus motivos para responder como lo hacen, y también evita el inconveniente de la entrevista clínica pues puede ser administrado de forma simultánea a todos los alumnos de cada clase. Por otra parte, un ítem de respuesta libre tiene, frente a una entrevista, el inconveniente de que para los estudiantes siempre es más difícil expresarse por escrito que verbalmente, por lo que tienen la tendencia a dar respuestas escuetas; también tiene el inconveniente de que no es posible alterar las preguntas en función de las respuestas previas, como se puede hacer en las entrevistas. Sin embargo, un diseño cuidadoso de los textos de los ítems puede reducir considerablemente algunos de los inconvenientes apuntados.

Diseño de los tests.

Para realizar la evaluación procedimos a diseñar dos test diferentes, pero equivalentes, parte de cuyos ítems eran comunes a ambos. En esta sección describiremos con detalle el proceso de diseño de estos tests, que hemos denominado "Test 1" y "Test 2". Se tomó la decisión de utilizar dos tests diferentes en vez de uno solo con el fin de reducir al máximo el riesgo de errores debidos a algún fallo imprevisto en alguno de los ítems. Por este mismo motivo, los profesores que experimentaron las unidades de enseñanza con dos grupos utilizaron un test diferente en cada grupo.

Al comenzar el diseño de un tests para evaluar el nivel de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes, hay que tener en cuenta tres componentes del test:

A) Los contenidos geométricos en los que se basarán los ítems. Como el nivel de razonamiento de Van Hiele no es de carácter global dentro de las Matemáticas (ni siquiera dentro de la Geometría), el contenido de los ítems debe coincidir con el de las unidades de enseñanza que se van a experimentar, en nuestro caso polígonos. Por estos motivos, se decidió que los ítems de los tests plantearían cuestiones relativas a polígonos y en particular a triángulos y cuadriláteros.

B) El tipo de estudiantes a los que se va a administrar el test y sus niveles de razonamiento probables. Si un test se va a utilizar con un tipo concreto de estudiantes, para optimizar los ítems debe hacerse más incidencia en los niveles en que más probablemente estarán los estudiantes. Por ejemplo, es absurdo administrar a niños de los primeros cursos de E. Primaria un ítem para evaluar el nivel 4. En nuestro caso, el diseño de los tests se realizó durante el primer trimestre del curso, por lo que los miembros del equipo investigador ya conocíamos a los estudiantes que iban a participar en la experimentación. Esto nos permitió suponer que la mayoría de ellos estan'an en los niveles 1 y 2, por lo que los ítems se orientaron mayoritariamente a evaluar los niveles 1, 2 y 3, aunque sin olvidar el nivel 4.

C) El tipo y la cantidad de ítems que formarán el test. Veíamos en la primera sección de este capítulo que estudiantes razonando en diferentes niveles de Van Hiele pueden resolver de distintas formas un mismo problema. Por lo tanto, un principio básico que hemos seguido en el diseño de los tests es que la determinación del nivel de razonamiento de un estudiante no debe deducirse de qué cuestiones conteste, sino de cómo las conteste. En la práctica, esto significa que si elegimos ítems que admitan respuestas de varios niveles, con pocos ítems podemos realizar una evaluación completa de los estudiantes, lo cual redunda en un muy conveniente ahorro de tiempo en la administración y la corrección de los tests. La experimentaciones piloto realizadas nos han permitido prever qué niveles de Van Hiele de respuestas se podrían obtener de cada ítem, lo cual nos ha permitido construir los tests definitivos de forma equilibrada y, por otra parte, hacer una determinación más rigurosa del nivel de razonamiento de los estudiantes (aspecto recogido en una sección posterior de este capítulo).

Aunque generalmente un ítem de un test es una pregunta o un problema simple, en los tests que hemos diseñado, denominamos "ítem" a un conjunto de preguntas centradas en los mismos conceptos y relacionadas entre sí. Otros autores (por ejemplo Collis, Romberg, Jurdak, 1986) denominan "superítem" a este tipo de ítem, para diferenciarlos de los ítems ordinarios. El motivo de diseñar este tipo de ítems es, como indicábamos antes, permitir que estudiantes de diferentes niveles puedan contestar a las mismas cuestiones.

Antes de obtener la versión final de los tests, se elaboraron y experimentaron 4 versiones piloto de los mismos, siendo la quinta la versión definitiva. Las tres primeras versiones, que estaban formadas por un sólo test, fueron ensayadas con grupos pequeños de estudiantes de diversos niveles educativos (el Ciclo Superior de E.G.B., la Escuela U. de Magisterio de Valencia y maestros recién diplomados). Esta diversidad de sujetos es necesaria para poder observar el comportamiento de estudiantes situados en los diferentes niveles de razonamiento ante cada ítem: Los estudiantes de E.G.B. estaban en los niveles 1 y 2 de Van Hiele, algunos maestros estaban en el nivel 4 y los demás sujetos testados estaban en los niveles 2 y 3.

Al elaborar la cuarta versión, decidimos construir dos tests, diferentes pero equivalentes, formados por 6 ítems cada uno, siendo 3 ítems comunes a ambos tests (P5, P9 y P19) y 3 ítems diferentes pero coincidiendo por pares (P8 con P6, P13 con P12 y P17 con P20), con el mismo tipo de preguntas, es decir con preguntas en las que había contenidos matemáticos parecidos y era necesario utilizar las mismas habilidades mentales para resolver los mismos tipos de problemas. Cada test fue ensayado en enero de 1990 en un grupo completo de estudiantes equivalentes a los que participarían en la experimentación de las unidades de enseñanza. Estas administraciones piloto, además de para verificar la idoneidad de los ítems, sirvieron como ensayo general sobre la forma de administrar los tests definitivos y para tener una previsión del tiempo que los estudiantes necesitarían para contestarlos.

Una vez analizadas las respuestas a los tests piloto, se procedió a realizar las modificaciones necesarias y a construir los dos tests definitivos, cuyos textos están incluidos en el anexo 1. Estas modificaciones han sido de dos clases:

– Modificaciones en el contenido de los ítems. Por ejemplo, se corrigió la redacción de algunos ítems que resultaron poco comprensible para los alumnos de los grupos piloto. También se modificó la estructura de los ítems para tratar de obtener respuestas más completas.

– Modificaciones en los niveles de razonamiento esperados en las respuestas a los ítems. Aunque la experiencia previa de los miembros del equipo y los resultados de las pruebas piloto permitieron predecir con mucha exactitud qué niveles de Van Hiele se detectarían en las respuestas, en algunos ítems hubo que modificar esta previsión ya que aparecieron respuestas de un nivel inferior a los esperados. En el anexo 1, la cabecera de cada ítem incluye, junto a su número clave y entre paréntesis, el rango de los niveles de razonamiento posibles en las respuestas.

Para terminar esta sección, incluimos las tablas 1 y 2, en las que se resumen las características de los dos tests elaborados: Número de ítems, contenido geométrico de los mismos y niveles de razonamiento evaluados por cada ítem (los marcados con **.** en la fila del ítem). Cada nivel de Van Hiele es evaluado por varios ítems (los marcados con . en la columna del nivel), siendo en los niveles 2 y 3 donde se ha hecho más énfasis por los motivos indicados anteriormente; el nivel 1 está evaluado por 3 ítems y el nivel 4 sólo por **2,** ya que a priori sabíamos que era del todo improbable que algún

Item	**Niveles**				**Contenido geométrico**
	1	**2**	**3**	**4**	
P5	•	•			Clasifícar polígonos (regular, irregular, cóncavo,convexo)
P8A	•	•	•		Clasifícar cuadriláteros
P8B		■	■		(cuadrado, rectángulo, rombo
P9A		■	■		Usar definiciones de polígonos
P9B		■	■		y partículas lógicas
P13A	•	•			Describir polígonos
P13B		■	■		Definir triángulos
P17A		•	•	•	Demostrar que los ángulos de un
P17B		■	■		triángulo suman 180^0
P19		•	•	•	Demostrar propiedades de polígonos

Tabla *1*. Resumen de las características del Test **1**.

Item	Niveles 1	2	3	4	Contenido geométrico
P5	•	•			Clasifícar polígonos (regular, irregular, cóncavo,convexo)
P6A	•	•	•		Clasificar triángulos (escaleno isósceles, equilátero, obtusángulo, rectángulo, acutángulo)
P6B		•	•		
P9A		•	•		Usar definiciones de polígonos y partículas lógicas
P9B		•	•		
P12A	•	•			Describir polígonos
P12B		•	•		Definir cuadriláteros
P19		•	•	•	Demostrar propiedades de polígonos
P20B		•	•		Demostrar que los ángulos exteriores de un triángulo suman 360^0
P20A		•	•	•	

Tabla 2. Resumen de las características del Test 2.

estudiante alcanzara este nivel. Se puede observar también que no hay ningún ítem dirigido a evaluar un único nivel de razonamiento. Desde este punto de vista, se trata de dos tests equilibrados.

Administración de los tests.

A cada grupo experimental se le administró uno de estos tests en pretest y postest (el mismo test en ambos casos). Los estudiantes disponían de un cuadernillo con los ítems que debían contestar en esa sesión y de herramientas de dibujo (regla, escuadra, compás y transportador) para utilizarlos cuando lo creyeran necesario. El orden de los ítems en los cuadernillos no se correspondía con su orden numérico, sino que era el orden en el que están colocados los ítems en el anexo 1. Antes de empezar a contestar al test, los profesores dieron algunas instrucciones generales explicando la estructura física del test y cómo y dónde debían contestar. Posteriormente, mientras los estudiantes contestaban a los ítems, los profesores sólo contestaban a las preguntas que no implicaran ninguna información de carácter matemático relacionada con las respuestas.

Los pretests se administraron durante la tres primeras semanas del mes de marzo, pues las clases experimentales deberían comenzar después de las vacaciones de Semana Santa. Los postests se administraron en los últimos días del curso, durante la primera quincena de junio. Cada profesor fue el encargado de administrar los tests a sus alumnos, durante las horas normales de clase; la administración de cada test se hizo en dos partes, pues el tiempo estimado que necesitaban los estudiantes era de cerca de 90 minutos, por lo que los estudiantes contestaron al test en dos horas de clase consecutivas.

La tabla **3** resume la información sobre cada grupo referente a la clave, número de estudiantes observados y test administrado. En total, han participado en la evaluación de las unidades de enseñanza 96 estudiantes (no contamos aquí a los 40 estudiantes que contestaron a los tests piloto). Este número es inferior al número total de estudiantes en las clases, pues han sido eliminados los tests que no estaban completos, correspondientes a aquellos estudiantes que faltaron a alguna de las 4 sesiones de administración de los tests. Debido a que en los centros de Formación Profesional son frecuentes la falta a clase de algunos estudiantes y el abandono de parte de ellos a lo largo del curso, en todos los grupos experimentales ha habido que eliminar algunos tests (entre 2 y 4 por lo general), siendo el caso más llamativo el grupo JB2, en el que hubo más de un 50% de diferencia entre los estudiantes que contestaron el pretest y los que contestaron el postest.

Centro	Grupo	Clave	Test 1	Test 2
I.F.P. Alfafar	1º B	RB2	-	14
I.F.P. Alfafar	1º C	RC1	11	-
I.F.P. Cabanyal	1º C	TC1	21	-
I.F.P. Cabanyal	1º F	TF2	-	14
I.F.P. Massamagrell	1º A	IA1	15	-
I.F.P. Massamagrell	1º B	IB2	-	7
I.F.P. Quart de Poblet	1º A	PA1	14	-
TOTAL			61	35

Tabla **3.** Centros y grupos en los que se han experimentado las unidades de enseñanza, con la cantidad de estudiantes que contestaron al pretest y al postest.

Codificación de los tests y determinación de los niveles de razonamiento de los estudiantes.

La codificación de los tests para asignar a cada estudiante una medida de su nivel de razonamiento matemático es un proceso de varias etapas, que vamos a describir en esta sección. Los fundamentos de la metodología seguida se encuentran en unos trabajos anteriores de los miembros del equipo encargados de la evaluación (Gutiérrez, Jaime, Fortuny, 1991). Los elementos centrales son:

1) En concordancia con la idea, expresada en el primer capítulo, de que los niveles de Van Hiele son de carácter continuo, no es razonable asignar a los estudiantes simplemente un número correspondiente a un nivel de Van Hiele. Más bien, es necesario tratar de determinar cómo de perfecta es la adquisición por los estudiantes de cada nivel de razonamiento, con el fin de describir la transición entre dos niveles, situación en la que se encuentra la mayoría de los estudiantes.

2) Planteado un ítem a un estudiante, la forma como éste responde en conjunto a las diferentes cuestiones del ítem permite

determinar el nivel de razonamiento empleado en dicha respuesta.

3) La calidad matemática de las respuestas es un indicador de la seguridad con que el estudiante ha contestado a ese ítem y, en consecuencia, un indicador de la seguridad con que ha utilizado las destrezas propias del nivel de razonamiento empleado.

Como resumen de estas consideraciones, cada respuesta a un ítem se evalúa desde una doble perspectiva:

a) Se determina el **Nivel de razonamiento** al que corresponde la respuesta.

b) Se determina un **Tipo de respuesta** en función de la calidad matemática de la misma y de la claridad con que aparece reflejado el nivel de razonamiento correspondiente. Estos Tipos de respuesta son los siguientes:

Tipo 0: Items sin respuesta o con respuestas no codificables.

Tipo 1: Respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporcionan ninguna información sobre los niveles inferiores.

Tipo 2: Respuestas incorrectas e incompletas en las que se pueden reconocer indicios de un cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada.

Tipo **3:** Respuestas correctas pero incompletas en las que se pueden reconocer indicios de un cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.

Tipo 4: Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento diferentes. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.

Tipo 5: Respuestas bastante completas pero incorrectas que reflejan claramente un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen líneas que no llevan a la solución del problema planteado.

Tipo 6: Respuestas bastante completas y correctas que reflejan claramente un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema por completo, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.

Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente un nivel de razonamiento.

En los párrafos anteriores, cuando se habla de corrección matemática, hay que entenderla siempre dentro de los parámetros propios del nivel de Van Hiele de razonamiento empleado por el estudiante para contestar. Así, por ejemplo, si un estudiante responde a un ítem de demostración según el nivel 2, la máxima corrección se tendrá cuando plantee varios ejemplos con características diferentes en los que verifica que la propiedad es cierta. Por el contrario, si un estudiante utiliza el nivel 4 en ese mismo ítem, por respuesta correcta entenderemos la que contiene un argumento deductivo lógico-formal sin errores que lleva a la conclusión pedida.

Una vez codificadas todas las respuestas de un estudiante al test, el proceso de evaluación de su nivel de razonamiento se completa observando en conjunto las respuestas a los diferentes ítems que pueden ser contestados en un determinado nivel y ponderando (entre 0 y 100) cada respuesta en función de su Tipo, según los valores de la tabla 4.

Tipo	**0**	1	**2**	**3**	**4**	**5**	6	7
Ponderación	0	0	20	25	50	75	80	100

Tabla 4. Ponderaciones de los diferentes Tipos de respuesta.

Por lo tanto, y de acuerdo con la tabla 1, para determinar la adquisición del nivel 1 de Van Hiele mediante el test 1, habrá que considerar los Niveles y Tipos de las respuestas dadas a los ítems P5, P8A y P13A; para determinar la adquisición del nivel 2 de Van Hiele mediante el mismo test, habrá que considerar los Niveles y Tipos de las respuestas dadas a todos los ítems; para determinar la adquisición del nivel **3** habrá que considerar las respuestas a los ítems P8A, P8B, P9A, P9B, P13B, P17A, P17B y P19; por último, para determinar la adquisición del nivel 4 habrá que considerar las respuestas a los ítems P17A y P19. El proceso con el test 2 es análogo.

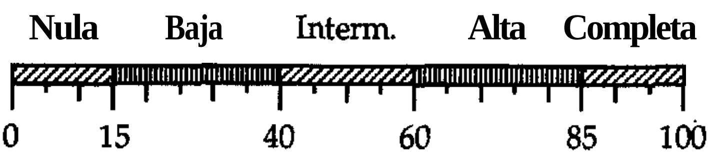
Finalmente, la media aritmética de los pesos de los diferentes ítems asociados a cada nivel de Van Hiele, nos proporciona el **Grado de Adquisición** de ese nivel. Se trata de unos valores comprendidos entre 0 y 100 que nos permiten tener una idea clara del momento en que se encuentra el estudiante en el proceso de adquisición de ese nivel de Van Hiele de razonamiento. En Gutiérrez, Jaime, Fortuny (1991) se ofrece una descripción detallada de este proceso con su aplicación a la determinación de los niveles de Van Hiele en Geometría 3-dimensional.

Veamos un ejemplo concreto para clarificar las ideas anteriores: La tabla 5 recoge, en las columnas de la izquierda, los Niveles y los Tipos asignados a las diferentes respuestas de un estudiante al test 1. Las cuatro columnas de la derecha recogen la ponderación de cada respuesta en los niveles en los que se podría haber producido. Si un ítem ha sido contestado en el nivel 3 y puede ser también contestado en los niveles 2 y 4, pero no en el nivel 1 (por ejemplo P19), de acuerdo con la característica de secuencialidad de los niveles de Van Hiele, asumimos que hay una adquisición completa del nivel 2, por lo que ponderamos con 100 dicho ítem en el nivel 2, y una adquisición nula del nivel 4, por lo que ponderamos con 0 dicho item en el nivel 4.

			Ponderación de los niveles			
Item	**Nivel**	**Tipo**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
P5	2	2	100	80	-	-
P8A	3	2	100	100	20	-
P8B	2	3	-	25	0	-
P9A	3	2	-	100	20	-
P9B	3	1	-	0	0	-
P13A	1	6	80	0	-	-
P13B		0	-	0	0	-
P17A	2	3	-	25	0	0
P17B		0	-	0	0	-
P19	3	5	-	100	75	0
GRADOS			93'3	43'4	14'4	0

Tabla 5. Ejemplo de codificación de las respuestas y determinación de los grados de adquisición de los niveles.

El resultados de esta codificación y ponderación es un vector de 4 componentes, (93'3, 43'0, 14'4, 0), que indican el grado de adquisición de los niveles 1 a 4 de Van Hiele por el estudiante. La interpretación en términos cualitativos de estos valores numéricos se puede hacer según la siguiente división del segmento 0-100:



Es decir, que el estudiante del ejemplo tiene una adquisición completa del nivel 1 de Van Hiele, una adquisición intermedia del nivel 2 y una adquisición nula de los niveles **3** y 4. En términos docentes, este estudiante debería recibir una enseñanza de la Geometría de acuerdo con las características del razonamiento de nivel

2, con un tipo de trabajo que le ayudara a completar la adquisición de este nivel.

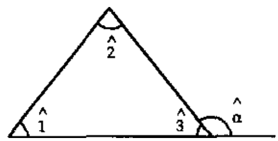
Puede observarse que la descripción hecha de los Tipos de respuestas no es particular del contexto de los polígonos, en el que se encuentran los tests que hemos administrado, sino que puede aplicarse de modo general a cualquier contexto de la Geometría (ya hemos indicado que, con anterioridad, se ha utilizado en Geometría espacial). Por lo tanto, para codificar los tests, además de esta descripción metodológica general, es necesario obtener una relación de descriptores, lo más completa posible, de los diferentes comportamientos observables en los estudiantes cuando trabajan en el campo de los polígonos y en los problemas concretos planteados en cada test, así como una asignación de esos comportamientos a los diferentes niveles de razonamiento y tipos de respuesta.

Este proceso se ha ido realizando y perfeccionando durante las sucesivas pruebas piloto de los tests, hasta quedar completado tras la administración de los pretests. A lo largo de las diferentes experimentaciones piloto se ha ido completando una relación de respuestas características de los diferentes niveles y tipos. Naturalmente, estos ejemplos no cubren todas las respuestas dadas por los estudiantes en el pretest o el postest, ni lo pretendemos, pero sí sirven de guía para evaluar también esas otras respuestas. Con el fin de hacer una corrección homogénea de los tests, se han utilizado los mismos descriptores de los niveles y los tipos para los pretests y los postests. Cuando ha habido alguna modificación durante la corrección de los postests (que han sido muy pocas'), hemos procedido a corregir de nuevo los ítems de los pretests que se pudieran ver afectados por el cambio.

A continuación presentamos una relación de descnptores de los niveles de Van Hiele concretados para el campo de los cuadriláteros (otra relación semejante se puede hacer para el campo de los triángulos) que complementa la descripción general de los Niveles de razonamiento que hemos hecho en el capítulo 1.

Descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele en el estudio de los cuadriláteros

Nivel 1:



- Los estudiantes identifican cuadrados, rombos, trapecios, etc. por su aspecto físico. Consideran cada clase disjunta con las demás. También hacen clases diferentes con algunos polígonos de formas muy diferenciadas como, por ejemplo, los rectángulos de la figura adjunta.
- Los estudiantes pueden dibujar, recortar o construir los diferentes tipos de cuadriláteros conocidos. También pueden reconocer cuadriláteros en diferentes contextos y utilizar sus nombres estándar.

Nivel 2:

- Los estudiantes definen los polígonos mediante una enumeración exhaustiva de sus propiedades. Por ejemplo, identifican un rectángulo como un polígono de 4 lados, paralelos dos a dos, con 4 ángulos rectos, con diagonales iguales, etc. Por lo tanto, no son capaces de dar definiciones correctas.
- Los estudiantes no relacionan todavía los diferentes tipos de cuadriláteros: Las siguen percibiendo como clases disjuntas.

Nivel 3:

- Los estudiantes hacen clasificaciones lógicas de las figuras en base a sus propiedades: Ya reconocen que cualquier cuadrado es un rombo pero que no todos los rombos son cuadrados, etc.
- Los estudiantes pueden deducir (de manera informal) unas propiedades a partir de otras. Por ejemplo, paralelismo → igualdad de lados, perpendicularidad → paralelismo de lados opuestos, etc.
- Los estudiantes ya son capaces de definir correctamente (con-

diciones necesarias y suficientes) los diferentes tipos de cuadriláteros que conocen.

Nivel 4:

- Los estudiantes pueden manejar las propiedades de los cuadriláteros dentro de un contexto formal.
- Los estudiantes pueden comprender y aceptar la existencia de diferentes definiciones de una figura, analizarlas y relacionarlas entre sí. Por ejemplo:

  * Un rectángulo es un cuadrilátero con los ángulos rectos.
  * Un rectángulo es un cuadrilátero con diagonales iguales que se cortan en el punto medio.
  * Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto.

Y, para completar la descripción del proceso de evaluación de los estudiantes, incluimos en el anexo 2 la relación de descriptores específicos de los diferentes tipos de respuestas a cada ítem que hemos utilizado. Como decíamos antes, no todas las respuestas se ajustan a uno de estos descriptores, aunque sí lo hacen la mayoría de ellas. Por otra parte, para casi ningún ítem hemos incluido los descriptores correspondientes a los comportamientos típicos de los diferentes niveles, que forman parte de las listas de las páginas anteriores y del capítulo 1.

Resumen de los resultados.

En esta sección vamos a presentar dos análisis diferentes de los resultados obtenidos mediante la administración de los pretests y los postests: Por una parte, analizaremos los resultados desde la perspectiva de los estudiantes, dando cuenta de la distribución de sus grados de adquisición de los niveles de Van Hiele; esta información nos permitirá valorar el éxito obtenido por las unidades de enseñanza que hemos elaborado. Por otra parte, analizaremos los resultados desde la perspectiva de los propios tests, determinando algunos parámetros estadísticos que nos permitan valorar la fiabilidad y validez de los tests empleados.

Resultados relativos a los estudiantes.

En el anexo 3 hemos incluido los resultados obtenidos por todos los estudiantes que han sido testados, clasificados según los grupos y Centros a los que pertenecían. Para cada estudiante, se puede ver una gráfica en la que se representan los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele medidos por el pretest y por el postest. El nombre de cada estudiante ha sido sustituido por un código, por ejemplo "PA1 12", en el cual los 3 primeros caracteres (PA1) son las claves, respectivamente, del Centro/profesor, el grupo de dicho Centro y el test contestado (véase la tabla 3) y los caracteres después del espacio (12) representan al estudiante concreto dentro del grupo.

Observando dichas gráficas se puede ver que, en el momento del pretest, la mayoría de los estudiantes tenían una adquisición alta o completa del nivel 1, si bien hay un número significativo de estudiantes (aproximadamente la tercera parte) con adquisiciones intermedia o baja. Sin embargo, en el postest disminuye muy sensiblemente este número de estudiantes. Por otra parte, se observa sin ninguna dificultad que los estudiantes no han tenido ningún progreso en el nivel 4, cosa que ya se esperaba desde el principio y que, como hemos explicado en el capítulo 2, no entraba en los objetivos del equipo investigador al diseñar las unidades de enseñanza, dadas las características de nuestros alumnos (los dos estudiantes que han obtenido grados de adquisición del nivel 4 mayores que 0 son, seguramente, frutos del azar, como lo prueba el hecho de que no hay consistencia entre sus resultados de pretest y postest en dicho nivel). No hay ningún método de enseñanza que, en pocos meses, sea capaz de mover a los estudiantes desde los niveles de razonamiento 1 ó 2 hasta el nivel 4.

Usando solamente las gráficas del anexo 3, resulta difícil sacar conclusiones respecto del progreso producido en los niveles **2** y **3.** Por este motivo, presentamos a continuación unas tablas que resumen los perfiles de nuestros alumnos en los momentos del pretest y del postest. En primer lugar, la tabla 6 muestra la cantidad absoluta de estudiantes que han alcanzado cada uno de los grados de adquisición de los distintos niveles (como el número total de alumnos es de 96, los valores absolutos y porcentuales son casi iguales).

	Adquisición									
	Nula		Baja		Interm		Alta		Completa	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
Nivel 1	4	1	18	6	13	6	23	16	38	67
Nivel 2	36	17	40	35	18	26	2	18	0	0
Nivel 3	87	74	9	22	0	0	0	0	0	0
Nivel 4	95	96	0	0	1	0	0	0	0	0

Tabla 6. Distribución de los estudiantes según sus grados de adquisición de los niveles de Van Hiele.

En la tabla 6 se observa una mejora generalizada en los niveles de razonamiento 1, 2 y 3 de los estudiantes después de haber trabajado con las unidades de enseñanza experimentales, siendo esta mejora menos acusada cuanto más alto es el nivel de razonamiento: La mayoría de los estudiantes que tenían una adquisición parcial del nivel 1 han completado su adquisición de este nivel; además, la mayoría de los estudiantes han progresado significativamente en su adquisición del nivel 2, si bien ninguno ha llegado a conseguir una adquisición completa de este nivel, y unos pocos han progresado también algo en la adquisición del nivel 3.

Estos datos se ven afianzados al considerar la tabla 7. En ella se recogen las medias (μ) y las desviaciones típicas (σ) de los grados de adquisición de cada nivel de razonamiento por los estudiantes en los pretests y postests 1 y 2. Esta tabla también contiene los valores obtenidos al evaluar la diferencia entre las medias de cada par pre-test-postest mediante la t de Student, junto a sus respectivos grados de significación (p).

TEST 1	μ		σ		t	p
	Pre	Post	Pre	Post		
Nivel 1	4	1	18	6	13	6
Nivel 2	36	17	40	35	18	26
Nivel 3	87	74	9	22	0	0
Nivel 4	95	96	0	0	1	0

TEST 2	μ		σ		t	p
	Pre	Post	Pre	Post		
Nivel 1	59'32	82'50	32'49	27'71	4'14	0'000
Nivel 2	26'45	39'42	18'91	20'73	4'31	0'000
Nivel 3	7'25	8'67	10'08	7'71	0'87	0'392
Nivel 4	1'25	0'00	7'07	0'00	—	—

Tabla 7. Comparación de las medias de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes mediante los tests 1 y 2.

No hemos realizado los cálculos de los valores de t para el nivel 4 ya que es evidente que las diferencias en las medias, que se deben a dos estudiantes, carecen por completo de significación. Con la excepción del nivel 3 en el test 2, para todos los valores de t se obtiene $p<0'001$, luego las diferencias entre las medias de los pretests y los postests son altamente significativas, lo cual reafirma la conclusión de que, debido a la instrucción recibida, los estudiantes han experimentado un notable incremento en su razonamiento de los niveles 1 y 2 en los temas de Geometría que han sido estudiados en el curso que hemos diseñado, siendo ese incremento menor en el nivel 3.

Por último, veamos, de manera más detallada, los perfiles de los niveles de razonamiento de nuestros estudiantes, pues las tablas anteriores nos permiten conocer su comportamiento global, pero no el individual. Puesto que el método de evaluación que hemos aplicado nos proporciona información, para cada estudiante, sobre sus grados de adquisición de los cuatro niveles de Van Hiele, la mejor manera de observar la evolución de nuestros alumnos es mediante el análisis simultáneo de su evolución en el uso de los cuatro niveles de razonamiento. Las gráficas incluidas en el anexo 3, mostrando los grados de adquisición de cada nivel en el pretest y el postest, nos dan idea de que hay ciertos perfiles típicos de los estudiantes participantes en esta experimentación.

La tabla 8 resume esta información: En las primeras columnas se describen los perfiles, que aparecen ordenados según su calidad, indicando el grado de adquisición de cada nivel que se considera en el perfil, y en las dos columnas de la derecha se indica la cantidad de alumnos que corresponden a cada perfil en el pretest y en el postest.

	Adquisición				Nº de estudiantes	
Perfil nº	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	**Pretest**	**Postest**
1	Compl	Alta	≤ Baja	Nula	2	18
2	Compl	Interm.	≤ Baja	Nula	10	26
3	Compl	≤ Baja	Nula	Nula	25	23
4	Alta	Interm.	7'07	Nula	4	0
5	Alta	≤ Baja	Nula	Nula	17	16
6	Interm.	≤ Baja	Nula	Nula	13	6
7	Baja	≤ Baja	Nula	Nula	15	6
8	Nula	Nula	Nula	Nula	4	1
Otros	—	—	—	—	**6**	**0**

Tabla 8. Diferentes perfiles de estudiantes y cantidad de alumnos en cada uno.

En dicha tabla se observa que ha habido un notable incremento, basta casi el doble, en el número de estudiantes que han adquirido completamente el nivel 1 de Van Hiele, pues en el pretest un 38'5% había adquirido completamente este nivel, frente al 69'8% de estudiantes que lo han adquirido completamente después del curso experimental. También se observa un incremento importante en el número de estudiantes que han logrado usar con eficacia el nivel 2 de Van Hiele, pues sólo un 16'7% tenían una adquisición intermedia o alta de este nivel en el pretest, mientras que un 45'8% de ellos tenían esos grados de adquisición en el postest.

El incremento generalizado del nivel de razonamiento se refleja en la tabla 8 por el hecho de que los dos únicos perfiles para los que hay mayor número de estudiantes en el postest que en el pretest son los perfiles 1 y 2, que corresponden a los mayores grados de adquisición de los niveles de Van Hiele. Sin embargo, aunque estos datos suponen un resultado altamente positivo para las unidades de enseñanza que hemos diseñado y la metodología de enseñanza seguida, una segunda lectura de la tabla 8, que concuerda con la tabla 6, nos obliga a extraer también algunas conclusiones críticas respecto de nuestro éxito en esta investigación, principalmente debido a que ningún estudiante ha logrado adquirir completamente el nivel 2 de razonamiento. Los motivos de este resultado hay que buscarlos en una combinación de variables implícitas (formato y organización de las unidades de enseñanza, características de actitud y aptitud de los estudiantes, tiempo empleado en el curso, método de evaluación, tests empleados, etc.) que no han sido analizadas de forma individual en esta investigacibn. El estudio detallado de estas variables es necesario para poder mejorar la calidad de las unidades de enseñanza que hemos diseñado, pues es necesario determinar la influencia de las variables pertenecientes a las unidades de enseñanza o la metodología de trabajo, pero el equipo investigador es consciente de que dicho estudio requeriría del diseño de otra investigación con una metodología diferente de la realizada y de que esto quedaba fuera de nuestros objetivos en este trabajo. Por lo tanto, lo único que podemos hacer ahora al respecto es plantear el problema y expresar nuestro interés por abordarlo en el futuro.

Resultados relativos a los tests.

La última parte de este capítulo la dedicamos a analizar los tests empleados para evaluar los resultados de las unidades de enseñanza experimentales. Puesto que esta evaluación es la componente principal para determinar el éxito o el fracaso de dichas unidades, es importante asegurarse de que las herramientas de evaluación son correctas. Para ello hemos realizado dos mediciones de los resultados que nos permitirán verificar si los tests son coherentes con la estructura de los niveles de Van Hiele.

En la sección de este capítulo dedicada a describir el diseño de los tests, hemos discutido los motivos por los que se decidió construir dos tests diferentes y hemos explicado las medidas de tipo cualitativo que se tomaron para asegurar la equivalencia de ambos tests. El número de estudiantes que han sido testados no es suficientemente alto como para utilizar los parámetros estadísticos usuales, por lo que no vamos a abordar esta cuestión desde el punto de vista cuantitativo.

Al elaborar un test para medir los niveles de razonamiento de Van Hiele, es fundamental asegurarse, verificándolo de forma cuidadosa, de que el test es coherente con la estructura jerárquica de los niveles de Van Hiele. Las numerosas investigaciones realizadas con anterioridad acerca de la jerarquización de los niveles de Van Hiele son unánimes al asegurar que los niveles tienen una estructura jerárquica, de manera que, como señalábamos en el primer capítulo, no es posible alcanzar un nivel de razonamiento antes de haber superado el nivel precedente. Así pues, si un test produce con frecuencia resultados según los cuales los estudiantes han superado, por ejemplo, el nivel 3 pero no han superado el nivel 1 ó el 2, es seguro que ese test tiene algún defecto en su diseño.

En nuestro caso concreto, como los tests no se limitan a indicar si un estudiante está o no está en cierto nivel de razonamiento, sino que ofrecen una graduación en la adquisición de los cuatro niveles, la estructura jerárquica de los niveles hay que reformularla en los siguientes términos: No es posible iniciar una adquisición significativa de un nivel de razonamiento antes de haber conseguido una adquisición alta del nivel precedente. Ni el Modelo de Van Hiele ni ninguna otra teoría de enseñanza y aprendizaje pueden ser tomadas en sentido estricto y como universales, pues siempre encontraremos estudiantes que se salen del patrón marcado por la teoría. Así, podemos ver que algunos de nuestros alumnos no han alcanzado una adquisición completa del nivel 1 pero ya tienen una adquisición baja o intermedia del nivel 2 (algo parecido se puede observar al comparar los niveles 2 y 3); éste es el caso de los perfiles 4, 6 y 7 de la tabla 8. Los motivos principales de esta aparente contradicción se deben generalmente al hecho de que la enseñanza actual de la Geometría en E.G.B. prima los mecanismos de razonamiento del nivel 2 sobre los del nivel 1, del mismo modo que en los cursos de B.U.P. se suele primar el razonamiento de nivel 4 sobre los de nivel 2 ó 3, a pesar de que los estudiantes no están preparados para ese salto. Esto se traduce en que a veces los estudiantes "engañan" a los evaluadores de los tests, pues contestan usando procedimientos de un nivel superior al que realmente les corresponde, gracias a la experiencia adquirida en la memorización de demostraciones y modelos de problemas. El propio P.M. Van Hiele nos previene contra este error cuando describe la "reducción de nivel" como la apariencia de estar razonando en un nivel cuando, en realidad, sólo se está usando el vocabulario y la forma de expresarse de ese nivel (Van Hiele, 1986).

Un test bien diseñado debe reducir al máximo este tipo de situaciones, permitiendo detectar el nivel real de los estudiantes y rechazar su nivel aparente. Para evaluar la calidad de los tests en este sentido, hay varios parámetros estadísticos que se utilizan habitualmente. Nosotros hemos recurrido al "Coeficiente de Escalabilidad de Guttman" y al "Indice de Facilidad" de los tests.

El coeficiente de escalabilidad de Guttman mide la estructura jerárquica de un test. Ha sido utilizado con anterioridad en otros tests de niveles de Van Hiele (Gutiérrez, Jaime, 1987 y Mayberry, 1983) y también en el conocido proyecto de investigación "Concepts in Secondary Mathematics and Sciences" (C.S.M.S.) descrito en Hart (1981). Para ello, deben considerarse los items ordenados, de manera que en primer lugar se encuentran los ítems asociados al grado inferior de la escala (en nuestro caso, el nivel 1), a continuación los asociados al grado inmediato superior (en nuestro caso, el nivel 2), y así sucesivamente. De esta manera, se obtiene un vector con los resultados de los diferentes ítems. Se dice que hay un "error" cuando el resultado de un ítem es menor que el resultado de otro ítem correspondiente a algún grado superior; en otras palabras, se produce un error cuando un estudiante ha contestado peor a un ítem de un cierto grado que a uno o varios ítems de grados superiores. El coeficiente de escalabilidad de Guttman es:

$$\text{Rep} = 1 - \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de errores}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ total de respuestas}}$$

El coeficiente de escalabilidad varía entre 0 y 1, alcanzando el valor Rep = 1 cuando no se ha producido ningún error. Al aplicar el coeficiente de Guttman a nuestros tests, podemos optar por hacerlo sobre los resultados finales (los grados de adquisición de los 4 niveles de Van Hiele) o sobre el conjunto de los items, considerando cada ítem una vez por cada uno de los niveles que mide (es decir, como si cada test estuviera formado por 23 items).

La tabla 9 contiene los valores del coeficiente de escalabilidad aplicado a los grados de adquisición de los niveles de razonamiento, que forman un vector con 4 componentes (g_1, g_2, g_3, g_4). Se produce un error cuando el grado de adquisición de un nivel es menor que el grado de adquisición de otro nivel posterior, es decir, cuando $g_i < g_j$ para algún $j>i$. En este caso, la formula del coeficiente de Guttman es:

$$\text{Rep} = 1 - \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de errores}}{4 \text{ x n}^{\text{o}} \text{ de estudiantes}}$$

En esta tabla se puede ver, para cada test, el valor del coeficiente de Guttman en el pretest, en el postest y de manera conjunta, es decir, considerando las 192 respuestas obtenidas en las dos administraciones de cada test.

	Pretest 1	Postest 1	Test 1	Pretest 2	Postest 2	Test 2
Rep	0,996	1,000	0,998	0,953	1,000	0,977

Tabla 9. Valores del Coeficiente de Escalabilidad de Guttman para los vectores de los grados de adquisición de los niveles.

Para aceptar la jerarquía de un test se suele imponer la condición de Rep > 0,900 (Mayberry, 1983) o la de Rep > 0,930 (Hart, 1981). En cualquier caso, los valores obtenidos son claramente superiores a estos mínimos, por lo que podemos considerar como correcta la estructura jerárquica de los tests que hemos creado.

Como decíamos, se puede calcular el coeficiente de escalabilidad para los items, teniendo ahora vectores de 23 componentes. En este caso se produce un error cuando la ponderación obtenida en un item de un cierto nivel es inferior a la ponderación obtenida en algún item de un nivel superior. Por lo tanto, el valor del coeficiente es

$$\text{Rep} = 1 - \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de errores}}{23 \times \text{n}^{\text{o}} \text{ de estudiantes}}$$

La tabla 10 muestra los resultados de este análisis.

	Pretest 1	Postest 1	Test 1	Pretest 2	Postest 2	Test 2
Rep	0,885	0,815	0,850	0,806	0,814	0,810

Tabla 10. Valores del Coeficiente de Escalabilidad de Guttman para los vectores de las ponderaciones de los items.

Los valores del coeficiente de Guttman en la tabla 10 son bastante inferiores a los de la tabla 9, si bien siguen siendo suficientemente altos como para considerar como válidos, aunque mejorables, los tests. Esta diferencia en los valores no debe sorprender pues hay estudiantes que contestan mal o dejan en blanco algún item de un nivel bajo, o contestan bien algún item de un nivel alto, lo cual produce uno o varios errores y se refleja en el valor del coeficiente de Guttman de los items, pero el peso de estos resultados en el conjunto del test es pequeño y queda suavizado en los grados de adquisición de los niveles, por lo que no se refleja en el valor del coeficiente de Guttman de los grados de adquisición.

El análisis fino del test que proporciona el coeficiente de Guttman permite detectar algunos problemas en su diseño. Por ejemplo, los items P12B y P13B producen un gran número de errores debido a que casi todos los alumnos los han contestado mal. Esto significa que en una futura administración de estos tests deberían eliminarse o modificarse estos items.

El Indice de Facilidad de un test mide, como su nombre indica, la facilidad absoluta de cada item del test. Para aplicar este coeficiente, hay que considerar las respuestas a los items como correctas o incorrectas y contar el número de respuestas correctas. En la literatura especializada se pueden encontrar varias fórmulas para calcular el índice de facilidad de un item (ver, por ejemplo, Scott, 1989). Nosotros hemos utilizado la siguiente:

$$F = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de respuestas correctas al item}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ total de respuestas al item}}$$

El coeficiente F varía entre 0 y 1, correspondiendo F = 0 al caso de mínima facilidad, pues no ha habido ninguna respuesta correcta, y F = 1 al caso de máxima facilidad, pues todas las respuestas han sido correctas.

Como el índice de facilidad utiliza respuestas dicotómicas, es necesario transformar la escala [O, 100] de pesos de nuestros items (tabla 4) en valores 0-1 (incorrecto-correcto). Hemos optado por considerar una respuesta a un item como correcta cuando su peso es mayor o igual que 50, es decir cuando su tipo de respuesta está entre 4 y 7, ambos inclusive, y como respuesta incorrecta en caso contrario, es decir cuando su tipo está entre 0 y **3,** ambos inclusive. Así pues, contabilizamos incluso las respuestas en blanco, por lo que el número total de respuestas coincide con el número de estudiantes.

Igual que al calcular el coeficiente de escalabilidad, es necesario analizar cada item una vez por cada nivel evaluado, por lo que también ahora tenemos que analizar **23** items. Las tablas 12, 13 y 14 muestran los índices de facilidad de los items asociados a los niveles 1, **2** y **3,** respectivamente. Por el mismo motivo que antes, no hemos hecho el análisis del nivel 4.

En estas tablas no hacemos distinción entre los items del test 1, del test **2** o de ambos, pues hemos calculado el coeficiente de cada item teniendo en cuenta a todos los estudiantes que lo han contestado, independientemente de que ese item estuviera en uno o los dos tests. Por lo tanto, el denominador de la fórmula de cálculo de F no es siempre el mismo.

	P5	P6A	P8A	P12A	P13A
Pretest	0.625	0,594	0,953	0,656	0,688
Postest	0,844	0,813	0,953	0,844	0,875
Test conjunto	0,734	0,703	0,953	0,150	0.181

Tabla 11. Coeficiente de facilidad de los items del nivel 1.

	P5	P6A	P6B	P8A	P8B	P9A	P9B	P12A
Pretest	0,094	0,219	0,563	0,516	0,422	0,354	0,188	0,094
Postest	0,604	0,656	0,719	0,500	0,516	0,521	0,396	0,531
Test conjunto	0,349	0,438	0,641	0,508	0,469	0,438	0,292	0,313

	P12B	P13A	P13B	P17A	P17B	P19	P20A	P20B
Pretest	0,156	0,063	0,063	0,109	0,078	0,094	0,125	0,125
Postest	0,094	0,375	0,125	0,328	0,188	0,063	0,156	0,156
Test conjunto	0,125	0,219	0,094	0,219	0,133	0,078	0,141	0,141

Tabla 12. Coeficiente de facilidad de los items del nivel 2.

	P6A	P6B	P8A	P8B	P9A	P9B	P12B	P13B
Pretest	0,063	0,156	0,300	0,047	0,115	0,031	0,000	0,000
Postest	0,063	0,250	0,109	0,281	0,250	0,052	0,000	0,000
Test conjunto	0,063	0,203	0,055	0,164	0,182	0,042	0,000	0,000

	P17A	P17B	P19	P20A	P20B
Pretest	0,031	0,031	0,021	0,063	0,063
Postest	0,078	0,094	0,000	0,125	0,063
Test conjunto	0,055	0,063	0,010	0,094	0,063

Tabla 13. Coeficiente de facilidad de los items del nivel **3.**

En realidad, el coeficiente de facilidad de un item no mide su facilidad en términos absolutos, sino de manera relativa, al comparar cada item con los demás que han sido administrados a un mismo estudiante. Por este motivo, es razonable que los valores sean diferentes en el pretest y el postest.

En estas tablas podemos hacer una comparación entre las dificultades de cada item en el pretest y el postest: En la mayoría de los items se ha producido un incremento claro en la facilidad, fruto de los mayores conocimientos geométricos y de la mejor capacidad de razonamiento de los estudiantes después de haber estudiado las unidades de enseñanza que hemos diseñado. Sólo hay 4 excepciones a dicha regla (en los items P8A, P12B y P19), que corresponden a items con algún defecto de diseño que, si se fueran a utilizar otra vez en el futuro, deberían ser estudiados con detenimiento y, probablemente, modificados. En los casos de P12B y P19, se trata de items con coeficientes de facilidad muy bajos, cosa que facilita este tipo de irregularidades.

Por otra parte, podemos hacer una comparación de los coeficientes de dificultad de un mismo item en distintos niveles de Van Hiele o, de manera global, del conjunto de coeficientes de los items de un nivel con los coeficientes de los items del nivel siguiente. Observamos que en todos los casos, los coeficientes de facilidad siguen una tendencia de decrecimiento a medida que pasamos a los niveles de Van Hiele superiores. Este resultado es coherente con los obtenidos anteriormente y reafirma la validez de los tests en cuanto a su estructura jerárquica: Los items de cada nivel son más fáciles que los del nivel siguiente. Además, las diferencias entre los valores de los niveles son lo suficientemente grandes como para asegurar la capacidad de discriminación de los tests.

En último lugar, los coeficientes de facilidad de los items son útiles para comparar los items que, según el diseño de los tests, deberían ser equivalentes. Se trata de los pares de items siguientes: P6 y P8, P12 y P13, P17 y P20. Los resultados de estas comparaciones no apoyan con claridad la equivalencia de los items pues, si bien en cada nivel hay algún par de items cuyos coeficientes son similares, también hay varios items cuyos coeficientes de facilidad son bastante diferentes. Por lo tanto, en algunos casos la equivalencia de los items es bastante dudosa desde la óptica de su facilidad.

Realmente, no está claro que sea posible construir dos items de Geometría que sean completamente equivalentes, pues siempre habrá diferencias en sus contenidos matemáticos que hacen que uno de ellos resulte más difícil a los estudiantes que el otro, en función, fundamentalmente, de la Geometría que hayan estudiado. Por ejemplo, en los items P17 y P20 se trabaja, respectivamente, sobre las propiedades de la suma de los ángulos interiores y exteriores de los triángulos. Aunque formalmente pueden considerarse equivalentes, si los estudiantes han dedicado más tiempo a trabajar con una de las propiedades que con la otra, esta equivalencia se rompe.

Conclusiones.

Para finalizar este último capítulo, queremos plantear algunas conclusiones globales respecto del proceso de evaluación de la experimentación, de las propias unidades de enseñanza diseñadas y sus resultados:

– Aunque la herramienta de evaluación que hemos utilizado es mejorable, ha demostrado tener un alto grado de fiabilidad, por lo que sus resultados son válidos y pueden ser utilizados como parámetro para medir los resultados obtenidos por las unidades de enseñanza. De igual forma, estos tests se podrían utilizar para evaluar, en términos de niveles de razonamiento de Van Hiele, la calidad de cualquier otra propuesta de enseñanza de la Geometría cuyos contenidos coincidan con los de los tests (triángulos, cuadriláteros y polígonos en general).

– Casi todos nuestros alumnos han logrado un notable incremento en sus grados de adquisición de los niveles 1 y 2 de Van Hiele después de haber trabajado con las unidades de enseñanza experimentales. Además, algunos de ellos ha obtenido un moderado incremento en el grado de adquisición del nivel 3. Todo ello nos lleva a la conclusión de que hemos tenido éxito en nuestro trabajo de diseño de dichas unidades.

– Aunque se han obtenido buenos resultados con las unidades de enseñanza, éstos no son tan buenos como pretendíamos pues, como hemos planteado en el segundo capítulo, nuestro objetivo era que la n oría de nuestros estudiantes a q ir e a completamente el nivel 2 e iniciaran la adquisición del nivel 3. Esto rrol la afirmación de que el proceso de adquisición de los niveles 1 y 2 puede ser rápido en estudiantes de Enseñanza Secundaria, pero el proceso de adquisición del nivel 3, es decir el inicio del desarrollo de la capacidad de razonamiento lógico formal, es lento, puede durar varios cursos y debe realizarse de manera coordinada en todas las áreas de las Matemáticas.

– Las unidades de enseñanza que hemos diseñado y experimentado son una buena base para continuar con su desarrollo y mejora y para formar parte de un currículum completo de Geometría plana a lo largo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria basado en una metodología coherente con los principios del Modelo de Van Hiele. La implantación de la nueva Enseñanza Secundaria Obligatoria, desde los 12 a los 16 años, abre nuevas perspectivas al diseño de este tipo de unidades de enseñanza.

– En el contexto de la nueva enseñanza no universitaria, los profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria podrán iniciar la enseñanza de la Geometría 2 años antes de lo que se hacía hasta ahora en BUP o Formación Profesional y continuarlo durante un periodo de 4 años, lo cual les permitirá aplicar la metodología del Modelo de Van Hiele de una manera más acorde con las indicaciones que hemos recogido en el primer capítulo de esta memoria, siendo la organización cíclica de la enseñanza una de las principales. Por otra parte, este tramo de la enseñanza no universitaria representa el puente entre la Enseñanza Primaria, con su metodología informal y basada en los niveles 1 y **2** de Van Hiele, y la Enseñanza Secundaria No Obligatoria, en la que se deben enseñar unas Matemáticas formales propias del nivel 4 de Van Hiele. Así pues, un objetivo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria debe ser conseguir que la mayor parte posible de los estudiantes adquiera, al final de los cuatro años, el nivel **3** de razonamiento.

BIBLIOGRAFÍA

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17, pp. 31-48.

Clements, D.H.; Battista, M.T. (1992): Geometry and spatial reasoning, en D.A. Grouws (1992) *Handbook of research on mathematics teaching* (N.C.T.M.: Reston, USA), pp. 420-464.

Collis, K.F.; Romberg, T.A.; Jurdak, M.E. (1986): A technique for assessing mathematical problem-solving ability, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 nº 3, pp. 206-221.

Crowley, M.L. (1987): The van Hiele model of the development of geometric thought, en N.C.T.M. (1987) *Learning and teaching geometry*, K-12 (1987 Yearbook) (N.C.T.M.: Reston, USA), pp. 1-16.

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1984): *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* (School of Education, Brooklyn College, City Univ. of N. York: Brooklyn, N. York, EE.UU.).

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988): *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph nº 3). (N.C.T.M.: Reston, USA).

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1987): Estudio de las características de los niveles de van Hiele, en *Proceedings of the 11th International Conference of the P.M.E.* vol. 3, pp. 131-137.

Gutiérrez, A.; Jaime. A.; Fortuny, J.M. (1991): An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 nº 3, pp. 237-251.

Hart, K. (1981): *Children's understanding of mathematics: 11-16.* (John Murray: Londres, G.B.).

Hershkowitz, R. (1990): Psychological aspects of learning geometry, en P. Nesher; J. Kilpatrick (1990) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Cambridge U.P.: Cambridge, G.B.), pp. 70-95.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en

S. Llinares, M.V. Sánchez (1990) *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

Lovett, J. (1983): *An interpretative description of the van Hiele model of thinking in geometry* (paper presented at the Psychology of Mathematics Education Workshop). (Shell Centre & Chelsea College: Londres, G.B.).

Mayberry, J. (1983): The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate pre-service teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 14, pp. 58-69.

Scott, P. (1989): *Introducción a la investigación y evaluación educativa.* (U.A.C.P. y P.C.C.U.; Univ. Nacional Autónoma: México).

Treffers, A. (1987): *Three dimensions.* (D. Reidel: Dordrecht, Holanda).

Usiskin, Z. (1982): *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* (ERIC: Columbus, USA).

Van Hiele, P.M. (1986): *Structure and insight.* (Academic Press: N. York, USA).

Van Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (tesis doctoral). (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda). (Traducción de trabajo al español de la tesis doctoral realizada para el proyecto de investigación "Diseño y evaluación de una propuesta cumcular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele", por R. Corberán y otros).

Van Hiele-Geldof, D. (1957): *The didactics of geometty in the lowest class of secondary school* (tesis doctoral). (J.B. Wolters: Groningen, Holanda). (Traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

Wirszup, I. (1976): *Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry,* en J.L. Martin, D.A. Bradbard (1976) *Space and geometty* (ERIC: Columbus, USA), pp. 75-97.

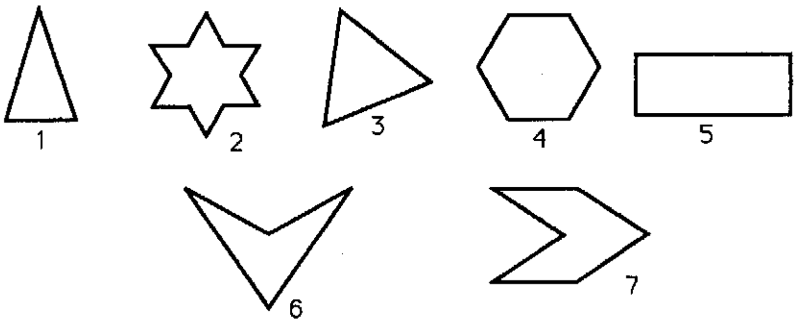
ANEXO 1.

TEXTOS DE LOS TESTS DEFINITIVOS.

Test nº 1.

Item P5 (1-2)

En los siguientes polígonos pon una R dentro de los regulares, una I dentro de los irregulares, una V dentro de los cóncavos y una X dentro de los convexos. Si es necesario, puedes poner varias letras en cada figura.



Explica para cada una de las figuras números 2, 4, 5 y 7 por qué le has puesto esas letras (o por qué no has escrito ninguna):

Figura 2:

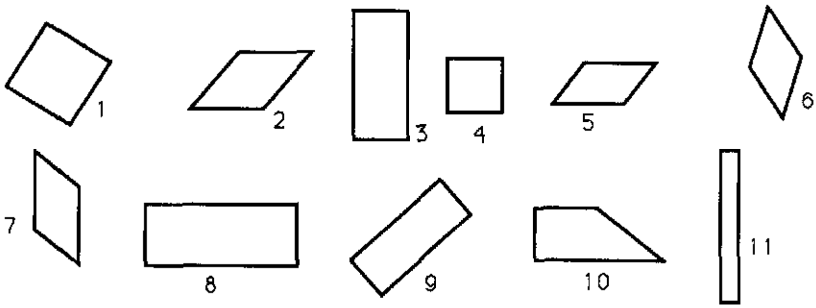
Figura 4:

Figura 5:

Figura 7:

Item P8 A.l (1-3)

En las siguientes figuras,
pon una C dentro de los cuadrados,
pon una ***O*** dentro de los rombos,
pon una E dentro de los rectángulos.
Si es necesario, puedes escribir varias letras en cada figura.



¿En qué te has fijado para seleccionar los cuadrados?

¿En qué te has fijado para seleccionar los rombos?

¿En qué te has fijado para seleccionar los rectángulos?

¿Es un cuadrado la figura 1? ¿Por qué?

¿Es un cuadrado la figura 4? ¿Por qué?

¿Es un rectángulo la figura 5? ¿Por qué?

Item P8 A.2 (1-3)

Dí si los *rombos* son SIEMPRE, *A* VECES, o NUNCA *cuadrados*. Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Dí si los *rombos* son SIEMPRE, A VECES, o NUNCA *rectángulos*. Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Dí si los *cuadrados* son SIEMPRE, A VECES, o NUNCA *rombo* ~Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Dí si los *rombos* son SIEMPRE, A VECES, o NUNCA *paralelogramos*. Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Item P8 B (2-3)

Aquí tienes algunas definiciones:

Un **cuadrado** es un cuadrilátero que tiene los 4 lados iguales y los 4 ángulos rectos.

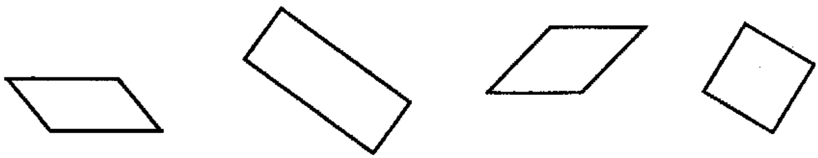
Un **rectángulo** es un cuadrilátero que tiene los 4 ángulos rectos.

Utiliza las definiciones que te damos arriba para escribir:

una C dentro de los cuadrados y

una R dentro de los rectángulos.

Si es necesario, puedes escribir varias letras en cada figura. Justifica tus respuestas.

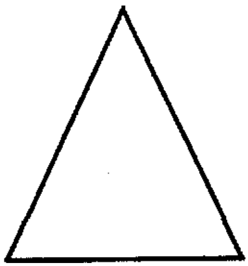


De acuerdo con las ***definiciones que te hemos dado arriba,*** dí si los **cuadrados** son SIEMPRE, A VECES, o NUNCA **rectángulos.** Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

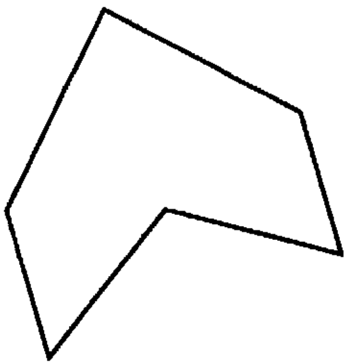
De acuerdo con las ***definiciones que te hemos dado arriba,*** dí si los **rectángulos** son SIEMPRE, **A** VECES, o NUNCA **cuadrados.** Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Item P13 A (1-2)

Aquí ves una figura (un triángulo isósceles). Haz una lista con todas las propiedades de la figura que puedas encontrar (si quieres, puedes dibujar para explicar las propiedades).



Aquí ves otra figura. Haz una lista con todas las propiedades de la figura que puedas encontrar (si quieres, puedes dibujar para explicar las propiedades).

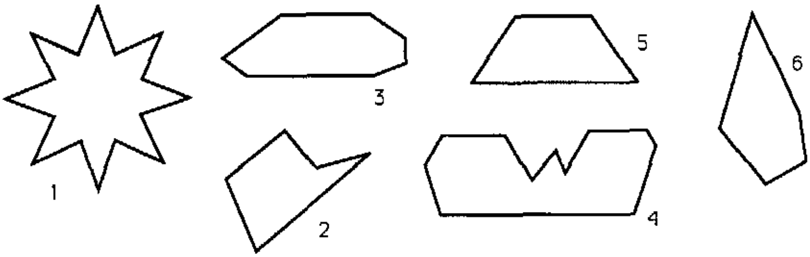


Item P9 A (2-3)

Fíjate en la siguiente definición:

Un ANLA es un polígono que tiene como máximo 7 ángulos iguales y como mínimo dos lados paralelos.

En las siguientes figuras, escribe una A dentro de los polígonos que sean ANLA:



Justifica a continuación tu respuesta para las siguientes figuras:

Número 1:

Número 2:

Número 3:

Número 4:

Dibuja, si puedes, dos ANLA diferentes y que no se parezcan a los anteriores.

Item P9 B (2-3)

Recuerda la definición de **ANLA:**
Un **ANLA** es un polígono que tiene como máximo 7 ángulos iguales y como mínimo dos lados paralelos.

¿Hay polígonos regulares que sean **ANLA?** En caso de que sí haya, ¿cuáles son? Justifica tu respuesta. (Recuerda que un polígono regular es el que tiene todos sus ángulos y todos sus lados iguales).

¿Los cuadriláteros son siempre, a ***veces*** o ***nunca*** polígonos **ANLA?** Justifica tu respuesta. (Recuerda que un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados).

Item P13 B (2-3)

A continuación te presentamos varias propiedades de los triángulos isósceles:

1- Tiene tres lados.
2- Tiene al menos un ángulo menor de 90°.
3- Tiene al menos dos ángulos menores de 90°.
4- Tiene al menos dos ángulos iguales.
5- Tiene al menos dos lados iguales.
6- Tiene al menos un eje de simetría.
7- No tiene diagonales.
8- Su área se puede obtener por la fórmula (base x altura) / 2.
9- Al menos una de sus alturas va desde un vértice hasta la mitad del lado opuesto.

Acabas de ver una lista de propiedades de los triángulos isósceles. Utilizando algunas de las propiedades 1 a 9 que te damos, ¿puedes hacer una lista, lo más corta posible, de manera que las únicas figuras que cumplen esas propiedades sean los triángulo isósceles? Explica tu respuesta.

Item P17 A.l (2-4)

Trata de demostrar que la suma de los ángulos de *cualquier* triángulo acutángulo es 180".

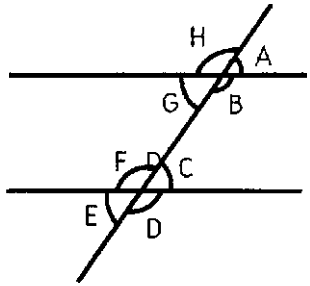
Item P17 A.2 (2-4)

Propiedad: Cuando hay dos rectas paralelas cortadas por una transversal,

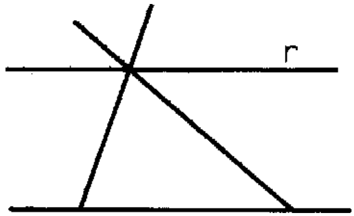
Los ángulos alternos internos son iguales entre sí (En la figura, B = F; G = C).

Los ángulos alternos externos son iguales entre sí (En la figura, A = E; D = **H).**

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales (En la figura, A = G, **B = H, C = E y F = D).**



Teniendo en cuenta la figura de la derecha (la recta **r** es paralela a la base del triángulo) y las propiedades anteriores, demuestra que la suma de los ángulos de cualquier triángulo acutángulo es 180º.



Item P17 B (2-3)

Aquí tienes una demostración completa de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo **acutángulo** es 180°; léela y trata de entenderla:

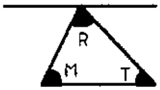


fig. 1

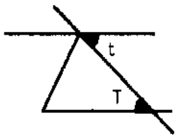


fig. 2

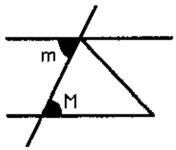


fig. 3

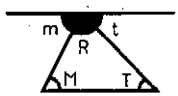


fig. 4

- La suma que debemos calcular es R + M + T (figura 1).
- Trazamos una paralela a la base del triángulo por el vértice opuesto R (figura 1). Prolongando uno de los lados, tenemos dos rectas paralelas cortadas por una transversal, por lo que T = t (ángulos alternos internos; figura 2).
- Prolongando el otro lado, tenemos de nuevo dos líneas paralelas cortadas por una transversal, por lo que M = m (ángulos alternos internos; figura **3).**
- Por lo tanto, R + M + T = R + m + t =180°, ya que forman un ángulo llano (figura 4)

Acabas de ver una demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo **acutángulo** es 180".

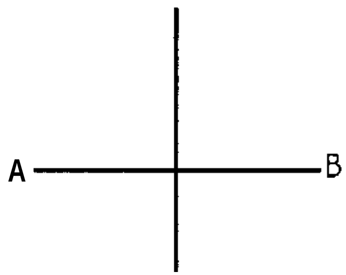
¿Es cierta la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo **rectángulo** es 180°? Demuestra tu respuesta (puedes seguir escribiendo por detrás de la hoja).

Dí cuánto vale la suma de los ángulos de un triángulo **obtusángulo**: Exactamente 180°, más de 180°, o menos de 180". Demuestra tu respuesta.

Item P19 (2-4)

1) Demuestra que las dos diagonales de ***cualquier*** rectángulo tienen la misma longitud.

2) La *mediatriz* de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de ese segmento (en la figura ves la mediatriz del segmento AB).

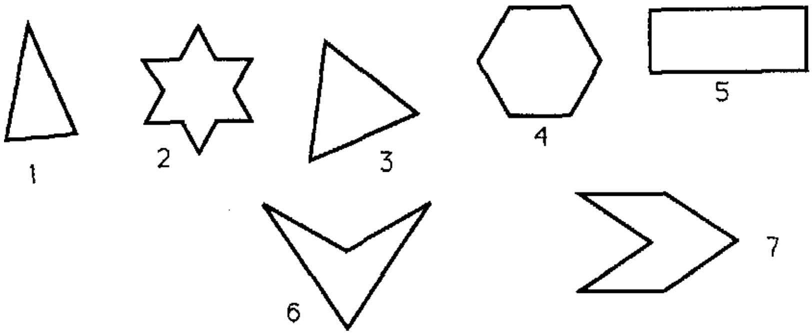


Demuestra que cualquier punto de la mediatriz equidista (está a la misma distancia) de los dos extremos del segmento.

Test nº 2.

Item P5 (1-2)

En los siguientes polígonos pon una R dentro de los regulares, una I dentro de los irregulares, una V dentro de los cóncavos y una X dentro de los convexos. Si es necesario, puedes poner varias letras en cada figura.



Explica para cada una de las figuras números 2, 4, 5 y 7 por qué le has puesto esas letras (o por qué no has escrito ninguna):

Figura **2:**

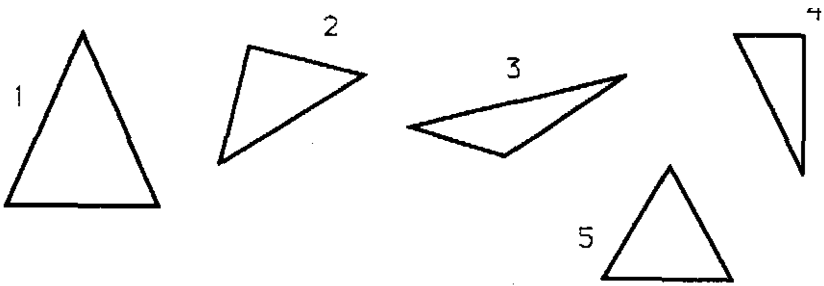
Figura 4:

Figura 5:

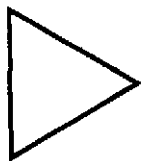
Figura 7:

Item P6 A.1 (1-3)

Escribe debajo de cada uno de los cinco triángulos que ves debajo todos los nombres que se le puedan dar, según sus lados y según sus ángulos: Equilátero, Isósceles, Escaleno, Acutángulo, Rectángulo, Obtusángulo.



Contesta sólo si o no: Este triángulo



¿Es equilátero?-----------------

¿Es isósceles? ------------------

¿Es escaleno?-------------------

Explica qué has hecho para saber qué clases de iriángulo son los números 1 y 2 :

Triángulo 1:

Triángulo 2:

Item P6 A.2 (1-3)

Dí si los triángulos ***escalenos*** son SIEMPRE, ***A*** VECES o NUNCA triángulos ***isósceles.*** Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Dí si los triángulos ***isósceles*** son SIEMPRE, A VECES o NUNCA triángulos ***obtusángulos.*** Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Dí si los ***triángulos rectángulos*** son SIEMPRE, A VECES o NUNCA ***triángulos equiláteros.*** Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

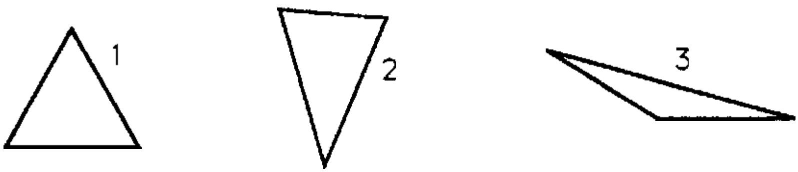
Di si los ***triángulos rectángulos*** son SIEMPRE, A VECES o NUNCA ***triángulos escalenos***. Explica ***con*** detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Item P6 B (2-3)

Aquí tienes algunas definiciones:

Un **triángulo equilátero** es el que tiene los tres lados iguales.
Un **triángulo isósceles** es el que tiene al menos dos lados iguales.

Utiliza las definiciones que te damos arriba para escribir:
una **e** dentro de los triángulos equiláteros y
una **i** dentro de los triángulos isósceles.
Si es necesario, puedes escribir varias letras en cada figura. Justifica tus respuestas.

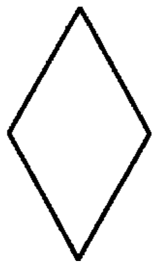


De acuerdo con las ***definiciones que te hemos dado arriba,*** dí si los triángulos **isósceles** son SIEMPRE, A VECES o NUNCA **triángulos equiláteros.** Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

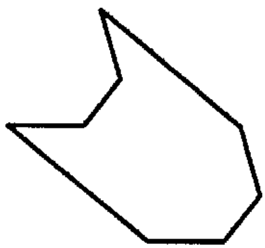
De acuerdo con las ***dejiniciones que te hemos dado arriba,*** dí si los triángulos **equiláteros** son SIEMPRE, A VECES o NUNCA triángulos **isósceles.** Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Item P12 A (1-2)

Aquí ves una figura (un rombo). Haz una lista con todas las propiedades de la figura que puedas encontrar (si quieres, puedes dibujar para explicar las propiedades).



Aquí ves otra figura. Haz una lista con todas las propiedades de la figura que puedas encontrar (si quieres, puedes dibujar para explicar las propiedades).

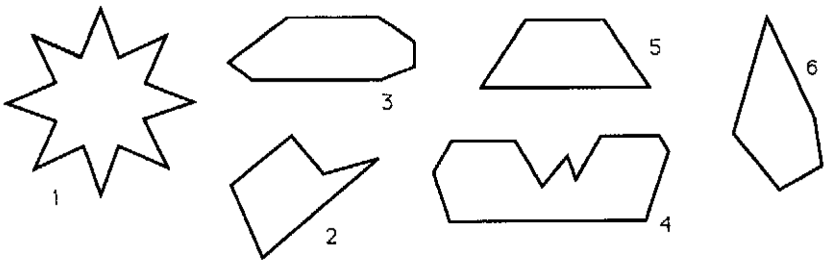


Item P9 A **(2-3)**

Fíjate en la siguiente definición:

Un ANLA es un polígono que tiene como máximo 7 ángulos iguales y como mínimo dos lados paralelos.

En las siguientes figuras, escribe una **A** dentro de los poligonos que sean ANLA:



Justifica a continuación tu respuesta para las siguientes figuras:

Número 1:

Número **2:**

Número **3:**

Número 4:

Dibuja, si puedes, dos ANLA diferentes y que no se parezcan a los anteriores.

Item P9 B (2-3)

Recuerda la definición de ANLA:

Un ANLA es un polígono que tiene como máximo 7 ángulos iguales y como mínimo dos lados paralelos.

¿Hay polígonos regulares que sean ANLA? En caso de que sí haya, ¿cuáles son? Justifica tu respuesta. (Recuerda que un polígono regular es el que tiene todos sus ángulos y todos sus lados iguales).

¿Los cuadriláteros son siempre, a veces o nunca polígonos ANLA? Justifica tu respuesta. (Recuerda que un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados).

Item **P12** B (2-3)

A continuación te presentamos varias propiedades de los rombo~:

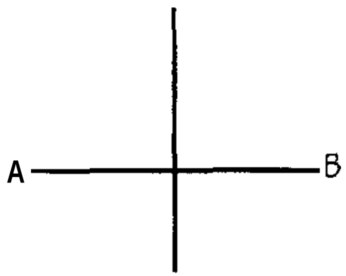
1- Tiene cuatro lados.
2- Tiene al menos dos lados iguales.
3- Tiene al menos dos ángulos iguales.
4- Tiene dos diagonales.
5- Sus diagonales son perpendiculares.
6- Tiene los cuatro lados iguales.
7- Sus lados son paralelos dos a dos.
8- Tiene dos ejes de simetría.

Acabas de ver una lista de propiedades de los rombos. Utilizando algunas de las propiedades **1** a 8 que te damos, ¿puedes hacer una lista, lo más corta posible, de manera que las únicas figuras que cumplan esas propiedades sean los rombos? Explica tu respuesta.

Item P19 (2-4)

1) Demuestra que las dos diagonales de ***cualquier*** rectángulo tienen la misma longitud.

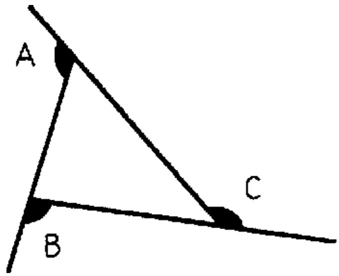
2) La ***mediatriz*** de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de ese segmento (en la figura ves la mediatriz del segmento AB).



Demuestra que cualquier punto de la mediatriz equidista (está a la misma distancia) de los dos extremos del segmento.

Item P20 A.1 (2-4)

Un **ángulo exterior** de un triángulo es el formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro lado. En la figura puedes ver los tres ángulos exteriores de un triángulo acutángulo (A, B y C).



Recuerda que la suma de los ángulos **interiores** de un triángulo es 180".

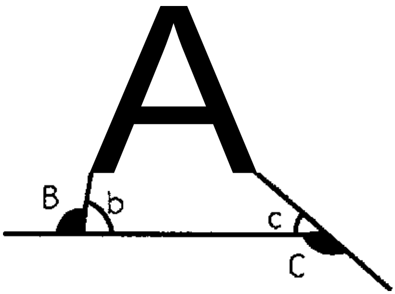
Intenta demostrar que la suma de los ángulos **exteriores** de cualquier triángulo acutángulo es 360°.

Item **P20 A.2 (2-3)**

Fíjate en la demostración que te proponemos de la propiedad anterior (la suma de los ángulos exteriores de cualquier triángulo acutángulo es 360°):

Tenemos un triángulo acutángulo cualquiera. Sus ángulos interiores son a, b y c. Los ángulos exteriores del triángulo son A, B y C (mira la figura).

Tenemos que demostrar que **A + B + C = 360°**.



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, es decir que a + b + c = **180".**

A = 180" - a, porque a + **A** mide **180"**

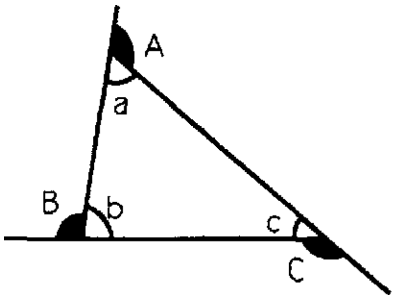
A + B + C =

------------.

La demostración está incompleta. Trata de completarla y explica con detalle todo lo que haces.

Item P20 B (2-3)

A continuación te damos la demostración completa de que ***la suma de los ángulos exteriores de cualquier triángulo acutángulo es 360°:***



A = 180" - a, porque a + A
mide 180°.
B = 180" - b, porque b + B
mide 180".
C = 180° - c, porque c + C
mide 180".

A + B + C = 3 x 180° - a - b - c
(sumando las tres igualdades
anteriores)
A+B+C = 3 x 180° - (a + b + c)
A+B+C = 3 x **180° - 180°**, ya que a + b + c = 180°, porque la
suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180".
A+B+C = 2 x 180" = 360".

Una vez demostrada la propiedad de que la suma de los ángulos exteriores de cualquier triángulo acutángulo es **360°**, intenta demostrar que la suma de los ángulos exteriores de cualquier **triángulo rectángulo** también es 360".

Dí si la suma de los ángulos exteriores de un **triángulo obtusángulo** vale ***exactamente*** **360°**, ***más de*** 360" o ***menos de*** 360". Demuestra tu respuesta.

ANEXO *2.*

DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS A LOS TESTS.

ITEM 5

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Se hace una sola clasificación de las figuras y se utiliza un solo atributo de la regularidad → Nivel 2, Tipos 2/3.	Se marcan los polígonos: 1-I; 2-R; 3-R; 4-R; 5-V; 6-V; 7-R y se justifica que el polígono 2 es regular porque todos sus lados miden lo mismo.
Se hace una sola clasificación de las figuras y se utilizan los dos atributos de la regularidad → Nivel 2, Tipos 4/5/6.	Se marcan los polígonos: 1-I; 2-R; 3-R; 4-R; 5-I; 6-V; 7-V y se justifica que el polígono 4 es regular porque tiene todos los lados y los ángulos iguales.
Se hacen dos clasificaciones de las figuras y se utiliza un solo atributo de la regularidad → Nivel 2, Tipos 4/5/6.	Se marcan los polígonos: 1-I,X; 2-R,V; 3-R,X; 4-R,X; 5-I,X; 6-I; 7-R,V y se justifica siempre la regularidad porque todos sus lados miden lo mismo.
Se hacen dos clasificaciones de las figuras y se utilizan los dos atributos de la regularidad → Nivel 2, Tipos 4/5/6/7.	Se marcan los polígonos: 1-I,X; 2-R,V; 3-R,X; 4-R,X; 5-I,X; 6-I,V; 7-I,V y se justifica la irregularidad del polígono porque sus ángulos son diferentes, aunque todos sus lados midan lo mismo.
La justificación de la concavidad o convexidad se basa en el aspecto físico del polígono **(tiene** lados, ***o*** vértices, "hacia dentro" o "hacia fuera"). Esta	El ejemplo está contenido en el descnptor.

respuesta, por sí sola, podría ser indicadora del Nivel 1 en polígonos, pero se trata de una propiedad especial. Por lo tanto, hay que evaluar ésta respuesta junto con las otras del ítem, dependiendo el nivel asignado de si el resto de respuestas reflejan el Nivel 1 ó 2.→

Se justifica la concavidad porque ***el polígono tiene un ángulo fuera,*** refiriéndose al ángulo menor de 180" formado por los lados en el exterior del polígono. Se podría considerar como respuesta de Nivel 2, pero hay que evaluar esta respuesta junto con las otras del ítem, dependiendo el nivel asignado de si el resto de respuestas reflejan el Nivel 1 6 2.→

El ejemplo está contenido en el descnptor.

Se contesta a la 1" parte del ítem (clasificación de las figuras) pero no a la 2" (justificaciones) → Tipo 0, pues la respuesta puede haberse basado en la forma de las figuras (Nivel 1) o en sus propiedades matemáticas (Nivel 2).→

El ejemplo está contenido en el descnptor.

Una respuesta del tipo ***la figura nº 3 es regular porque los hexágonos son (suelen ser) polígonos regulares*** demuestra un conocimiento superficial de los polígonos, pues las propie-

El ejemplo está contenido en el descriptor.

dades están asociadas al nombre de la familia. Por lo tanto la visión del polígono es global → Nivel 1.

ITEM 6A

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Se hacen varias clasificaciones de todos (algunos) triángulos. Clasificaciones inclusivas → Nivel **3;** el Tipo depende de la calidad de las clasificaciones y las justificaciones.+	El ejemplo está contenido en el descriptor.
Se hace, como máximo, una clasificación de cada triángulo → Nivel 1/2, según las justificaciones; el Tipo depende de la calidad de las clasificaciones y las justificaciones.+	El ejemplo está contenido en el descnptor.
En la 1" **página,** se clasifican los triángulos pero no se contesta a las preguntas de justificación + Tipo *0*, a expensas de lo que se conteste en la **2**" página.	El ejemplo está contenido en el descnptor.
Clasificaciones inclusivas en la 2" página → Nivel **3;** el Tipo depende de la calidad de las clasificaciones y las justificaciones.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
Clasificaciones exclusivas en la 1ª página (una sola clasifica-	Se marcan los triángulos: 1-Is, Ac; 2-Is, Ac; 3-Esc, Obt; 4-

ción de cada triángulo o, en particular, clasificación exclusiva del triángulo equilátero) y respuestas correctas inclusivas en la 2ª página → Nivel 3, Tipo 4.	Rec, Is; 5-Equ, Ac y el de la línea siguiente como Equ, no Is. En la segunda parte, las relaciones establecidas son inclusivas y correctas.
La justificación de algunas clasificaciones se basa en la forma de los polígonos y la de otras se basa en sus propiedades matemáticas → Nivel 2, Tipo 4.	Un alumno justifica su clasificación del triángulo **2** como rectángulo e isósceles (lo cual es correcto) diciendo: ***Miras sus ángulos y la forma***.

ITEM 6B

DESCRIPTOR	**EJEMPLO**
Se clasifica el triángulo equilátero como isósceles → Nivel **3;** el Tipo depende de la calidad de las respuestas.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
Se hace clasificación disjunta de triángulos equiláteros e isósceles, o se clasifica como equilátero o isósceles alguna figura que no lo es; no se es capaz de aplicar las definiciones dadas → Nivel **< 3.**	Se clasifica: 1-E porque ***tiene los tres lados iguales*** ; 2-I; ***3-1,*** porque ambos ***sólo tienen dos lados iguales.***
El estudiante mantiene su propia definición usada en P6A → Nivel 2; el Tipo depende de la calidad de las justificaciones.	Se considera, tanto en 6A como en 6B, isósceles como tener dos ***lados iguales y uno desigual y*** equilátero como tener ***tres lados iguales.***
Se usan definiciones que son matemáticamente completas	Se utilizan las definiciones de triángulo isósceles como el

pero exclusivas y se hacen clasificaciones correctas según esas definiciones → Nivel 2, Tipo 5/6/7.

que tiene ***dos lados iguales y uno desigual*** *y* triángulo equilátero como el que tiene ***tres lados iguales.***

Se hace clasificación disjunta de los triángulos pero se dan respuestas inclusivas a las preguntas siguientes → Nivel **3,** Tipo 2/3/4.

Se asigna: ***2-E;*** 2-I; 3-I *y* después dice que los isósceles son a veces equiláteros ***porque el eyuilátero tiene tres ángulos iguales y el isósceles puede tener tres o dos ángulos iguales.***

Se hace clasificación inclusiva de los triángulos pero se dan respuestas exclusivas a las preguntas siguientes → Nivel 3, Tipo 2/3/4.

En particular, se justifica correctamente que los triángulos equiláteros son siempre isósceles y se justifica que los isósceles no son nunca equiláteros → Nivel **3,** Tipo 4.

El ejemplo está contenido en el descriptor.

ITEM 8A

DESCRIPTOR

Se hacen varias clasificaciones de todos (algunos) cuadriláteros. Si las clasificaciones son inclusivas → Nivel **3;** el Tipo depende de la calidad de las clasificaciones y las justificaciones.

EJEMPLO

El ejemplo está contenido en el descriptor.

Se hace, como máximo, una clasificación de cada cuadrilátero → Nivel 1/2, según las justificaciones; el Tipo depende de la calidad de las clasificaciones y las justificaciones.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
En la 1ª página, se clasifican los cuadriláteros pero no se contesta a las preguntas de justificación → Tipo 0, a expensas de lo que se conteste en la 2ª página.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
Clasificaciones inclusivas en la 2ª página indican capacidad para combinar propiedades → Nivel **3;** el Tipo depende de la calidad de las clasificaciones y las justificaciones.	Se dice que *los rombos son a veces cuadrados, cuando los rombos tengan todos sus ángulos iguales* y *que los cuadrados son siempre rombos ya que sus diagonales se cortan perpendicularmente.*
Clasificaciones exclusivas en la 1ª página (una sola clasificación de cada cuadrilátero) y respuestas correctas inclusivas en la 2ª página → Nivel **3,** Tipo 4.	En la primera página se dice que las figuras marcadas con O son rombos *porque tienen* 2 *ángulos agudos y 2 obtusos y* en la segunda página se dice que los rombos son a veces cuadrados porque *hay un caso especial en el que el rombo es un cuadrado* *y* que los cuadrados a veces son rombos porque *hay un caso especial de cuadrado que sí llega a ser rombo.*
La justificación de algunas clasificaciones se basa en la forma de los polígonos y la de otras se basa en sus propiedades matemáticas → Nivel 2, Tipo **4.**	Se dice que, al clasificar los polígonos, se ha fijado en: Cuadrados - *mirando cómo están colocados y si los lados son iguales ;* Rombos - *en la posi-*

	ción ; Rectángulos - en que todos los lados no son iguales.
Justificación inconsistente, es decir que corresponde a una familia de polígonos diferente de los que se han marcado (p. ej., se marcan R sólo los rectángulos y se dice que ***es rectángulo porque tiene dos pares de lados iguales***) → Nivel **< 3.** Es probable que estas respuestas escondan alguna propiedad visual, es decir de Nivel 1, que se aplica implícitamente.	Se clasifica: 1-C; 2-0; 4-C; 6-0; 7-O; aunque se dice que al seleccionar los cuadrados se ha fijado ***en que los 4 lados son iguales.*** Se clasifican 3, 5, 8, 9, 10 y 11 con E, aunque se dice que al seleccionar los rectángulos se ha fijado ***en que los 4 ángulos sean rectos.***

ITEM **8B**

DESCRIPTOR	**EJEMPLO**
Se clasifica el cuadrado como rectángulo → Nivel **3;** el Tipo depende de la calidad de las respuestas.	De los 4 polígonos, sólo se marcan el 2° con R y el 4° con C. Después se dice que los cuadrados son siempre rectángulos porque los cuadrados tienen 4 ángulos rectos.
Se hace clasificación disjunta de cuadrados y rectángulos, o se clasifica como cuadrado o rectángulo alguna figura que no lo es. No se es capaz de aplicar las definiciones dadas → Nivel **< 3.**	Se marcan con R los dos polígonos de la izquierda ***porque los lados son iguales dos a dos*** y con **C** los dos de la derecha ***porque los lados son iguales.*** Después se dice que los cuadrados no son nunca rectángulos porque en un ***cuadrado***

	sus lados miden todos lo mismo y en un rectángulo no.
El estudiante mantiene su propia definición usada en P8A → Nivel 2; el Tipo depende de la calidad de las justificaciones.	En vez de la definición dada en esta actividad, se usa que los rectángulos tienen los ángulos rectos y los lados desiguales.
No se reconocen correctamente las propiedades de los polígonos (perpendicularidad, paralelismo, etc.) y se contesta de forma incoherente a la 2ª parte del ítem → Nivel 2, Tipo 1.	Se marca con C el polígono de la izquierda porque ***tiene*** 4 ***ángulos rectos y 4 lados iguales.***
Se usan definiciones de Nivel 2 que son matemáticamente incompletas y se incluyen en esas familias figuras que no pertenecen a ellas (según esas definiciones) → Nivel 2, Tipo 2/3, según que se apliquen las definiciones de manera in/coherente. En ocasiones hay que recurrir a P8A para ver qué definición se está usando.	Se identifican como rectángulos las dos figuras de la izquierda. Esto significa que la definición de rectángulo implícita contiene sólo la condición de paralelismos de los lados.
Se usan definiciones que son matemáticamente completas pero exclusivas y se hacen clasificaciones correctas según esas definiciones → Nivel 2, Tipo 5/6/7. **A** veces en las justificaciones sólo se alude a la desigualdad de los lados; esto quiere decir que se están usando implícitamente	Se dice que ***los cuadrados no son nunca rectángulos porque en el cuadrado los lados son iguales mientras que en el rectángulo la base y la altura no son iguales.***

los ángulos, pero no hace falta tenerlos en cuenta en las justificaciones.

Se hace clasificación disjunta de los cuadriláteros pero se dan respuestas inclusivas a las preguntas siguientes → Nivel **3**, Tipo 2/3/4.	El ejemplo está contenido en el descnptor.
Se hace clasificación inclusiva de los cuadriláteros pero se dan respuestas exclusivas a las preguntas siguientes → Nivel 3, Tipo 2/3/4. En particular, se justifica correctamente que los cuadrados son siempre rectángulos y se justifica que los rectángulos no son nunca cuadrados → Nivel **3**, Tipo 4.	El ejemplo está contenido en el descriptor.

ITEM 9A

DESCRIPTOR	**EJEMPLO**
En la definición de Anla, se utilizan bien la conectiva "y" y las condiciones "como máximo" y "al menos" → Nivel 3; el Tipo depende de la calidad de las justificaciones. Algunos alumnos añaden la condición de que haya al menos *2* ángulos iguales → Tipo ≤ 6.	Se dice que la figura 1 ***no es Anla porque, aunque tiene más de dos lados paralelos, tiene más de 7 lados iguales.***

En la definición de Anla, se utiliza bien la conectiva "y" pero se usan mal las condiciones "como máximo" y/o "al menos" → Nivel **2;** el Tipo depende de la calidad de las justificaciones.	***1 es Anla porque tiene 9 ángulos iguales y más de dos lados paralelos.*** ***2 no es Anla porque es un pentágono y no llega a tener 7 ángulos.***
En la definición de Anla, se utiliza mal la conectiva "y" y se usan bien las condiciones "como máximo" y/o "al menos" → Nivel **2;** el Tipo depende de la calidad de las justificaciones.	No ha habido respuestas de esta clase entre nuestros alumnos.
En la definición de Anla, se utilizan mal la conectiva "y" y las condiciones "como máximo" y "al menos" → Nivel ***2;*** el Tipo depende de la calidad de las justificaciones.	***3 es Anla porque tiene dos lados paralelos.*** ***4 es Anla porque tiene los lados paralelos y sus ángulos iguales.***
El alumno aplica de forma coherente a lo largo del ítem una definición propia de Anla en la que intervienen las dos condiciones → Nivel **2,** Tipo 5/6/7.	El alumno utiliza la expresión ***como máximo*** 7 ***ángulos y como mínimo dos lados paralelos*** en su justificación.
El alumno aplica de forma coherente a lo largo del ítem una definición propia de Anla en la que sólo interviene una de las dos condiciones → Nivel **2,** Tipo 2/3.	Se consideran como Anlas los polígonos con 2 lados paralelos y se clasifican como Anla las figuras 1, 2, **3, 4** y ***5.***

ITEM 9B

DESCRIPTOR	EJEMPLO
En las justificaciones aparecen, usadas de forma adecuada, las dos condiciones de la definición de Anla → Nivel 3; el Tipo depende de la calidad de las justificaciones.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
En las justificaciones no aparecen las dos condiciones de la definición de Anla, o aparecen usadas de forma incoherente → Nivel < 3; el Tipo depende de la calidad de las justificaciones.	*No hay polígonos regulares que sean Anla porque un Anla sólo puede tener como mínimo dos lados paralelos y los polígonos regulares, para intentar que sólo tengan dos lados paralelos, los lados que no son paralelos no son de la misma longitud. El Anla no es necesario que tenga todos los lados iguales.*
En las justificaciones aparecen, usadas de forma adecuada, las dos condiciones de la definición de Anla, pero se usan mal las definiciones de polígono regular y/o cuadrilátero → Nivel **3,** Tipo 2.	Se confunde cuadrilátero con cuadrado: Se dibuja un cuadrado y se explica: *Los cuadriláteros son siempre Anla porque tienen 4 ángulos iguales y dos lados paralelos.*
En las justificaciones se ve claramente que el alumno no está en el Nivel 3, pero sus respuestas están en términos de propiedades matemáticas de los Anla u otros polígonos → Nivel **2;** el Tipo depende de la calidad de las justificaciones.	Se dice que los cuadriláteros no son nunca Anla *ya que el Anla tiene que tener 7 ángulos iguales y como minimo dos lados paralelos. Los lados de un cuadrilátero son paralelos dos a dos, pero un cuadrilátero sólo tiene 4 ángulos.*

En las justificaciones se ve claramente que el alumno no está en el Nivel 3 y en sus respuestas se limita a repetir (partes de) la definición de Anla y a decir que los otros polígonos si/no son Anla → Nivel 3, Tipo 1.	Se dice que no hay polígonos regulares que sean Anla ***porque*** [el Anla] ***tiene como máximo 7 ángulos y como mínimo dos lados paralelos.***
En las respuestas se limita a enunciar algunos ejemplos de polígonos regulares y de cuadriláteros → Nivel 2. Si además se confunde "cuadrilátero" con "cuadrado" → Tipo 2/3.	Se dice que son Anla el cuadrado, pentágono, hexágono y eptágono regulares. Se dice que los cuadriláteros son siempre Anla porque ***tienen los cuatro ángulos iguales (90") y tienen lados paralelos dos a dos.***
El alumno aplica de forma coherente a lo largo del ítem una definición propia de Anla en la que aparecen las dos condiciones + Nivel 2, Tipo 5/6/7. En ocasiones hay que recurrir a P9A para ver qué definición se está usando.	Se utiliza como definición de Anla: ***Lados paralelos y más de 7 ángulos iguales.***
El alumno aplica de forma coherente a lo largo del ítem una definición propia de Anla en la que sólo aparece una de las dos condiciones → Nivel 2, Tipo 2/3. En ocasiones hay que recurrir a P9A para ver qué definición se está usando.	Se indica en los dos apartados del ítem que si ***tiene dos lados paralelos ya es un Anla.***

ITEM 12A

DESCRIPTOR	EJEMPLO
La lista de propiedades matemáticas sólo se refiere al número de lados y/o ángulos; si hay más propiedades, se derivan de la simple observación de las figuras (puede que descomponiéndola) y son visuales → Nivel 1, Tipo 5/6/7. Hay estudiantes que dicen que el rombo tiene los ángulos iguales. Esto puede ser porque se fijan solamente en la igualdad de los ángulos opuestos, que es más visual, pero no comparan unos ángulos con otros. Si ésta es el única propiedad incorrecta → Nivel 1, Tipo 6.	Un alumno dice del rombo: ***Tiene dos ángulos de 30 y dos de 160". Y*** del octógono dice: ***Ninguna*** [propiedad].
La lista de propiedades matemáticas es corta pero incluye alguna propiedad importante (igualdad, paralelismo, perpendicularidad,...) → Nivel 2, Tipo 2/3. Generalmente la lista estará formada por el número de lados y/o ángulos y alguna propiedad más. Esto refleja el paso del Nivel 1 al 2: El estudiante ya es consciente de que las propiedades visuales no sirven, pero no es capaz de encontrar propiedades matemáticas.	Un alumno dice del rombo: ***Tiene las diagonales perpendiculares, lados paralelos dos a dos, 4 lados iguales, si lo divides salen dos triángulos. Y*** del octógono dice: ***Tiene* 8 *lados, tiene muchas diagonales que se cortan*** [No traza ninguna línea en la figura dada].

La lista de propiedades matemáticas es completa, incluyendo las propiedades importantes (igualdad, paralelismo, perpendicularidad,...) → Nivel 2, Tipo 5/6/7.	Un alumno dice del rombo: 4 ***lados,*** 4 ***vértices, 4 ángulos, irregular, equilátero, lados paralelos dos a dos, obtusángulo, 2 diagonales, las diagonales se cortan perpendicularmente, área = bxa, la suma de sus ángulos es 180x2 = 360, etc. Y*** para el octógono también da una lista amplia, con referencia al mismo tipo de propiedades.

ITEM 12B

DESCRIPTOR	**EJEMPLO**
El estudiante marca varias propiedades de la lista indicando que (sólo) las cumplen los rombos. No entiende qué se le pide → Nivel **3,** Tipo 1.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
El estudiante marca varias propiedades de la lista y no da más explicaciones. No se puede saber qué son esas propiedades → Tipo 0.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
El estudiante dice que no es posible hacer la lista porque los cuadrados cumplen todas las condiciones. Esto quiere decir que hace clasificación disjunta de estas dos familias y también que ha comprobado que las propiedades se cumplen en los cuadrados _ Nivel 2, Tipo 5/6/7.	El ejemplo está contenido en el descriptor.

ITEM 13A

DESCRIPTOR	EJEMPLO
La lista de propiedades matemáticas sólo se refiere al número de lados y/o ángulos; si hay más propiedades, se derivan de la simple observación de las figuras y son visuales → Nivel 1, Tipo 51617.	Se dice que en el triángulo isósceles *la base no tiene la misma medida que los otros lados y se pueden hacer tres ángulos. De la segunda figura se dice que tiene 6 lados, 6 ángulos y 6 vértices.*
La lista de propiedades matemáticas es corta pero incluye alguna propiedad importante (igualdad, paralelismo, perpendicularidad, ...) → Nivel 2, Tipo 213. Generalmente la lista estará formada por el número de lados y/o ángulos y alguna propiedad más. Esto refleja el paso del Nivel 1 al 2: El estudiante ya es consciente de que las propiedades visuales no sirven, pero no es capaz de encontrar propiedades matemáticas.	Se dice que el triángulo *tiene dos lados iguales y uno desigual y dos ángulos iguales y uno desigual.* De la segunda figura se dice que *es un polígono irregular porque sus lados no son iguales* y se dan las medidas de los lados y de los ángulos.
La lista de propiedades matemáticas es completa, incluyendo las propiedades importantes (igualdad, paralelismo, perpendicularidad, ...) → Nivel 2, Tipo 5/6/7.	Se dice que el triángulo tiene 2 *lados iguales y uno desigual, todos los ángulos agudos, 3 vértices y no tiene diagonales.* De la segunda figura se dice que *los lados son iguales dos a dos, tiene 6 ángulos, 3 agudos y 3 obtusos, tiene 12 diagonales.*

ITEM 13B

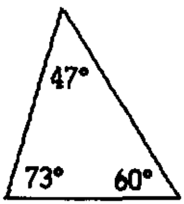
DESCFUPTOR	EJEMPLO
El estudiante da una lista de propiedades que, según él, cumplen los triángulos isósceles. No entiende qué se le pide → Nivel 3, Tipo 1.	Se marcan las propiedades nº 2, 3 y 4 y se dice que ***sólo las cumplen los isósceles.***
El estudiante da una lista de propiedades sin más explicaciones. No se puede saber qué son esas propiedades → Tipo 0.	Se marcan (o se escriben los enunciados) de algunas de las propiedades de la lista sin otro comentario.
El estudiante dice que no es posible hacer la lista porque los triángulos equiláteros cumplen todas las condiciones. Esto quiere decir que hace clasificación disjunta de estas dos familias y también que ha comprobado que las propiedades se cumplen en los triángulos equiláteros → Nivel 2, Tipo 5/6/7.	El ejemplo está contenido en el descriptor.

ITEM 17A

DESCFUPTOR

En P17A.1, el estudiante dibuja un triángulo acutángulo, mide los ángulos interiores y los suma para comprobar si suman 180"; en P17A.2 hace lo mismo con el triángulo dado o con uno suyo → Nivel 2, Tipo 2/3.

EJEMPLO



$$\begin{array}{r} 47 \\ 73 \\ +\ 60 \\ \hline 180 \end{array}$$

El (los) triángulo(s) que dibuja puede(n) ser equilátero(s). Alguno de los triángulos no es acutángulo → Tipo 5.	
En P17A.1, el estudiante dibuja varios triángulos acutángulos, en cada uno mide los ángulos interiores y los suma para comprobar si suman 180°; en P17A.2 hace lo mismo con el triángulo dado o con alguno suyo → Nivel 2, Tipo 5/6/7. Deja P17A.2 en blanco → Tipo 5/6. Alguno de los triángulos no es acutángulo → Tipo 5.	Un ejemplo similar al anterior pero midiendo los ángulos de varios triángulos.
En P17A.1 el estudiante dice que los ángulos interiores de los triángulos acutángulos miden 60° (o dibuja un triángulo no equilátero y marca los ángulos con 60"). En P17A.2 hace lo mismo o la deja en blanco → Nivel 2, Tipo 2.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
El estudiante dibuja triángulos e indica los grados de cada ángulo, pero no hace mención explícita de la suma ni da ninguna explicación → Nivel 2, Tipo 2.	El ejemplo está contenido en el descnptor.
Respuesta del tipo ***cada ángulo del triángulo puede medir lo que quiera, luego la***	El ejemplo está contenido en el descriptor.

suma de sus ángulos no será 180". El estudiante no es capaz de relacionar unas propiedades con otras (tamaño de un ángulo y de otro), luego no está en el Nivel **3.** Tampoco aprovecha la posibilidad de comprobar la validez dibujando un ejemplo, luego está empezando a adquirir el Nivel 2 → Nivel 2, Tipo 2.

En P17A.I se da una respuesta del nivel 2 (se miden uno o más triángulos) y en P17A.2 se hace una demostración (la sugerida u otra) → Nivel 3, Tipo 4.

El ejemplo está contenido en el descnptor.

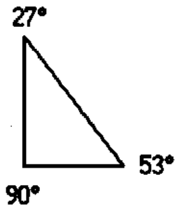
ITEM 17B

DESCRIPTOR

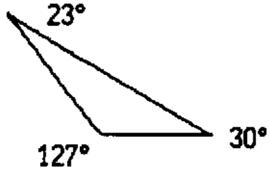
El estudiante dibuja un triángulo rectángulo y otro obtusángulo, mide los ángulos interiores y los suma para comprobar si suman 180" → Nivel 2, Tipo 2/3.

Alguno de los triángulos no es rectángulo u obtusángulo → Tipo 2.

EJEMPLO



90°+27°+53° = 180°



Suman 180"

El estudiante dibuja varios triángulos rectángulos y obtusángulos; en cada uno mide los ángulos interiores y los suma para comprobar si suman 180° → Nivel 2, Tipo 5/6/7. Alguno de los triángulos no es rectángulo u obtusángulo → Tipo 5.	Un ejemplo similar al anterior pero midiendo los ángulos de varios triángulos rectángulos y varios obtusángulos.
El estudiante dice que los ángulos interiores de los triángulos rectángulos miden 90° y 45° (o dice algo parecido para los obtusángulos) → Nivel 2, Tipo 2.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
El estudiante dibuja un triángulo rectángulo y otro obtusángulo e indica los grados de cada ángulo, pero no hace mención explícita de la suma ni da ninguna explicación → Nivel 2, Tipo ***2.***	El ejemplo está contenido en el descnptor.
El estudiante afirma que todos los ángulos de un triángulo rectángulo (obtusángulo) miden (más de) 90°. Conoce la propiedad característica de esos triángulos pero no la aplica bien (posiblemente se confunde porque los acutángulos tienen todos los ángulos menores que 90") ni considera otras propiedades, p. ej. que, al dibujar, siempre hay ángulos agudos → Nivel 2, Tipo 1.	Se dice que la suma de los ángulos de un triángulo obtusángulo vale ***más de 180° porque sus ángulos miden más de 90°***.
Respuesta del tipo ***como un ángulo ya mide (más de) 90°, es***	Se dice que en el triángulo obtusángulo ***vale más de 180" por-***

fácil que entre todos midan (más de) 180". No aprovecha la posibilidad de comprobar la validez dibujando un ejemplo, luego está empezando a adquirir el segundo Nivel → Nivel *2*, Tipo 2/3.

que si [la suma de los ángulos de] *un rectángulo vale 180⁰, el obtuso es mayor que 90⁰ luego por lógica* [la suma de sus ángulos] *tiene que ser mayor.*

Respuesta del tipo *si aumentamos el ángulo obtuso hasta que llegue a medir casi 180°, la suma de los tres ángulos pasará de 180°.* No es capaz de relacionar unas propiedades con otras (aumento de un ángulo y disminución de otro) → no está en el Nivel *3*. Tampoco aprovecha la posibilidad de comprobar la validez dibujando un ejemplo, luego está empezando a adquirir el Nivel *2* → Nivel *2*, Tipo 2/3.

El ejemplo está contenido en el descriptor.

El estudiante dice, para los triángulos rectángulo y obtusángulo, que *se demuestra igual en todos los triángulos* o *que la propiedad es cierta para todos los triángulos.* No entiende lo que le pide el ítem → Nivel **3,** Tipo 1.

El ejemplo está contenido en el descnptor.

Se hace la demostración dada para el iriángulo rectángulo pero no para el triángulo obtusángulo. Esto indica que se es capaz de generalizar a una figura con forma parecida a la dada pero no a una bastante diferente → Nivel **3,** Tipo *213.*

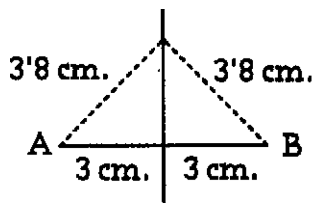
El ejemplo está contenido en el descriptor.

ITEM 19

DESCRIF'TOR	**EJEMPLO**

El estudiante dibuja una figura apropiada en cada caso y mide para comprobar si es cierta la propiedad → Nivel 2, Tipo *213.*

1ª diagonal = 4'3.
2ª diagonal = 4'3.



El estudiante dibuja varias figuras apropiadas; en cada una mide para comprobar si es cierta la propiedad → Nivel 2, Tipo 5/6/7.

Las respuestas son análogas al ejemplo anterior pero midiendo varios casos diferentes.

Se justifica la igualdad a partir de alguna propiedad de la figura, pero de forma verbal → Nivel 3; el Tipo depende de la calidad de la respuesta.

Rectángulo: ***Porque si lo partimos por las diagonales se forman dos triángulos rectángulos iguales.***

Se contesta bien una de las partes y se contesta mal, o se deja en blanco, la otra → Tipo *213;* el Nivel depende de la calidad de la respuesta.

Se dibuja un rectángulo con sus dos diagonales y se dice: [Son iguales] ***porque si haces las diagonales salen dos triángulos iguales y otros dos iguales distintos.***
El apartado de la mediatriz lo deja en blanco.

Una parte está contestada, por sí sola, en el Nivel N, Tipo 51617 y la otra está contestada, por sí sola, en el Nivel N+1, Tipo 5/6/7. Evaluación global → Nivel N+1, Tipo 4.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
Una parte está contestada, por sí sola, en el Nivel N, Tipo 51617 y la otra está contestada, por sí sola, en el Nivel N+1, Tipo 2/3. Evaluación global → Nivel N, Tipo 5/6.	El ejemplo está contenido en el descnptor.

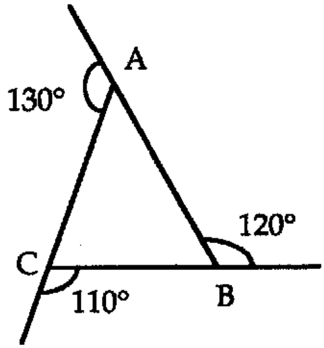
ITEM 20A

DESCRIPTOR	EJEMPLO
En P20A.1, el estudiante dibuja varios triángulos acutángulos (entre ellos puede estar el dado), en cada uno mide los ángulos exteriores y los suma para comprobar si suman 360"; en P20A.2 hace lo mismo con el triángulo dado o con alguno suyo → Nivel 2, Tipo 51617. Deja P20A.2 en blanco → Tipo 5/6. Alguno de los triángulos dibujados no es acutángulo → Tipo 5.	El ejemplo está contenido en el descriptor.

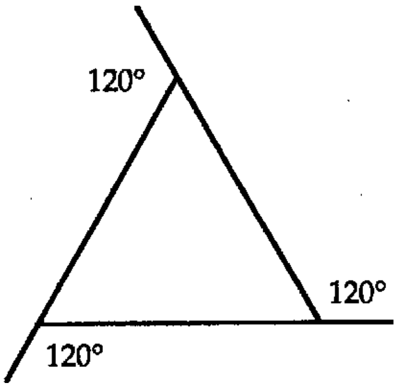
En P20A.1, el estudiante dibuja un triángulo acutángulo (o usa el dado), mide los ángulos exteriores y los suma para comprobar si suman 360"; en P20A.2 hace lo mismo con el triángulo dado o con uno suyo → Nivel 2, Tipo 2/3.

El (los) triángulo(s) que dibuja puede(n) ser equilátero(s).

Alguno de los triángulos dibujados no es acutángulo → Tipo 5.



En P20A.1 el estudiante dice que los ángulos exteriores de los triángulos acutángulos miden 120" (o dibuja un triángulo no equilátero y marca los ángulos con 120"). En P20A.2 hace lo mismo o la deja en blanco → Nivel 2, Tipo **2.**



El estudiante dibuja triángulos e indica los grados de cada ángulo, pero no hace mención explícita de la suma ni da ninguna explicación → Nivel 2, Tipo 2.

El ejemplo está contenido en el descriptor.

Respuesta del tipo ***cada ángulo del triángulo puede medir lo que quiera, luego la suma de los ángulos exteriores no será 360°***. El estudiante no es capaz de relacionar unas propiedades con otras (tamaño de un ángulo y de otro) → no está en el Nivel 3. Tampoco aprovecha la posibilidad de comprobar la validez dibujando un ejemplo, luego está empezando a adquirir el Nivel 2 → Nivel 2, Tipo 2.

El ejemplo está contenido en el descriptor.

En P20A.1 se da una respuesta del nivel 2 (se miden uno o más triángulos) y en P20A.2 se hace una demostración (la sugerida u otra) → Nivel 3, Tipo 4.

El ejemplo está contenido en el descriptor.

ITEM 20B

DESCRIPTOR

El estudiante dibuja varios triángulos rectángulos y obtusángulos; en cada uno mide los ángulos exteriores y los suma para comprobar si suman 360" → Nivel 2, Tipo 51617.

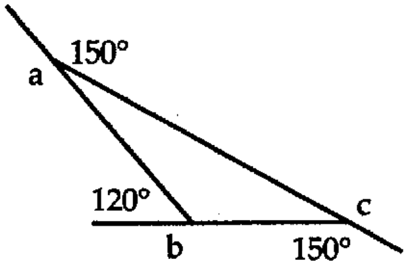
Alguno de los triángulos no es rectángulo u obtusángulo → Tipo 5.

EJEMPLO

El ejemplo está contenido en el descnptor.

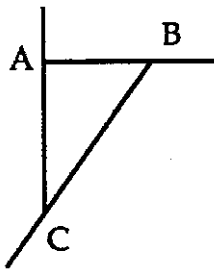
El estudiante dibuja un triángulo rectángulo y otro obtusángulo, mide los ángulos exteriores y los suma para comprobar si suman 360° → Nivel 2, Tipo 2/3.

Alguno de los triángulos no es rectángulo u obtusángulo → Tipo 2.



Más de 360"
a + b + c = 420°

El estudiante dice que los ángulos interiores de los triángulos rectángulos miden 90° y 45°, o algo parecido (o dice algo equivalente para los obtusángulos), aunque esto no corresponde con el dibujo → Nivel 2, Tipo 2.

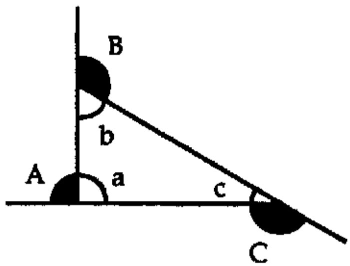


A+B+C = 360" porque A = 90°, B = 135°, C = 135"
90° + 135" + 135" = 360"

El estudiante dibuja un triángulo rectángulo y otro obtusángulo e indica los grados de cada ángulo, pero no hace mención explícita de la suma ni da ninguna explicación → Nivel 2, Tipo 2

El ejemplo está contenido en el descriptor.

En P20A ha hecho una demostración, propia, de **Nivel 3** y ahora adapta esa demostración a los triángulos **rectángulo** y obtusángulo. El estudiante sabe que su demostración es válida para todos los triángulos y sigue usándola → Nivel 3; el Tipo depende de la calidad de la demostración.



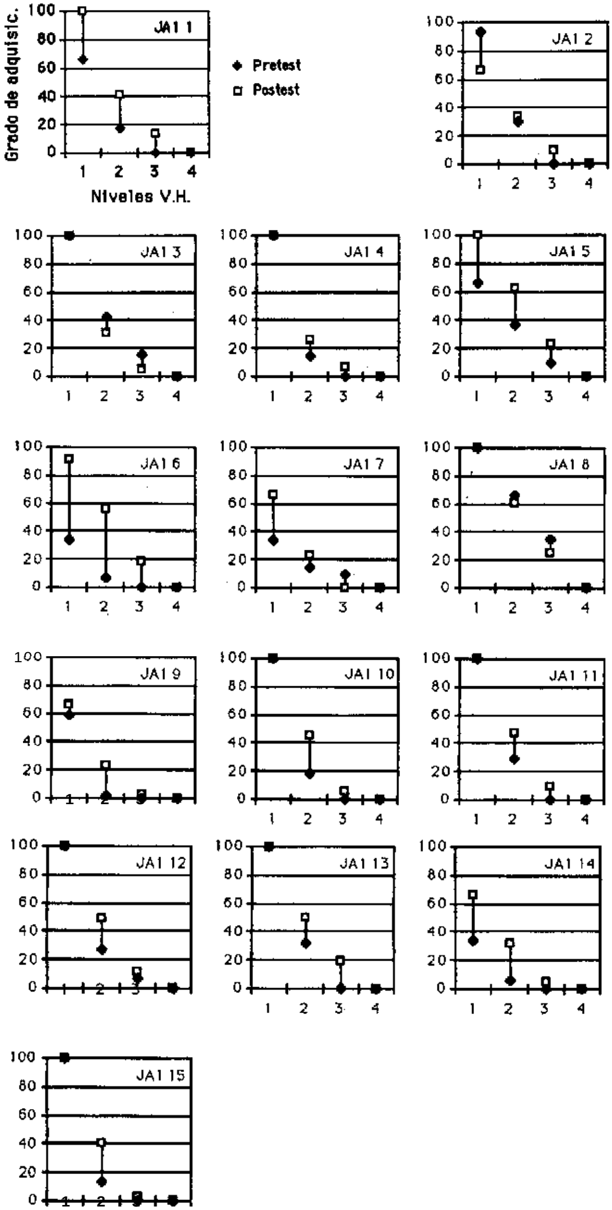
a = 90° y la suma de b y c tiene que dar 90". Entonces, e suman los ángulos interiores y se le resta a 540" y da 360".

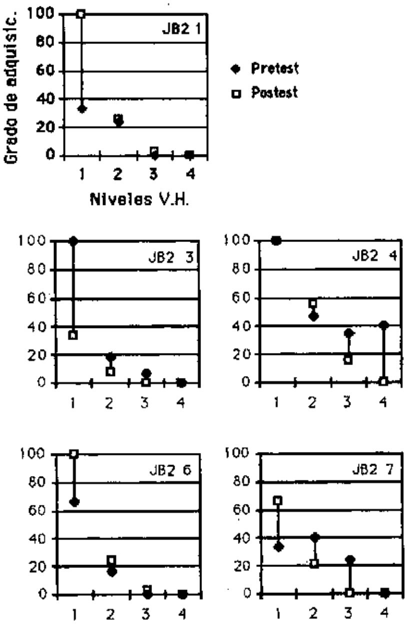
El estudiante dice, para los triángulos rectángulo y obtusángulo, que ***se demuestra igual en todos los triángulos o que la propiedad es cierta para todos los triángulos.*** No entiende lo que le pide el ítem → Nivel **3** Tipo 1.

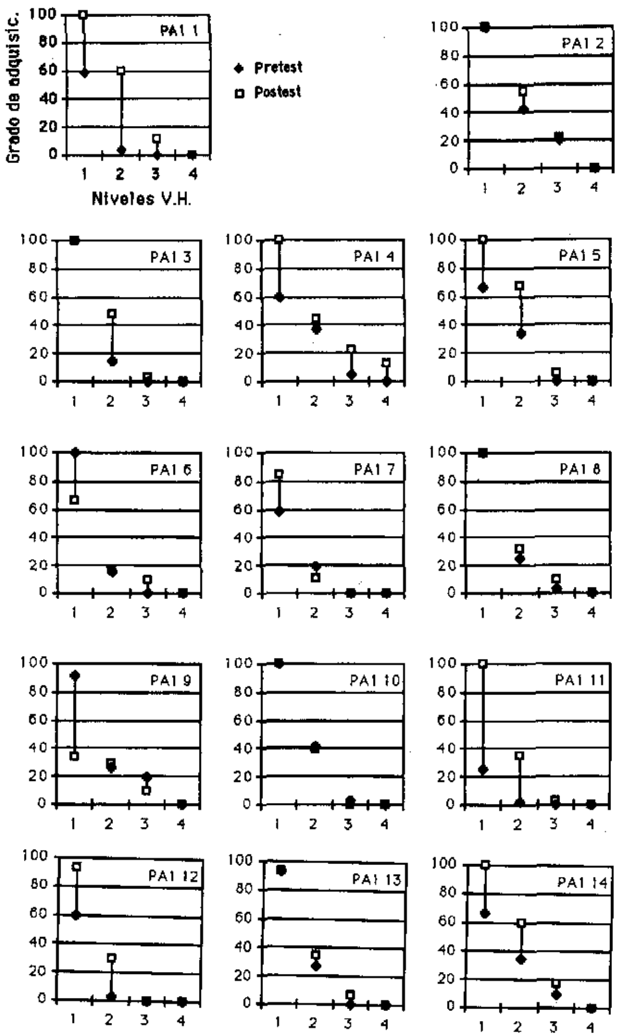
El ejemplo está contenido en el descriptor.

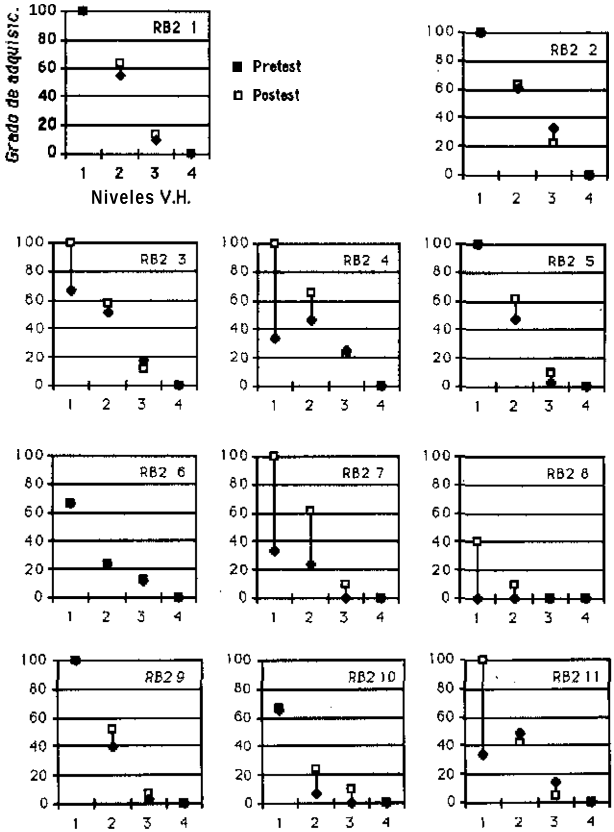
ANEXO 3.

RESULTADOS INDIVIDUALES DE LA EVALUACION DE LOS ESTUDIANTES

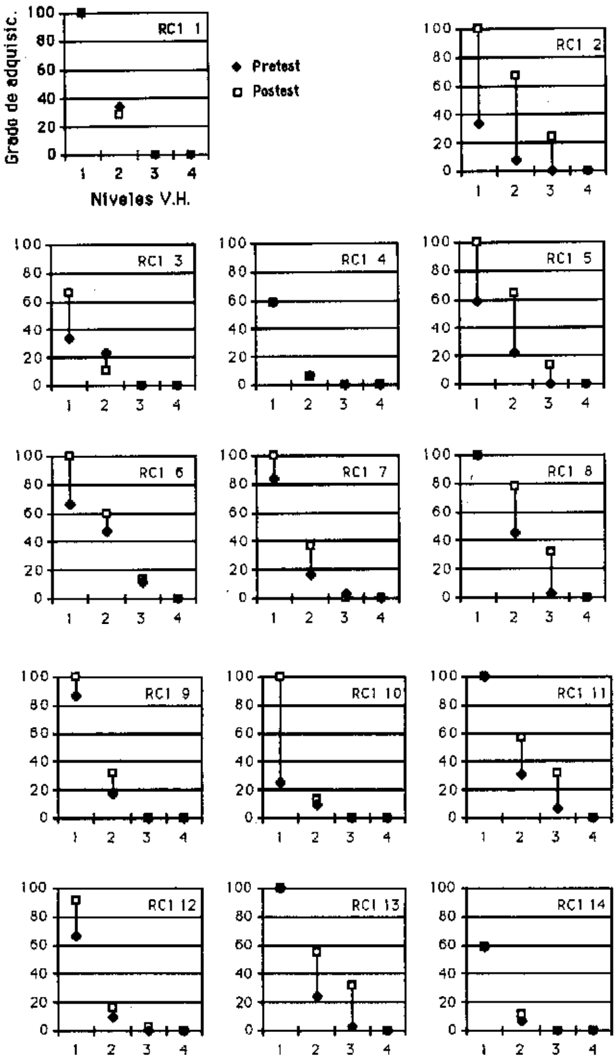

Grado de adquisic.
Niveles V.H.
Pretest
Postest
JA1 1
JA1 2
JA1 3
JA1 4
JA1 5
JA1 6
JA1 7
JA1 8
JA1 9
JA1 10
JA1 11
JA1 12
JA1 13
JA1 14
JA1 15


Grado de adquisic.
Niveles V.H.
Pretest
Postest
JB2 1
JB2 2
JB2 3
JB2 4
JB2 5
JB2 6
JB2 7

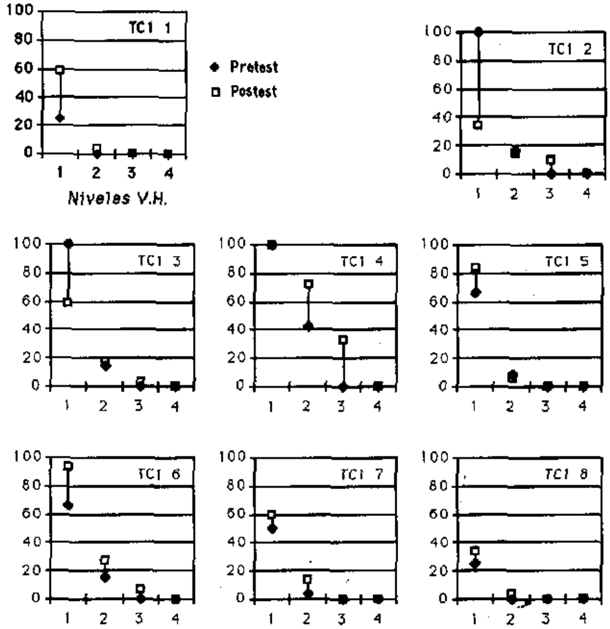

Grado de adquisic.
Niveles V.H.
Pretest
Postest
PA1 1
PA1 2
PA1 3
PA1 4
PA1 5
PA1 6
PA1 7
PA1 8
PA1 9
PA1 10
PA1 11
PA1 12
PA1 13
PA1 14

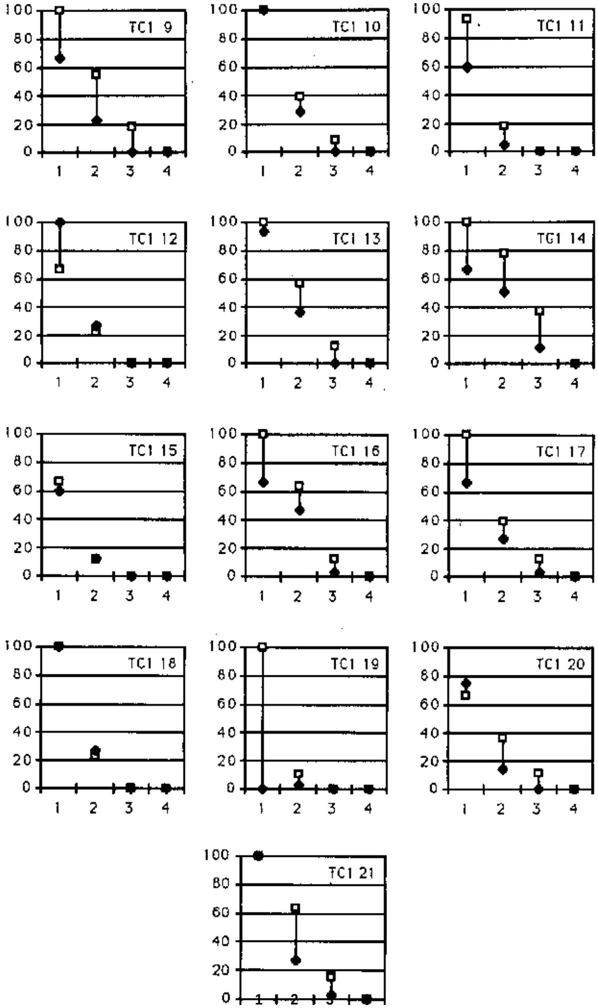


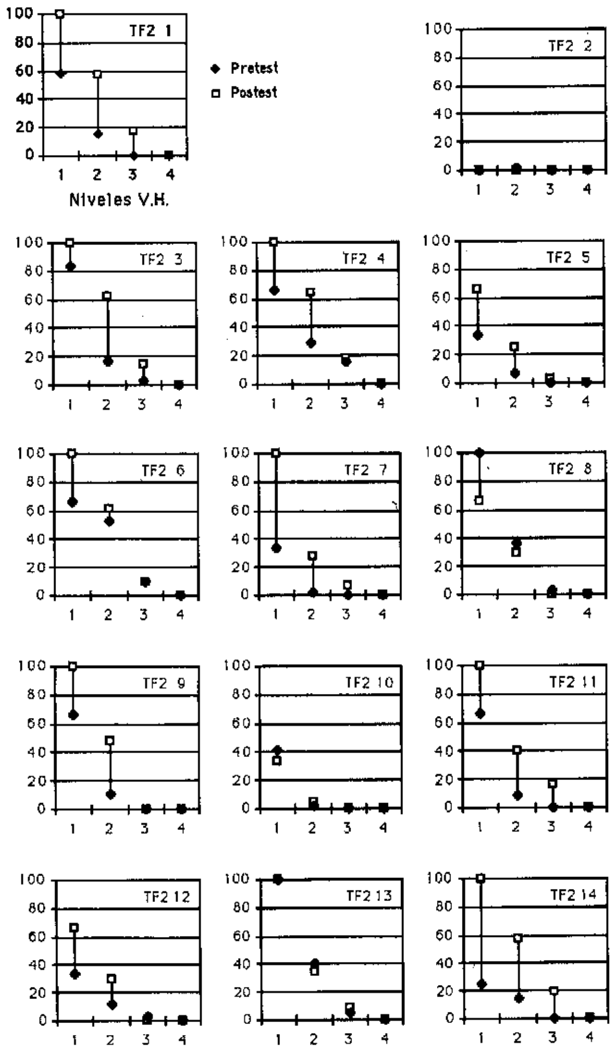
Grado de adquisic.
Niveles V.H.
Pretest
Postest
RB2 1
RB2 2
RB2 3
RB2 4
RB2 5
RB2 6
RB2 7
RB2 8
RB2 9
RB2 10
RB2 11



Grado de adquisic.
Niveles V.H.
Pretest
Postest
RC1 1
RC1 2
RC1 3
RC1 4
RC1 5
RC1 6
RC1 7
RC1 8
RC1 9
RC1 10
RC1 11
RC1 12
RC1 13
RC1 14


TC1 1
TC1 2
TC1 3
TC1 4
TC1 5
TC1 6
TC1 7
TC1 8
Pretest
Postest
Niveles V.H.
0
20
40
60
80
100
1
2
3
4


TC1 9
TC1 10
TC1 11
TC1 12
TC1 13
TC1 14
TC1 15
TC1 16
TC1 17
TC1 18
TC1 19
TC1 20
TC1 21
100
80
60
40
20
0
1
2
3
4


TF2 1
Pretest
Postest
Niveles V.H.
TF2 2
TF2 3
TF2 4
TF2 5
TF2 6
TF2 7
TF2 8
TF2 9
TF2 10
TF2 11
TF2 12
TF2 13
TF2 14

Ministerio de Educación y Ciencia

Secretaría de Estado de Educación

Dirección General de Renovación Pedagógica