INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM

EDITORES

Alexander Maz Machado
Bernardo Gómez Alfonso
Manuel Torralbo Rodríguez

Córdoba, 7-10 de Septiembre de 2005

Editores:

Alexander Maz Machado
Bernardo Gómez Alfonso
Manuel Torralbo Rodríguez

Comité científico:

Bernardo Gómez Alfonso (coord.)
Modesto Sierra Vásquez
Maria del Mar Moreno Moreno
Maria José González López
Pablo Flores Martínez
Pilar Bolea Catalán

Todas las comunicaciones aquí publicadas fueron sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación matemática SEIEM.

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba
y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM

ISBN: 84-7801-782-8

Deposito Legal :CO:1014/2005

Imprime: Copisterías Don folio, S.L.
14005 Córdoba

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Seminarios

de

Investigación

Presentación

Desde que se constituyó en 1996, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) viene celebrando simposios anuales que se convierten en foro de encuentro, de intercambio de experiencias y de discusión de los últimos resultados obtenidos por los investigadores en Educación Matemática. Después de un largo recorrido por la geografía nacional, esta novena edición llega a Córdoba y lo hace en un momento de consolidación de la Sociedad y de visualización de los objetivos para los que se creó.

Según el Diccionario de la Real Academia, *discusión* es "el análisis o comparación de los resultados de una investigación a la luz de otros existentes y posibles". El progreso del ser humano está inquebrantablemente ligado a los descubrimientos científicos así como al debate y reflexión surgidos en torno a ellos. Decía José Ortega y Gasset que "Ciencia es todo aquello sobre lo cual siempre cabe discusión". Esta frase parece hecha a medida del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática que reúne en Córdoba a especialistas, investigadores y expertos que durante tres días debatirán, analizarán y reflexionarán sobre los últimos trabajos en esta materia.

La inminente puesta en marcha del Espacio Europeo de Educación Superior va a traer consigo importantes cambios en los estudios de grado y postgrado. Desde hace algún tiempo la SEIEM viene pronunciándose sobre la formación de los Maestros y de los Profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria. Muestra de esta preocupación fue la participación de esta sociedad el pasado mes de febrero en la reunión celebrada en Alcalá de Henares sobre la *Situación actual y las necesidades en el currículo y en la formación del Profesorado de Matemáticas.* Paralelamente, la SEIEM ha jugado un papel activo en el Comité Español de Matemáticas donde se está impulsando la creación de un Centro Nacional de Matemáticas, en el que desde la Sociedad se espera que la Educación Matemática tenga un lugar propio.

Son muchos los retos a los que nos enfrentamos y que dan al encuentro de Córdoba un significado especial y una oportunidad para profundizar en los temas que a todos nos afectan, así como para conocer los últimos resultados de las recientes investigaciones en el área.

De esta manera, el noveno simposio se ha articulado en torno a dos seminarios de gran interés en el momento actual: la Investigación en Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en Educación Matemática y la Investigación en Didáctica del Análisis.

El primer seminario, coordinado por el Dr. José María Fortuny, se centra, a través de tres ponencias, en las aportaciones de la utilización de las TIC en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje y en desarrollos de e-learning, entornos dinámicos y e-tutorización.

El segundo de los seminarios esta coordinado por la Dra. Carmen Azcárate Jiménez y analiza a través de otras tres ponencias el papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo, la enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS y concluye con una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada.

Además de estos dos seminarios, y como es ya tradicional, el simposio incluye la presentación de comunicaciones donde se presenta una interesante muestra del trabajo investigador más actual.

Este noveno simposio también acoge la reunión anual de los distintos grupos de investigación que conforman la SEIEM, presentando en ellos avances de los estudios que se vienen realizando en cada línea específica de trabajo.

A todo este programa, desarrollado de acuerdo con las directrices marcadas por el Comité Científico, se añade una atractiva oferta de actividades culturales que permitirán a los asistentes conocer la riqueza histórica y cultural de Córdoba así como disfrutar de su belleza.

Finalmente, en esta edición del simposio hemos organizado una exposición de libros antiguos de matemáticas con el propósito de difundir autores y obras españolas un tanto olvidadas o desconocidas para el gran público pero que encierran una gran riqueza documental tanto matemática como didáctica.

A todos los participantes damos una cordial bienvenida y el deseo de que disfruten y saquen el máximo provecho de este noveno simposio, el que sin el apoyo y trabajo de todos no sería posible.

Manuel Torralbo Rodríguez

Alexander Maz Machado

Comité organizador

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I:

Investigación en Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en Educación Matemática

Coordinador:

D. José María Fortuny

Una de las finalidades de la investigación en Didáctica de las Matemáticas es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, proponiendo nuevos modelos de enseñanza que conduzcan a aprendizajes más significativos y, en consecuencia, un mayor éxito escolar y social. Es un hecho que un aumento en la calidad de las interacciones entre los distintos polos que intervienen en el sistema educativo (alumno, profesor, conocimiento y medio) produce beneficios cognitivos y sociales en el alumnado.

Ese aumento en la calidad se puede conseguir diseñando, implementando y validando entornos de aprendizaje que centren la enseñanza en el alumnado y que se desarrollen teniendo presentes las últimas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y las aportaciones de la utilización de las TIC en desarrollos sobre e-learning, entornos dinámicos y e-tutorización, temas que trataremos en este seminario.

Ponentes:

Dª Olimpia Figueras Mourut de Montpellier
(Cinvestav IPN, México)

Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación

D. Ángel Gutiérrez Rodríguez
(Universidad de Valencia)

Aspectos de investigación sobre aprendizaje mediante exploración con tecnología

D. Pedro Cobo Lozano y D. José María Fortuny
(IES Pius Font i Quer — Universidad Autónoma de Barcelona)

La tutorización humana y artificial en la resolución de problemas de matemáticas

Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación

Olimpia Figueras
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Resumen

En el planteamiento general del uso de las tecnologías de la información y comunicación en la clase de matemáticas subyace una serie de cambios necesarios para llevar a cabo la labor docente. Se pueden mencionar aquellos que están vinculados con: la propia concepción de la función de la escuela, la forma de estructurar y organizar la enseñanza en el aula, la manera de obtener información, la forma de proponer actividades y tareas, las habilidades y competencias de los estudiantes. En consecuencia, el maestro de matemáticas del siglo XXI tiene que desarrollar competencias no incluidas en los objetivos de su formación inicial. Uno podría plantearse la pregunta, ¿podrá el docente alcanzar el paso de los usuarios expertos que actualmente introducen en los curricula de la educación matemática el uso de tecnologías de información y comunicación de frontera?

Abstract

Transformations of teachers practices underlie the use of information and comunication technologies within the mathematics classroom. The school's conception, teaching structure and organization in the classroom, ways of collecting information, forms in which activities and tasks are proposed, abilities and competencies students most develop, are some of the changes that have to be taken in mind. The mathematics teacher of the twenty first century has to develop competencies that were not conceived in the goals of their initial education. Also in a constant way information and comunication technologies are introduced in mathematics education by researchers and expertise user's. Within this scenario, a question can be raised: Can the teachers keep pace in the race to introduce the new developed technologies in the classroom?

En México, al intentar resolver la falta de opciones educativas en comunidades que carecían de educación media, surge la idea, en 1965, de utilizar la televisión para implementar un modelo de educación: Telesecundaria; con cualidades de penetración a bajo costo y diseñado para grupos con un número reducido de alumnos en zonas de difícil acceso geográfico. En el proceso educativo intervienen dos figuras docentes:

- los Telemaestros, profesores seleccionados que imparten clases, las cuales se graban en videocinta y se transmiten vía la televisión, y

- el Maestro coordinador que atiende a los estudiantes en una 'teleaula' – un espacio físico cualquiera habilitado para tal fin en la comunidad.

Las autoridades de la Secretaría de Educación Pública (SEP) de aquella época encargan a la Dirección General de Educación Audiovisual la realización del proyecto. La primera transmisión de la puesta en marcha experimental se hace en circuito cerrado el 5 de septiembre de 1966, con 90 estudiantes, elegidos de entre 341 aspirantes, divididos en cuatro grupos. En uno de ellos se les solicitó a los estudiantes seguir las indicaciones y sugerencias de los telemaestros (de la Rosa, 2001, págs. 14 –23).

De entre los objetivos de este proyecto interesa mencionar los siguientes cinco:

- Complementar el servicio educativo de educación media ofrecido por la SEP.
- Poner a prueba nuevas técnicas audiovisuales para la escuela secundaria.
- Hacer llegar los beneficios a todos los mexicanos que por diversas causas no recibieron más que la educación primaria.
- Brindar la oportunidad a los trabajadores y amas de casa para que desde sus hogares, como alumnos libres sigan los cursos y tengan derecho a solicitar exámenes y obtener el certificado correspondiente.
- Proporcionar sugerencias didácticas a los profesores de las escuelas secundarias que estimen conveniente utilizar las emisiones de telesecundaria como auxiliar de la enseñanza.

La experimentación del modelo de enseñanza fue supervisada y evaluada por comisiones *ad hoc*. Tras hacer las modificaciones sugeridas el 21 de enero de 1968 se iniciaron las transmisiones vía un canal comercial para una población de 6,569 alumnos inscritos en 304 teleaulas distribuidas en 7 estados y el Distrito Federal; con una programación que incluía lecciones matutinas diarias, de lunes a viernes y un programa sabatino dedicado a los maestros coordinadores.

A partir de esa fecha la matricula se fue incrementando. Un factor importante del crecimiento fue la demanda; en algunas comunidades se costeaba el salario del maestro coordinador y en otras se compraron plantas eléctricas a base de motores de gasolina para llevar educación media a la población.

"En la década de los ochenta, Telesecundaria fue objeto de gran controversia, se ponía en tela de juicio la calidad de la educación y el cuerpo docente causaba gran inquietud" (de la Rosa, 2001) debido a una formación diversa. *"El programa estuvo a punto de desaparecer".* Actualmente es un servicio formal y escolarizado del sistema educativo nacional y se transmite por señal vía satélite a través de la red estatal Edusat.

En 1992, se amplió la educación obligatoria, de 6 a 15 años de edad. Telesecundaria se convierte en una opción educativa que le permite al estado soslayar la problemática de la cobertura aun cuando compromete la calidad; 56 % de la educación secundaria del país estuvo sostenida por este programa educativo en 2004 (Figueras, Alatorre y Sáiz, 2004). Con este papel central de Telesecundaria en el contexto nacional era necesario fortalecerlo; por ello forma parte de la extensión del proyecto de innovación y desarrollo Enseñanza de la Física y de las Matemáticas Asistida por Tecnología (EMAT-EFIT) (ver Rojano, 2003), elemento clave en la reforma educativa actual de la educación secundaria en el país.[i]

Entornos de aprendizaje

De facto, el escenario educativo de la década de los sesenta en México tuvo transformaciones importantes por la mera inserción de un programa educativo aun cuando tuviera un fuerte sabor compensatorio y fuera del tipo denominado telealfabetización (de acuerdo con Bianculli, citado por González, 2000), un proceso educativo en el cual se difunde y se impone el conocimiento por medio de la televisión. Toda la estructura de Telesecundaria giraba (y gira todavía) en torno a la utilización de una tecnología, que en los sesenta era de punta; y hoy en día uno de los siete componentes a tomarse en cuenta en el contexto del uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC): teléfono, televisión y radio, dinero electrónico, redes telemáticas, tecnologías multimedia, videojuegos y realidad virtual; siendo los cuatro últimos los más relevantes para la educación según Echeverría (2000).

Aún cuando Telesecundaria, conservó en cierto sentido una educación tradicional con enseñanza presencial con tutores y libros de texto, se combinó con otros elementos de educación a distancia, apoyada fuertemente en el uso de un lenguaje audiovisual, y con una modalidad diferente de estudiantes, los denominados alumnos libres, que administraban personalmente su tiempo y elegían cuando optar por una evaluación para obtener la certificación. A través de este modelo educativo se extendieron las fronteras de la escuela, la teleaula podía estar en cualquier parte del país; a donde llegara la señal de televisión, hasta ahí llegaba la clase del Telemaestro experto.

La afirmación de que los entornos telemáticos promueven cambios estructurales que alcanzan los escenarios educativos es actualmente un lugar común, lo que no es claro es qué transformación orgánica habrá de llevarse a cabo para crear entornos electrónicos de aprendizaje apropiados para los procesos educativos del futuro. Echeverría (2000) habla del tercer entorno, distinguiéndolo de los entornos natural y urbano, como un nuevo espacio social que:

> *"… tiene una estructura propia, a la que es preciso adaptarse. El espacio telemático, cuyo mejor exponente actual es la red Internet, no es presencial, sino representacional, no es proximal, sino distal, no es sincrónico, sino multicrónico, y no se basa en recintos espaciales con interior, frontera y exterior, sino que depende de redes espaciales cuyos nodos de interacción pueden estar diseminados por diversos países. De estas y otras propiedades se derivan cambios importantes para las interrelaciones entre los seres humanos, y en particular para los procesos educativos"* (Idem, pág. 18).

En este entorno social, ¿quién está a cargo de la educación?, ¿cuál es la función de la escuela?, y en este contexto, ¿qué papel juega el maestro? Preguntas para las cuales de momento no hay respuestas, sólo suposiciones e imágenes, condicionadas éstas por ser parte del proceso de la evolución de las sociedades de la comunicación, en consecuencia resulta un tanto complejo imaginarse desde dentro del presente la estructura del futuro.

Sin embargo, en esta situación de imbricación en un entorno social del cual todavía se desconoce su alcance, se han ido transformando los escenarios educativos, sobre todo en los países desarrollados en los cuales se apostó a los entornos telemáticos educativos con muchas expectativas sobre su uso y las ganancias que aportaría, y se llegó a intentar meter a presión todo a través de una Internet con una banda no muy ancha como dice Williams (2003a); editor de una revista electrónica, colocada en la red tras la primera Conferencia Europea sobre *e-learning*[ii] realizada en 2002, en Inglaterra. El sugiere: *"es el momento de detenerse y evaluar el estado de los entornos telemáticos de aprendizaje"* para trazar direcciones y poder avanzar cualitativamente.

> *"La investigación … empieza a proveer una crítica sistemática de lo que se puede llamar la primera fase de su desarrollo. Hasta ahora mucha de la actividad se ha dirigido a contar con el entorno y a echarlo a andar, a establecer las tres o cuatro plataformas VLE (por sus siglas en inglés)… [entornos virtuales de aprendizaje] … y a entregar los bienes. Eso está hecho. La segunda fase consistirá en el desarrollo de la nueva generación de plataformas y la entrega de entornos de aprendizaje más amigables, en contraposición a garantizar solamente la distribución de cursos."* (Ibid)

Los entornos telemáticos de aprendizaje han sobrevivido muchas fases, la actual, es la de una consolidación tecnológica (Williams, 2004). Apaciguados quienes tenían sólo intereses financieros, los que han valorado esos entornos intentan consolidar los bloques básicos de construcción. Williams afirma: *"El valor clave que la "e" le añade al aprendizaje es un trabajo en red, interactivo y de colaboración"*, *y al parecer en este momento "los bloques clave de construcción son los objetos de* *aprendizaje"* (Ibid) los cuales están bajo una redefinición. Quien se asome a la literatura sobre esta temática general podrá apreciar el esfuerzo encaminado hacia un mayor desarrollo de las TIC para construir entornos telemáticos de aprendizaje para distintas materias.

Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

En el conjunto de artículos sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que aparecen en la literatura y en los cuales de forma explícita se menciona el uso de uno o varios de los componentes de las TIC se encuentra una diversidad de estilos y formas de usar estos medios en los procesos educativos que se llevan a cabo en la escuela.[iii] Para delinear los esfuerzos realizados por investigadores y educadores interesados en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas para que las TIC tengan una posición dentro de la escuela, vale la pena esbozar las distintas perspectivas adoptadas en su incorporación a lo largo del tiempo.

Da Ponte (2000) afirma que al surgimiento de estas tecnologías se formularon preguntas relacionadas con las nuevas oportunidades que podían ofrecer para el trabajo educativo. Como él dice, es natural hacerse preguntas tales como: las TIC[iv] ¿proporcionan formas más eficaces de lograr los objetivos educativos? ¿Proporcionan nuevas formas de aprendizaje? ¿Conducen a nuevos modos de trabajo dentro del aula? La concepción del uso de las TIC en la escuela subyacente en estas preguntas, tiene coincidencias con una de las caracterizaciones de McFarlane, Bonnet y Williams (citados en Rojano, 2000); aquella que considera a *"las TIC como un conjunto de herramientas o de medios para hacer lo mismo de siempre pero de un modo más eficiente"*.

La enseñanza asistida por computadora es una respuesta a los cuestionamientos anteriores. Esta respuesta está asociada con la idea de que los objetivos fundamentales son la transmisión de conocimientos y adquisición de destrezas. En este modelo de enseñanza, la computadora se usa como un 'profesor electrónico", se transmiten a los alumnos conocimientos predefinidos para el desarrollo de destrezas básicas. Un uso muy limitado de la computadora desde el punto de vista de los objetivos educativos; se usa como un manual escolar y un libro de ejercicios y no como una herramienta con la cual se pueden desarrollar competencias, actitudes y valores. Pero también, desde el punto de vista de los procesos de aprendizaje, entre otras cosas porque se presupone que se puede prescindir del profesor y de la interacción social en el aula, olvidando que la figura del docente es importante por la constante negociación y renegociación de significados que van llevando a cabo el maestro y sus alumnos (Da Ponte, 2000).

El modelo de enseñanza asistido por computadora está en el extremo de una gama de trabajos centrados en la relación de las TIC con el *curriculum*, es decir son acercamientos en los cuales las tareas de aprendizaje se modifican, a veces sólo en forma, al añadirles elementos de tecnología informática para lograr de mejor manera objetivos del *curriculum* vigente. Entre los trabajos que se pueden ubicar en la concepción del uso de las TIC para mejorar el aprendizaje, apoyar la enseñanza de las matemáticas y alcanzar los objetivos con mayor eficiencia abundan las indagaciones que versan sobre la geometría dinámica, en las cuales se usan diferentes paquetes electrónicos y también los estudios sobre maneras de enseñar matemáticas usando calculadoras de diversos tipos, sobre todo en relación con la enseñanza del álgebra y de las funciones.

En una cantidad importante de los informes se resaltan las cualidades de los elementos tecnológicos y de su uso como herramienta para crear un entorno electrónico. Lo que no se encuentra con facilidad es información acerca de la aplicación de esas actividades o formas de trabajo en las aulas de matemáticas. Las indagaciones se llevan a cabo, generalmente, en una institución educativa o en una decena de ellas, pero sus resultados con frecuencia no trascienden a un grupo de docentes; al final ellos trabajan de manera independiente, o bien se transfieren muy lentamente al trabajo escolar siempre y cuando se cuente con los recursos tecnológicos empleados en la investigación.

Como ya se mencionó, bajo esta perspectiva se está en una posición en la que se pueden alcanzar los objetivos con mayor eficiencia, sin embargo, Rojano (2000) además de ratificar que en esta perspectiva se centra la atención sobre el alumno como un usuario de las TIC, dejando al docente en un plano secundario, señala lo que considera una de las mayores debilidades:

> *"… los modelos que de … [ese enfoque] surgen tienden a medir los resultados de su aplicación, del mismo modo en que se miden los resultados de realizar las tareas sin el uso de las TIC. … En otras palabras, esos modelos anticipan el efecto de las TIC en el logro de los objetivos …. Esto último ha sido muy cuestionado por los especialistas en aprendizaje mediado por las TIC, que se basan en teorías del aprendizaje situado"* (pág. 137).

Esos investigadores argumentan que un aprendizaje llevado a cabo en un entorno no se transfiere de manera espontánea a otro (por ejemplo de un entorno electrónico a uno de lápiz y papel) y aun cuando los estudiantes logran buenos desempeños al realizar las actividades en un entorno particular ese aprendizaje no siempre se refleja en las calificaciones finales del estudiante (Ibid) y en consecuencia en el rendimiento escolar en matemáticas. Es usual que después de tener un uso constante de una calculadora en el salón de clase para llevar a cabo actividades, en el examen se les prohíba a los estudiantes usarla.

Otra de las formas en las que se ha intentando introducir las TIC en la escuela es como objeto de estudio, con el propósito de desarrollar habilidades y competencias. Las TIC han invadido la vida cotidiana, se han convertido en elementos fundamentales de la sociedad, por ello es importante que los estudiantes las conozcan a profundidad; en consecuencia, han pasado de ser consideradas herramientas útiles para la construcción de los conocimientos a ser objeto de instrucción.

A esta perspectiva del uso de las TIC en la escuela, da Ponte (2000) la llama la alfabetización informática. Los *curricula* se han transformado añadiendo al programa de estudios uno o varios cursos. Las competencias a desarrollar pueden estar vinculadas con conocer a fondo las características del mecanismo de los artefactos electrónicos, con aprender a usar paquetes electrónicos específicos, o bien programar usando uno o varios lenguajes. Este uso de las TIC no garantiza que los conocimientos adquiridos se transfieran a otras áreas del conocimiento para mejorar el desempeño de los estudiantes, por ejemplo con respecto a las matemáticas. Con esta perspectiva, como afirma da Ponte, se podrá transformar a fondo el *curriculum* pero no la escuela.

De acuerdo con McFarlane, Bonnet y Williams (citados en Rojano, 2000), otra perspectiva de uso de las TIC en la escuela es considerarlas un agente de cambio con impacto revolucionario, es decir se considera que tienen una gran potencialidad de cambiar a fondo las prácticas en la escuela; pocos trabajos pueden ubicarse en esta dirección. Una tarea importante a realizar aún es explorar con más cuidado el crecimiento explosivo de Internet y sus múltiples posibilidades para modificar el ambiente escolar. Sobre esta perspectiva Rojano (2000) argumenta:

> *"es difícil encontrar ejemplos de su implementación en los sistemas educativos. Este acercamiento que posibilita reformular a fondo lo que hay que enseñar, cómo enseñarlo y el rol del profesor, ha entrado en conflicto en algunos países con la cultura escolar existente, generada en buena medida por el currículo conservador que no da espacio a un alumno que ha adquirido cierta autonomía en el aprendizaje a través de un uso intensivo de las TIC fuera de la escuela …"* (pág 138).

Ella añade que esa es una situación que surge en países en los cuales el primer contacto de los niños con las TIC se da en el hogar, sin embargo en México y en muchos países de Latinoamérica el primer acercamiento que tendrán los niños con las TIC será en un entorno escolar.

Da Ponte (2000) va más allá, afirma que *"no se puede discutir el problema de las TIC en la escuela sin cuestionar de manera más profunda lo que es la escuela o el modelo de educación subyacente que ha producido la sociedad industrial"* (pág. 75).

¿Y el profesor?

Con frecuencia en la literatura se encuentran afirmaciones como las de Graham y Thomas (2000, pág. 268):

> *" ...los efectos benéficos de la investigación como la de ellos ...[refiriéndose a investigadores que usaron computadoras] ...generalmente tardan mucho en llegar a las clases de matemáticas, sí es que alguna vez llegan. Dos razones son mencionadas con frecuencia por los profesores: la falta de confianza al usar la tecnología para enseñar matemáticas, y la falta de recursos, en términos de computadoras y de programas electrónicos relevantes, puestos a prueba y evaluados".*

Más adelante al dar cuenta de los resultados obtenidos en su investigación Graham y Thomas dicen: *"Uno puede tener a mano las mejores ideas, pero si los maestros no se sienten a gusto al usarlas en sus salones de clase, entonces esas ideas tienen muy poco valor práctico"* (pág. 275).

Como parte de los datos recogidos en la investigación, llevada a cabo por Graham y Thomas, en la que seis maestros de Nueva Zelanda se ofrecieron como voluntarios para poner a prueba las actividades diseñadas en un entorno provisto por la calculadora gráfica, se les solicitó a los profesores escribieran un comentario de sus propias impresiones del proyecto, incluyendo maneras para mejorarlo. Después de dar cuenta del análisis de sus impresiones, los investigadores dicen: *"Estos comentarios de los maestros son importantes ya que el elemento vital de la introducción exitosa de la tecnología en el salón de clase es la actitud y el respaldo de los profesores (Thomas et al, 1996). Sin esto, cualquier iniciativa está condenada al fracaso"* (Pág. 278).

Para finalizar ellos afirman: *"Con la asistencia y el apoyo de los maestros, que frecuentemente están muy interesados en obtener recursos y estrategias innovadoras tales como las que les propusimos, se puede obtener una diferencia significativa en el progreso matemático de los estudiantes"* (pág. 280).

Lo que se ha querido ilustrar con los comentarios de estos investigadores son expresiones que también son lugares comunes: la falta de confianza en el uso de la tecnología en la clase de las matemáticas por parte de los profesores, la falta de recursos tecnológicos en los salones de clase, el papel fundamental del docente en la introducción de la tecnología en el aula, el interés de algunos docentes por aprender cosas nuevas y experimentar actividades innovadoras en el salón de clase, y el lento proceso de transferencia de los resultados de la investigación al aula, si es que esos llegan algún día hasta los profesores.

Pero, lo que aparentemente no se puede mostrar con comentarios de este tipo y posiblemente los investigadores las tienen presentes, son situaciones como las siguientes. Algunos profesores les tienen miedo a las innovaciones, temen dejar al descubierto sus debilidades al poner en práctica actividades que no diseñaron; otros docentes pierden seguridad al usar tecnología en el aula, con frecuencia son aprendices con más dificultades que sus propios alumnos; otros más temen perder el control de su "muy estructurado entorno de enseñanza". Echeverría (2000) afirma que al entrar a la telenaturaleza de Internet es muy fácil que los individuos, sólo por explorar, intenten recorrer las telecalles que no tienen una estructura determinada. En ese intento también se producen aprendizajes, en un entorno de enseñanza no reglado, los cuales son llevados al aula de manera natural.

Noss (2004) al describir los resultados parciales del proyecto *Playground* realizado por el, sus colegas de Londres y un grupo de investigadores de cuatro países Europeos, dice: *"... y con respecto al lado negativo, nosotros (re)aprendimos lo difícil que es empatar nuestros objetivos matemáticos como maestros con aquellos que los niños adoptan de manera espontánea"* (Pág. 83).

Ni modo. Las TIC están en nuestro entorno cotidiano, y poco a poco han entrado en la escuela, o bien, entran súbitamente e irrumpen en el aseado salón de clase de la escuela tradicional por decisión de un político. El docente aunque atrapado en este diario evolucionar de la sociedad de comunicación tendrá que hacerle frente a una nueva orientación de su profesión. En el tercer entorno social, el deberá tener una nueva actitud, una disposición a aprender, a innovar tanto desde el punto de vista de la educación, como desde el punto de vista tecnológico, deberá tener la mente abierta, probar ideas nuevas y buscar nuevas formas de organizar sus actividades y la enseñanza en su aula y su comunidad. El debe comprender que él también es un agente de cambio y que la transformación de la escuela en parte le corresponde a él.

"El profesor", dice da Ponte (2000):

> *"tiene que ser un explorador capaz de percibir lo que le puede interesar y aprender por sí sólo o junto con sus colegas más próximos a sacar partido de las respectivas potencialidades. Tal como el alumno, el profesor acaba por tener que estar siempre aprendiendo. De ese modo, se aproxima a sus propios alumnos. Deja de ser autoridad [que todo lo sabe] para pasar a ser, muchas veces, aquel que menos sabe (o que está lejos de constituir una modificación no menor de su papel profesional)"* (Pág. 76).

Biblioteca digital

Durante más de diez años en una sede de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), localizada en una zona deprimida del Distrito Federal, se ha estado llevando a cabo el Programa de atención al bajo rendimiento escolar dirigido por Buenrostro (2003), en el cual se combinan docencia, investigación y servicios.

El programa ha sido exitoso, y apunta a la resolución de problemas de la comunidad que vive y trabaja alrededor de las instalaciones de la Facultad de Estudios Superiores, Zaragoza de la UNAM. A través de los años, este trabajo ha tenido impacto en la zona circundante a la institución, no sólo porque ha atendido a más de 120 niños, sino que los maestros de las escuelas ubicadas en el derredor acuden a solicitar asesoría para resolver problemas que enfrentan con la enseñanza de las matemáticas. De ese modo, el programa se ha convertido en un centro especializado de información y documentación vinculado con la enseñanza de las matemáticas de los primeros grados de la escuela primaria y en particular, con el bajo rendimiento escolar en matemáticas.

Un grupo de colegas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), después de realizar una evaluación del *curriculum* de la escuela primaria, solicitada por la Sociedad Matemática Mexicana (ver Alatorre, et al.; 1998, 1999) decidió usar las TIC para apoyar a los profesores en la preparación de su clase de matemáticas. Para ello construyeron un entorno informático en la red Internet con el nombre Mi Ayudante y la dirección http://www.kan.ajusco.upn.mx/miayudante. Entorno en el cual se incluyó el conocimiento sobre el *curriculum* nacional que fue estructurado empleando mapas de la organización longitudinal de los contenidos y de las interrelaciones establecidas entre ellos a lo largo de los seis años de la escuela primaria. Se encuentran también en esa página todos los documentos que la SEP elabora para apoyar a los maestros en su trabajo, así como los libros de texto de los niños que edita el Estado y distribuye de manera gratuita a los estudiantes del país. Esta página puede considerarse una sección especializada de una biblioteca digital sobre materiales bibliográficos empleados para la educación matemática en la primaria mexicana.

El compartir la experiencia de Buenrostro y el trabajo realizado por él y sus alumnos, con profesores de otras partes del país, tomando como marco de referencia el entorno informático diseñado por colegas de la UPN impulsó a un grupo de investigadores a diseñar el proyecto Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: El caso del bajo rendimiento escolar[v] (Figueras, et al, 2001).

Uno de los objetivos generales del proyecto es empezar la construcción de una biblioteca digital, los bloques de construcción son bases informáticas con información sobre diversos aspectos vinculados con la problemática del rendimiento escolar en matemáticas. La idea central es ofrecerle a los docentes, vía la red Internet, información sobre las posibles causas del bajo desempeño de los estudiantes, maneras de delimitar las problemáticas individuales, actividades diseñadas con propósitos específicos que han sido puestas a prueba y evaluadas y con las cuales se ha podido ayudar a niños a superar dificultades, y cosas por el estilo. En suma, la intención es poner a disposición de los docentes los resultados de la investigación en educación matemática, sacando provecho de las potencialidades de los entornos telemáticos y sobretodo en la lengua oficial de su país: el español[vi].

Para lograr este propósito, el trabajo se dividió en tres partes centrales: Estudios sobre creencias, La construcción de bases informáticas y Estudios de usuarios.

Estudios de creencias. Los contenidos de las matemáticas para la primaria y secundaria se organizaron en la reforma curricular de 1992 (actualmente vigente) por medio de hilos conductores que marcan el inicio del estudio de un tema en un grado escolar y su desarrollo gradual de forma horizontal y transversal a lo largo de los nueve grados de la escolaridad obligatoria (Figueras, 1992). A la educación primaria le corresponden los siguientes: Los números y sus relaciones, Las operaciones y las técnicas de cálculo, El espacio y las formas, La medición, Predicción y azar, Tratamiento de la información y Procesos de cambio.

Una hipótesis del trabajo que se realiza es que la aritmética es el foco de atención de los profesores mexicanos en la escuela primaria. La evaluación de los estudiantes se hace en torno al desempeño en aritmética y lo que el docente espera de sus alumnos es que desarrollen competencias numéricas, relacionadas principalmente las operaciones. Por ende, el rendimiento escolar en matemáticas en este nivel escolar recae en el dominio de la aritmética.

La estructura del *curriculum* refuerza esta creencia de los docentes, la mayor cantidad de contenidos de la primaria se ubica en los ejes correspondientes al estudio de la aritmética. Las evaluaciones que se hacen durante el año están cargadas hacia el desempeño en aritmética.

Por ello se podía comenzar a construir bases informáticas asociadas a los conocimientos numéricos: Aritmética 1, 2 y 3 y Aritmética 4, 5 y 6; mientras se llevaban a cabo estudios sobre creencias por medio de los cuales se identificaran los tópicos de mayor preocupación para los docentes, de manera que la información que se pusiera en las bases sea útil para resolver los problemas que enfrentan en su trabajo diario los profesores, o su deseo de superarse y de saber más sobre lo que enseña.

Los estudios de creencias se llevan a cabo en Estado de México, Nayarit, Oaxaca y el Distrito Federal. Se ha formado una red de investigadores y colaboradores que permiten hacer diversos tipos de estudios y tomas de datos usando encuestas escritas con el propósito de hacer indagaciones locales en cada estado, así como estudios comparativos con un número grande de profesores. Entre los resultados más relevantes para la construcción de las bases se tiene: en la comparación global no se encontraron diferencias significativas entre las expectativas de los docentes (Flores, Pluvinage y Figueras, 2004), una interpretación de este hecho es que subyace en sus expectativas y creencias una identificación de un grupo profesional. Hay evidencias para suponer que estas formas de pensar están influenciadas por las políticas educativas transmitidas por medio de documentos elaborados por la SEP y los cursos de actualización organizados por esa dependencia. Entre las dificultades enfrentadas se puede mencionar la falta de indicadores que permitan comparar los resultados de manera global.

Mientras en el Distrito Federal, el uso de un índice obtenido de la aplicación del examen IDANIS (Instrumento de diagnóstico de alumnos de nuevo ingreso a la secundaria) a niños de sexto año de primaria en 2001, permitió trabajar con una muestra representativa de escuelas relacionada con el rendimiento escolar en matemáticas. Cuatro grupos de maestros se pudieron diferenciar con respecto a lo que ellos esperan sean características de un buen alumno en matemáticas (Flores, Pluvinage y Figueras, 2004).

El efecto que los resultados de esta investigación tiene para la construcción de las bases informáticas es que se puede clasificar la información tomando como criterio características de los grupos de profesores de manera que ellos encuentren en la página información relacionada con sus expectativas.

También es posible generar secuencias de enseñanza que puedan poner en marcha para lograr sus propios objetivos.

Matemáticas en la escuela primaria. Un sitio para nuestros maestros. Aritmética 1 2 3

Actualmente se cuenta con el esquema general de una base de datos correspondiente a temáticas de la aritmética vinculada con los primeros grados de la educación primaria. En Internet hay un prototipo de la base que permite hacer una evaluación y tener una idea del tipo de documentos electrónicos que se están elaborando para la biblioteca digital y las conexiones que se pueden hacer entre entornos de la red que tienen información valiosa para los docentes. La página tiene la siguiente dirección:

http://www.hipatia.cinvestav.mx/bibliotecavirtual/aritmética123

En ella el docente encuentra una variedad de aspectos que le ayudarán a identificar dificultades que puedan enfrentar los estudiantes, sugerencias de evaluación, actividades, ejemplos de estrategias empleadas por los niños para resolver problemas, tareas específicas, reseñas de libros en español y resúmenes de artículos de la literatura especializada que le permitirán ampliar su conocimiento.

En México el uso de Internet en la escuela está todavía restringido, la gran mayoría de las escuelas de nivel básico no cuentan con este servicio y muchas instituciones de educación superior tienen acceso restringido. Por ello se puede decir que en términos generales no hay una cultura informática en el país. Existe una enorme brecha entre aquellos que tienen acceso a las redes telemáticas y los que no lo tienen, y aun cuando hay decisiones políticas para introducir las TIC a las escuelas, estos procesos son altamente costosos y lentos, pero el solo hecho de tener el acceso no garantiza que se genere una cultura en este sentido. *"... si bien a finales del siglo XX aumentaron las posibilidades de acceso a la información y al conocimiento, con millones de personas usando estas tecnologías en todo el mundo, la mayor parte de la población mundial aún no las puede utilizar para su beneficio"* (Almada, Pág.106).

A pesar de ese paisaje global, es importante estar preparado para estar en posibilidades de ser un agente de los cambios necesarios en la sociedad del conocimiento como la llama Almada (Ibid). Por ello hay que aprovechar las oportunidades que se tienen a la mano.

En esta dirección, ¿cuál sería el papel de los investigadores en educación matemática? ¿Cómo debemos acompañar a los docentes en su carrera cotidiana para alcanzar la tecnología? ¿Cómo podemos hacernos cómplices de ellos y no de las autoridades educativas que con su política de mercado presionan y tensan los procesos educativos? ¿Cómo ayudar a los profesores en servicio para que no se queden en la trampa de manera permanente?

Notas

---

[i] Otros países, como Japón, usan la red de transmisión nacional para transmitir clases de matemáticas. Akiyama (2004) dice que la atención se pone en la formulación y realce de problemas y la construcción de modelos matemáticos para sacarle partido a las oportunidades visuales que ofrece la televisión.

[ii] De aquí en adelante se usará la expresión entornos telemáticos de aprendizaje en lugar de la expresión inglesa *e-learning*, el vocablo hace referencia a una educación por vía telemática; la cual en la actualidad se aplica únicamente a la esfera de Internet. González (2005, pág. 1) afirma:
El término e-learning, acuñado más recientemente, aglutina aquellos trabajos que tienen como ingrediente principal la comunicación no presencial, normalmente vía web, y que se ocupan de analizar el modo en que las nuevas interfases producen nuevas formas de comunicación y, en consecuencia, cambian nuestras prácticas y nuestros modos de aprender.

[iii] Durante la revisión bibliográfica de informes de indagaciones publicados en las memorias de PME 28, PMENA 26 e ICME 10, así como los ejemplares de la revista *Educational Studies in Mathematics* de los últimos cuatro años la autora se quedó con una sensación que coincidió con la apreciación que Kristjánsdottir (2004) plasma en su escrito:
"Al buscar literatura moderna sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática una brecha ... rápidamente se volvió visible. Mucha de la literatura sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, de alta calidad, está escrita como si no hubiera ninguna influencia del desarrollo de la tecnología de la información. También existe una cantidad significativa, que va en aumento, de artículos sobre aprendizaje, así como acerca de enseñanza de las matemáticas, en un entorno altamente tecnológico, en los cuales la perspectiva de este entorno particular está hablando tan alto que a veces es difícil para el lector distinguir que hay de nuevo sobre el aprendizaje mismo".

Ella afirma que la existencia de la brecha se podría explicar tomando en cuenta dos maneras profundamente diferentes de ver las cosas: Por un lado, la tecnología de la información es vista solamente o principalmente como influyendo los media usados. Por otro lado, todas las cuatro perspectivas y su relación interna se comprenden mucho más como transformadoras y altamente influyentes. Se refiere a un modelo formado por cuatro perspectivas de aprendizaje: las matemáticas, el estudiante, los medios empleados y la comunicación. Estos grupos los consideró al tomar en cuenta los focos de atención de la investigación y las decisiones políticas a lo largo del tiempo.

[iv] Cuando se hable de las TIC de aquí en adelante, la referencia estará vinculada a algún componente de las tecnologías de la información y comunicación en el sentido de Echeverría (2000), y no como otros autores, quienes solamente incluyen en este rubro las experiencias con el uso de las redes telemáticas, acotando a la red Internet. La información encontrada sobre el uso de las redes telemáticas para la clase de matemáticas es relativamente poca comparada con el uso de programas electrónicos y calculadoras en el aula, y en pocas ocasiones se hace mención de conexiones en redes electrónicas locales, Intranet. da Ponte hace el siguiente comentario: *"Tenemos aquí un problema de terminología. Durante muchos años sólo había computadoras. Después con la preeminencia que los periféricos (impresoras, plotters, scanners, etc) comenzaron a tener se hablaba de nuevas tecnologías de información (NIT). Con la asociación entre informática y telecomunicaciones se generalizó el término tecnologías de información y comunicación (TIC). Cualquiera de las denominaciones es reductora, porque lo importante no es la máquina, ni el hecho de poder lidiar con información, sino la posibilidad de la comunicación a distancia en condiciones francamente ventajosas"* (pág. 64).

[v] El proyecto fue puesto a consideración del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología en 2001, clave G37301-S y ha sido apoyado económicamente por ese organismo desde 2002.

[vi] Aun cuando la lengua oficial en México es el español, se han reconocido 64 lenguas diferentes. Para la educación primaria hay libros de texto para niños en 58 lenguas.

Referencias bibliográficas

Akijama, J. (2004). Mathematics for mass media*, Plenary and regular lectures, Abstracts, 10th International Congress on Mathematics Education*. pág. 23. Puede consultarse también fwjb5117@mb.infoweb.ne.jp.

Alatorre, S.; de Bengoechea, N.; López, L.; Mendiola E., y Sáiz, M. (1998). *Las matemáticas en la escuela primaria mexicana*. Manuscrito no publicado, México: Sociedad Matemática Mexicana.

Alatorre, S.; de Bengoechea, N.; López, L.; Mendiola E. y Sáiz, M. (1999). Análisis de los materiales oficiales para la enseñanza de las matemáticas en primaria. *Memoria electrónica del V Congreso Nacional de Investigación Educativa*. México: Universidad de Aguascalientes – Comie.

Buenrostro, A. (2003). *Aritmética y bajo rendimiento escolar. Diseño e implementación de dos modelos de enseñanza*. Tesis de Doctorado no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Da Ponte, J. P. (2000). Tecnologías de informação e comunicação na formação de profesores: que desafios?, Monográfico: Tic en la educación, *Revista Iberoamericana de Educación*, 24, 63-90.

De la Rosa, A. (2001). Modelo de Telesecundaria. En: *El concepto de función lineal en Telesecundaria: Una propuesta para el mejoramiento de la articulación entre registros, bajo un modelo integrador a través de la TI-95*, Capítulo 3, Págs. 14-23. Tesis de Maestría no publicada, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Echeverría, J. (2000). Educación y tecnologías telemáticas. Monográfico: Tic en la educación, *Revista Iberoamericana de Educación*, 24, 17-36.

Figueras, O.; Alatorre, S., y Sáiz, M. (2004). Mathematics in elementary and secondary education in México, Presentación nacional, ICME 10. Manuscrito no publicado. Sociedad Matemática Mexicana, Cinvestav.

Figueras, O.; Buenrostro, A.; Reyes, F. J.; López Rueda, G., y Sáiz, M. (2001). *Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas*. Proyecto de investigación puesto a consideración del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Manuscrito no publicado, México: Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav/Conacyt.

Figueras, O. (Coordinador general): 1992. *Plan y programas de matemáticas de la Educación Básica*. Documento interno, México:Secretaría de Educación Pública.

Flores, P.; Pluvinage, F., y Figueras, O. (2004). Matemáticas en la escuela: Creencias y prácticas en situación. *Memorias del IV Seminario sobre Rendimiento Escolar en Matemáticas*. México: UNAM-Cinvestav. Disponible en red http://www.hipatia.cinvestav.mx/historialseminarios, recuperado mayo, 2005.

Flores, P.; Pluvinage, F., y Figueras, O. *Creencias sobre el desempeño en matemáticas*. En proceso.

Graham, A. T., y Thomas, M. O. J. (2000). Building versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculador. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 265-282.

Gonzalez, L. J. (2000). Perspectivas de la educación para los medios en la escuela de la sociedad de la comunicación. Monográfico: Tic en la educación, *Revista Iberoamericana de Educación*, 24, 91-101.

Gonzalez, M. L. (2005). Réplica a la ponencia 'El sistema tutorial AgentGeom y su contribuci;on a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas de Cobo y Fortuny', Disponible en red, recuperada junio 2005.

Kristjánsdottir, A. (2004). Theories of learning mathematics and development of powerful ICT environments: Competitors or collaborators?. *Plenary and regular lectures, Abstracts, 10th International Congress on Mathematics Education.* Pág. 67.

Noss, R. (2004). Designing a learnable mathematics: A fundamental role for computers? *Plenary and regular lectures, Abstracts, 10th International Congress on Mathematics Education*. Pág. 83.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33, 135-165.

Williams, R. (2003a). Editorial comments. *Electronic Journal of e-learning*, http://www.ejel.org/volume-1-issue-1/issue1-editorial.htm, recuperado 27, marzo 2005.

Williams, R. (2003b). Editorial comments. *Electronic Journal of e-learning,* http://www.ejel.org/volume-2/vol2-issue1/issue1-editorial.htm, recuperado 27, marzo 2005.

Williams, R. (2004). Editorial comments. *Electronic Journal of e-learning,* http://www.ejel.org/volume-2/vol2-issue2/issue2-editorial.htm, recuperado 27, marzo 2005.

Réplica a la ponencia “atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación”, De la doctora Olimpia Figueras

Ángel Martínez Recio
Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba. España

Resumen de la ponencia

En su ponencia, Olimpia Figueras analiza el impacto de las Tecnologías de la Información y la comunicación (TIC) en la clase de matemáticas, considerando los cambios que las TIC demandan de los profesores para una correcta impartición de sus enseñanzas (forma de organizar la enseñanza en el aula, manera de obtener la información, forma de proponer actividades y tareas, competencias de los estudiantes, entre otras).

Particularmente analiza las posibilidades del docente para adecuarse a las exigencias que le plantean las TIC.

Comienza su ponencia narrando una experiencia de teleeducación que se desarrolló en México a partir de 1966 y que se extiende hasta nuestros días. Entiendo que la plantea como ejemplo de entorno telemático de aprendizaje que le sirve para reflexionar sobre el impacto de las TIC.

A continuación analiza diversos modos de introducción de las TIC en el aula.

Posteriormente estudia el papel del profesor, que atrapado en esta incesante evolución de la sociedad de la comunicación, tiene que hacer frente a una reorientación incesante de su papel profesional, debiendo adoptar una actitud de aprendizaje permanente, en el plano educativo y en el tecnológico, y un planteamiento constante de búsqueda de nuevas formas de enseñanza en el aula. Todo ello sin tener, necesariamente, la debida preparación para afrontar este reto.

Analiza a continuación la función que pueden tener las bibliotecas digitales, como medio de ofrecer a los docentes, vía Internet, soporte para su proceso de renovación docente.

La ponencia se concluye con la formulación de unas preguntas acerca del papel de los investigadores en este campo:

¿Cómo debemos acompañar a los docentes en su carrera cotidiana para alcanzar la tecnología?

¿Cómo podemos hacernos cómplices de ellos y no de las autoridades educativas que, con su política de mercado, presionan y tensan los proceso educativos?

¿Cómo ayudar a los profesores en servicio para que no se queden en la trampa de manera permanente?

Idea central de la ponencia

A mi juicio, no hay una idea central de la ponencia, puesto que la misma se centra en una descripción genérica de diversos aspectos de la situación mexicana, con relación a las TIC.

Tres ideas fuertes

Podríamos destacar como principales ideas de la ponencia las siguientes:

- Los importantes cambios estructurales que las TIC provocan en los escenarios educativos.

- El fuerte impacto de las TIC en el quehacer docente del profesor en servicio. La necesidad de reorientación de su papel docente, por la introducción de las TIC

- La conveniencia de ofrecer ayuda al profesor en servicio mediante sistemas como las bases de datos digitales y mediante las aportaciones de los investigadores a la docencia de los profesores.

Tres ideas débiles

- Haber planteado la experiencia de teleeducación en México, como ejemplo de entorno educativo apoyado en las TIC, quizá no haya sido lo más acertado. Mejor hubiera sido, a nuestro juicio, considerar los entornos telemáticos representados por las plataformas de e-Learning, que tanto nivel de penetración en educación están teniendo en los últimos años.

- Al hablar de los modos de introducción de las TIC en el aula que se han producido, no considerar el importante uso que los recursos didácticos virtuales están teniendo en área como la nuestra, como herramientas para la producción de aprendizaje significativo.

- Haber polarizado, en su proyecto, el sentido de la biblioteca digital sobre todo al ámbito de los estudios de creencias de los profesores, con bases de datos muy incipientes, enfocadas a nivel de primeros cursos de primaria.

Tres cuestiones específicas de educación matemática a debatir

Las tres cuestiones que propongo para debate están relacionadas con las tres ideas débiles que he señalado antes.

- ¿Qué papel desempeñan los espacios telemáticos abiertos por las plataformas de e-Learning en la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles educativos. ¿Qué relación tienen con el Espacio Educativo Superior Europeo, de próxima implantación?

- ¿Qué significado y que importancia pueden tener las bibliotecas virtuales como soportes de información al servicio del profesorado y el alumnado.

- ¿Qué importancia concedemos al uso de recursos didácticos virtuales (applets, virtual manipulatives) en la enseñanza de las matemáticas. ¿Qué valor tienen para la producción de aprendizaje significativo?

Yo adelanto mi opinión en cada uno de estos tres puntos.

Plataformas de e-Learning

En la Unión Europea existe actualmente un proceso importante de renovación en la educación universitaria, centrado en el objetivo de consecución del nuevo Espacio Educativo Superior Europeo.

La creación de ese nuevo espacio lleva aparejada la introducción de nuevos objetivos educativos y nuevos modelos de enseñanza, que implican nuevas herramientas de comunicación didáctica.

Los objetivos de enseñanza se van a centrar en el desarrollo de competencias no sólo específicas de la titulación concreta, sino también de un ámbito más general (capacidad para resolver problemas, para gestionar la información, para diseñar y gestionar proyectos, etc.).

El proceso de enseñanza/aprendizaje que se apunta va a poner el foco principal en el trabajo autónomo de los estudiantes, quienes con la ayuda del profesor serán los artífices de la construcción de sus propios conocimientos.

La función del profesor será orientar a los estudiantes en el proceso de construcción de sus conocimientos: presentando los temas, señalando la forma de abordarlos, aportando información pertinente, enfatizando los aspectos más importantes a asimilar, destacando las aplicaciones más relevantes, promoviendo entornos de aprendizaje; etc.

En nuestra opinión, esa función tutorial sólo se puede materializar con el auxilio de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. En particular los entornos telemáticos que abren las plataformas de e-Learning son especialmente valiosos para esos nuevos sistemas de enseñanza.

Una plataforma de e-Learning es una herramienta telemática que abre una amplia variedad de canales de comunicación virtual, síncrona o asíncrona, entre el profesor y los estudiantes, y de éstos entre sí, complementarios de los sistemas tradicionales: mensajería instantánea, chat, foro, tutoría electrónica, pizarra electrónica, videoconferencia, etc. Estos sistemas comunicación virtual favorecen una interacción más reflexiva entre los diversos agentes del proceso de enseñanza/aprendizaje, posibilitando así la construcción de conocimientos significativos por parte de los sujetos que aprenden.

Es oportuno señalar que el proceso de enseñanza/aprendizaje es un proceso eminentemente social, colaborativo. Y que es como consecuencia de un rico y variado conjunto de interacciones sociales como los sujetos pueden atribuir significados a los elementos conceptuales, procedimentales y actitudinales sobre los que operan los procesos de aprendizaje. Esas interacciones cobran toda su potencia, todo su dinamismo mediante la utilización de sistemas de enseñanza virtual, mediante utilización de plataformas de e-Learning.

Bibliotecas virtuales

En el ámbito del e-Learning, nos parece oportuno resaltar la importancia de las bibliotecas virtuales. Pero no con un sentido de herramientas puntuales de apoyo en un ámbito concreto y específico (como el que apunta la ponencia, en torno al campo de las creencias de los profesores). Nosotros consideramos las bibliotecas virtuales en un sentido fuerte del término, como herramientas de un enorme valor potencial en todos los ámbitos del proceso de enseñanza/aprendizaje.

Los sistemas de biblioteca tradicionales ponen al alcance de los estudiantes un conjunto importante pero limitado de fuentes de información. Las bibliotecas virtuales que empiezan a abrirse ante nosotros van a poner a nuestra disposición una cantidad tal de información que el verdadero problema no será la falta de información, sino el exceso de información. Las bases de datos electrónicas, los libros electrónicos con características interactivas y multimedia, consultables mediante conexión a la red de Internet, abren ante nosotros tantas posibilidades de acceso a la información que sitúan como objetivo educativo fundamental la capacitación para la gestión de la información.

Podemos comentar al respecto que en nuestra universidad estamos impulsando un proyecto de biblioteca virtual con un importante componente tecnológico y editorial, al servicio de la enseñanza virtual. Una biblioteca virtual ligada a nuestra plataforma de enseñanza virtual

Recursos didácticos virtuales

En el proceso de aprendizaje, los recursos didácticos desempeñan un papel esencial. La necesidad de rentabilizar al máximo los recursos escolares hace conveniente la introducción en el aula de recursos didácticos versátiles, que permitan crear una amplia variedad de situaciones didácticas relacionadas con el conjunto de contenidos previstos en la planificación docente.

Nos parece por ello que, al analizar el uso de las TIC en educación, el tema de los recursos didácticos virtuales merece una atención especial.

En lo que sigue nos referiremos con el nombre de 'recursos didácticos virtuales' a materiales didácticos virtuales de carácter manipulativo (applets, virtual manipulatives). Es verdad que el término 'recurso didáctico virtual' puede tener una acepción más amplia. Pero también puede tener la acepción que le damos, en un plano más cotidiano.

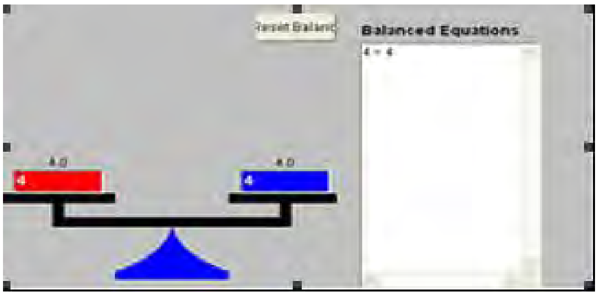
Un libro electrónico puede integrar todo un conjunto amplísimo de recursos educativos de carácter virtual. El libro tradicional puede presentar un determinado recurso y explicar como utilizarlo, pero no puede contener el recurso material en sí mismo (por ejemplo, una balanza, un geoplano o una calculadora). El libro electrónico sí puede integrar el recurso en forma simulada, virtual, transformándolo en un elemento informático de naturaleza similar a la del propio libro electrónico e incorporándolo, así, en el sistema informático que el libro comporta.

Esos recursos didácticos virtuales pueden ser de muy variados tipos. Por ejemplo, un juego de interacciones comerciales, para estudiantes de empresariales. O un laboratorio virtual para estudiantes de química. Aquí nos limitaremos a considerar recursos didácticos virtuales aplicables al área de matemáticas en Primaria y Secundaria. Por ejemplo, ábaco, calculadora, geoplano, graficador de funciones, etc.

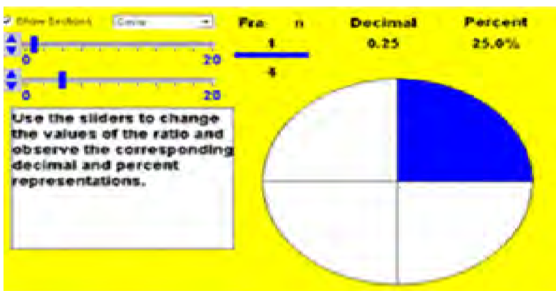
Un sitio Web paradigmático, en el ámbito de la educación matemática, es el reservado por el NCTM para alojar un extenso y rico conjunto de recursos didácticos virtuales:

http://www.illuminations.nctm.org/tools/index.aspx

Son recursos tales como:

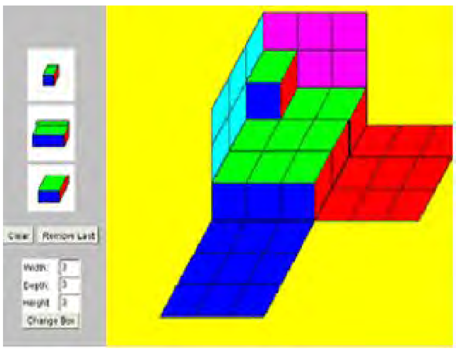


Balanza Numérica



Fraccionador

Volúmenes de paralelepípedos

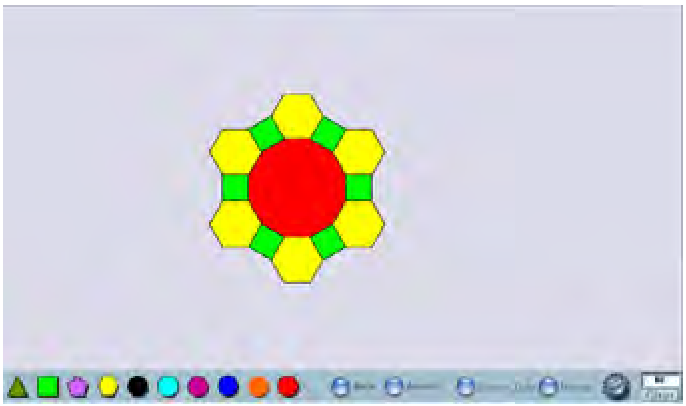


Nosotros hemos desarrollado también varios recursos didácticos virtuales, en esta misma línea de trabajo: Ábaco, Balanza Numérica, Bloques Multibase, Bolas, Calculadora, Dados, Diagrama de Barras, Fraccionador, Geoplano, Herramienta de Dibujo, Geometría de la tortuga, Medida de Superficies, Mosaicos, Regletas, Tangram. Estos recursos se encuentran alojados en la dirección Web:

http://www.uco.es/~ma1marea/Recursos/Recursos.html

Balanza Numérica

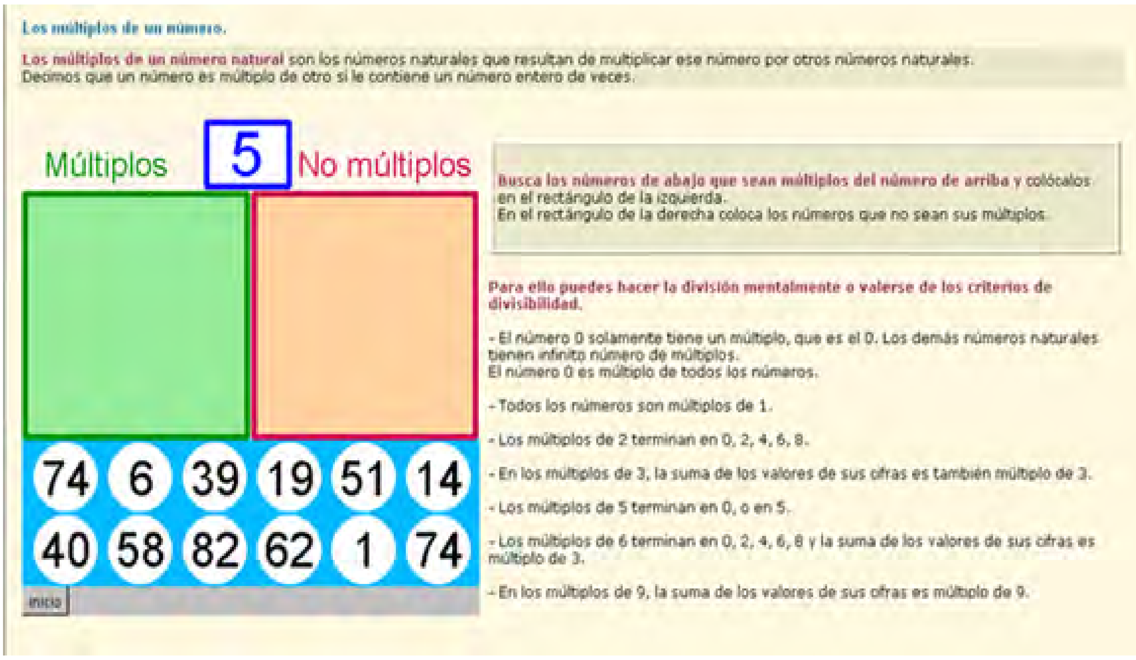
Fraccionador



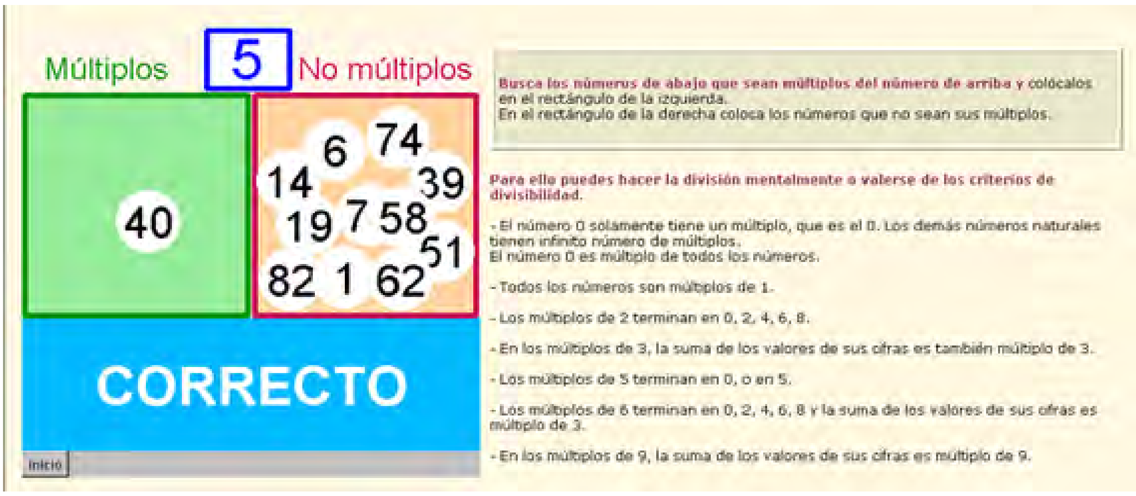
Mosaicos

Una versión simple de recurso didáctico virtual puede ser la siguiente (puede consultarse en la página del CNICE:

http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Multiplos_divisores/multiplo.htm)



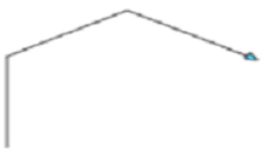
Donde el alumno simplemente tiene que arrastrar los números a uno de los rectángulos de la figura y podrá comprobar inmediatamente si la respuesta que aporta es o no correcta, teniendo información escrita para analizar, en su caso, la causa de su error.



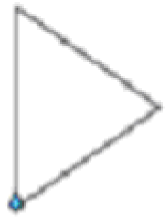
Una versión más compleja puede ser la siguiente, correspondiente a nuestra implementación elemental del clásico programa *logo*, de “geometría de la tortuga”:

Este recurso puede ser utilizado para dibujar polígonos regulares. Por ejemplo, el cuadrado puede resultar combinando 4 veces las instrucciones “Avanzar 100” y “Girar Derecha 90” (pues el ángulo del cuadrado es de 90º):

Pero si intentamos dibujar el triángulo equilátero, cuyos ángulos son de 60º, y utilizamos tres veces las instrucciones “Avanzar 100” y “Girar Derecha 60”, nos encontramos con el siguiente dibujo, correspondiente al recorrido efectuado por la tortuga:



Si reflexionamos, podemos darnos cuenta que al avanzar la tortuga, el ángulo de giro corresponderá al ángulo exterior del polígono, razón por la que tendríamos que girar un ángulo de 120º si quisiéramos obtener el triángulo equilátero:



Significado cognitivo de los recursos didácticos virtuales

Un recurso didáctico virtual es, de acuerdo con Moyer, Bolyard, y Spikell (2002), una representación visual, interactiva, en soporte Web, de un objeto dinámico, que presenta oportunidades para construir conocimiento matemático. Esta definición puede valernos en un primer acercamiento a este tipo de recursos. En todo caso, nosotros sustituiríamos el término "visual" por el término "multimedia" (es decir, pudiendo incluir animaciones, vídeo, audio, etc.), por dar a esta definición un significado más rico, más ajustado a nuestra propia interpretación de su ámbito de aplicaciones.

En esta misma línea, Heddens (2003) considera los recursos didácticos virtuales como simulaciones electrónicas de modelos materiales que ayudan a los alumnos a comprender mejor los objetos matemáticos.

La principal utilidad de los recursos didácticos virtuales, bajo esta interpretación, es la posibilidad que brindan de un acercamiento intuitivo a los objetos matemáticos, a partir de la manipulación simulada de un modelo material relacionado con el objeto matemático en cuestión. Manipulación que facilita la transición desde el plano de lo concreto, de lo empírico al plano de la abstracción matemática.

En esta interpretación, la utilidad del recurso didáctico virtual es similar a la del recurso didáctico material que simula, con las ventajas derivadas de su bajo coste económico y, quizá, de su mayor sencillez de uso. Una ventaja añadida es que el recurso virtual, por su mismo carácter de simulación visual, introduce un primer nivel de abstracción respecto al recurso didáctico material que simula.

Sin embargo no es esa apoyatura en la realidad empírica, en la manipulación de lo concreto lo que constituye, en nuestra opinión, la esencia del recurso didáctico virtual. Para nosotros, su valor fundamental reside en la capacidad que tiene para inducir la abstracción reflexiva sobre los objetos matemáticos con los que, a través del recurso, el sujeto interactúa.

Como señala Clements (1999), lo concreto no necesariamente coincide con lo empírico, con los objetos físicos. Por ejemplo, los números naturales, que pueden aparecer inicialmente para los alumnos como objetos abstractos (a los que se acercan desde la manipulación de objetos y situaciones materiales concretas), posteriormente se transforman en símbolos que, a pesar de su carácter abstracto, llegan a resultar concretos para los alumnos (el alumno puede comprobar la propiedad conmutativa de la suma actuando directamente sobre los propios números, sin necesidad de apoyarlos sobre objetos o situaciones materiales).

El recurso múltiplos y divisores (antes presentado) puede ser un ejemplo de recurso didáctico virtual que no simula un recurso didáctico material, sino que constituye un recurso con sentido propio en el ámbito virtual, aportando una forma lúdica de trabajar la noción de múltiplo. En el recurso, los números aparecen como objetos simbólicos sobre los se puede actuar, como si fueran objetos materiales (desplazándolos de una zona a otras, accionando mensajes de advertencia al desplazar los números a una zona, etc.). El valor del recurso no reside aquí en su capacidad para inducir pensamiento abstracto por manipulación de un sistema material simulado, sino en el entorno lúdico que crea para realizar operaciones estrictamente matemáticas.

Como indica Clements (1999), el carácter físico de un recurso didáctico no conduce al significado de la idea matemática. Los estudiantes pueden requerir inicialmente un material concreto para construir significados, pero posteriormente deben *reflexionar sobre las acciones* que hacen con los recursos y, con ayuda del profesor, crear representaciones crecientemente sofisticadas para sustentar sus ideas matemáticas. Es una abstracción reflexiva, usando la terminología de Piaget (1980), que no deriva directamente, mediante la percepción, de la acción manipulativa sobre el objeto, sino que resulta de la reflexión que se hace sobre las acciones que se ejercen sobre el objeto.

Es esa reflexión sobre las acciones, que con su ayuda se hacen, la que da auténtico valor al recurso didáctico virtual. De acuerdo con Dörfler (1991), en los procesos de reflexión abstractiva, la atención se centra sobre algunas relaciones que se ponen de relieve entre los objetos y situaciones soportes de la acción, durante el proceso de acción/reflexión. Estas relaciones demuestran ser estables cuando se repiten. Son *invariantes* de la acción.

Esos invariantes necesitan una cierta descripción simbólica. Los símbolos utilizados empiezan a sustituir gradualmente a los objetos de las acciones, llegando a hacerse finalmente objetos independientes de dichas acciones, manifestándose como objetos meramente simbólicos que obtienen su significación y sentido de las reglas que "gobiernan" dichas acciones (por ejemplo, los números naturales aparecen finalmente como objetos que se pueden definen y operar de acuerdo con las reglas de un sistema simbólico, axiomático, sin necesidad de pensar en las situaciones físicas en las que se puede apoyar inicialmente su construcción: regletas Cuisenaire, ábaco, etc.).

Los ejemplos analizados en el apartado anterior, utilizando nuestra herramienta "logo", nos permiten apreciar esa característica de los recursos didácticos virtuales que les hace aparecer como instrumentos favorecedores de la abstracción reflexiva: su carácter dinámico, interactivo, que permite al alumno plantear y recorrer diferentes direcciones de trabajo, experimentar conjeturas, probar distintas hipótesis en relación al problema que le ocupa, anticipar resultados, etc.

La elaboración de hipótesis, la posibilidad de anticipar mentalmente los resultados de las acciones nos sitúan en un escenario simbólico, donde el objeto es sustituido por su representación mental (o por su expresión simbólica), sobre la que se ensayan acciones también mentales, operaciones matemáticas.

Este carácter de los recursos virtuales, como herramientas favorecedoras de la abstracción reflexiva, enlaza bien con la consideración, que prevalece hoy en la mayoría de las propuestas curriculares relativas a los procesos de aprendizaje matemático, que entienden esencialmente como procesos de razonamiento.

Hay que tener en cuenta que, como recuerda Batista (1999), la matemática es primero y ante todo una forma de razonamiento.

El currículo tradicional ha puesto un énfasis especial sobre los procedimientos, sobre los algoritmos. En las propuestas curriculares actuales para la educación matemática se presta, en cambio, una atención creciente a los procesos de razonamiento matemático y de resolución de problemas. Se espera de los estudiantes que sean capaces de aplicar variadas estrategias y líneas de razonamiento en diferentes situaciones.

Utilización de los recursos didácticos virtuales

Por muy ricas que sean las posibilidades didácticas que ofrece un recurso didáctico, no se puede esperar que dicho recurso agote el conjunto de expresiones posibles, que en el marco de la realidad exterior, puede presentar un objeto matemático dado. Si se tiene en cuenta que el significado de un objeto es la enciclopedia de usos del término que denota al objeto, es necesario experimentar con diversos recursos y situaciones didácticas para poder alcanzar un aprendizaje significativo del mismo.

Hay que tener presente que, para nosotros -Martínez Recio (2000)-, los objetos matemáticos son objetos complejos que integran notaciones, elementos conceptuales y fenomenologías. Las fenomenologías de un objeto matemático son situaciones y problemas de tipo matemático, que corresponden a situaciones y fenómenos de la realidad exterior a dicho objeto, en las que dicho objeto se pone de manifiesto. Y que entre los elementos fenomenológicos y los elementos conceptuales existe una relación que expresa la vinculación de lo particular con lo general, de lo concreto con lo abstracto. La paulatina exploración de diferentes fenomenologías correspondiente a un mismo objeto matemático, permite ir construyendo los diferentes elementos conceptuales que dicho objeto matemático comporta.

Habitualmente, un recurso didáctico se corresponde con un marco fenomenológico determinado, que no agota el conjunto de expresiones didácticas del objeto matemático en cuestión. Por ejemplo, las regletas Cuisenaire nos introducen en el marco fenomenológico del número natural como expresión de la longitud. Las calculadoras nos introducen en un ámbito numérico más estrictamente simbólico. Ambos recursos deben ser combinados, junto a otros varios, para permitir una construcción crecientemente enriquecida de la noción de número.

Por lo demás, los conceptos matemáticos, según Vergnaud (1990), aparecen interrelacionados, conformando campos conceptuales. De manera que la comprensión de un concepto implica el conocimiento de las interrelaciones de dicho concepto con otros elementos de su propio campo conceptual. Lo que aconseja un uso de los recursos didácticos ligados a campos conceptuales.

Como ejemplo, en la dirección Web http://www.uco.es/~ma1marea/Aritmetica/Divisibilidad/Divisibilidad0.html puede observarse una posible forma de trabajar los objetos matemáticos correspondientes a un determinado campo conceptual –la divisibilidad-, apoyada en la utilización de recursos didácticos virtuales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Clements, D. (1999). "*Concrete" manipulatives, concrete ideas*. http://www.gse.buffalo.edu/org/buildingblocks/NewsLetters/Concrete_Yelland.htm

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop et al. (Eds.): *Mathematicsal Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Heddens, J. (2003). Improving Mathematics Teaching by Using Manipulatives. http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9706/13hedden.html

Martínez Recio, A. (2000). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. Córdoba: Servicio de Publicaciones. Universidad de Córdoba.

Moyer, P., Bolyard, J. y Spikell, M. (2002), What are virtual manipulatives. http://my.nctm.org/eresources/view_media.asp?article_id=1902

Piaget, J. y García, R. (1984). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics and Cognition*: *A Research Synthesis by the International Group for the PME* (pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia

Resumen

En este texto describo, ejemplifico y analizo diferentes opciones metodológicas de las fases de recogida y análisis de datos en investigaciones diseñadas para estudiar los procesos de aprendizaje de la demostración matemática basado en software de geometría dinámica. En el contexto más específico de la resolución de problemas de conjetura y demostración de geometría, muestro cómo las principales herramientas típicas (a veces exclusivas) de estas investigaciones resultan útiles para poder conocer con profundidad la actuación de los estudiantes durante la resolución de estos problemas y su forma de pensar.

Abstract

In this text I describe, exemplify, and analyze the main methodological options for gathering and analyzing data in research experiments aimed to study the processes of learning mathematical proof in dynamic geometry software environments. In the more specific context of solving geometry conjecture and proof problems, I show that the main tools typical (some exclusive) of this kind of research help to deeply understand students' thinking, behaviour and activity while solving conjecture and proof problems.

Introducción

Las herramientas informáticas se están usando en la enseñanza de todas las áreas de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, siendo su uso más frecuente en los niveles de Primaria y, sobre todo, Secundaria. En particular, una agenda de investigación muy activa es la dedicada a la enseñanza de la geometría con la ayuda del software de geometría dinámica. La principal ventaja de este software sobre los materiales didácticos tradicionales (tanto estáticos como dinámicos) es la facilidad y rapidez con que los estudiantes pueden transformar las construcciones hechas en la pantalla, realizar mediciones y disponer de un gran número de ejemplos tan variados como quieran. Esto da a los estudiantes la posibilidad de realizar experimentaciones que les permitan plantear y verificar conjeturas o encontrar propiedades matemáticas no evidentes con las que abordar la resolución del problema planteado.

El uso de software para la enseñanza de la geometría se generalizó a comienzos de los años 80 con la aparición del Logo. La segunda revolución se produjo unos años después, con la aparición del software de geometría dinámica (la primera presentación internacional de Cabri tuvo lugar en 1988, durante ICME-6). Desde entonces, numerosos investigadores de todo el mundo nos hemos dedicado a explorar las posibilidades del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría y a experimentar las más variadas formas de enseñanza. Dentro de esta agenda de investigación, una línea especialmente importante, tanto por el número de investigaciones como por su importancia en el contexto del aprendizaje de las matemáticas, es la dedicada a analizar los procesos de aprendizaje de la demostración matemática en contextos de software de geometría dinámica.

Paralela al incremento de las experimentaciones didácticas con software de geometría dinámica es la necesidad de desarrollar metodologías de investigación para la recogida y el análisis de datos en estas experimentaciones. En algunos casos se adaptan metodologías existentes. En otros casos surgen nuevos métodos de investigación basados en las peculiaridades del nuevo contexto.

Mi objetivo en este texto es describir, ejemplificar y analizar las principales herramientas metodológicas de recogida y de análisis de información típicas (a veces exclusivas) de las investigaciones sobre procesos de aprendizaje de la demostración basadas en el uso de software de geometría dinámica, en el contexto más específico de la resolución de problemas de demostración.

Existen varios programas de geometría dinámica de uso frecuente (Cabri, Sketchpad, Cinderella y otros). Cada programa tiene sus peculiaridades pero, para lo que nos interesa ahora, el comportamiento de los de uso más frecuente es bastante similar. Los ejemplos que presentaré a continuación están hechos con el programa Cabri, el programa de geometría dinámica de mayor implantación en España.

En las páginas siguientes utilizaré los términos “figura” y “dibujo” con los significados habituales en el contexto del software de geometría dinámica (Parzysz, 1988; Laborde, Capponi, 1994): Una figura es un objeto geométrico abstracto caracterizado por las propiedades matemáticas derivadas de los elementos y las herramientas usadas para su creación. Un dibujo es una representación particular en la pantalla de una figura. Cada figura se puede mostrar mediante una infinidad de dibujos, resultantes de cambiar en la pantalla las posiciones o tamaños de los elementos de la figura. Por otra parte, no es posible saber qué figura hay detrás de un dibujo concreto que vemos en la pantalla, pues es necesario conocer las herramientas usadas para su construcción y las propiedades matemáticas derivadas de las mismas.

Múltiples puntos de vista para analizar el aprendizaje de la demostración con software de geometría dinámica

Las partes críticas en cualquier investigación experimental en didáctica de las matemáticas son la recogida de información sobre la actividad de los estudiantes durante los experimentos y el análisis de la información recopilada. En ambos casos, la principal dificultad está en la necesidad que tenemos de conocer qué pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuándo y cómo toman decisiones, etc., todo ello para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Cuando la investigación es sobre el aprendizaje de matemáticas en entornos de software de geometría dinámica, además de las metodologías generales usadas en otros tipos de investigaciones, disponemos de algunas herramientas específicas.

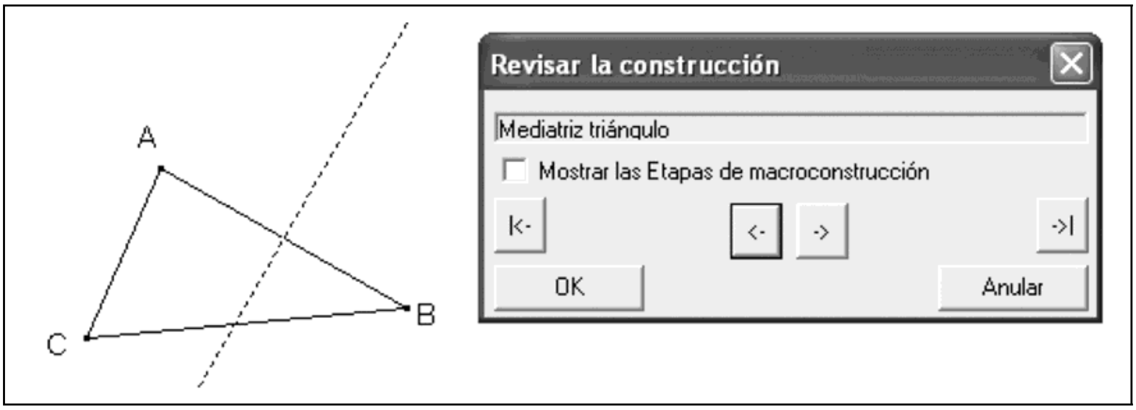
Recogida de información

La manera más usual de resolver un problema de conjetura y demostración, o sólo de demostración, con la ayuda del software de geometría dinámica es empezar construyendo una figura basada en las hipótesis del problema, después hacer experimentaciones mediante arrastre de elementos de la figura, buscando regularidades que nos permitan identificar una conjetura o, si ya la tenemos, comprobar su validez en una variedad adecuada de ejemplos y, por último, identificar propiedades matemáticas observables en la pantalla que permitan descubrir un camino de demostración de la conjetura validada por la experimentación. Para poder hacer un análisis detallado del proceso de resolución de un problema con software de geometría dinámica, el investigador debe tener información lo más completa posible sobre la interacción de los estudiantes con el ordenador, pues las claves para entender qué han hecho los estudiantes y por qué lo han hecho, en qué estaban pensando, cuándo y por qué han tomado una decisión, etc. casi nunca están en el resultado (archivo o texto en papel), sino en el proceso.

Es conocido que hay varios métodos de recogida de datos de uso frecuente como son la recogida de la producción escrita de los estudiantes (respuestas de cuestionarios o soluciones de problemas), la grabación en video cuando los estudiantes trabajan en grupo, o las entrevistas clínicas. Cuando la investigación se basa en el uso de software de geometría dinámica, estos métodos son también útiles pero, además, tenemos otros específicos, propios de este contexto de experimentación:

*Archivos creados por estudiantes, con figuras construidas y revisión de la construcción hecha.

Los programas de geometría dinámica incluyen un comando que permite revisar la construcción hecha en un archivo, mostrando en la pantalla la sucesión de pasos dados por los estudiantes de principio a fin de la construcción y el comando usado en cada paso. De esta manera podemos ver el orden en que han sido añadidos los elementos de la figura y saber qué herramienta han usado para crear cada elemento. Así, en el ejemplo de la figura 1 podemos darnos cuenta de que un estudiante ha usado el comando "mediatriz" y el otro el comando "recta perpendicular". Al analizar la resolución completa del problema por ambos estudiantes, se ve que esta diferencia (la recta perpendicular no está ligada al punto medio del lado) resulta crucial para entender por qué el segundo estudiante no fue capaz de llegar a una solución correcta.



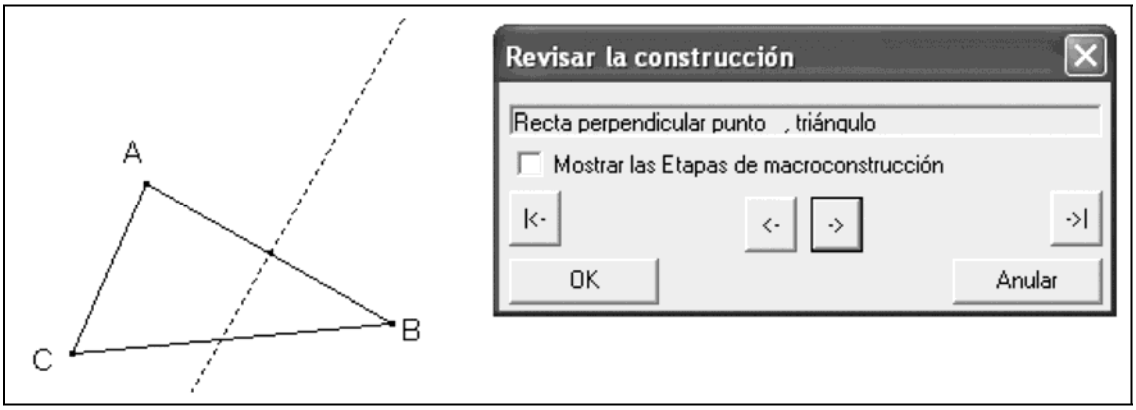


Figura 1. Comando "revisar la construcción".

Un inconveniente del comando revisión de la construcción es que no muestra los objetos borrados durante el proceso de construcción, por lo que no podemos, por ejemplo, ver las soluciones erróneas intermedias que los estudiantes han descartado. Esto es análogo a lo que ocurre en las investigaciones con papel y lápiz cuando los estudiantes usan hojas "de sucio" que no entregan o cuando hacen operaciones o dibujos que después borran. Un procedimiento que puede paliar parcialmente este inconveniente es pedir a los estudiantes que guarden periódicamente archivos con nombres diferentes.

* Registro automático de la actividad de los estudiantes.

Esta opción (registro de sesión) es exclusiva de Cabri[1]. Cuando está activada, el programa guarda de manera automática un archivo cada vez que se hace un cambio en la pantalla, tanto si se ha añadido o borrado un elemento de la figura, como si se ha modificado la posición o tamaño de algún objeto en la pantalla (punto, recta, polígono, etc.). El resultado es una secuencia de archivos que muestran los sucesivos dibujos manejados por los estudiantes durante su interacción con el ordenador. Como complemento, las versiones de Cabri que pueden hacer el registro de la sesión disponen de un comando que muestra, como una serie de diapositivas, la secuencia de archivos guardados durante la sesión.

El registro automático de una sesión de trabajo de los estudiantes es una herramienta de investigación muy valiosa, pues gracias a ella sí podemos ver los objetos borrados por los estudiantes durante la resolución del problema y también, aún más importante, podemos ver las manipulaciones de arrastre que han hecho y cuándo y dónde surgen las ideas que les permiten avanzar hacia la solución del problema, o que les llevan a un bloqueo.

La figura 2 muestra una secuencia de archivos (no siempre consecutivos) del registro de una sesión en la que los estudiantes resuelven el problema "Dados un triángulo ABC y tres rectas paralelas, construir otro triángulo DEF semejante a ABC que tenga un vértice sobre cada recta." El contexto es un proyecto de investigación que está desarrollando el estudiante de doctorado Félix Rodríguez en la Universidad de Valencia. El experimento se ha llevado a cabo con los 8 estudiantes matriculados en la asignatura "Métodos Geométricos", optativa de 2º ciclo de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de las Islas Baleares, en la que los estudiantes trabajaron por parejas con Cabri[2].

En la primera parte de la resolución (no mostrada aquí), los estudiantes han dibujado el triángulo ABC, las rectas *r, s* y *t,* el triángulo A'B'C' (congruente a ABC y fijo) y el otro triángulo (semejante a ABC, con el vértice A' fijo y con el vértice correspondiente al B perteneciente a la recta *t*). Las imágenes 1 a 4 resumen una serie de tanteos (arrastres del tercer triángulo desplazando el vértice sobre la recta *t*) que llevan a los estudiantes a descubrir la solución del problema: Trazan la recta que pasa por los vértices C' y su correspondiente en el tercer triángulo (imagen 5), comprueban que el punto de corte de esta recta y la recta *s* es un vértice del triángulo solución (imagen 6) y construyen el triángulo DEF pedido (imagen 7).

---

[1] El registro de sesión está implementado sólo en dos versiones del programa, la más antigua (Cabri 1) y la más reciente (Cabri II+). Este es el motivo por el que numerosas investigaciones han usado Cabri 1 a pesar de las ventajas de Cabri II en otros aspectos. La opción de registro de sesión no está disponible en la versión actual de Cabri II+ para Macintosh.

[2] En cualquier investigación sobre enseñanza apoyada en software de geometría dinámica (como caso particular de enseñanza apoyada en las TIC) hay dos componentes importantes: El tipo de interacción de profesor y estudiantes con la tecnología y el tipo de interacción entre profesor y alumnos junto a los roles de cada uno. En estas mismas actas, el texto de la ponencia de Olimpia Figueras profundiza en el primer componente y el texto de la ponencia de Pedro Cobo profundiza en el segundo componente. Mi objetivo en este texto es utilitario, pues reflexiono sobre metodologías de investigación.

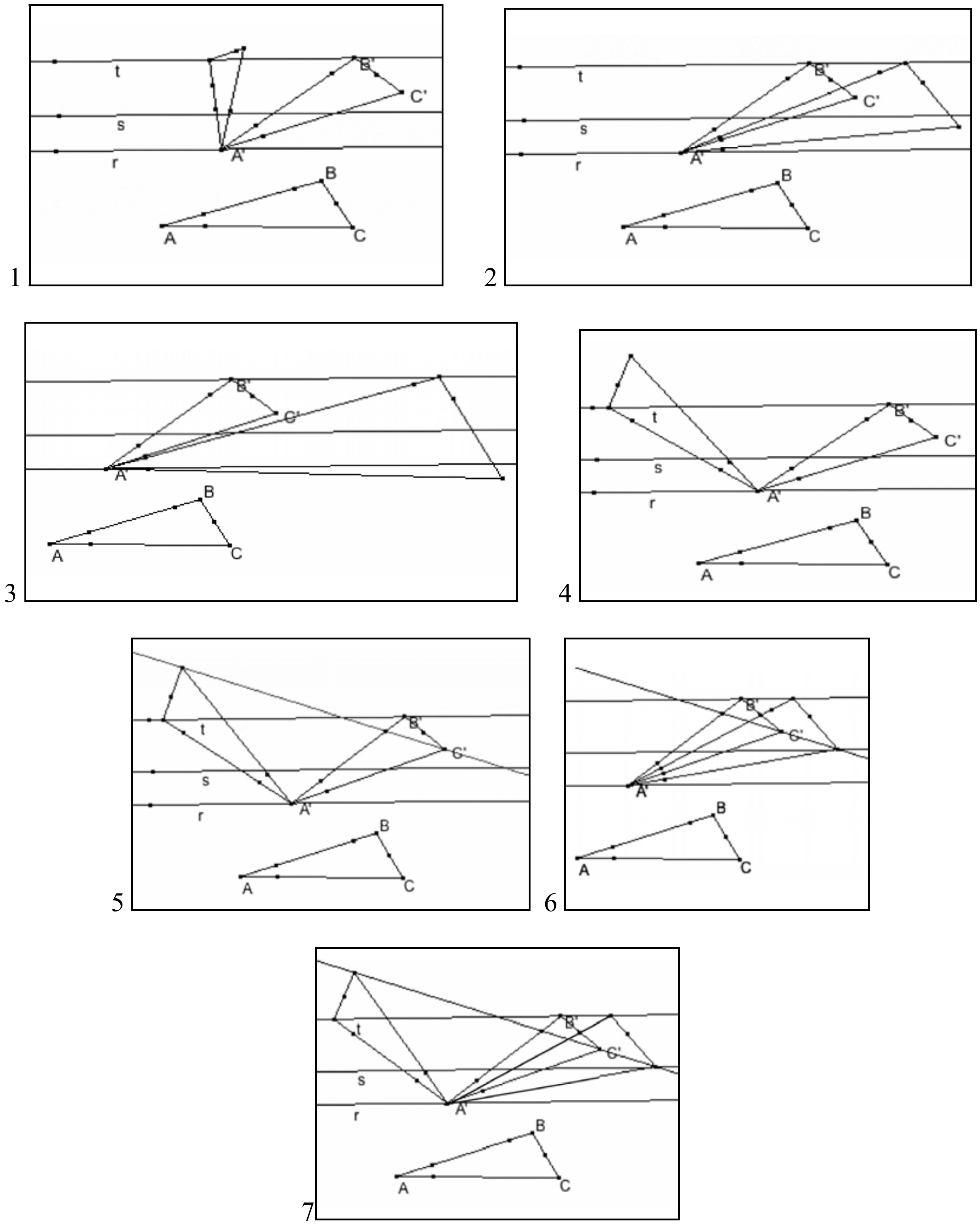
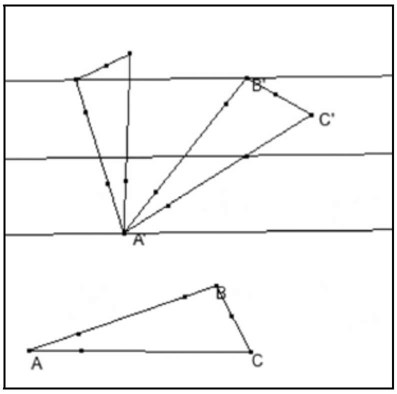


Figura 2. Fragmentos de un registro de sesión.

En el ejemplo anterior, al revisar la construcción del archivo de Cabri con la solución del problema, al investigador le quedan varias preguntas sin contestar. Observar el registro de la sesión resuelve algunas de estas cuestiones, pero no todas. La principal pregunta sin respuesta es ¿por qué se les ocurre trazar la recta por los dos vértices en la imagen 5? ¿Cómo han descubierto o intuido que el punto de corte de esa recta y la recta *s* es la solución del problema? En este ejemplo podemos ver cómo cada herramienta ayuda, pero la combinación de ambas (observar el registro de la sesión y analizar la construcción de uno de los archivos previos a la imagen 5) resulta más potente que cada una por separado (figura 3): Al modificar el tercer triángulo en un archivo previo a la imagen 5 observamos que está activado el comando "traza", por lo que los estudiantes ven que el vértice del tercer triángulo correspondiente a C' recorre una recta que pasa por C'.



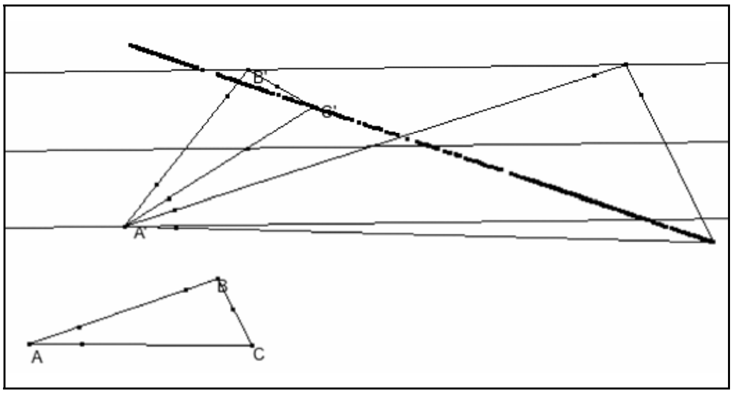


Figura 3. Recorrido de un punto con la traza activada.

Cuando se utiliza un programa de geometría dinámica que no dispone de la opción de registro de sesión, existen en el mercado varios programas de monitorización automática de la pantalla que pueden hacer un trabajo parecido. Estos programas guardan cada cierto tiempo (especificado en las preferencias) un archivo gráfico con una copia de la pantalla[3].

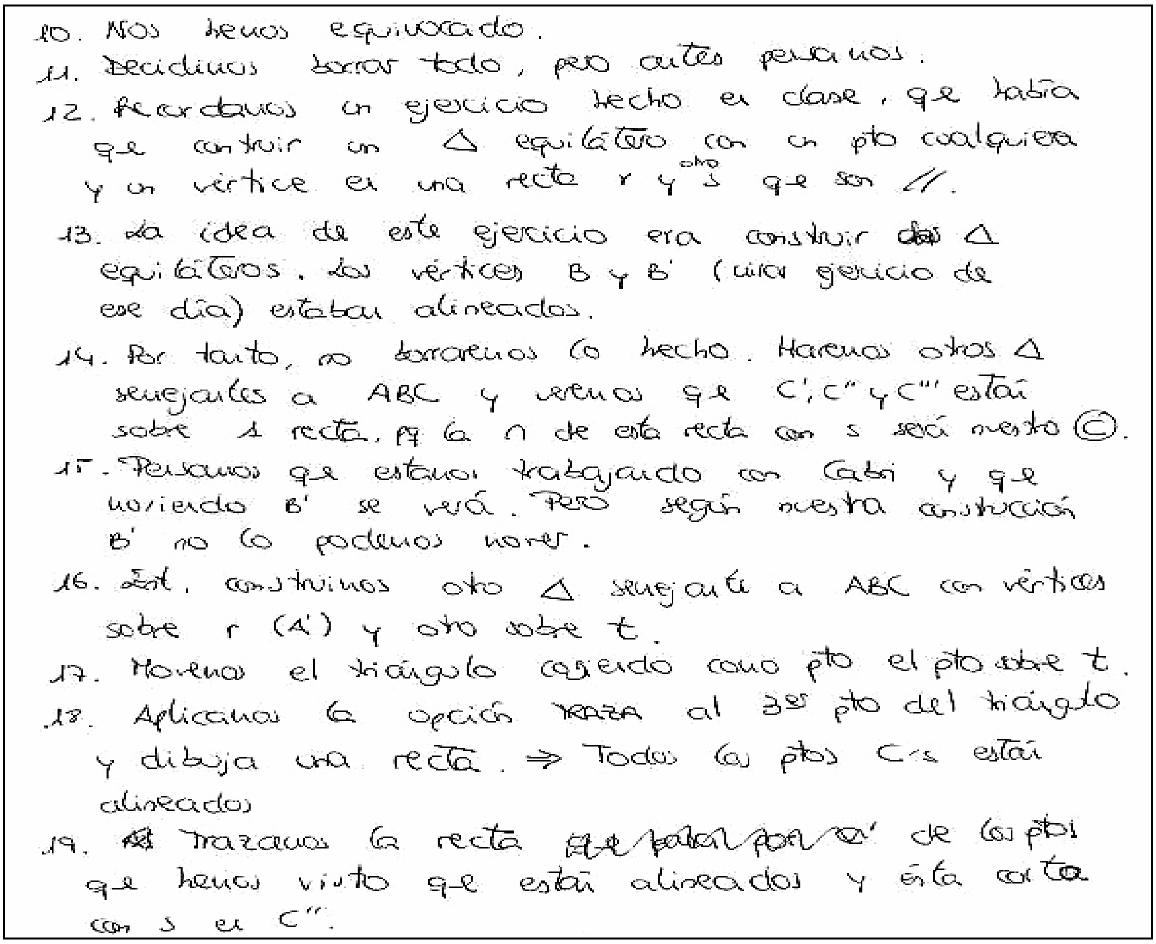
* Auto-protocolo escrito por los estudiantes.

Una de las metodologías típicas de la investigación sobre resolución de problemas es la de pedir a los resolutores "pensar en voz alta". Existen publicaciones en las que se discuten las ventajas e inconvenientes de esta metodología. El principal inconveniente alegado es que, al tener que verbalizar los pensamientos, decisiones, observaciones, etc. durante la resolución, el resolutor se ve obligado a interrumpir su flujo de pensamiento, lo cual puede distorsionar el proceso de resolución e incluso llevar a un resultado diferente del que se habría obtenido sin la verbalización. Otro inconveniente evidente de esta metodología es que sólo se puede utilizar en entrevistas clínicas.

En el proyecto de investigación que mencionaba en los párrafos anteriores, hemos experimentado una variante de pensar en voz alta, que denominamos "auto-protocolo", para tratar de usar esta metodología en el contexto de clases ordinarias. Los estudiantes, al mismo tiempo que avanzan en la resolución de un problema, van escribiendo notas comentando su actividad, los motivos de sus decisiones, etc. La directriz dada a los estudiantes es que, paralelamente a la resolución del problema, escriban comentarios sobre sus procesos meta-cognitivos de toma de decisiones, ideas o acciones, motivo por el que han decidido actuar así, etc. Al usar el auto-protocolo en situaciones de trabajo con papel y lápiz o con ordenador, la interferencia que puede producir la escritura del auto-protocolo en los estudiantes es menor que al pensar en voz alta, pues éstos de todas formas deben detener su flujo de pensamiento para escribir o manipular el ordenador.

Como los estudiantes trabajaban por parejas, una estrategia que utilizaban frecuentemente es que, mientras uno hacía en el ordenador lo que habían decidido, el otro escribía el auto-protocolo. Veamos a continuación (figura 4) el fragmento del auto-protocolo correspondiente al ejemplo de las figuras 2 y 3.

[3] En el mercado hay programas tanto para Macintosh (por ejemplo Screen Movie Recorder) como para Pc (por ejemplo FlashCam).



10. Nos hemos equivocado.
11. Decidimos borrar todo, pero antes pensamos.
12. Recordamos un ejercicio hecho en clase, que había que construir un △ equilátero con un pto cualquiera y un vértice en una recta r y otro s que son //.
13. La idea de este ejercicio era construir dos △ equiláteros, los vértices B y B' (mirar ejercicio de ese día) estaban alineados.
14. Por tanto, no borraremos lo hecho. Haremos otros △ semejantes a ABC y veremos que C', C'' y C''' están sobre 1 recta, pq la ∩ de esta recta con s será nuestro Ⓒ.
15. Pensamos que estamos trabajando con Cabri y que moviendo B' se verá. Pero según nuestra construcción B' no lo podemos mover.
16. Ent. construimos otro △ semejante a ABC con vértices sobre r (A') y otro sobre t.
17. Movemos el triángulo cogiendo como pto el pto sobre t.
18. Aplicamos la opción TRAZA al 3er pto del triángulo y dibuja una recta. ⇒ Todos los ptos C's están alineados
19. Trazamos la recta ~~que pasa por C'~~ de los ptos que hemos visto que están alineados y ésta corta con s en C''.

Figura 4. Fragmento de auto-protocolo.

El auto-protocolo confirma la conclusión extraída del análisis del registro de sesión y la revisión de una construcción vistos más arriba (figuras 2 y 3), de que la traza del punto permite a los estudiantes caracterizar la recta que lleva a la solución. Lo que no podía deducirse al analizar la información proporcionada por el ordenador, pero sí aparece explícitamente en el auto-protocolo (#10 a #14), es que los estudiantes decidieron seguir ese camino porque recordaron la forma de resolver otro problema planteado antes en el curso (con lápiz y papel*): “Dados un punto P y dos rectas paralelas r y s, construir un triángulo equilátero que tenga uno de sus vértices en el punto P, otro vértice sobre la recta r y el otro sobre la recta s.”*

Análisis de información

Para el análisis de los datos recogidos en una investigación experimental, también hay algunas metodologías generales, como el análisis de protocolos, tratamientos estadísticos, clasificación de respuestas en categorías o tipos, etc. si bien abundan las específicas, propias de cada contexto concreto. En el contexto del aprendizaje de la demostración con la ayuda de software de geometría dinámica, una revisión de la literatura especializada muestra varios constructos que se están utilizando con éxito para entender los procesos mentales de los estudiantes cuando resuelven problemas de demostración, las dificultades que han sufrido, o los motivos por los que no han logrado completar con éxito una demostración. Podemos destacar los siguientes marcos de análisis de la información:

* Análisis de los tipos de arrastre realizados en la pantalla del ordenador.

El arrastre de objetos en la pantalla del ordenador es la característica más peculiar del software de geometría dinámica. Esta acción permite modificar en tiempo real el dibujo de la pantalla para convertirlo en otro dibujo asociado a la misma figura (realmente lo convierte en una sucesión casi continua de dibujos). La modificación continua como elemento didáctico favorecedor del aprendizaje, que supera las limitaciones del aprendizaje en contextos de lápiz/tiza y papel/pizarra, no es nuevo, pues siempre se han utilizado modelos articulados o deformables para representar determinados conceptos o propiedades matemáticos. Lo que sí es nuevo es la gran libertad de movimientos y transformación que permite el software de geometría dinámica.

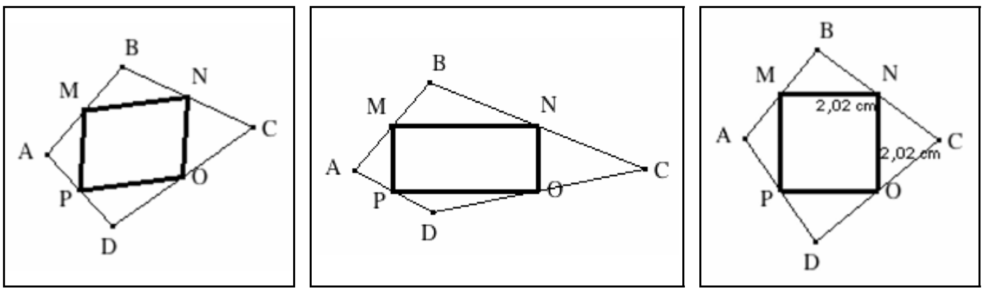
La segunda función del arrastre que descubren los estudiantes cuando empiezan a aprender a manejar un programa de geometría dinámica, después de la función inicial de modificar un dibujo, es la de verificar que la construcción que acaban de realizar es correcta. Aquí hay un contrato didáctico implícito según el cual si una construcción soporta cualquier arrastre sin perder ninguna de sus propiedades matemáticas características, el profesor y los estudiantes aceptan que la construcción es correcta.

No obstante, como señalan Arzarello y otros (1998 b, 2002) y Hölzl (1996), cuando un estudiante arrastra un objeto en la pantalla, puede hacerlo con varias finalidades diferentes, las cuales "cambian [durante la resolución de un problema] dependiendo de las modalidades cognitivas y epistemológicas según las cuales los estudiantes realizan el control (y en consecuencia realizan sus acciones) en Cabri" (Arzarello y otros, 1998 b, p. 33). En otras palabras, los estudiantes pueden realizar acciones de arrastre con distintas finalidades específicas en diferentes momentos. Entre los tipos de arrastre caracterizados por estos investigadores, cabe destacar como más útiles para analizar la actividad de los estudiantes los siguientes[4]:

- *Arrastre de test* (test): El arrastre se hace para comprobar si la construcción hecha conserva las condiciones matemáticas del problema, es decir si la figura creada se rompe o no. El ejemplo típico de este tipo de arrastre es cuando, al principio del curso, se pide a los estudiantes que construyan un rectángulo y éstos lo hacen utilizando segmentos verticales y horizontales; al mover un vértice de esta figura, los estudiantes ven cómo el rectángulo se convierte inmediatamente en un cuadrilátero general.

- *Arrastre errático* (wandering): El arrastre se hace sin un plan específico, de forma aleatoria, con la finalidad de modificar un dibujo pero sin que importe cómo es esa modificación. En este caso, no hay que confundir que el recorrido del cursor por la pantalla sea aleatorio, es decir que no está predeterminado por el estudiante, con que el estudiante haga el arrastre sin ninguna finalidad específica. Este tipo de arrastre es muy frecuente cuando, tras haber construido una figura que se ajusta al enunciado de un problema y haber verificado que la construcción es correcta (arrastre de test), los estudiantes empiezan a explorar la figura buscando invariantes matemáticos sin ninguna idea previa de qué invariantes buscar ni dónde o cómo encontrarlos.

- *Arrastre guiado* (guided): Se arrastra un punto u otro objeto con el fin de obtener un caso particular de la figura construida (particular por su forma, tamaño, posición, ...).



[4] Incluyo junto a las etiquetas de los tipos de arrastre su denominación en inglés para facilitar relacionar este texto con publicaciones en inglés.

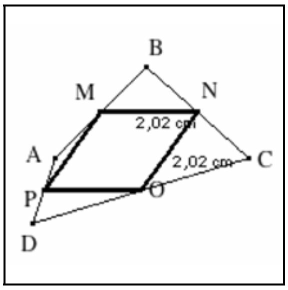


Figura 5. Arrastre guiado durante el descubrimiento del teorema de Varignon.

Una situación muy frecuente en la que está presente el arrastre guiado es la de haber construido una figura en la que interviene un cuadrilátero general y el estudiante modifica el dibujo de la pantalla para conseguir que ese cuadrilátero se transforme en diversos cuadriláteros específicos (paralelogramo, rombo, rectángulo, etc.). Por ejemplo, se pide resolver el problema: "Dado un cuadrilátero ABCD, sea MNOP el cuadrilátero formado al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de ABCD. ¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Cuándo es MNOP un cuadrado? ¿Y un rombo?" (teorema de Varignon). En la figura 5 vemos una secuencia de dibujos obtenidos mediante arrastres guiados durante la resolución de este problema con el objetivo de hacer que MNOP sea, sucesivamente, un rectángulo, un cuadrado y un rombo. En cada caso, los estudiantes trataban de encontrar alguna particularidad de ABCD que les permitiera caracterizar su relación con el correspondiente cuadrilátero MNOP.

- *Arrastre sobre un lugar geométrico oculto* (dummy locus o lieu muet): El arrastre se hace procurando que los sucesivos dibujos conserven cierta propiedad matemática que no es válida para la figura construida. En este caso, generalmente hay un punto de la figura cuyo recorrido coincide con un lugar geométrico oculto. La identificación y caracterización de ese lugar geométrico suele llevar a la solución del problema. El comando "traza" combinado con este tipo de arrastre es una eficaz herramienta para identificar el lugar geométrico oculto, que no está disponible en los entornos de papel y lápiz.

La figura 6 resume la actividad de una pareja de estudiantes de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia tratando de resolver el problema "Sean A, B y C tres puntos fijos no alineados y D un punto libre diferente. ¿Qué condiciones debe cumplir D para que las cuatro mediatrices del cuadrilátero ABCD se corten en un único punto?" El contexto es una asignatura de didáctica de las matemáticas de Secundaria, de libre elección, en la que los estudiantes trabajan por parejas con Cabri para resolver diversos problemas, resoluciones que después profesor y alumnos analizan desde las perspectivas matemática y didáctica.

Los estudiantes empiezan haciendo un arrastre errático hasta comprobar que, en principio, no es fácil que las cuatro mediatrices se corten (en un sólo punto). Después inician un arrastre guiado hasta lograr que las cuatro mediatrices se corten (figura 6, 1ª fila). Tras algunas experimentaciones más en las que encuentran algunas soluciones, deciden mover el punto D muy despacio para que las mediatrices no dejen de cortarse en un solo punto (figura 6, 2ª fila). Uno de los estudiantes intuye que el movimiento del punto D podría ser circular. Entonces, activan la traza del punto D y repiten el arrastre anterior, comprobando que el recorrido del punto D es similar a la circunferencia que pasa por los otros tres vértices (figura 6, 3ª fila). Ahora los estudiantes construyen la circunferencia que pasa por A, B y C (figura 6, último dibujo) y comprueban, de nuevo mediante arrastre guiado, que cuando D se desplaza sobre esta circunferencia las mediatrices se cortan en su centro. A partir de aquí, los estudiantes ya tienen una conjetura y empiezan a trabajar para demostrarla basándose en la propiedad de las mediatrices de equidistancia a los vértices del cuadrilátero (que han usado para determinar el centro de la circunferencia).

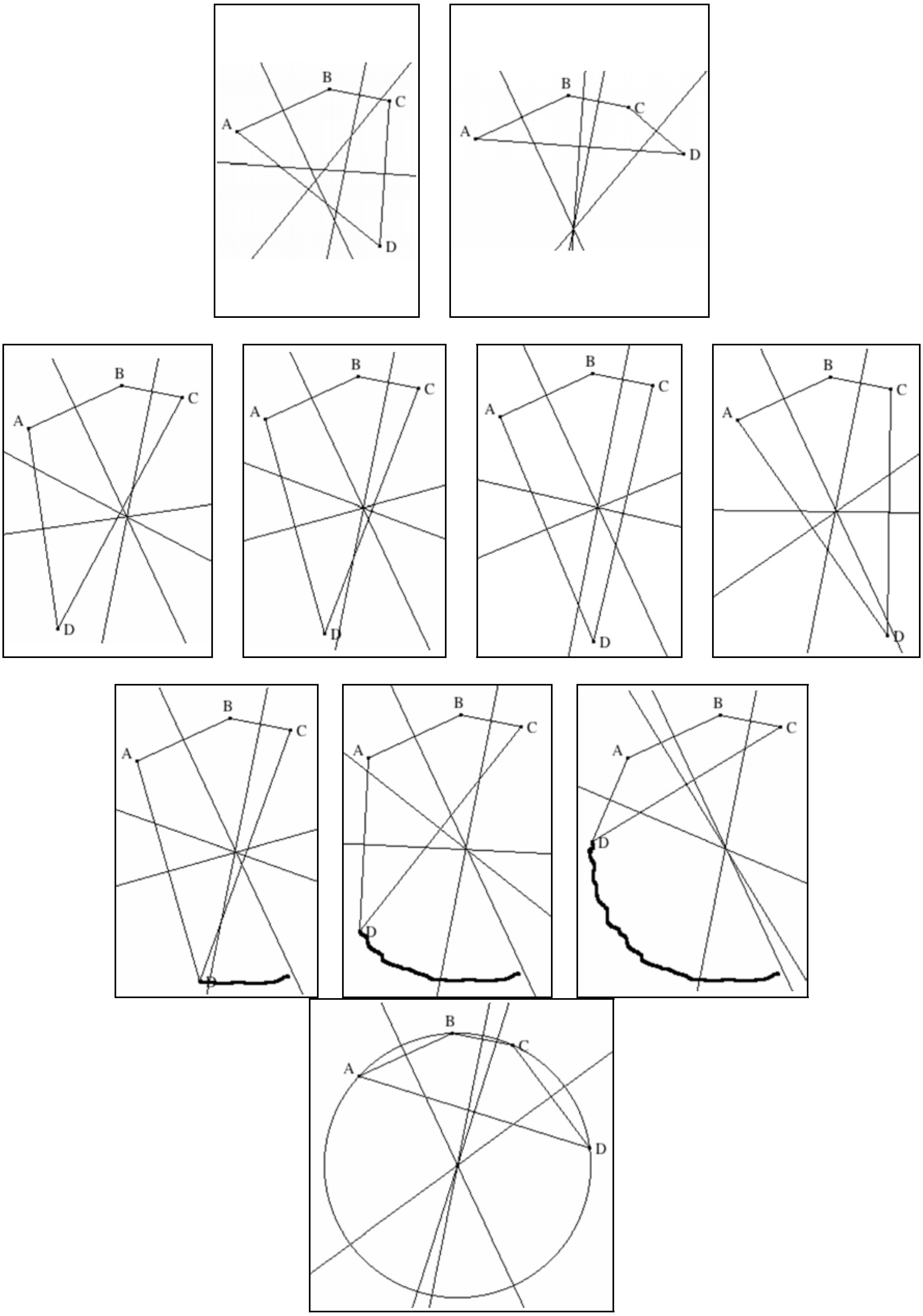


Figura 6.

Arzarello y otros (2002) hacen un análisis de las actuaciones de los estudiantes observados buscando identificar relaciones entre la fase de la resolución del problema en que se encontraban (ascendente o descendente; las describo en el apartado siguiente) y los tipos de arrastre que hacían. Por otra parte, también es posible relacionar los tipos de arrastre con las etapas de resolución de los problemas de conjetura y demostración. La tabla siguiente resume estas relaciones para los tipos de arrastre que he descrito en los párrafos anteriores. De esta manera, a la vista del tipo de arrastre que están realizando los estudiantes, los investigadores pueden deducir información sobre los objetivos, razonamiento, etc. de los estudiantes.

Etapas de resolución de un problema de conjetura y demostración	**Tipos de arrastre**
Construcción inicial	Test Errático
Descubrimiento de propiedades	Errático Guiado
Elaboración de una conjetura	Sobre un l. g. oculto Guiado
Verificación de la conjetura	Test Guiado
Demostración de la conjetura	---

* Análisis de las fases de la resolución de un problema de demostración.

Decía más arriba que, cuando se plantean problemas de demostración con software de geometría dinámica, un proceso ideal de resolución de estos problemas (figura 7) empieza construyendo una figura basada en las hipótesis del problema, sigue experimentando con esa figura mediante arrastre de sus elementos para identificar propiedades matemáticas o conjeturas y, después, para validarlas y, por último, concluye demostrando deductivamente la conjetura validada por la experimentación (la resolución descrita en la figura 6 es un ejemplo).

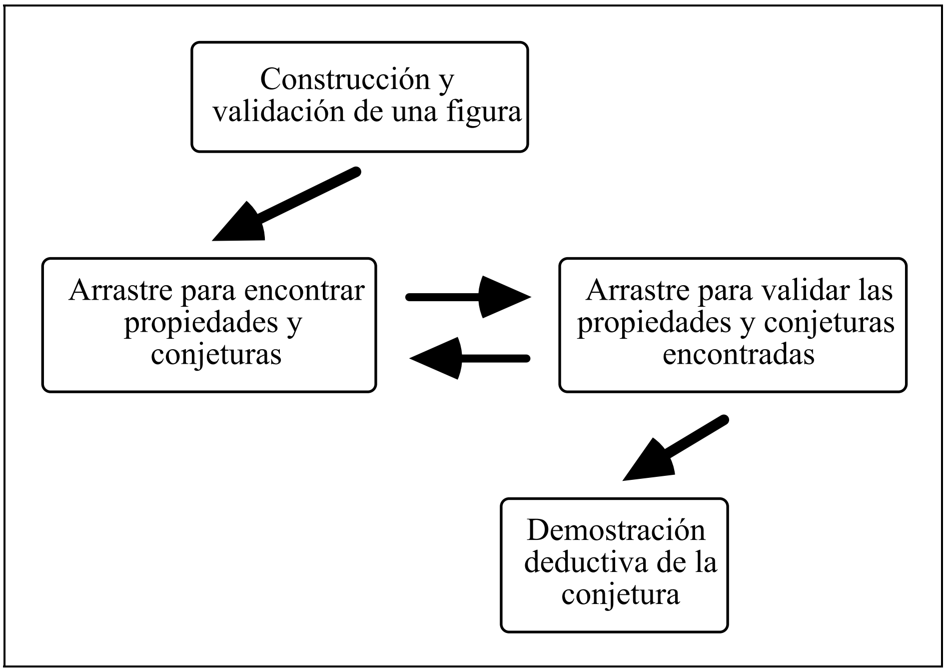


Figura 7. Proceso ideal de resolución de un problema de demostración con software de geometría dinámica.

En la práctica, los procesos seguidos por los estudiantes pueden ser bastante diferentes del descrito en la figura 7 por varios motivos: La acción de tutorización del profesor puede primar determinada forma de proceder de los estudiantes[5]. Éstos pueden ignorar alguna de las etapas por falta de experiencia. Los estudiantes pueden quedarse bloqueados en el proceso de búsqueda de conjeturas, no ser capaces de encontrar la forma de realizar la demostración deductiva, etc. En las resoluciones que sí llegan a realizar demostraciones deductivas, Arzarello y otros (1998 a) definen dos fases que caracterizan las relaciones entre la actividad empírica de elaboración de conjeturas y la actividad deductiva de su demostración:

- Una *fase ascendente* caracterizada por la actividad empírica dirigida a la mejor comprensión del problema, la búsqueda de una conjetura y su posterior validación o rechazo.

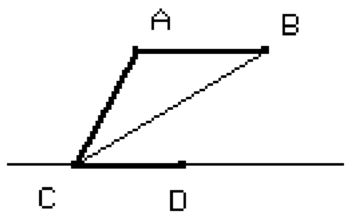
- Una *fase descendente* caracterizada por la actividad argumentativa (deductiva o no) dirigida a la elaboración de una demostración de la conjetura planteada.

Según este modelo teórico, la resolución de un problema de demostración se caracteriza por la transición de la fase ascendente a la fase descendente. En la realidad, la resolución de un problema puede estar formada por varias transiciones en una u otra dirección entre ambas fases, correspondientes a unos momentos de trabajo empírico y otros momentos de trabajo deductivo, a avances por caminos que no llevan al resultado deseado seguidos de retrocesos para iniciar nuevas fases ascendentes de búsqueda o verificación empíricas que dan paso a nuevas fases descendentes de producción deductiva. En el siguiente ejemplo (Marrades, Gutiérrez, 2000) muestro la resolución por una pareja de estudiantes de Secundaria del siguiente problema:

Haz una construcción con las siguientes condiciones:

- El segmento CD sobre una recta.
- El segmento AB paralelo al CD.
- El segmento AB tiene la misma longitud que el AC.

Investiga si el segmento BC es la bisectriz de ∠ACD.

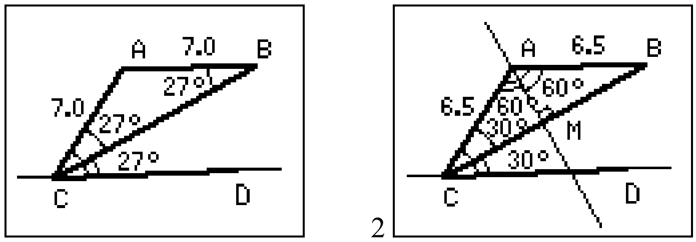


La figura 8 muestra los pasos más significativos de la actividad de los estudiantes. Una vez hecha la construcción correctamente, los estudiantes empiezan la resolución haciendo algunas mediciones (AB, AC, ∠ABC, ∠ACB y ∠BCD; ver figura 8.1) y comprobando mediante arrastre que los tres ángulos son siempre iguales. Después demuestran la congruencia de ∠ABC y ∠BCD:

1. *∠BCD = ∠ABC porque son alternos internos.*
2. *AB = AC.*
3. *AB // CD.*

Después de hacer algunos cambios en la figura de la pantalla, los estudiantes creen que ya pueden escribir una demostración de la relación pedida en el enunciado. Entonces (figura 8.2) añaden la recta perpendicular a CB por el punto A, marcan el punto M de intersección de esta recta con CB y miden los ángulos ∠CAM, ∠BAM y ∠AMB. Mediante arrastre, verifican que ∠CAM y ∠BAM miden siempre lo mismo. Por último, escriben en su libreta:

[5] Véase el texto de la ponencia de Pedro Cobo para profundizar en este aspecto.



1 2

Figura 8.

4. *Si AB = AC y AB es paralelo a CD, entonces □BCD = □ABC por alternos internos y □ACB = □ABC por el 2º criterio de igualdad* [de triángulos] *dos lados y un ángulo comprendido* [iguales].
5. *AB = AC, un lado.*
6. *AM* [es un lado] *común.*
7. *□CAM = □BAM un ángulo comprendido.*
8. *Por lo tanto, si ΔACM = ΔABM entonces □ACB = □ABC.*
9. *□ABC = □BCD.*
10. *□ACB = □ABC.*
11. --> *□BCD = □ACB (* [luego CB es la] *bisectriz de □ACD).*

En este resumen encontramos las dos fases de la demostración claramente diferenciadas: Los episodios 1 a 3 corresponden a la fase ascendente y los episodios 4 a 11 corresponden a la fase descendente. Sin embargo, un análisis más detallado muestra que hay varias transiciones entre fases ascendentes y descendentes. La primera se produce cuando los estudiantes, después de las mediciones y verificaciones iniciales (fase ascendente, figura 8.1) demuestran la congruencia de □ABC y □BCD (fase descendente, episodios 1 y 3). Aunque intentan seguir escribiendo la demostración, deben volver a una fase ascendente para añadir a la figura elementos auxiliares que necesitan y verificar mediante arrastre las relaciones de congruencia entre los ángulos (figura 8.2). Hecho esto, ya están en condiciones de terminar de escribir la demostración, pues han identificado las propiedades y relaciones que necesitan, y pasan a otra fase descendente (episodios 4 a 11).

En numerosas publicaciones relacionadas con el aprendizaje de la demostración matemática se dice que generalmente una parte de la actividad de los matemáticos profesionales cuando están investigando un nuevo teorema es de tipo empírico, y que éstos sólo proceden a escribir una demostración formal del nuevo resultado cuando están suficientemente convencidos de la veracidad del mismo. Por lo tanto, también ahí encontramos las fases ascendente y descendente.

* Análisis de la <u>unidad cognitiva de teoremas</u> observable en la resolución con éxito de problemas de demostración.

Mariotti y otros (1997) dicen que el análisis de las formas de trabajar de geómetras antiguos y actuales pone de relieve que existe una continuidad entre los procesos de producción de una conjetura y de elaboración de una demostración de la misma. Esta misma continuidad puede verse en experimentos con estudiantes que resuelven con éxito problemas de conjetura y demostración. Esta continuidad, que estos investigadores llaman la unidad cognitiva del teorema, se basa en las relaciones cognitivas establecidas por el resolutor del problema entre los resultados de su actividad exploratoria de búsqueda de una conjetura y su actividad deductiva posterior de búsqueda de una demostración para las conjetura hallada, de forma que las ideas surgidas durante la actividad exploratoria son la base para la construcción de la demostración deductiva:

> *"Durante la producción de la conjetura, el estudiante progresivamente trabaja en su enunciado mediante una actividad argumentativa progresiva funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones. Durante la posterior etapa de demostración del enunciado, el estudiante conecta con este proceso de forma coherente, organizando algunos de los argumentos previamente producidos en una cadena lógica."* (Garuti, Boero, Lemut, 1998)

En el ejemplo de la figura 8 existe unidad cognitiva entre las experimentaciones empíricas en el ordenador y la escritura de una demostración de la conjetura, pues los estudiantes, a través de la actividad de manipulación empírica (medición, arrastre y observación de las medidas) descubren las propiedades que luego utilizan para escribir el argumento de la demostración. Esta demostración tiene partes de tipo deductivo aunque, globalmente, no podamos considerarla una demostración deductiva por la falta de justificación adecuada de algunas relaciones (principalmente de la igualdad de □CAM y □BAM).

También en el ejemplo de la figura 6 podemos reconocer la presencia de la unidad cognitiva del teorema, pues los estudiantes, después de la experimentación inicial, construyen la circunferencia circunscrita (con centro en el punto de corte de dos mediatrices y que pasa por los puntos A, B y C) y, después de terminar las exploraciones y verificaciones empíricas, utilizan esta propiedad de las mediatrices para escribir la demostración de la conjetura que resuelve el problema.

Veamos ahora un tercer ejemplo (Marrades, Gutiérrez, 2000), dos estudiantes de Secundaria resolviendo el problema del corte de las mediatrices de un cuadrilátero en un sólo punto, en el que los estudiantes encuentran la relación correcta que resuelve el problema, pero la falta de unidad cognitiva les impide demostrarla.

Los estudiantes comienzan realizando la construcción del cuadrilátero con las mediatrices y arrastrando el vértice D. Realizan diversos arrastres sin lograr ningún ejemplo con las cuatro mediatrices cortándose, añaden las medidas de los lados y los ángulos y siguen transformando la figura, hasta que obtienen un rectángulo y un cuadrilátero cruzado (figura 9.1). Los estudiantes siguen haciendo arrastres del punto D y obtienen algunos rectángulos y polígonos análogos al de la figura 9.2.

A continuación los estudiantes superponen los puntos B y C (figura 9.3) y, arrastrando el punto D, obtienen varios "triángulos", observando en todos que las cuatro mediatrices se cortan[6]. Abandonan este tipo de dibujos y vuelven a manipular cuadriláteros convexos, obteniendo diversos casos en los que se cortan las cuatro mediatrices. Los estudiantes escriben una conjetura: *La suma de las ángulos A y C es igual a la suma de B y D si queremos que las mediatrices se corten. La suma de los ángulos* [de cada par, A+C y B+D] *es 180°.*

Los estudiantes deciden construir la circunferencia con centro en la intersección de las mediatrices de dos lados opuestos y que pasa por C (figura 9.4). Como los vértices A y B no están en la circunferencia, los mueven hasta situarlos encima de ella (figura 9.5). A continuación escriben: *Las mediatrices se cortan en un punto. Ese punto es el centro de la circunferencia circunscrita* [al cuadrilátero ABCD]. *Los vértices equidistan del centro de la circunferencia.*

[6] Al no haber puesto los puntos B y C exactamente uno encima del otro, Cabri sigue considerando que existe el segmento BC y, por lo tanto, dibujando su mediatriz.

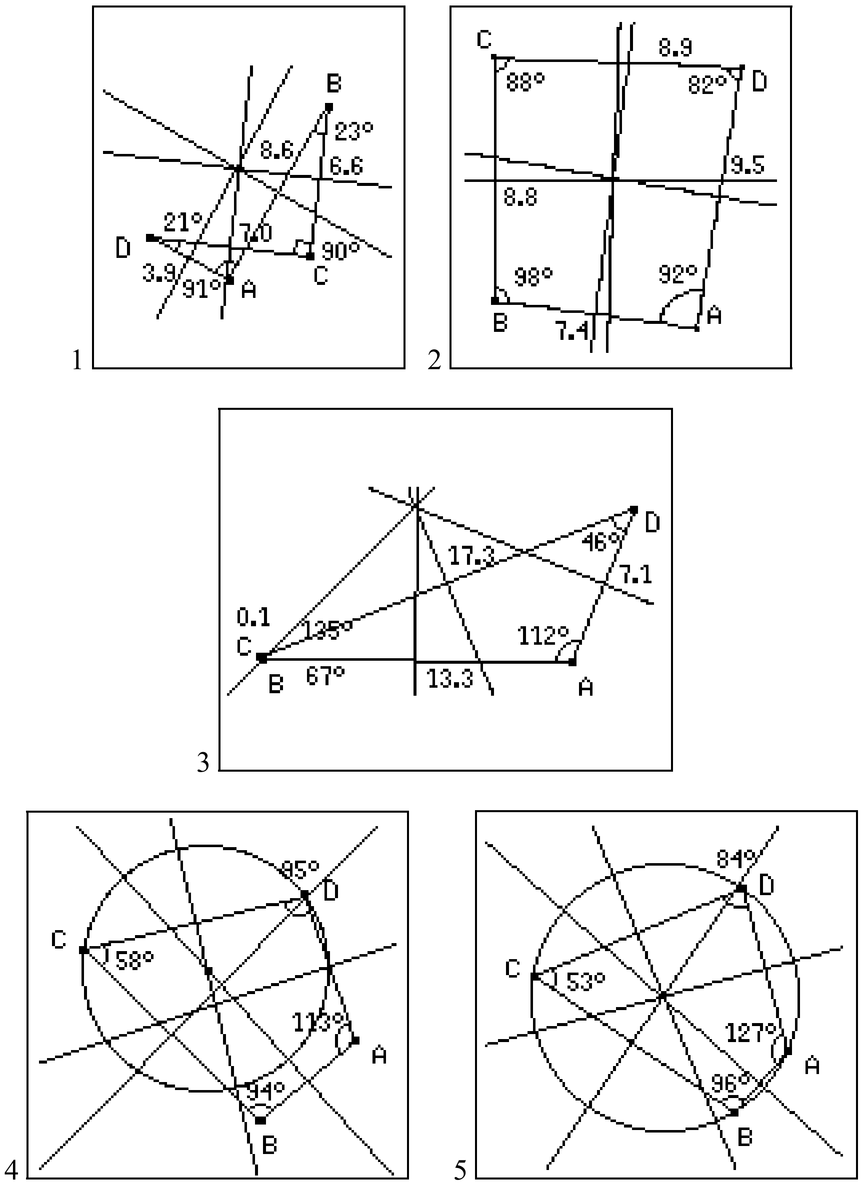


Figura 9.

Estos estudiantes han encontrado dos conjeturas correctas que resuelven el problema, pero no son capaces de demostrar ninguna de ellas porque durante sus experimentaciones en el ordenador no han encontrado propiedades que pudieran servirles para conectar las conjeturas con la propiedad de corte de las mediatrices. Por ejemplo, a diferencia de cómo construyen la circunferencia los estudiantes de la figura 6, éstos han usado las mediatrices de dos lados opuestos (AB y CD), por lo que los vértices A, B y C no pertenecen todos a la circunferencia. En otras palabras, no han logrado crear la unidad cognitiva del teorema.

Hay una evidente relación entre los constructos de las fases ascendente y descendente y de la unidad cognitiva de un teorema como herramientas de análisis de la actividad de los estudiantes: El primero permite diseccionar el proceso de resolución de un problema de conjetura y demostración distinguiendo los momentos en los que el estudiante está buscando información (de manera empírica exploratoria) y aquéllos en los que está organizando la información (de manera deductiva). El segundo permite identificar las relaciones funcionales entre los hallazgos producidos en la fase ascendente y las definiciones, propiedades, etc. usadas para organizar la demostración en la fase descendente. Sin embargo, estos constructos no son equivalentes pues dan lugar a análisis complementarios de la resolución del problema ya que las fases de resolución permiten observar la secuencia de momentos durante la resolución y la unidad cognitiva permite observar la coherencia entre las actividades de ambas fases (o la falta de ella).

La utilización de las fases de resolución de un problema de demostración y de la unidad cognitiva de un teorema como herramientas de análisis de datos no está restringida a las investigaciones de actividad en entornos de software de geometría dinámica, sino que también se pueden emplear cuando los estudiantes han trabajado en contextos de papel y lápiz. Sin embargo, en los contextos informáticos es donde dichas herramientas son más productivas, porque el uso de software de geometría dinámica hace explícita con mayor detalle la actividad empírica de los estudiantes que en contextos no informáticos transcurre en mayor medida en la mente de los estudiantes, sobre todo cuando éstos son más expertos o tienen un mayor nivel de razonamiento abstracto.

* Análisis de los tipos de demostraciones realizadas por los estudiantes.

Diversos investigadores han observado las formas de resolver problemas de demostración de estudiantes de diferentes niveles educativos y han llegado a elaborar algunas clasificaciones de las mismas. Las clasificaciones más fructíferas y de uso más frecuente en la actualidad son las definidas en Balacheff (1988 a) (ver también Balacheff, 1988 b) y en Harel, Sowder (1998). Posteriormente, otras investigaciones realizadas en España han analizado la aplicabilidad de dichas clasificaciones y han elaborado clasificaciones que profundizan y desarrollan las anteriores (Ibáñes, 2001; Marrades, Gutiérrez, 2000; Martínez Recio, 1999; Martínez Recio, Díaz Godino, 2001). De manera muy resumida, los tipos de demostraciones descritos por Balacheff y por Harel y Sowder son:

- Demostraciones empíricas:

  Empirismo naïf, demostración consistente en verificar la veracidad de la conjetura en uno o varios ejemplos elegidos generalmente de manera aleatoria.

  Experimento crucial, demostración consistente en verificar la veracidad de la conjetura en un ejemplo elegido cuidadosamente y pensando que si la conjetura es cierta en este ejemplo, será cierta siempre.

  Ejemplo genérico, demostración consistente en verificar la veracidad de la conjetura en un ejemplo elegido con la intención de que sea representante de la familia de todos los ejemplos y que las manipulaciones realizadas con el ejemplo sean manipulaciones con toda la familia. Los estudiantes intentan que las propiedades matemáticas que usan en la demostración aparezcan desvinculadas del ejemplo específico que están usando, por lo que esta forma de proceder supone un primer paso hacia las demostraciones deductivas.

- Demostraciones deductivas:

  Experimento mental, demostración consistente en utilizar un ejemplo para identificar propiedades pertinentes que a continuación se disocian del ejemplo concreto, se interiorizan de manera abstracta y se organizan en una cadena deductiva.

  Analítica o teórica, demostración deductiva abstracta, generalmente formal, basada en el uso de argumentos y operaciones mentales que no tienen ninguna relación con la manipulación de ejemplos concretos. Las demostraciones analíticas pueden ser transformativas o axiomáticas.

Síntesis final, implicaciones didácticas y sugerencias

Resumo mediante un diagrama (figura 10) las estrechas relaciones que hay entre los instrumentos o procedimientos de recogida de datos y los tipos de análisis que podremos hacer de esos datos que he presentado en las páginas anteriores. Este diagrama se podría ampliar añadiendo las metodologías generales de recogida y análisis de datos, pero eso queda fuera del objetivo de este texto.

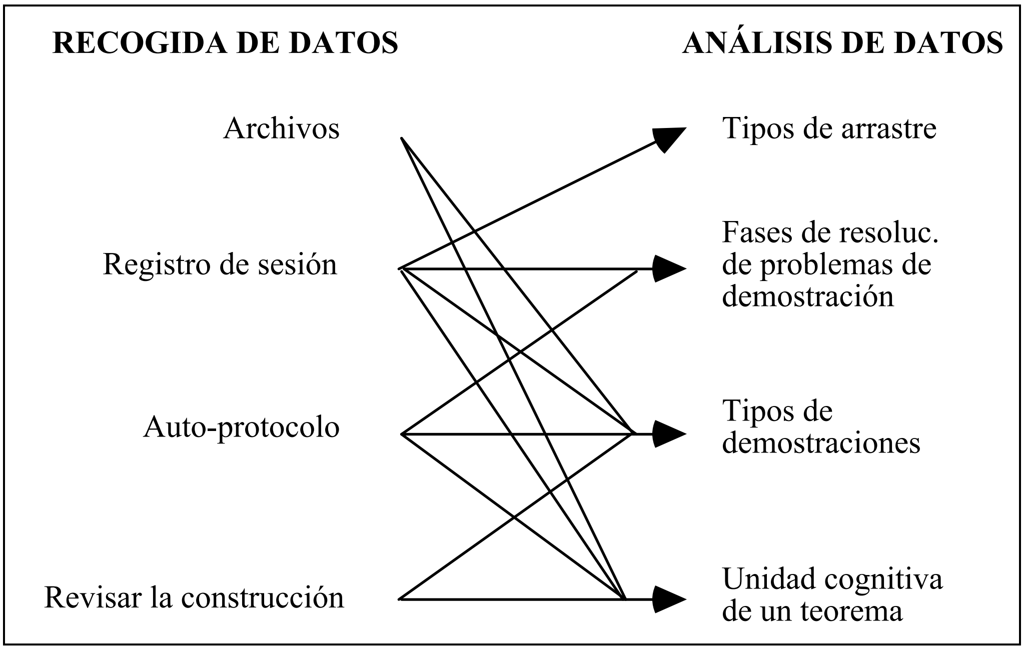


Figura 10. Relación entre formas de recogida y de análisis de datos.

Es fácil observar en las publicaciones que informan sobre investigaciones experimentales que el uso del software de geometría dinámica influye en la mayor o menor frecuencia con la que encontramos cada tipo de demostración. La forma de construcción de una figura en el ordenador y el uso del arrastre hacen que los ejemplos que manipulan los estudiantes adquieran con más facilidad el carácter de ejemplo genérico o experimento mental que el de ejemplo naïf o experimento crucial. Una cuestión que no está investigada, y sobre la cual estamos trabajando en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, es la de observar las posibles diferencias de comportamiento de estudiantes cuando resuelven problemas de geometría sintética en los entornos de papel y lápiz o de software de geometría dinámica.

Por otra parte, al analizar demostraciones deductivas elaboradas usando software de geometría dinámica se pone en cuestión la diferencia entre las demostraciones deductivas del tipo experimento mental y de los tipos analíticos definidos por Harel y Sowder, pues lo normal es que las demostraciones formales sean el resultado de una fase ascendente de experimentación con arrastres, mediciones, etc. Esta es una cuestión que merece la pena investigar.

Se ha alegado en ocasiones que el software de geometría dinámica es un obstáculo para que los estudiantes (generalmente de Secundaria) entiendan la necesidad de la demostración deductiva y aprendan a hacer este tipo de demostraciones, porque su dinamismo y la facilidad para observar ejemplos diversos hace que los estudiantes adquieran un grado de convicción de la veracidad de las conjeturas tan alto que no consideran necesaria la demostración abstracta deductiva. En estos casos el bloqueo se produce porque los profesores sólo ofrecen a sus alumnos la función de la demostración como forma de asegurar la veracidad de las conjeturas. Sin embargo, en otras investigaciones, al llegar a este punto de bloqueo, los profesores han presentado a los estudiantes la función de la demostración como forma de comprender por qué las conjeturas son verdaderas. De esta manera el profesor, aún asumiendo con sus alumnos que la conjetura es verdadera, tiene el recurso de plantear la conveniencia de entender por qué es verdadera.

En cuanto a los estudiantes (de Secundaria o universitarios) que ya han comprendido la necesidad de pasar de las demostraciones empíricas a las deductivas abstractas, el uso de software de geometría dinámica no supone el obstáculo señalado en el párrafo anterior, si bien no hay investigaciones que presenten información concluyente sobre la utilidad de este tipo de software para ayudar a estos estudiantes a mejorar su habilidad de razonamiento deductivo abstracto y la calidad de sus demostraciones.

Referencias

Arzarello, F. y otros (1998 a). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, en *Proceedings of the 22nd PME Conference* 2, 24-31.

Arzarello, F. y otros (1998 b). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, en *Proceedings of the 22nd PME Conference* 2, 32-39.

Arzarello, F. y otros (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* 34.3, 66-72.

Balacheff, N. (1988 a). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (tesis doctoral), 2 vols. Grenoble, Francia: Univ. J. Fourier – Grenoble.

Balacheff, N. (1988 b). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, en Pimm, D. (ed.) *Mathematics, teachers and children.* 216-235. Londres: Hodder & Stoughton

Garuti, R.; Boero, P.; Lemut, E. (1998): Cognitive unity of theorems and difficulty of proof, *Proceedings of the 22th PME Conference* 2, 345-352.

Harel, G.; Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Results from exploratory studies, en Schoenfeld, A.H.; Kaput, J.; Dubinsky, E. (eds.), *Research in collegiate mathematics education, III*, 234-283. Providence, EE.UU: American Mathematical Society.

Hölzl, R. (1996): How does 'dragging' affect the learning of geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 1.2, 169-187.

Ibáñes, M. (2001): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato* (tesis doctoral). Valladolid.: Universidad de Valladolid:

Laborde, C.; Capponi, B. (1994): Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14.1/2, 165-209.

Mariotti, M.A. y otros (1997): Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th PME Conference* 1, pp. 180-195.

Marrades, R.; Gutiérrez, A. (2000): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* 44.1/2, 87–125.

Martínez Recio, A. (1999): *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* (tesis doctoral). Granada: U. de Granada.

Martínez Recio, A.; Díaz Godino, J. (2001): Institutional and personal meanings of mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics* 48.1, pp. 83-99.

Parzysz, B. (1988): "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics* 19, 79-92.

Réplica a la ponencia:

Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica del doctor *Ángel Gutiérrez*.

Jesús Murillo Ramón
Departamento de Matemáticas y Computación. Universidad de La Rioja

Resumen
En nuestra opinión, plantarse una réplica a una ponencia, resulta en principio más cómodo y menos comprometido que elaborarla y presentarla a la comunicad científica, pues entendemos que bastaría con plantear la misma exponiendo aquellos aspectos más interesantes, destacando sus puntos fuertes y planteando puntos de vista alternativos sobre algunos aspectos recogidos en la misma, que como cualquier objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática puede contemplarse desde una óptica o perspectiva diferente, sin que esto signifique que el planteamiento sea mejor o peor, sino que constituyen elementos enriquecedores, con el objetivo fundamental de mejorar el proceso educativo de las matemáticas en todos los niveles educativos y aumentar el éxito escolar.

Estos posibles enfoques diferentes son los que permiten plantear elementos de discusión o debate, que enriquecen y sugieren otros objetos de estudio y líneas de investigación de la Didáctica de la Matemática. Con estos planteamientos, desarrollaremos la réplica que sigue a continuación. Vaya por delante nuestro reconocimiento a la amplia y fructífera trayectoria investigadora del Dr. Gutiérrez.

La ponencia presentada, comienza con una **Introducción** en la que se plantea en primer lugar una breve visión del uso de herramientas informáticas en la enseñanza de las Matemáticas y en particular en la de la Geometría. Señala asimismo el interés que en estos momentos existe en los investigadores por estudiar su utilización, sobretodo el del software de Geometría Dinámica.

El profesor Gutiérrez destaca la principal ventaja que presenta este software, sobre los materiales didácticos tradicionales tanto estáticos como dinámicos, a saber: La facilidad de representar figuras geométricas, en las que se pueden realizar mediciones y experimentaciones, que sugieren a los usuarios, el planteamiento de conjeturas en relación con el problema propuesto y su verificación, enfocando en muchos casos su solución y/o la posibilidad de encontrar propiedades matemáticas no evidentes de las figuras con las que abordar la resolución del problema planteado.

El objetivo fundamental de la ponencia es "*describir, ejemplificar y analizar las principales herramientas metodológicas disponibles en la actualidad para las investigaciones sobre procesos de aprendizaje de la demostración basadas en el uso del software de Geometría Dinámica en el contexto más específico de la resolución de problemas"*.

En el siguiente apartado de **Múltiples puntos de vista para analizar…,** señala las partes 2 críticas de cualquier investigación experimental en Didáctica de las Matemáticas: La recogida de la información de los estudiantes durante los experimentos y el análisis de esta información, haciendo hincapié en la dificultad de conocer *qué pasa por la cabeza de los alumnos* cuando están implicados en la actividad matemáticas, *cómo analizan* y *transforman* la información, …, aspectos fundamentales a tener en cuenta para mejorar el proceso de aprendizaje. De aquí el interés en que la recogida de la información sobre el proceso que han seguido en la resolución del problema, sea lo más completa posible ya que resulta fundamental para el investigador de cara a determinar las claves para entender qué han hecho los estudiantes y por qué lo han hecho.

A continuación pasa a describir algunas de las formas más usuales de recogida de la información en las investigaciones experimentales en Didáctica de las Matemáticas, incidiendo especialmente en aquellas que son casi exclusivas del software Cabri II Plus y no presentes en otro software de Geometría Dinámica. De entre los diversos métodos para recoger datos sobre las producciones de los alumnos (respuestas a cuestionarios, soluciones de problemas…), toma en consideración la forma más usual de resolver un problema utilizando software de geometría dinámica y elige uno específico de este contexto de experimentación, en el que se utilizan básicamente funcionalidades casi exclusivas de Cabri II Plus, aunque también señala la complementariedad en la recogida de información de los otros métodos usuales.

Para recoger los datos considera los siguientes instrumentos:

1. En los *archivos* creados por los estudiantes con las figuras construidas, utiliza la funcionalidad **revisión de la construcción**[1]. Aspecto este que el ponente Dr. Gutiérrez ilustra perfectamente con el gráfico de la Figura 1.

2. *Registro automático* de la actividad de los estudiantes durante el proceso de resolución, la funcionalidad **grabar sesión**[2] que cuando se activa guarda de forma sucesiva las diversas pantallas del proceso de resolución del problema que el estudiante realiza. Se trata de una herramienta de investigación muy valiosa, ya que permite hacer un seguimiento de la actividad del estudiante durante el proceso de resolución y detectar los momentos en los que surgen las ideas que les permiten resolver el problema o les conducen al bloqueo.

El ponente ilustra la utilización de este instrumento con la presentación de los gráficos correspondientes al proceso de resolución de un problema en la Figura 2 y procede a analizar la sesión correspondiente, poniendo en evidencia que si bien resuelven algunas cuestiones al investigador, también le quedan preguntas sin contestar(¿Por qué utiliza una determinada estrategia?, ¿Por qué han intuido un determinado camino a seguir?,...) 1 Es una funcionalidad del menú Edición, que permite visualizar todas las etapas de la construcción, y en la versión para Windows también aparece una ventana de texto explicativa de la etapa de construcción correspondiente, disponiendo de varias opciones. 2. Por supuesto existe la posibilidad de leer las distintas pantallas, navegando por ellas y su impresión.

3. *Auto-protocolo* escrito por los estudiantes. Según el ponente, una variante de una metodología típica de investigación "pensar en voz alta", que consiste en dar una directriz a los estudiantes en la que se les pide que paralelamente a la resolución del problema, escriban comentarios sobre sus procesos de decisión, produciendo menos interferencias que "pensar en

[1] Es una funcionalidad del menú Edición, que permite visualizar todas las etapas de la construcción, y en la versión para Windows también aparece una ventana de texto explicativa de la etapa de construcción correspondiente, disponiendo de varias opciones.

[2] Es una funcionalidad del menú Sesión, permite grabar según una sesión de las pantallas según los intervalos de tiempo que se establecen. Por supuesto existe la posibilidad de leer las distintas pantallas, navegando por ellas y su impresión.

voz alta", pues dado que utilizan el ordenador, en todo caso deben detener su flujo de pensamiento. El auto-protocolo es un instrumento que puede confirmar o completar la conclusión extraída del análisis del registro de la sesión y de la revisión de la construcción.

Para el análisis de los datos recogidos, después de haber revisado la literatura especializada en el contexto del software de la Geometría Dinámica, destaca los siguientes marcos:

1. Análisis de los *tipos de arrastre* realizados en la pantalla del ordenador. Señala esta función como elemento fundamental favorecedor del aprendizaje y con ventaja a otros materiales clásicos(material articulable o deformable) por su gran libertad de movimientos y de transformación que posee, además de permitir a los alumnos la verificación de que la construcción realizada es correcta. Destaca como más útiles, siguiendo a Arzarello y otros (1998 b, 2002) y Hölzd (1996) los siguientes.

   a. **Arrastre de test** (test). Para comprobar si la construcción realizada conserva las condiciones matemáticas del problema.

   b. **Arrastre errático** (wandering). El arrastre se hace sin ninguna finalidad específica, explorando en búsqueda de invariantes sin ninguna idea previa.

   c. **Arrastre guiado** (guided). Se arrastra un objeto, con la finalidad de obtener un caso particular de la figura construida.

   d. **Arrastre sobre un lugar geométrico oculto** (dummy locus o lieu muet).

2. Análisis de las *fases de resolución* de un problema de demostración. En la figura 7 presenta un proceso ideal de resolución de un problema de demostración, aunque el ponente señala bien que los procesos seguidos por los estudiantes pueden diferir bastante del ideal por muy diversos motivos, entre otros por la acción tutorial.

3. Análisis de la *unidad cognitiva de teoremas* observables en la resolución con éxito de problemas de demostración.

En relación a los dos marcos anteriores de fases de resolución y unidad cognitiva de teoremas y las ilustraciones sobre los mismos con dos ejemplos uno de alumnos de Secundaria y otro de alumnos de la Facultad de Matemáticas, los planteamientos metodológicos de la investigación deben ser distintos, dado que las competencias exigidas en los currícula correspondientes y los conocimientos básicos son de distinto nivel, lo que plantea diferenciar las actividades a resolver por los alumnos de ambos niveles educativos. En el texto de la ponencia parece no quedar clara la necesidad de diferenciación entre las exigencias de conjetura, conjetura y demostración y demostración.

La demostración es un concepto extraordinariamente complejo en el que intervienen muchos aspectos distintos: lógica, argumentación, verdad conocimiento, ..., lo que conduce a crear alrededor de esta idea una especie de niebla que no deja ver con claridad cuáles son los elementos fundamentales a la hora de trata de conseguir que nuestros estudiantes sean capaces de entender, apreciar y producir sus propias demostraciones. La demostración coexiste con otros tipos de pruebas normalmente aceptadas en los distintos ámbitos en que se mueven los estudiantes –los distintos contextos institucionales- o simplemente la demostración tiene distintos significados según el contexto institucional en el que se genera.

El uso de la demostración estrictamente deductiva en el marco escolar ha sido ampliamente discutido Villiers(1993, 2000), Garuti, Boero y Lemut, Mariotti(1998). Godino y Recio (1997), Recio (1999), cuestionándose su uso, sobretodo en los niveles no universitarios.

Como consecuencia de esta revisión, la demostración aparece hoy como un objeto complejo estrechamente relacionado con otros elementos de validación como pueden ser los de explicación, comprobación, argumentación y prueba, teniendo un significado más abierto que acepta, junto a la demostración estrictamente deductiva, la necesidad de otros modos de validación de tipo empírico-deductivo, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización.

Esto permite dar un significado a la demostración, más amplio que el estrictamente deductivo y más cercano a las capacidades lógicas de los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria.

Algo más al respecto del análisis de la continuidad cognitiva diremos en el apartado de puntos débiles de la ponencia.

4. Análisis de la *los tipos de demostraciones* realizadas por los estudiantes. Presenta de forma resumida la clasificación de las formas de resolver problemas de los estudiantes de diferentes niveles educativos descritos por Balacheff y por Harel y Sowder, considerando los dos bloques el de demostraciones empíricas y el de las deductivas.

Finalmente presenta un diagrama que describe las relaciones entre los instrumentos y procedimientos de recogida de datos y los tipos de análisis presentados. Sugiere la posibilidad de ampliarlo añadiendo metodologías más generales de recogida y análisis de datos.

En la segunda parte de esta réplica señalamos los que en nuestra opinión son los puntos más destacables de la ponencia presentada.

1. Los momentos en que nos encontramos, con un potente desarrollo de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) y una fuerte implicación en el sistema educativo de las Matemáticas, la ponencia presentada es totalmente oportuna al plantear aspectos metodológicos de la investigación en un contexto concreto en el que se hallan inmersos muchos investigadores y a los que puede servir de gran ayuda, destacando además la claridad con la que está escrita.

2. La elección como software de Geometría Dinámica de los existentes en la actualidad -el ponente ha elegido CABRI II Plus-, destacando algunas funcionalidades específicas que permiten recoger un determinado tipo de información, no accesible con otros.

3. El esquema del proceso ideal de resolución de un problema de demostración, para analizar las fases de la resolución.

Seguidamente tres puntos débiles o no considerados en la ponencia.

1. Dado que en la ponencia se plantean aspectos metodológicos, consideramos que un aspecto olvidado es no haber realizado un análisis más en profundidad del software de Geometría Dinámica existente, señalando sus ventajas e inconvenientes tanto desde el punto de vista didáctico tanto como instrumento de investigación. La elección llevada a cabo por el ponente por Cabri II Plus y algunas funcionalidades -casi exclusivas- del mismo, recogidas en el texto de la ponencia, parecen sugerir la idoneidad del mismo, pero seguimos considerando necesario un análisis más en profundidad del software de Geometría Dinámica disponible.

Ampliando la consideración anterior, planteamos la necesidad de contemplar el uso de los applets de Java. La utilización por parte de los alumnos, sobretodo en el ámbito de la Educación Secundaria, del programa Cabri exige por una parte la necesidad de disponer localmente del software correspondiente y por otra de un aprendizaje previo del mismo con lo que esto supone en cuanto a tiempo y esfuerzo por parte de los alumnos, independientemente de que el aprendizaje de Cabri en sí mismo tiene de valor formativo. Este tiempo de dedicación puede ser sustituido en determinas condiciones por applets de Java.

2. Poca claridad en la necesidad del diseño específico de las actividades, con una estructura y

exigencias concretas y diferenciadas según el nivel educativo a que van dirigidas. Bien es verdad que el análisis desarrollado se hace como ilustración, pero en cualquier caso consideramos oportuno hacer la siguiente puntualización en cuanto al Análisis de la *unidad cognitiva de* teoremas planteado a partir de la Figuras 8 y 9, dadas las implicaciones tanto educativas como de investigación que se plantean:

El programa Cabri ha ayudado en la elaboración de las conjeturas por parte de los alumnos de ESO. Estos han realizado el razonamiento inductivo (fase ascendente) de la misma manera que los estudiantes de la Facultad de Matemáticas en la Figura 6.

Ahora bien la capacidad deductiva, el bagaje matemático, la capacidad de expresión y la experiencia de unos y otros no son los mismos. Consideramos por tanto que no puede equipararse la investigación con estudiantes de la Facultad de Matemáticas con la que se puede realizar con los alumnos de la ESO Posiblemente el alumno de la ESO no tenga asimilado el concepto de mediatriz como lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos, ni maneje la relación entre la medida del ángulo inscrito en una circunferencia y la del ángulo central correspondiente, ni mucho menos la de arco capaz de un ángulo. Entendemos que es necesario tener adquiridos estos conceptos y haber experimentado con ellos para poder elaborar demostraciones deductivas planteadas en el problema de la Figura 9.

Consideramos que para poder hablar de "continuidad cognitiva del teorema" es necesario que los alumnos conozcan los conceptos, definiciones y propiedades necesarios para poder construir la demostración deductiva y, así, relacionarlos con los argumentos previamente producidos en la primera fase de la exploración inductiva.

En nuestra opinión, no podemos, por tanto, hablar de "continuidad cognitiva" en este caso, en el sentido de Mariotti (1997). Los estudiantes de ESO han encontrado durante la actividad exploratoria las ideas base para la construcción de la actividad deductiva, pero no han podido "identificar las relaciones funcionales entre los hallazgos producidos en la fase ascendente y las definiciones, propiedades, etc." necesarios para poder realizar la actividad deductiva final, porque estas definiciones no forman parte de su bagaje matemático, ni tienen la capacidad de argumentación ni el entrenamiento de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas.

3. No señala la importancia del trabajo colaborativo como elemento a tener en cuenta en las investigaciones sobre enseñanza apoyada en las TIC, por su influencia en las interacciones que se producen. Además, los análisis presentados en la ponencia, al menos en uno, el caso de los estudiantes de la Facultad, trabajan por parejas.

Asumiendo la idea constructivista del aprendizaje y la "construcción social" del conocimiento, consideramos que un elemento que forma parte de las propuestas metodológicas de investigación en el contexto de la ponencia, lo constituye "utilizar y analizar la influencia del trabajo colaborativo en la mejora de la capacidad de demostración matemática en nuestros alumnos utilizando las posibilidades que brindan las TIC".

Un breve esquema de propuesta de trabajo a desarrollar en este sentido, utilizando un entorno interactivo de aprendizaje, compuesto por una red electrónica, Cabri e Internet (para una descripción mas completa véase Murillo, 2000) planteada en dos fases podría ser la siguiente:

• En un primer momento, pretendemos que los alumnos asuman el sentido de la demostración matemática, a distinguir una demostración de otras formas de argumentación y a comprender cuáles son los elementos que la componen y el proceso general para desarrollarla.

Se utiliza un proceso de comunicación bidireccional entre el "profesor virtual"[3] y el alumno a través

[3] El "profesor virtual" es un profesor que no está presente en la clase y que recibe los mensajes de correo electrónico de los alumnos. Está encargado de aclarar las dudas que se produzcan, corregir las respuestas de los

del correo electrónico. Esto es, se plantea una actividad de iniciación en la página Web del proyecto, en ella se pide al alumno que haga una construcción con Cabri Géomètre II, que tome medidas, que manipule la figura, que trate de tomar conciencia de una propiedad geométrica que se da en la misma, que no debe depender de la figura concreta realizada, sino que deberá ser válida para un conjunto de figuras. Esta propiedad no se le da de forma explícita, sino que se espera que la obtenga por manipulación. Una vez obtenida, se le pide que la exprese con su propio vocabulario y particular sintaxis, y que intente justificar su respuesta.

Aquí se realiza una correspondencia epistolar electrónica entre el alumno y el "profesor virtual" mediante la que se van poco a poco dando instrucciones, animando, dando o no valides a las deducciones obtenidas, y puliendo la respuesta hasta llegar a una comprensión por parte del alumno del concepto de demostración, de los elementos que la componen y del tipo de expresión adecuada para explicitar la demostración requerida.

Las actividades planteadas son específicas, diseñadas y dirigidas a desarrollar la capacidad de demostración de los alumnos en el ámbito de la Geometría

• La segunda fase corresponde a las actividades del Foro de discusión, en las que básicamente el procedimiento es el siguiente:

1. Los alumnos reciben la propuesta de actividad a través del la página Web o del correo electrónico.

2. Individualmente y utilizando Cabri y/o el applet correspondiente, elaboran una primera aproximación de la demostración, que es enviada al Foro de discusión (Tablero electrónico). En caso de ser necesario los alumnos envían los gráficos correspondientes al profesor virtual para hacerlos asequibles a todos.

3. Los alumnos discuten las respuestas dadas apoyándose en los gráficos que están accesibles, trabajando colaborativamente hasta conseguir entre todos mejorar éstas y llegar a una expresión más completa, aunque no única para todos.

Seguidamente planteamos **tres puntos de interés para debatir**, en relación con la utilización del software de geometría Dinámica en el proceso educativo de las Matemáticas.

1. La elección de un determinado software de Geometría Dinámica, ¿influye en los resultados del aprendizaje de los alumnos? O ¿solamente determina la metodología de investigación que intenta establecer los posibles beneficios cognitivos en los alumnos?

2. ¿Se deben incorporar los applets de Java en los enunciados de las actividades geométricas planteadas a nuestros alumnos? O ¿suponen un exceso "conductista" en el camino a seguir por nuestros alumnos en la resolución del problema planteado?

3. ¿Debe fomentarse el trabajo colaborativo como elemento potenciador del aprendizaje de nuestros alumnos? O ¿se trata de uno más de los métodos de trabajo con los alumnos?

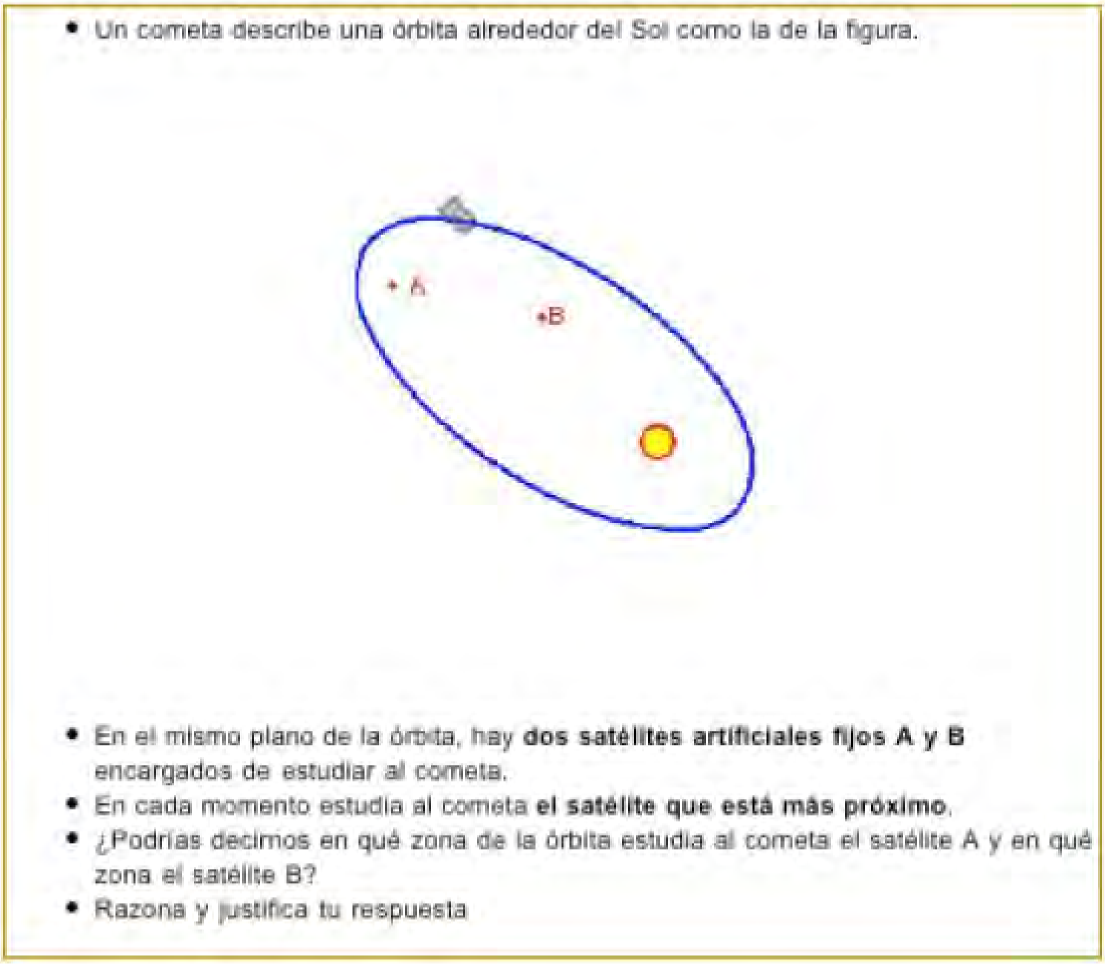
A continuación se muestran ejemplos de actividades, que ilustran nuestra postura en cuanto al papel que juega Cabri, los applets de java y el diseño específico de las actividades y que en cierta manera es nuestra respuesta a las tres cuestiones planteadas anteriormente.

En la actividad que se muestra a continuación llamada Actividad 1, applet de Java que aparece en el enunciado de la misma, no aporta mas información que si hubiésemos utilizado un gráfico estático. Casi el único motivo del mismo, con su animación es hacer un enunciado más atractivo y motivador

---

alumnos y sobre todo establecer con los alumnos una relación personal lo más estrecha posible y animar a todos a realizar esfuerzo para realizar la demostración. Esto tiene para los alumnos un gran atractivo y se ha comprobado que el ascendiente de este profesor sobre el alumno es superior incluso al del profesor real que está en la clase presencial para que el alumno intente responder a la vez que ilustra el enunciado.

ACTIVIDAD 1



En la siguiente actividad se modelizan las que se pueden utilizar para desarrollar trabajo colaborativo a través del Foro de discusión (tablero electrónico).

ACTIVIDAD R1.

Vamos a intentar determinar si existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

1. Construye, utilizando el programa CABRI, un triángulo ABC, rectángulo en C.

NOTA: *Es importante que el triángulo rectángulo que obtengas, se mantenga siempre rectángulo, aunque modifiques mediante arrastre de los vértices las dimensiones y posición del mismo.*

2. Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo ABC.

3. Determina las áreas A1, A2 y A3 de estos cuadrados.

Pregunta 1.1: ¿Existe alguna relación entre éstas áreas? ¿Cuál?

Ir al tablón de respuestas

Si no encuentras ninguna relación y no puedes responder a esta pregunta, puedes consultar Ayuda R1.1.(haz click sobre el texto Ayuda R11 en azul). Solicita la ayuda, sólo en el caso de que despúes de haber pensado no encuentres alguna relación.

Mas Ayuda R11 (haz click sobre el texto Mas Ayuda R11 en azul).

Si todavía no has encontrado una respuesta puedes solicitar alguna ayuda enviando un mensaje por correo electrónico a algún compañero o a tus profesores, solicitando alguna aclaración.

Una vez que hayas respondido a la Pregunta 1. 1, sigue leyendo este documento.

Pregunta 1.2. (Haz click sobre el texto Pregunta 1.2., resaltado en color azul para pasar a la siguiente cuestión en relación con la actividad R1).

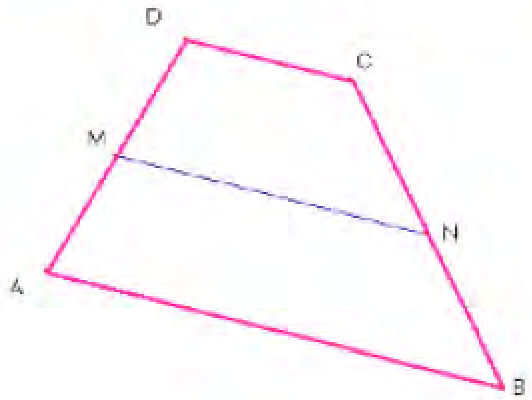
Ir al tablón de respuestas

En el texto del enunciado aparecen enlaces con archivos que en su caso permiten al alumno resolver por si mismo algunas cuestiones básicas necesarias para el desarrollo de su actividad., así como enlace con el

Tablero electrónico.

Actividad 1

Construye un trapecio cualquiera ABCD como el de la figura que se muestra a continuación. Halla los puntos medios de los lados no paralelos y únelos mediante un segmento MN.



Pregunta 11A:

¿Qué **relación** hay entre las medidas de **MN** y las de las bases **AB** y **CD**? Justifica la respuesta.

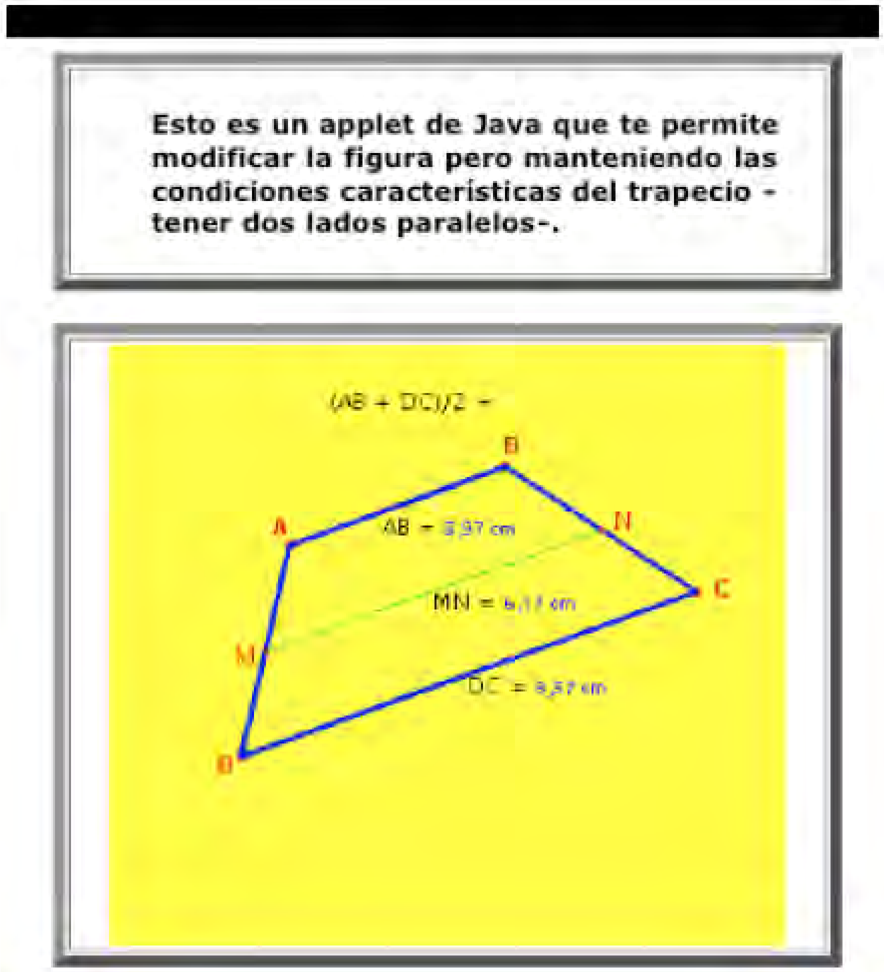
Pregunta 11B:

Enuncia con tus palabras el resultado(teorema) que has obtenido y pónle el nombre que te parezca oportuno

En el enunciado de esta actividad aparece un enlace trapecio, que se muestra a continuación y dentro un enlace con un applet de Java, que muestra un aspecto de la demostración.

TRAPECIO:

Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Para explorar la figura trapecio puedes enlazar con el siguiente applet



Referencias bibliográficas.

Garuti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998). Cognitive units of theorems and dificulty 13 of proof.. En A. Olivier and K. Newstead (Eds.). *Proceedings of the 22th Internacional Conferencie of PME* (Vol, 2). Stellenbosch, South Afica.

Godino, J. D. Recio, A. M. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. Meaning of proofs in mathematics education En E. Pehkonen (Ed): *Proceedings of the 21 th International Conference of PME,* Vol 2, Pp.313-321

Martínez Recio, Á. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Córdoba. Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Murillo, J., y Fortuny, J. M.(2003/04). Interactividad en la Red. Contextos Educativos. *Revista de Educación.* Vol 6-7, p 295-316. Servicio de Publicciones. Universidad de la Rioja.

Murillo, J. (2001). Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometria en la E.S.O. Tesis doctoral Universitat Autònoma de Barcelona.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista matemática de bachillerato*, Nº 26 15-30.

Villiers, M. de (2000). Developing understanding of Proof. within the context of defining quadrilaterals. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof (http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas

Pedro Cobo Lozano

Departament de Matemàtiques,IES Pius Font i Quer
pcobo@xtec.net

Josep María Fortuny
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals,
Universitat Autònoma de Barcelona
josepmaria.Fortuny@uab.es

Resumen

En esta comunicación presentamos el sistema tutorial inteligente, al que hemos llamado AGENTGEOM, y analizamos cómo interactúa con un alumno en la resolución de un problema que compara áreas de superficies planas. En esta interacción, el alumno llega a apropiarse de habilidades estratégicas y argumentativas en la resolución de problemas. Observaremos que estas apropiaciones son consecuencia de las formas de comunicación alumno-AGENTGEOM, en las que se combinan construcciones gráficas y sentencias escritas que siguen las normas del lenguaje matemático, y la emisión de mensajes escritos en lenguaje natural.

Introducción

Las competencias en matemáticas se consideran parte esencial de la preparación para la vida ciudadana de los estudiantes. El enfoque pedagógico por competencias es muy prometedor, aunque aún no es prioritario en nuestro país, quizás esto explica según (Recio y Rico, 2004) los bajos resultados obtenidos del estudio PISA 2003 en España. El modelo de aprendizaje por competencias comparado con el enfoque por objetivos, permite evitar la compartimentación artificial de los aprendizajes, como cuando a un problema de matemáticas se le atribuye la etiqueta de "algebraico", mientras que el alumno ejerce algo más complejo (v-g. una modelización con dependencia entre variables e incertidumbre en un razonamiento cuantitativo), o cuando se cree que en clase de matemáticas sólo es digno de interés el contenido propiamente matemático. El enfoque por competencias proporciona referencias adaptadas a todos los que quieran tener en cuenta la complejidad de la relación didáctica que supone el hecho de considerar, en el aprendizaje de las matemáticas, los procesos comunicativos -estrategias compartidas con el uso de la lengua natural, del lenguaje matemático y de la argumentación-, el razonamiento, la abstracción, la resolución de problemas, etc.

El desarrollo de estas competencias está asociado a una gran diversidad de alumnado, que se produce no sólo porque en una clase haya alumnos con deficiencias en sus conocimientos y actitudes, sino porque también los hay que tienen mucho más desarrolladas sus habilidades. Además, al profesor se le exige que atienda a los alumnos que tienen necesidades educativas específicas, a los que necesitan refuerzo personalizado fuera del aula, y por supuesto también al alumno recién llegado que tiene muchas más dificultades para seguir el discurso oral de las clases que la expresión escrita, visual e interactiva a través de la interficie de un dispositivo informático.

La problemática que presentamos plantea cómo ayudar al docente en su responsabilidad de atender la diversidad de casos cuando el enfoque pedagógico se centra en el desarrollo de las competencias de sus alumnos. La solución que proponemos, no porque creamos que sea única[i], sino porque estamos en la búsqueda de una solución pragmática, pasa justamente por la utilización de las nuevas tecnologías. Los entornos *e-learning* y, en particular, el ordenador con conexión a Internet son herramientas privilegiadas si, detrás de la programación, hay un análisis serio y riguroso de las tareas pedagógicas y matemáticas a desarrollar, siendo el entorno el que sepa adaptarse a los conocimientos de cada alumno y no el alumno el que se tenga que adaptar al dispositivo informático.

Nuestro propósito es aprovechar y potenciar las ventajas de ese tipo de entornos para elaborar un *sistema tutorial inteligente*, al que llamamos *AGENTGEOM* (Agente de Geometría) que colabora con la tutorización humana, ayudando al alumno a mejorar sus competencias matemáticas. Cuando hablamos de las ventajas de los entornos *e-learning* pensamos en que su utilización: facilita las interacciones entre el profesor, los alumnos, la tarea,...; mejora la calidad de las interacciones profesor-alumno; incrementa el ritmo y mejora el estilo del aprendizaje de los alumnos; desarrolla el conocimiento y las habilidades de enseñanza del profesor; etc. (Richard y otros, 2005). Cuando nos referimos a las competencias matemáticas pensamos en la resolución de situaciones-problema, en el desarrollo del razonamiento matemático y en la utilización del lenguaje matemático en los procesos comunicativos que se dan en las situaciones que se plantean.

Un *sistema tutorial inteligente* ha de tener, desde nuestro punto de vista, tres características básicas:

Ha de ser *emergente* en el sentido que tenga una conducta que no pueda ser predicha desde una descripción centralizada y completa de las unidades que lo componen. Por tanto su comportamiento ha de ser autónomo y calificable como espontáneo. Por ejemplo, entre otros, en los aspectos que se refieren a la conversación -*ha de tener capacidades de interacción avanzadas, en nuestro caso, mediante mensajes escritos en tiempo real y ajustado al lenguaje del contexto en que se use* -. Para mantener este tipo de conversación ha de incorporar una base de conocimientos y un modelo de discurso que le permitan al mismo tiempo asociar ideas.

Ha de ser *personalizado*, es decir, ha de proporcionar al usuario actividades y ayudarle a realizarlas, y ha de ser capaz de evolucionar en el tratamiento de la realización de la tarea y adaptarse a las características cognitivas y sociales de cada alumno.

Ha de ser *abierto*, es decir, ha de poner menos énfasis en tipos de aprendizajes basados en elementos instructivos y más en aspectos constructivos en los que primen las interacciones no guiadas que permitan a los alumnos practicar y adquirir habilidades metacognitivas, asociadas con la efectividad de la exploración, tan importantes en los modelos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas de matemáticas.

Hemos construido el sistema tutorial inteligente *AGENTGEOM*, teniendo en cuenta esas características de emergencia, personalización y apertura, sobre una arquitectura web, a la que podemos acceder mediante un protocolo http[ii]. Además, este sistema tutorial no sólo se aprovecha de las ventajas de este tipo de entornos, sino que se beneficia de las competencias de su profesor, ya que el docente puede adaptar el estilo, el contenido o la naturaleza de los mensajes del tutor artificial. Por otra parte, nuestro proyecto incluye una experimentación del sistema tutorial elaborado, en el sentido de que identificamos las interacciones *AGENTGEOM*-alumnado, y analizamos su influencia en el desarrollo de las competencias matemáticas del alumno. En esta ponencia mostramos el caso de uno de los diferentes alumnos que han participado en esta experimentación.

Marco teórico

A pesar de la importancia que tiene el debate social en la construcción del conocimiento, reconocida desde las aproximaciones más tradicionales de la psicología (Festinger, 1957, 1989; Vygotsky, 1978; etc.) hasta las investigaciones más recientes, los entornos informáticos de aprendizaje humano para la enseñanza de la geometría todavía no tienen en cuenta la influencia del debate social simulado en el aprendizaje de las matemáticas (Richard y otros, 2004).

Por debate social simulado entendemos la discusión organizada y dirigida en la cual los interlocutores son los agentes pedagógicos virtuales. Así, contrariamente al debate social en la clase, en el que puede quedar diluida la responsabilidad del alumno en su aprendizaje, en el debate social simulado que pretendemos generar, el alumno ha de desempeñar el papel de actor principal, ya que la progresión en el debate dependerá sobre todo de las aportaciones temáticas que él haga a través de su interficie -dimensión temática del discurso- y de su iniciativa (o la del sistema tutorial, si es el caso) en la realización de tales aportaciones -dimensión interlocutiva- (Calsamiglia y otros, 1997; Cobo y Fortuny, 2000). La comunicación en el entorno del *AGENTGEOM* se produce a través del lenguaje escrito, lo que supone una modificación de la comunicación verbal presencial, pero da lugar a un aumento del valor comunicativo, de generación de conocimientos y, en general, de inteligencia colectiva (Levy, 1994).

Por su parte, el STI ha de reproducir un comportamiento humano competente para que pueda adaptar su enseñanza a las necesidades del aprendizaje de cada estudiante, y sus contribuciones al debate serán de tipo metacognitivo, que guíen el proceso de resolución que desarrolla el alumno, o cognitivas cuando el alumno las necesite.

Con la elaboración de STI, con las características descritas en los apartados anteriores, estamos superando el paradigma que consideraba al medio tecnológico sólo como elemento mediador entre los seres humanos y los objetivos de las actividades que llevan a cabo (Cole, 1996), para situarlo como un sistema cognitivo más. En realidad lo que tenemos es la interacción entre dos sistemas cognitivos: el agente humano y el que se encuentra en la máquina.

Consideramos que los conocimientos que el alumno, como ejemplo de agente humano, llega a construir dependen de sus conocimientos anteriores. Desde esta perspectiva constructivista, la construcción efectiva de conocimientos pertinentes se realiza por un cambio de concepción del alumno y de superación de los obstáculos en situaciones que reproducen las características del trabajo matemático (Richard y otros, 2004). Uno de los aspectos que más se resalta en las situaciones didácticas es el hecho de que *hacer* matemáticas es una actividad social. Según Brousseau (1998), el único medio de hacer matemáticas es buscar y resolver ciertos problemas específicos y ser capaz de generar nuevas preguntas sobre ellos. Para poder llegar a esto, se supone que la enseñanza no sólo ha de preocuparse de desarrollar las competencias de los alumnos, sino también su autonomía. Del análisis de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau nos interesa resaltar, por su relevancia en las interacciones del alumno con el STI en la resolución de una situación-problema, los tres tipos de situaciones que se pueden producir (Llinares, 1994): *situaciones de acción*, en las que los alumnos producen intentos de búsqueda de la solución que pueden generar nuevos conocimientos; *situaciones de formulación*, en las los alumnos intercambian informaciones (comparten estrategias utilizadas, adelantan resultados,...) y, por tanto, el proceso comunicativo se constituye en un aspecto importante del proceso de aprender; y las *situaciones de validación*, en las que los alumnos ven la necesidad de justificar las afirmaciones que hacen. Se pretende que con el uso continuado de los STI, los alumnos vayan asumiendo la responsabilidad de validar que ahora delegan en el propio sistema tutorial (o en el profesor, en el libro de texto o en compañeros más competentes, en situaciones de enseñanza y aprendizaje en el aula).

En cambio, el sistema cognitivo de la máquina depende de las opciones epistemológicas que hayan considerado los que la han programado. En este sentido, en los párrafos siguientes, resumimos los fundamentos teóricos en los que nos hemos basado para elaborar el sistema de mensajes que hemos implementado en el *AGENTGEOM*, y resaltamos la importancia de los sistemas de representación semiótica que se utilizan en la comunicación STI-alumno, y la forma en que el sistema puede controlarlos.

Para seleccionar el sistema de mensajes, hemos tomado como punto de partida los modelos de interacciones de Cobo y Fortuny (2000) y de Kieran (2001), y la noción de apropiación de Moschovich (2004). Las interacciones del primer modelo –"guiadas", "alternativas", "de relanzamiento" y "cooperativas"- son compatibles con la dialéctica de Lakatos (1984), en el sentido de que los alumnos pueden relacionar diferentes competencias como la formulación de una conjetura, el proceso de argumentación, la organización del conocimiento, etc. El segundo modelo de interacciones (Kieran, 2001) hace posible identificar, en un proceso de resolución entre pares de alumnos, si la producción cognitiva y heurística es del mismo orden, es decir, si los interlocutores razonan sobre los mismos objetos, contribuyen a la formulación o demostración de la misma conjetura, y si sus iniciativas o sus reacciones se separan del proceso argumentativo. Por otra parte, la apropiación es un concepto neovygotskiano que se ha utilizado para describir de qué forma el aprendizaje es mediado por la interacción con otros y de qué manera los alumnos aprenden cuando les guían y les enseñan (Newman y otros, 1989, Wells, 1999, y Moschovich, 2004). Esta perspectiva sociocultural que utilizamos considera dos aspectos de la apropiación: uno relacionado con lo que los alumnos se apropian y, el otro, cómo transforman activamente estas apropiaciones.

Hacemos la identificación y selección de los mensajes que implementamos en el *AGENTGEOM* para los problemas que consideramos a partir del espacio básico de la acción tutorial humana (Cobo, 2004). Ahora bien, este espacio de la acción tutorial humana lo obtenemos construyendo, en primer lugar, el espació básico de cada problema (Cobo, 1998), que contiene todas las posibles formas de resolver el problema, identificadas por un resolutor experto, y todos los pasos posibles dentro de cada resolución, y, después, analizando -según los modelos teóricos antes descritos- las interacciones entre pares de alumnos cuando resuelven los problemas propuestos, para identificar las competencias comunicativas y cognitivas que los alumnos desarrollan durante los procesos de resolución.

Por otra parte, en una situación de aprendizaje la cuestión semiótica es a menudo subestimada por los matemáticos y por los informáticos. "Todo sistema de representación semiótica, se trate de signos figurales, de símbolos matemáticos o de palabras del lenguaje natural, tiene a la vez efectos productores y reductores en la representación del conocimiento. Es decir, si los signos movilizados permiten "ver" ciertas propiedades, a su vez, impiden también "ver" otras. Esta paradoja es determinante en la adquisición de conocimientos, sea a nivel de la comunicación, del tratamiento de las representaciones cognitivas y de la objetivización de las representaciones virtuales (por ejemplo, las que hay en la mente de un alumno)" (Richard y otros, 2004, p. 13).

Duval (1995) destaca la importancia de considerar sistemas de representación diferentes, ya que cada uno de ellos tiene propiedades específicas que limitan intrínsecamente sus posibilidades, y de coordinar su uso. Así, el debate social debe considerar la coordinación de varios sistemas de representación durante la progresión de un razonamiento o de una argumentación. En la interacción alumno-*AGENTGEOM* se complementan la utilización de signos figurales (expansión gráfica, Richard y otros, 2004) con la de símbolos algebraicos y con el lenguaje natural (expansión discursiva, Duval, 1995). En el *AGENTGEOM* el área gráfica facilita la utilización de la representación figural; el área deductiva posibilita la representación mediante símbolos algebraicos; y el lenguaje natural se potencia en los mensajes implementados en el sistema tutorial y en la posibilidad que tienen los alumnos de participar en forums de debate virtual durante o al final de los procesos de resolución.

En el debate social simulado, los agentes pedagógicos virtuales de los STI han de asegurar que los símbolos que acepta el sistema tengan el mismo sentido para él y para el alumno (control semiótico); que el alumno trabaje en la misma situación-problema que se le ha propuesto (control situacional); y que los conceptos en juego se refieran efectivamente a los modelos pretendidos (control cognitivo).

Antecedentes del *AGENTGEOM*

El *AGENTGEOM* tiene un antecedente lejano en el Cabri y otro más inmediato en el proyecto Baghera, desarrollado en el Laboratorio Leibniz de Grenoble (Laboratoire Leibniz, 1993) y dirigido por el investigador N. Balacheff.

Cabri es un software desarrollado por Vanda Luengo que utiliza la lógica geométrica para la construcción de figuras geométricas. Es útil para el análisis de las figuras representadas y ayuda al alumno en el uso del conocimiento geométrico. Facilita el arrastre de objetos en la pantalla del ordenador y, por tanto, la modificación continua del dibujo sobre la pantalla[iii].

A diferencia del Cabri, el *AGENTGEOM* incorpora una descripció a priori de todos los procedimientos, que identifica un resolutor experto y que pueden conducir a resolver el problema propuesto.

El proyecto Baghera, como nuestro sistema tutorial, incorpora tres principios que consideramos básicos en la elaboración de entornos asistidos por ordenador. Por una parte, la colaboración entre agentes humanos y artificiales, que supera el paradigma de décadas anteriores en las que se consideraba al ordenador como máquina autónoma que concebía la enseñanza sólo como función instruccional (Balacheff, 2000). En segundo lugar, la concepción de "la educación como el resultado de un proceso complejo que emerge de las interacciones entre agentes que tienen habilidades diferentes y complementarias" (Webber y otros, 2002). Y, por último, ambos proyectos están concebidos como sistemas tutoriales multiagentes de diagnóstico que son capaces de identificar los conocimientos de los alumnos después de las interacciones de éstos con el sistema y, por tanto, han de ser capaces de adaptarse a sus características cognitivas y a la evolución de sus conocimientos matemáticos.

En cambio hay diferencias entre ambos proyectos, en concreto en dos aspectos que consideramos fundamentales y que hacen del nuestro una propuesta innovadora y pionera en la elaboración de entornos interactivos web de enseñanza y aprendizaje. Así, mientras Baghera es un entorno basado en la red para el aprendizaje de la demostración geométrica, fundamentado en los trabajos de Balacheff (1999) y Luengo (1999), y ése es el contenido básico de las propuestas de actividades que se hacen a los alumnos, el proyecto AgentGeom utiliza como objeto de estudio y como base de las propuestas de sus actividades, además del desarrollo del razonamiento matemático, todos los procesos implicados en la resolución de problemas, y los procesos comunicativos que conllevan, y tiene como fundamento las amplias investigaciones llevadas a cabo por los investigadores que formamos parte de él, relacionadas con las interacciones en la resolución de problemas en diferentes contextos (Cobo, y Fortuny, 2000; Fortuny, Murillo, y otros, 1999; Meavilla, y Fortuny, 1999; Rodríguez, 2003; Richard, 2004ª y 2004b; y Cobo y otros, 2004).

Además, Baghera tiene un nivel de actuación muy limitado en lo que se refiere a la verificación en tiempo real de la realización de las actividades de los alumnos (Webber y otros, 2002), dejando tal verificación para cuando el alumno ha acabado su propuesta de demostración. Pero, de acuerdo con Bunt y Conati (2002): "Los entornos abiertos de aprendizaje podrían mejorarse proporcionando, en tiempo real, soporte a los procesos de exploración, adaptados a las necesidades individuales de cada estudiante". Siguiendo este principio, hemos conseguido que el *AGENTGEOM* compruebe y verifique de forma instantánea todas las acciones realizadas por los alumnos, identificando el momento del proceso de resolución en el que se encuentra y mostrándole, siempre que el tutor humano lo considere oportuno o cuando el alumno lo solicite, mensajes o sugerencias que orienten su proceso y que le ayuden a que sea él mismo quien obtenga una solución del problema, siendo este tipo de ayudas las mínimas imprescindibles, como sugieren los diferentes modelos instructivos para la enseñanza de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985 y 1987; Callejo, 1994; O'Daffer, 1995; Stacey y Groves, 1999; etc.). Este sistema de ayuda diferenciado para cada alumno, en función de la evolución de su proceso de resolución, hecho de forma directa, en tiempo real y adaptado a sus necesidades cognitivas dará a nuestro aplicativo el carácter de emergente al que nos referíamos en la introducción de esta ponencia.

Arquitectura del AGENTGEOM

El *AGENTGEOM* es un sistema tutorial artificial concebido como un sistema multiagente híbrido que combina interfícies, utilizadas por personas como usuarios del sistema (profesores y alumnos); con dos agentes artificiales -el agente tutor, que tiene una arquitectura principalmente reactiva, y el agente mediador, que recibe las entradas de las interfícies del alumno y del profesor-; y una base de datos, en la que se almacenan todas las entradas de los usuarios.

Las interfícies son todas las herramientas de las que disponen los usuarios para interactuar con los agentes mediador y tutor. En el caso del profesor, el *AGENTGEOM* dispone de herramientas de comunicación –diferentes pantallas- que hacen posible que el profesor cree problemas y los asigne a sus alumnos (Figura 1).

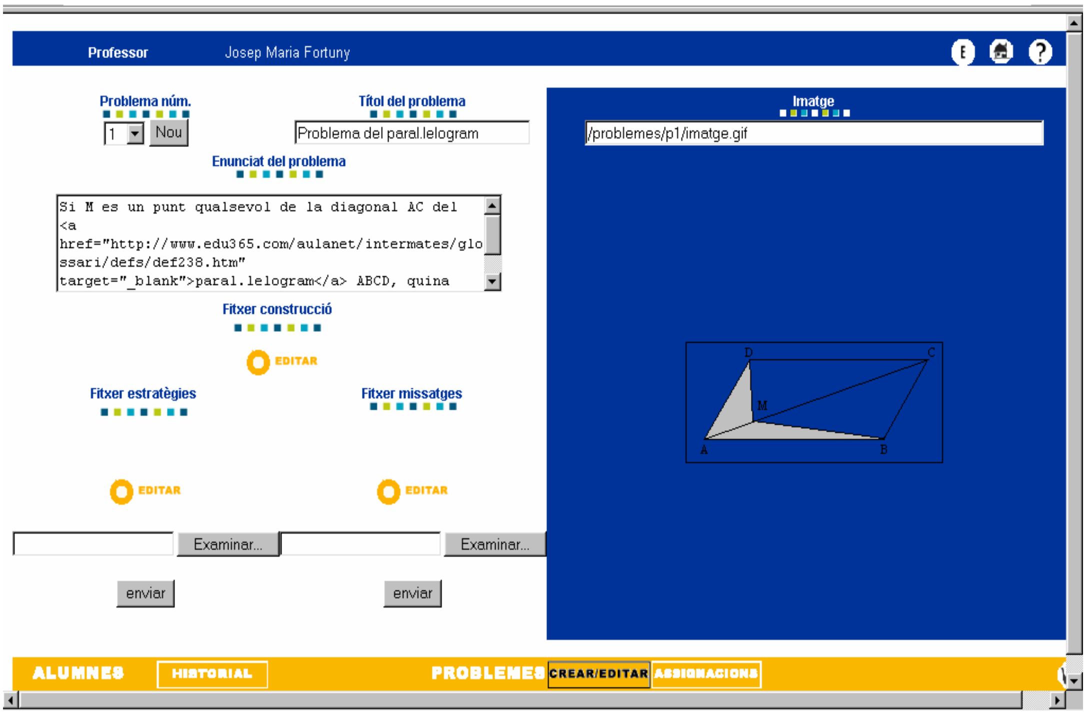


Figura 1. Pantalla del área de trabajo del profesor

La creación de problemas nuevos exige la elaboración de todo un contenido pedagógico alrededor de cada problema, que comporta la identificación de todas las estrategias que resuelvan el problema y los diferentes mensajes que el profesor quiera que se muestren al alumno cuando el agente tutor lo considere necesario.

La interfície del alumno le ofrece todas las herramientas para resolver el problema. Como se observa en la figura 2, el alumno dispone de un área de construcción gráfica (parte izquierda de la pantalla) y de un editor de deducciones (parte derecha). En el área de construcción gráfica, el alumno puede dibujar figuras utilizando los botones (primitivas de construcción) para dibujar puntos, líneas rectas, circunferencias, segmentos, paralelas, perpendiculares, definir la intersección de dos objetos, etc. Con el editor de deducciones, el alumno puede construir sentencias sobre los objetos gráficos que ha creado, y que el agente mediador validará o no.

El agente mediador recibe las entradas de las interficies del profesor y de los alumnos, es decir, procesa todas las acciones (gráficas y deductivas) del profesor cuando crea problemas nuevos y del alumno cuando resuelve el problema, y las almacena en la base de datos. Concretamente, por lo que se refiere a las acciones gráficas –cualquier acción que se realiza en el área gráfica-, el agente mediador recibe todas las primitivas de construcción, calcula todos los elementos nuevos derivados de las acciones, emite mensajes si hay errores en la construcción o en la identificación de los nuevos objetos gráficos, y, si el proceso acaba correctamente, muestra la figura que se ha dibujado en el área de construcción. Las acciones gráficas constan de una primitiva de construcción y de parámetros asociados, como por ejemplo el nombre que el alumno le da al objeto que crea o la posición que se elige para situarlo en el área gráfica, en el caso de un punto, etc. Las acciones gráficas conducen al agente mediador a mantener una representación interna de la figura que el alumno está construyendo. Esa representación interna está referida en todo momento al conocimiento sobre geometría métrica clásica necesario para resolver cualquier tipo de problemas geométricos, que hemos implementado en el *AGENTGEOM*.

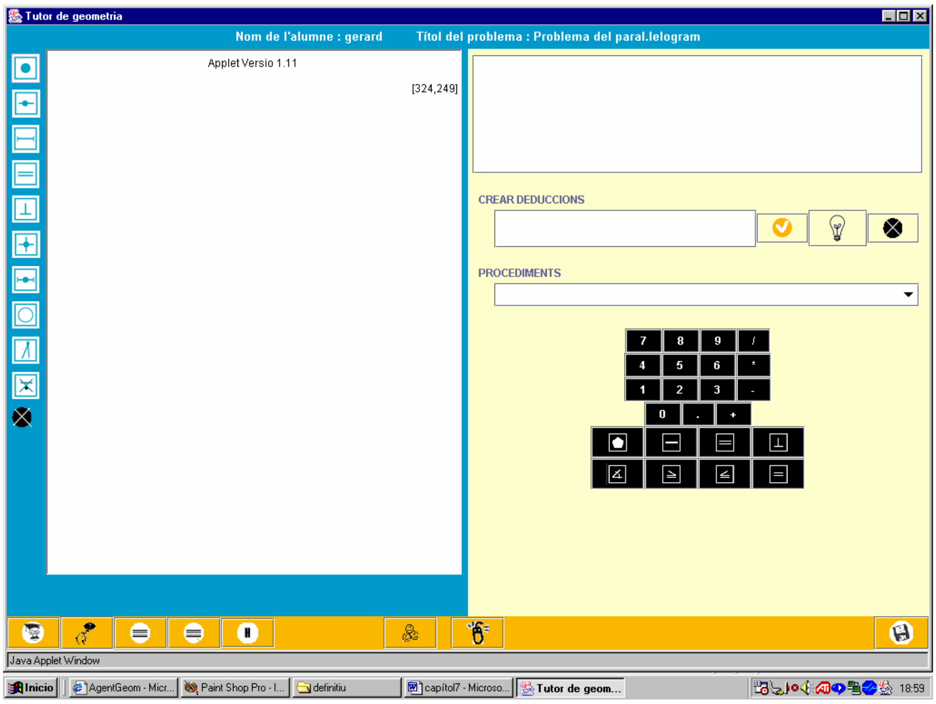


Figura 2. Pantalla del área de trabajo del alumno

Por lo que se refiere a las acciones deductivas (o sentencias) –acciones que se realizan en el editor de deducciones-, el agente mediador gestiona la construcción correcta de su sintaxis, mostrando mensajes de error si no están bien construidas; determina si la sentencia es verdadera o falsa, utilizando el modelo de gráfico al cual está referida siempre la sentencia; y muestra la validez o no de la deducción introducida.

El agente tutor tiene por objetivo ayudar directamente al alumno en la resolución del problema. Por eso contiene, en forma de árbol, cada una de las estrategias correspondientes a cada problema. También tiene diferentes listas de mensajes. Una lista para cada estrategia y una lista especial de cambio de estrategia. Así, el agente tutor tiene toda la información sobre estrategias, y sólo necesita un mecanismo para saber cuando y como mostrar los mensajes al alumno. Este mecanismo comienza cuando el agente mediador, que sigue la pista de todas las acciones que realiza el alumno, las pasa al agente tutor, que las identifica dentro de su árbol de estrategias.

A continuación describimos la forma de mostrar los mensajes que tiene el agente tutor.

El alumno entra en el *AGENTGEOM* y empieza a realizar acciones desde su interficie, sean deductivas o gráficas.

La primera acción que hace el alumno puede ser reconocida por el agente mediador, en el sentido que la considere correcta, o no reconocida –acción que el sistema considera incorrecta (de hecho es una acción objetivamente incorrecta, excepto en casos muy excepcionales)-. El agente mediador pasa la información al agente tutor.

Si la acción que hace el alumno es reconocida, entonces el agente tutor la considera como la última acción reconocida (a efectos de identificar la estrategia que sigue el alumno y, en consecuencia, elegir el mensaje adecuado) y actualiza a cero el contador de acciones no reconocidas, es decir, no considera las anteriores posibles acciones no reconocidas a efectos de emitir mensajes. Después, el agente tutor espera que el alumno realice una nueva acción.

Si, por el contrario, el agente mediador no reconoce la acción que realiza el alumno, entonces el contador de acciones incorrectas sube una unidad y espera una nueva acción. Si el contador de acciones incorrectas llega a valer 3, entonces el agente tutor selecciona un mensaje según el siguiente criterio:

Si no hay una última acción reconocida, entonces elige de manera aleatoria un mensaje de entre los disponibles (que no hayan salido antes) que orienten al alumno hacia una nueva estrategia general. Después de la elección, el agente tutor muestra este mensaje y espera una nueva acción del alumno.

Por el contrario, si hay una última acción reconocida, entonces el agente tutor selecciona el mensaje que sigue el orden de esta última acción reconocida (que dependerá del momento en el cual se encuentre la resolución y, por tanto, el desarrollo de mensajes para que la elección sea aleatoria o no). A continuación, el agente tutor muestra por la pantalla el mensaje elegido. Si el conjunto de mensajes relacionados con la última acción está vacío, entonces el sistema selecciona, de forma aleatoria, un nuevo mensaje entre el resto de los que oriente al alumno hacia una estrategia diferente de la que actualmente seguía, lo muestra en la pantalla y espera una nueva acción del alumno.

Análisis de las interacciones con el *AGENTGEOM*. El caso de Albert

En este caso, describimos cómo, en la interacción con *AGENTGEOM* en la resolución de un problema geométrico, Albert se apropia de aspectos relacionados con las ideas de concebir lo que es una demostración matemática y como se redactan y validan las sentencias que se infieren desde la representación figural del enunciado del problema. Y también cómo Albert interioriza la necesidad de articular una secuencia de sentencias, derivándose unas de otras ya validadas o haciendo uso de una propiedad geométrica ya establecida. Además, describimos cómo llega a reaccionan a los mensajes del tutor, cambiando de estrategia en la resolución, y apreciando cuando la producción de una serie de sentencias, que le hace visible el sistema, es ya suficiente para ser considerada como solución.

- *Contenidos implicados en la resolución del problema del paralelogramo*

En los parágrafos siguientes resumimos las características del problema que hemos implementado y del alumno que participa en la experimentación, así como la forma de recoger los datos que nos permitirán identificar y analizar las interacciones del alumno con el *AGENTGEOM* y los beneficios cognitivos que se deriven de estas interacciones.

Hemos seleccionado un problema sobre comparación de áreas de figuras planas -problema del paralelogramo (Figura 3)-, que tiene dos características que lo hacen adecuado para su implementación en el *AGENTGEOM*: es posible abordar su resolución de diferentes formas y se puede resolver combinando componentes gráficos y deductivos.

El enunciado del problema del paralelogramo es el siguiente:

Si M es un punto cualquiera de la diagonal AC del paralelogramo ABCD, ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos rallados de la figura?

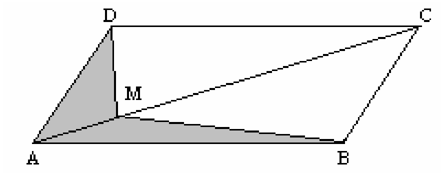


Figura 3. El problema del paralelogramo

A partir de la construcción de su espacio básico, hemos analizado en profundidad las características de este problema: contenidos conceptuales y procedimentales implicados en su resolución (Cobo, 1998), así como todas las acciones gráficas y deductivas que un alumno pueda hacer para llegar a solucionar el problema (Cobo, 2004). Resumiendo, podemos decir que hay cuatro formas de aproximarnos a la solución del problema del paralelogramo que son las que hemos implementado en el *AGENTGEOM*: mediante el trazado de rectas paralelas a los lados por el punto M, considerando casos particulares, límite y singulares, buscando un problema equivalente, y aplicando la fórmula del área del triángulo.

- *Características cognitivas del alumno que participa en la experimentación*

Diversos alumnos participan en la experimentación con el *AGENTGEOM*. Los datos que analizamos en esta ponencia corresponden al alumno que hemos llamado Albert.

Albert estudia primer curso de bachillerato (16 años) en un Instituto de Enseñanza Secundaria de Manresa. No ha seguido ningún aprendizaje específico sobre la resolución de problemas ni sobre la demostración en matemáticas. La enseñanza de la resolución de problemas siempre se le ha enfocado desde un punto de vista de la resolución de ejercicios o problemas de aplicación cuyos contenidos matemáticos acaban de ser explicados por el profesor. Albert y sus compañeros utilizan esporádicamente el ordenador en sus clases -siempre trabajando en colaboración con sus compañeros-, y realizando actividades estructuradas y guiadas, asociadas a los contenidos matemáticos que el profesor pretende enseñar.

Los contenidos matemáticos de los problemas de comparación de áreas se han tratado en los cursos anteriores al que hace actualmente Albert, a pesar de que no de forma explícita ni con la finalidad concreta de resolver problemas de este tipo. Albert, conserva conocimientos procedimentales relacionados con la aplicación de fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas, y conocimientos suficientes sobre los conceptos asociados a las construcciones geométricas del área gráfica del *AGENTGEOM* y los que se utilizan en la escritura de las sentencias deductivas.

A todos los alumnos que participan en esta experimentación se les explica detalladamente el funcionamiento del *AGENTGEOM* y practican informalmente con él y, finalmente, se les propone que resuelvan el problema del paralelogramo. Los datos de las resoluciones que desarrollan los alumnos quedan registradas por el *AGENTGEOM* en el historial de cada uno de ellos. A partir de este historial y de las transcripciones de las grabaciones de todos los eventos de pantalla realizadas con el software Flash Cam[iv] obtenemos los protocolos escritos que utilizamos para analizar las interacciones alumno-*AGENTGEOM*. Así pues, estamos utilizando una recogida de información que Ángel Gutiérrez identifica en su ponencia como "registro automático de la actividad de los estudiantes".

- *Aspectos a considerar en el análisis de las interacciones de Albert con el AGENTGEOM*

En esta sección resumimos las bases del análisis cualitativo de las interacciones que se producen entre el alumno y el *AGENTGEOM* durante el proceso de resolución, con la finalidad de identificar las apropiaciones que el alumno va realizando durante dichas interacciones.

El objetivo último para el alumno en la resolución del problema es ejercer el significado de sus conocimientos para que permanezcan coherentes al final del proceso de resolución, al menos en la lógica de la situación propuesta. Entonces, el agente tutor puede orientar al alumno para que lo que vea, lo que diga y lo que haga sea coherente con esta lógica. Para el agente tutor, la lógica en cuestión está explícitamente dirigida por el espacio básico del problema, ya que los mensajes del agente tutor han sido concebidos en relación a este espacio. Se trata de focalizar la atención del alumno, de asegurar el significado de las proposiciones que produce, y de verificar si se encamina hacia el objetivo previsto. Así pues, la *influencia del medio social* y, concretamente, el uso del lenguaje gráfico-deductivo en relación a los mensajes del agente tutor será uno de los elementos (o capas) del análisis que realicemos. Por otra parte, teniendo en cuenta que la comunicación del alumno con el agente tutor se realiza a través de su interficie, es lógico considerar otras dos capas en el análisis de las interacciones: la utilización de las representaciones gráfica y algebraica, es decir, la utilización que el alumno hace de las áreas gráfica y deductiva, y la *naturaleza del discurso* del alumno en su interacción con el agente tutor, en concreto, el análisis de las aportaciones temáticas que hace y de la iniciativa en el proceso de resolución. Siempre teniendo presente que la comunicación del alumno con el *AGENTGEOM* o con otros alumnos en el forum de debate (que en este caso no consideramos) se realiza a través del lenguaje escrito.

Estas tres capas en el análisis de las interacciones están conectadas entre sí, es decir, la información contenida en una capa puede interpretar la información de otra. Por ejemplo, los contenidos de las acciones gráficas y deductivas es posible que se tengan que explicar en base a los contenidos de los mensajes del agente tutor, etc. A continuación precisamos un poco más el contenido de cada una de las capas mencionadas.

a) Utilización de las áreas gráfica y deductiva

Para ser capaz de comunicarse con la interficie, el alumno crea proposiciones gráficas (carga la figura del enunciado, crea objetos, que pueden ser puntos, segmentos, paralelas, perpendiculares, intersección..., borra objetos, nombra objetos, etc.) y proposiciones deductivas (escribe deducciones, pide verificación de deducción, pide verificación del resultado final, borra deducciones, etc.), a través de los botones correspondientes. El sistema transforma las proposiciones gráficas de forma que pueden ser utilizadas como objetos para producir inferencias, de acuerdo con las normas de deducción establecidas. Por tanto, es necesario que los alumnos creen objetos gráficos para que puedan ser utilizados en sus proposiciones deductivas. Así pues, es fundamental para el progreso del proceso de resolución una utilización conjunta de ambas áreas de trabajo. Todas las acciones gráficas y deductivas, así como los mensajes del agente tutor quedan registradas en el historial del proceso de resolución del alumno. Esto facilita el análisis de la forma en que el alumno utiliza dichas áreas, así como la forma en que evoluciona esa utilización a lo largo del proceso de resolución.

b) La naturaleza del discurso

En esta capa nos interesa analizar los contenidos matemáticos que los alumnos introducen en el proceso de resolución – dimensión temática- y las iniciativas de los alumnos en sus intervenciones – dimensión interlocutiva - (Calsamiglia y Tusón, 1999; Cobo y Fortuny, 2000).

Cuando la intervención del alumno suponga un progreso cognitivo, ya sea con la introducción de procedimientos u otros contenidos matemáticos (gráficos o deductivos), demandas de información y de validación al agente tutor... diremos que dicha intervención es de tipo progresivo. Por el contrario, si la intervención del alumno no introduce ninguna información nueva (borrado de objetos, acciones gráficas o deductivas no acabadas, acciones realizadas previamente, etc) diremos que es de tipo circular o repetitiva.

En un contexto en el que el alumno es el protagonista principal, tiene especial relevancia el estudio de quién lleva la iniciativa durante el proceso de resolución. Estudiar esa iniciativa supone considerar el carácter proactivo o reactivo de las intervenciones de los alumnos y su influencia en el proceso de resolución. Una acción es:

- *Proactiva* si es de iniciativa propia del alumno y no espera ninguna información del agente tutor que no sea una respuesta de validación a una acción deductiva o una respuesta gráfica a una acción gráfica, excepto cuando la demanda sea de un mensaje.

- *Reactiva* si es la reacción del alumno a una sugerencia (mensaje) del agente tutor en la línea marcada por ese mensaje.

c) La influencia del medio social

Estudiamos la influencia que los mensajes del agente tutor han tenido en el alumno, por ejemplo, si ha éste ha seguido las sugerencias del agente tutor y si se ha beneficiado de ese seguimiento, o si, por el contrario, no ha hecho caso y ha seguido sus propias iniciativas. Esta influencia ha sido examinada teniendo en cuenta los tres niveles de mensajes (o sugerencias) que hemos implementado en el agente tutor:

Nivel 0: Mensajes generales que no incluyen contenidos matemáticos implicados en la resolución del problema. Informaciones que los alumnos pueden encontrar directamente en su área de trabajo (reconocimientos de objetos, elemento de la ventana de procedimientos...).

Nivel 1: Mensajes que sólo contienen el nombre de los contenidos matemáticos involucrados.

Nivel 2: Mensajes que contienen informaciones sobre esos contenidos matemáticos.

Análisis del proceso de resolución del problema del paralelogramo desarrollado por Albert

En los siguientes parágrafos analizamos el proceso de resolución de Albert cuando interactúa con el *AGENTGEOM* para resolver el problema del paralelogramo. Para analizar el proceso de resolución lo dividimos en episodios sociales, que son intervalos de tiempo durante los cuales el alumno culmina una fase del proceso de resolución que ha seguido, en el sentido de Schoenfeld (1985), o interpreta el enunciado o se beneficia de una mejor comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados en la resolución del problema gracias a las interacciones que se producen; o el alumno implementa una aproximación que le conduce directamente a la solución (Cobo y Fortuny, 2000).

En el proceso de resolución de Albert hemos identificado tres episodios sociales, que hemos nombrado, teniendo en cuenta la finalidad de las acciones del alumno, de la forma: “establecimiento de una conjetura”, “trazado de rectas perpendiculares” y “trazado de rectas paralelas para justificar la conjetura”.

a) El establecimiento de una conjetura

Inmediatamente después de leer el enunciado del problema, de cargar en la pantalla gráfica la figura adjunta a dicho enunciado, Albert empieza utilizando el editor de deducciones para escribir la conjetura (acciones 5 y 6) de que las áreas de los dos triángulos que se pretende comparar son iguales.

5. Albert: Deducción: area dam = area amb

6. Agente mediador: área dab = àrea amb: cierta

El *agente mediador* no sólo le ha permitido establecer esta conjetura, sino que se la ha validado. Albert duda si introducir esa sentencia como deducción final. No lo hace porque sabe, por las experimentaciones previas que ha tenido con el *AGENTGEOM*, que el *agente tutor* se la validará pero le exigirá una argumentación. Estamos planteando a los estudiantes la demostración como forma de comprender por qué las conjeturas que se establecen son verdaderas, a la que hace referencia Ángel Gutiérrez en las conclusiones de su ponencia. Así, Albert es consciente que ha de iniciar una situación de validación en la que ha de ir justificando las aportaciones que haga hasta comprender por qué la conjetura que establece es verdadera.

Albert ha hecho al inicio del proceso de resolución lo que casi ningún alumno hace, es decir, utilizar directamente el área deductiva del *AGENTGEOM*. Ha realizado una aportación temática –expresar la igualdad de las áreas de los triángulos que se comparan- decisiva para el desarrollo posterior del proceso de resolución Parece que Albert ha sabido comprender las ventajas que le proporciona el sistema y se ha aprovechado de ellas. A partir de ahora ha de empezar a justificar la intuición que ha tenido, haciendo aportaciones que el sistema ha de validar.

b) El trazado de rectas perpendiculares

En el inicio de este episodio Albert tiene dudas y realiza acciones sin una intencionalidad aparentemente definida: vuelve a leer el enunciado, traza la otra diagonal db del paralelogramo, identifica el punto donde se cortan las diagonales, vuelve a borrar esa diagonal, señala líneas, crea el segmento am, etc. Albert ha iniciado la utilización del área gráfica. Sabe que sus sentencias deductivas han de utilizar objetos gráficos que estén construidos en dicha área, y, por tanto, no podrá construir su argumentación si no empieza a crear elementos auxiliares que complementen la figura inicial. La acción 16 marca el comienzo de una serie de acciones que parecen tener una finalidad concreta: la expresión de las áreas de los triángulos *abm* y *amd* (Figura 2) en función de sus bases y alturas.

16. Albert: Traza la perpendicular a da por m con nombre pm

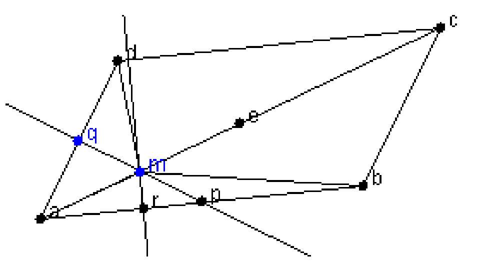


Figura 1.

Albert ha empezado a trazar perpendiculares (acción 16). Eso pone en alerta al *agente tutor* sobre la posibilidad de que trace las alturas de los triángulos, pero las acciones 16, 17 y 18, en las que Albert traza la perpendicular pm al lado da e identifica sus intersecciones con los lados *da* y *ba*, no están en ninguna de las estrategias que resuelven el problema. Por eso, el *agente tutor* responde a esas acciones enviando un mensaje de nivel 1 (acción 19)

17. Albert: Crea intersección de la línea pm con ab de nombre p

18. Albert: Crea intersección de la línea pm con da de nombre q

19. Agente tutor: "Trata de comparar las alturas de los triángulos ABM y AMD"

La comunicación entre Albert y el *agente tutor* empieza a producirse. Por el contenido del mensaje, Albert piensa que está en el buen camino, pero en realidad no ha sabido interpretar esta comunicación. El hecho de que el *agente tutor* haya respondido con un mensaje ha de interpretarse como que las acciones no siguen ninguna estrategia que lleve a la solución del problema. Albert continua con su idea inicial de trazar las alturas correspondientes a los lados *da* y *ba*, para, como dice el mensaje, poder compararlas.

En las interacciones profesor-alumno, cada uno de los interlocutores, sobre todo si trabajan juntos con frecuencia, saben interpretar las formas de comunicación verbales o no verbales. Ahora el *agente tutor* ha respondido con un mensaje a las acciones gráficas de Albert, y éste no ha sabido interpretar, no su contenido, sino la presencia del mensaje. Posiblemente los alumnos y el *AGENTGEOM* necesiten un periodo mayor de adaptación mutua para acabar de comprender sus procesos comunicativos.

La persistencia de Albert en el desarrollo de la estrategia que ha elegido, hace que el *agente tutor* le envíe otro mensaje (acción 25), ahora de nivel 2 y de cambio de estrategia: "Podrías pensar alguna forma de descomponer el paralelogramo en triángulos, por ejemplo, trazando paralelas que pasen por M". Este mensaje es mucho más concreto y aporta una información matemática considerable aunque no decisiva, como hemos tenido oportunidad de comprobar con otros alumnos. Al final de este episodio, Albert cumple su objetivo de construir las alturas sobre los lados *ba* y *da* de los triángulos *abm* y *amd* para llegar a compararlas (acciones 29 y 31)

29. Albert: Deducción: línea qm = línea mr

30. Agente mediador: línea qm = línea mr: falsa

*31 Albert: Deducció: línea qm = línea mr*2*

*32. Agente mediador: línea qm = línea mr*2: falsa*

El *agente mediador* no valida ninguno de los dos intentos de comparación de Albert, y éste empieza a pensar en un cambio de estrategia.

Resumiendo este episodio podemos decir que Albert ha insistido en desarrollar la estrategia que ha elegido hasta el final, animado por la interpretación que hace del primer mensaje que le envía *el agente tutor*. Además, sus acciones son proactivas y generan elementos gráficos auxiliares – trazado de las alturas de los triángulos- para su aplicación en las sentencias deductivas, que no han sido validadas por el sistema. Además, Albert no ha atendido la sugerencia que el *agente tutor* le ha enviado en su segundo mensaje.

c) El trazado de rectas paralelas

El *agente tutor* sabe que Albert no ha tenido en cuenta su último mensaje (acción 25). No sólo no ha hecho ninguna acción gráfica o deductiva en la dirección que le marca el mensaje sino que las tres últimas acciones no han sido reconocidas por el *agente tutor* (acción 26, en la que traza el segmento *mr*, la 29 y la 31). En estas circunstancias el *agente tutor* puede repetir el mismo mensaje. Es lo que hace en la acción 32, envía a Albert la sugerencia de que descomponga el paralelogramo en triángulos, trazando paralelas que pasen por *M*.

A partir de este momento se inicia un nuevo episodio del que resaltamos dos fases claramente diferenciadas en el desarrollo de la estrategia que marca el trazado de rectas paralelas a los lados del paralelogramo. En la primera fase, que abarca casi 11 minutos, la respuesta de Albert al mensaje emitido por el *agente tutor* es inmediata, posiblemente porque se encuentra en una situación de bloqueo. Sus acciones, que son claramente reactivas a ese mensaje, puesto que mira varias veces la ventana del tutor para ver si sigue correctamente sus indicaciones, son todas de naturaleza gráfica: trazado de rectas paralelas a los lados del paralelogramo, intersección de dichas rectas con todos los lados e identificación de todos los segmentos posibles de la figura que resulta. Son continuos los diálogos con el *agente mediador*, que rechaza la nomenclatura que Albert asigna a los objetos que va creando. Durante toda esta fase del proceso de resolución Albert se ha olvidado de utilizar el área deductiva. Al final, parece que vuelve a estar bloqueado. Este bloqueo lo manifiesta obsesionándose en crear nuevos segmentos i líneas, algunas de ellas no reconocidas por el *agente tutor*, que acaba enviándole un nuevo mensaje: *"Identifica los triángulos nuevos que se han formado"*.

Este mensaje es una insinuación al alumno para que continúe con la estrategia que ha iniciado, y es el inicio de la segunda fase de este episodio que conducirá a Albert a la justificación de su conjetura. En el área gráfica no se pueden identificar triángulos, puesto que el *agente mediador* los crea automáticamente cuando el alumno crea el segmento que cierra dicho triángulo. Albert interpreta correctamente el mensaje y reacciona, tras un par de acciones gráficas de intersección de líneas, empezando de nuevo a crear sentencias deductivas, intercaladas con algunas acciones gráficas que completan la figura que había hecho en la fase anterior. Las sentencias deductivas comparan áreas de paralelogramos, de triángulos, y de sumas de áreas de triángulos que se han formado con el trazado de las paralelas y otras líneas auxiliares. Todas son correctas y, por tanto, validadas por el *agente mediador*, aunque muchas de ellas no son sentencias que contribuyan a justificar su conjetura. Al final, Albert introduce la sentencia que da el resultado final y el *agente mediador* se la da por justificada con un 35 % de acciones reconocidas. El *AGENTGEOM* da por buena una argumentación cuando el alumno supera el 30% de las acciones gráficas o deductivas que desarrollan la estrategia que ha seguido (porcentaje fácilmente modificable por el profesor), que son las acciones reconocidas para esa estrategia, y sabe diferenciar entre todas las acciones validadas, las que contribuyen a justificar la conjetura que ha establecido de las, aún siendo correctas, no contribuyen a esa justificación.

Resumiendo, podemos decir que en este episodio las aportaciones temáticas de Albert han sido dirigidas por los mensajes del *agente tutor* (acciones reactivas), y, por tanto, podemos considerar que la interacción entre Albert y el *AGENTGEOM* ha sido guiada por éste. Esta dirección ha conducido a Albert a realizar, primero, sólo acciones gráficas, y, después, a combinar las acciones gráficas y las deductivas para desarrollar su proceso argumentativo.

Conclusiones generales

Con esta experiencia hemos puesto de manifiesto que el *AGENTGEOM* puede ser una herramienta auxiliar del profesor, que le puede ayudar en sus necesidades de atender a la diversificación de alumnos con la que se encuentra cada día. A ello contribuye la capacidad que tiene el profesor, a través del *AGENTGEOM*, de adaptar los problemas y los mensajes a las características cognitivas de cada uno de sus alumnos.

El *AGENTGEOM* colabora, creando las condiciones necesarias de manera casi autónoma, en el desarrollo de las competencias de los alumnos, relacionadas con los procesos de resolución de problemas, con el desarrollo del razonamiento geométrico, y con la utilización del lenguaje matemático en los procesos comunicativos. Para ello, hemos diseñado el *AGENTGEOM* de forma que tiene dos áreas -gráfica y deductiva-, cuya utilización conjunta permite a los alumnos crear objetos matemáticos genéricos, es decir, desvinculados de las medidas concretas de sus elementos, para utilizarlos en las sentencias deductivas, que han de ser escritas siguiendo las normas propias del lenguaje matemático. Así pues, los alumnos desarrollan su capacidad de abstracción y se apropian de la idea de demostración matemática, gracias a la desvinculación de los objetos gráficos de sus medidas concretas, a la construcción de las sentencias deductivas tomando como referentes dichos objetos, y a la necesidad, que impone el *AGENTGEOM*, de no dar por válida una argumentación hasta que no haya habido un número mínimo de acciones reconocidas.

Además, el *AGENTGEOM* contribuye al avance en el proceso de resolución del problema haciendo sugerencias que orientan al alumno, pero proporcionándole, en cada momento, sólo la información estrictamente necesaria, de forma que sea el propio alumno el que resuelva realmente el problema.

Referencias

Balacheff N. (1999). Apprendre la preuve. En Salattin, J. Szczecniarz, J.J. (eds.). *Le concept de preuve à la lunière de l'Intelligencie Artificielle*, pp. 197-236. Paris: PUF.

Balacheff N. (2000). Teaching, an emergent property of eLearning environments. In *Proceedings of the International Conference on Intelligent Tutoring Systems 2000*, Nice. Retreived at http://www-didactique.imag.fr/Balacheff/TextesDivers/IST2000.html.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactique'*.Grenoble: La Pensée Sauvage

Bunt A and Conati C. (2002). Assessing Effective Exploration in Open Learning Environments Using Bayesian Networks. In *Proceedings of the International Conference on Intelligent Tutoring*

Systems 2002, Biarritz. Retrieved at http://www.cs.ubc.ca/%7Econati/my-papers/its2002BuntConati.pdf.

Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea S. A.

Calsamiglia y otros (1997). *La parla com a espectacle: una anàlisi de "La vida en un xip"*. Publicacions de Universitat de Barcelona.

Cobo, P. (1998). Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos. Tesis doctoral inédita. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Cobo, P. (2004). *Disseny d'agents pedagògics intel·ligents per millorar les competències estratègiques de l'alumnat en la resolució de problemes de matemàtiques.* Memoria inédita de la llicencia de estudios concedida por el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (DOGC, núm. 3926 de 16-7-2003).

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-140.

Cobo, P., Fortuny, J. M., Puertas, E., y Richard, P. (2005). *AGENTGEOM*: a multiagent System for Pedagogical Support in a Geometric Proof Problem. (manuscrito sometido a publicación en *Internacional Journal of Computers for Mathematical Learning).*

Cole, M. (1996). *Cultural Psycology. A one and future discipline*. Harvard University Press.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registre sémiotique et apprentissages Intellectuals.* Berne: Peter Lang.

Festinger, L. (1957). *A Theory of Cognitive Dissonance*. Stanford University Press.

Festinger, L. (1989). The arousal and reduction of dissonance in social contexts. In Schachter, S. et Gazzaniga, M. (Eds.) *Extending Psychological Frontiers: Selected Works on Leon Festinger .* New York: Russell Sage Foundation, 238-257.

Fortuny J.M. y Murillo, J. (1999). Un modelo de utilización de una red electrónica como soporte instruccional en la enseñanza de la geometría en la E.S.O. *Rev de educación*. V. 1.

Kieran, C. (2001). The Mathematical Discourse of 13-year-old Partnered Problem Solving and Its Relation to the Mathematics that Emerges. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-140.

Laboratoire Leibniz (2003),. Baghera Assessment Project: Designing an hybrid and emergent educational society'. In Soury-Lavergne S. (ed.), *Rapport pour la commission européenne, Programme IST, Les Cahiers du Laboratoire Leibniz nº 81*, Grenoble.

Lakatos, I. (1984). *'Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique'.* Hermann. Paris.

Levy, P. (1994). *L'intelligence collective. Pour une anthropologie du cyberspace*. París: La Déecouberte.

Llinares, S. (1994). "La enseñanza de las matemáticas . Perspectivas tareas y organización de la actividad". En *La enseñanza de las matemátixcas en la educación intermedia*. Ediciones Rialp S. A. Madrid.

Luengo, V. (1999). A *semi-empirical Agent for Learning Mathematical Prof.* Artificial Intelligence in Education . SP.Lajoie and M. Vivet (eds.). IOS Press.

Meavilla, V. y Fortuny, J. M. (1999). Interacciones verbales y enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. *UNO. Revista de Didàctica de las Matemáticas*. Núm. 21. 81-104.

Moschkovich, J. (2004). 'Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor'. *Educational Studies in Mathematics* **55:** 49–80.

Newman, D., Griffin, P. and Cole,M. (1989). '*The Construction Zone:Working for Cognitive Change in School'*, Cambridge University Press, Cambridge.

O'Daffer, P. (1995). *Problem solving: Tips for Teachers*. NCTM, Reston.

Recio, T. y Rico, L. (2005). *El informe PISA y las matemáticas*. El País, 24-01-2005.

Richard, P. R. (2004a). *'Modélisation du comportement en situation de validation'*. Peter Lang. Berne

Richard, P. R. (2004b). 'L'inférence Figureurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique'. *Educational Studies in Mathematics*. In press.

Richard, P. R., Aïmeur, E., Fortuny, J. M., Gravier, S., Caron, F. (2004). *Vérification de l'extension de modèles théoriques à un système tutoriel intelligent pour l'apprentissage interactif dee la géométrie a l'école secondarie*. Université de Montréal.

Rodríguez, R. (2003). *L'aprenentatge de les matemàtiques com a participació en una pràctica d'una comunitat virtual*. Tesis doctoral inédita.

Schoenfeld, A. H. (1985) *'Mathematical problem solving'*, Academic press. Orlando.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition?. En A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdal, NJ: Lawrence Erlbaumm, 189-215.

Stacey, K. y Groves, S. (1999). *Resolver problemas: Estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático*. Narcea, S. A. Ediciones. Madrid.

Webber, C., Bergia, L., Pesty, S., Balacheff, N. (2002). 'The Baghera project: a multi-agent architecture for human learning'. In *Proceedings of the Workshop Multi-Agent Architectures for Distributed Learning Environments (AIED2001)*, 12-17, San Antonio.

Vygotsky, L.S. (1978), 'Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes', in M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner and E. Souberman (eds.), Harvard University Press, Cambridge, MA.

Wells, G. (1999). *'Dialogic Inquiry: Toward a Sociocultural Practice and Theory of Education'*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[i] Véase la comunicación ponencia de Olimpia Figuras sobre la utilización de las tecnologías de la información y de la.comunicaión.

[ii] http://blues.uab.es/~ipdm4/Agenta.htm

[iii] En su ponencia, Ángel Gutiérrez profundiza sobre las finalidades que pueden perseguir los estudiantes cuando realizan acciones de arrastre.

[iv] http://www.nexusconcepts.com/flashcam/

Réplica a la ponencia:

El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas

María José González López
Universidad de Cantabria

Aportaciones de la ponencia

Los más de treinta años de andadura de la investigación sobre nuevas tecnologías en Educación Matemática han dado lugar a multitud de trabajos que progresivamente han identificado aspectos influyentes y han delimitado líneas de investigación prioritarias. El término e-learning, acuñado más recientemente, aglutina aquellos trabajos que tienen como ingrediente principal la comunicación no presencial, normalmente vía web, y que se ocupan de analizar el modo en que las nuevas interfaces producen nuevas formas de comunicación y, en consecuencia, cambian nuestras prácticas y nuestros modos de aprender.

En este contexto general, el trabajo de Cobo & Fortuny se sitúa en la confluencia de tres ejes de plena actualidad desde el punto de vista de la investigación en Educación Matemática y de la práctica docente:

- la enseñanza y el aprendizaje con recursos informáticos mediante sistemas interactivos cuyo uso requiere la tutorización combinada humana-artificial,

- la atención a la diversidad, entendida como diversidad de niveles cognitivos o diversidad de asistencia presencial,

- el desarrollo de habilidades estratégicas y argumentativas asociadas a la resolución de problemas, en un modelo de currículo basado en competencias.

El objetivo explícito del trabajo de Cobo & Fortuny tiene dos vertientes:

- Diseñar un material multimedia, el sistema tutorial inteligente *AgentGeom*, que interactúe con los alumnos simulando una comunicación espontánea y que coopere con él en la resolución de tareas matemáticas.

- Evaluar el modo en que este material influye en el desarrollo de habilidades estratégicas y argumentativas en los alumnos ante la resolución de problemas.

Este propósito de diseño y evaluación de una herramienta multimedia para el aprendizaje ha llevado a los autores a desarrollar –no sólo en la ponencia que nos ocupa, sino también en numerosos trabajos relacionados con la misma- una amplia fundamentación propia original sobre el uso de estas herramientas a nivel epistemológico y cognitivo. Utilizaré estos dos dominios para enmarcar con más detalle el trabajo y situar sus aportaciones.

Desde el punto de vista *epistemológico*, una vez superadas las primeras fases de consideración de la tecnología como potenciador de la eficacia (complemento) y como profesor electrónico (sustituto), surgió la idea de la tecnología como mediadora entre el sujeto y el conocimiento, postura que ha pervivido con fuerza durante la década de los 90 (Noss & Hoyles, 1996). Pero más recientemente se viene elaborando la idea de evitar una separación artificial entre el ser humano y sus 'tecnologías', según la cual hemos de romper nuestra forma de pensar en la tecnología como algo externo. En esta línea de pensamiento se considera que la tecnología forma parte esencial de las prácticas humanas y las define, de modo que condiciona tanto el contenido como las formas de conocer. El binomio 'humano-tecnología' es inseparable (Borba y Villareal, 2005). Cualquier interpretación del llegar a conocer o del conocimiento se sustenta en procesos de interacción que forman parte esencial de las prácticas y, por ello, también están influidos por la tecnología (Levy, 93). Las preguntas de investigación interesantes desde este punto de vista están orientadas a identificar aquellos elementos del diseño de entornos de aprendizaje que condicionan las interacciones y, en consecuencia, a caracterizar la reorganización que sufren las prácticas realizadas en dichos entornos. El trabajo de Cobo & Fortuny concreta respuestas en esta línea. En efecto, se desvincula explícitamente del paradigma que considera a la tecnología como mediadora entre los seres humanos y los objetivos de las actividades que llevan a cabo y asume la existencia de distintos agentes cognitivos en un mismo entorno de aprendizaje compartiendo sus formas de conocer. No busca analizar el modo en que el alumno accede a un tipo de conocimiento más o menos objetivo implementado en un sistema, sino que el foco de atención son las interrelaciones posibles entre dos 'agentes cognitivos' poseedores de distintos conocimientos que evolucionan conjuntamente dependiendo de las relaciones que establezcan entre ellos. Obviamente ninguno de los dos agentes son hojas en blanco: el alumno llega al escenario con un determinado bagaje de conocimiento y de formas de interactuar; el agente virtual se diseña de forma que sus modos de comunicación produzcan interacciones valiosas. Enmarcado en estos supuestos, el trabajo de Cobo & Fortuny:

- identifica un conjunto de cualidades que ha de tener el sistema AgentGeom para cumplir con su cometido de interactuar simulando una acción tutorial humana,

- selecciona dos modelos de interacciones, los adapta a un medio escrito, a través de distintos sistemas de mensajes, y los implementa utilizando como base la resolución de tareas matemáticas (espacio básico de la acción tutorial humana, asociado al espacio básico de cada problema)

- desarrolla un modelo para analizar las interacciones que finalmente se producen entre los alumnos y el sistema.

Desde el punto de vista *cognitivo*, en coherencia con el planteamiento epistemológico, se considera el aprendizaje como una propiedad emergente de la realización de prácticas que se realizan en contexto y que están definidas por las interacciones sociales. Se asume que el potencial de los individuos para desarrollar su conocimiento aumenta cuando se relacionan con otros en tareas colaborativas. Los contextos de resolución de problemas de matemáticas se adaptan especialmente bien a este tipo de intercambio. El lenguaje se constituye en centro de atención, al reconocerse la relación entre las construcciones lingüísticas y las cognitivas. En distintos trabajos (Cobo, 98; Cobo & Fortuny, 2000), los autores han introducido elementos de análisis del discurso para investigar esta relación, que coloca al *debate social* en el centro de atención. El hecho de concebir al AgentGeom como un agente cognitivo más da sentido a la consideración de este marco para interpretar también las interacciones humano-máquina. Y dado que las interrelaciones se analizan teniendo en cuenta el contexto en el que se produce la comunicación y las características sociales e individuales de los interlocutores, cabe identificar aquellos aspectos específicos al caso en que uno de dichos interlocutores es virtual. El trabajo que nos ocupa:

- adapta los resultados de interacciones presenciales al contexto humano-virtual, con el fin de diseñar el AgentGeom de modo que reproduzca un comportamiento humano competente,

- identifica las características distintivas que hay que controlar en un escenario en el que uno de los interlocutores es virtual y que han de tenerse en cuenta al diseñar el agente virtual (control semiótico, situacional y cognitivo).

- valora los cambios contextuales y de aprendizaje que produce el hecho de estar ante un *debate social simulado* (implicación del alumno como actor principal, aumento del valor comunicativo del lenguaje escrito),

- describe cómo la interacción producida hace que un alumno se apropie de habilidades estratégicas y argumentativas (concebir la idea de demostración, asumir reglas de representación, de razonamiento y de validación).

Idea central de la ponencia

La ponencia realiza una contribución bien fundamentada al problema del diseño y evaluación de entornos de aprendizaje interactivos basados en la tutorización virtual y orientados al desarrollo de competencias matemáticas. Muestra el modo en que un alumno que desarrolla prácticas en un se apropia de habilidades estratégicas y argumentativas en uno de dichos entornos.

Tres ideas fuertes

- Estructurar situaciones complejas de enseñanza/aprendizaje *integrando de forma inseparable, en un mismo marco,* componentes que tradicionalmente se han concebido como distintas en la investigación sobre nuevas tecnologías (conocimiento, modelo pedagógico, estudiante).

- Concretar en un Sistema Tutorial Inteligente y a través de prácticas reales distintos planteamientos teóricos (modelos de interacciones entre agentes cognitivos, desarrollo de conocimiento vinculado a las prácticas) y adaptar dichos modelos a situaciones matemáticas.

- Abordar la problemática de la gestión del conocimiento vinculado a competencias matemáticas en entornos de e-learning.

Tres ideas débiles

- El trabajo sólo contempla de forma colateral el papel del profesor en este tipo de entornos. Se le atribuye el papel de diseñador de las actividades que han de ser implementadas en el sistema, pero esta tarea dista mucho de la correspondiente en entornos de tutorización presencial.

- La ponencia reconoce la importancia del contexto en el desarrollo de conocimiento, pero su forma de describir el contexto en el que el alumno se apropia de ciertas competencias sólo hace mención a los factores relacionados con el Sistema AgentGeom, omitiendo otra serie de factores contextuales que pueden haber sido determinantes.

- Aunque se argumenta la bondad del Sistema Tutorial Inteligente para atender a la diversidad, no parece que el planteamiento realizado incorpore un análisis profundo de cómo se han de gestionar en el sistema las adaptaciones necesarias.

Cuestiones específicas de educación matemática a debatir

La ponencia de Cobo & Fortuny muestra una profunda reflexión y un importante avance en una línea de investigación de plena actualidad en Educación Matemática. Sus resultados, difundidos a través de prestigiosas revistas y foros de investigación, están fuera de toda duda. En mi tarea de replicar esta ponencia continuaré presentando algunas reflexiones y cuestiones no resueltas en ámbitos relacionados con este tema de trabajo.

1. Sobre los 'conocimientos de referencia'

Hace ya más de diez años, Balacheff (1994) ponía de manifiesto que el diseño de entornos informáticos para el aprendizaje de las matemáticas tenía que ocuparse de los problemas que surgen al llevar a cabo una *representación computacional del conocimiento* en soportes informáticos. Partiendo de la existencia de un conocimiento de referencia objetivo –matemático-, había que determinar las transformaciones que éste sufría al implementarse en un soporte concreto y caracterizar así el 'dominio de validez epistemológica' de dicho soporte. Ante un Sistema Tutorial Inteligente como el AgentGeom, el término 'conocimiento' se amplía para incluir también modos de razonamiento ante la resolución de problemas... aspectos relacionados con las concepciones, el saber y el saber-hacer tácitos, que son considerados conocimiento emergente de las prácticas.

Podemos considerar que este nuevo dominio de conocimiento de referencia *ampliado* se estructura a través de la idea de 'competencia matemática'. Este dominio ha sido contemplado de diversas formas en la concepción y en el desarrollo del AgentGeom. En consecuencia, es coherente concebir que las interacciones con este sistema desarrollen conocimiento en términos de 'competencias matemáticas'.

Este planteamiento parece asumir que hay un paralelismo entre el 'conocimiento matemático' de referencia y cualquier 'otro tipo de conocimiento' necesario para resolver con éxito tareas matemáticas a la hora de ser tratados en un soporte computacional, aunque cada uno con su especificidad. La fundamentación realizada no tiene fisuras a ese respecto.

Pero, mientras en nuestros currículos la identificación del conocimiento matemático de referencia puede considerarse consensuada dentro de la comunidad de profesionales relacionados con la educación matemática, no parece que ocurra lo mismo con otros tipos de conocimiento (competencias) emergentes de prácticas no universalizadas, subjetivas, valoradas sólo en un ámbito que puede ser tan local como el aula. Nuestros currículos recientes –todavía impermeables a la idea de las competencias y reconociendo sólo tímidamente determinadas prácticas genéricas relacionadas con la resolución de problemas- no parecen tener referentes claros y consensuados sobre cuáles son las competencias a desarrollar, en qué grado, en qué momento y qué prácticas pueden asumirse como referente curricular común para desarrollar ciertas competencias… La investigación en Educación Matemática está actualmente en la búsqueda de respuestas sobre estas cuestiones.

Algunas cuestiones concretas son:

Las competencias matemáticas consideradas en el trabajo de Cobo & Fortuny (la resolución de situaciones-problema, el desarrollo del razonamiento matemático o la utilización del lenguaje matemático) ¿qué referentes objetivos tienen sobre lo que significa su desarrollo y consecución? ¿son comparables a los referentes de las destrezas matemáticas contempladas en el currículo? ¿cómo se valida la bondad de las prácticas realizadas con AgentGeom de las cuales emergen las competencias? ¿Qué comparten con otras prácticas que pretendan los mismos fines? ¿En qué hubiera sido distinto el desarrollo de estas competencias en un entorno presencial con el mismo tipo de tareas matemáticas?

2. Sobre la descontextualización de los aprendizajes

Hemos asumido en las secciones anteriores que los alumnos construyen el conocimiento en contexto, vinculado a las prácticas que realizan, que desarrollan un conocimiento útil a ese contexto, esté o no en consonancia con algún conocimiento de referencia. Pero la progresión de un alumno en el sistema educativo ha de garantizar una cierta 'descontextualización' de los aprendizajes, donde este término significará ahora 'contextualización según prácticas estandarizadas'. Por ejemplo, son numerosas las investigaciones que muestran cómo, ante el uso de Cabri-Géomètre, los alumnos desarrollan un conocimiento estratégico y un lenguaje vinculados al modo arrastre que no se transfiere al contexto estático de lápiz y papel… aunque posiblemente sea este último entorno el considerado habitual en el aprendizaje de la geometría en nuestro sistema educativo.

En la ponencia de Cobo & Fortuny se muestra el modo en que un alumno se apropia de habilidades estratégicas y argumentativas gracias a la interacción con el AgentGeom. Este sistema tiene implementada una forma de validación de las acciones del alumno que 'obligan' a éste a seguir unas normas precisas para comunicarse con él, para validar una secuencia de afirmaciones, etc. Cabe pensar que un alumno aprenda fácilmente a satisfacer las restricciones impuestas por el sistema y acabe teniendo éxito en sus estrategias de resolución de problemas con el AgentGeom, pero que después no reproduzca esta forma de proceder en otras situaciones en las que las normas de comunicación sean distintas (al fin y al cabo, las formas de interactuar con el sistema también están formando parte inseparable del conocimiento). También ocurre que la propia forma de interactuar con el sistema –en su faceta de tutor virtual- es la que moviliza conocimientos en el alumno para que éste acabe realizando una aportación temática u otros tipos de acciones. Pero una expectativa última es que el alumno sea capaz de reproducir sus estrategias en situaciones en las que tenga otro tipo de tutorización o incluso sin ninguna tutorización.

Algunas cuestiones son:

¿A qué contextos se considera que puede extenderse la apropiación de competencias conseguida con AgentGeom? En el proceso de apropiación de competencias, a parte de la interacción con el AgentGeom, ¿se ha considerado explícitamente la intervención de otros elementos no virtuales? El hecho de que el agente haya sido virtual, ¿qué inconvenientes y qué ventajas tiene a los efectos de la descontextualización?

3. Sobre la 'instrumentación' de los recursos

La literatura recoge una abundante colección de fenómenos nuevos que surgen en contextos computacionales y cuyo control parece exigir una adaptación del alumno a los entornos tecnificados. Es significativo el desarrollo reciente de la *teoría de la instrumentación* (Guin et al, 2004) según la cual al introducir tecnología se produce un proceso de 'génesis instrumental' por el cual un recurso se transforma en un 'instrumento', es decir, en un útil que permite al usuario realizar con éxito un determinado tipo de tareas y controlar su actividad. Según este marco, para que el alumno saque provecho de un recurso es necesario que desarrolle un conocimiento genuino, vinculado al recurso, que le permita hacer uso del potencial didáctico que dicho recurso teóricamente posee y que requiere de instrucción específica.

El AgentGeom está concebido para adaptarse al alumno (y no al revés), evoluciona en función de las necesidades del alumno. Pero también podemos observar la existencia de algunos elementos asociados al sistema tales que si el alumno los conoce y los gestiona convenientemente pueden modificar (optimizar) su trayectoria en el proceso de resolución de los problemas. A lo largo de la ponencia, sus autores mencionan algunas conductas del alumno investigado que muestran su desconocimiento de este tipo de conocimiento: comienza usando el área deductiva, no realiza una interpretación correcta del hecho de recibir un mensaje (aunque sí del contenido del mensaje), no atiende a la segunda sugerencia que le hace el agente tutor… En otros momentos se indica que *'ha sabido comprender las ventajas del sistema y se ha aprovechado de ellas'*. Se reconoce la necesidad de que entre los alumnos y el AgentGeom se produzca un periodo de adaptación mutua para que acaben comprendiendo sus procesos comunicativos.

Algunas cuestiones son:

¿Qué capacidades específicas, si las hay, son necesarias para conseguir un manejo eficiente del sistema? ¿qué prácticas conducen a su desarrollo? ¿cómo interfiere este aprendizaje con el de las competencias estratégicas y argumentativas que se pretende? ¿lo potencia? ¿lo dificulta? ¿es posible fracasar en el desarrollo de estas competencias por el desconocimiento de las otras?

4. Sobre la idea de demostración

Marrades y Gutiérrez (2000) utilizan el término *justificación* para referirse a las razones dadas para convencer a otros de la validez de una proposición, y el término *demostración* para nombrar a la demostración matemática formal, es decir, la secuencia lógica que satisface los requisitos matemáticos de abstracción, rigor y lenguaje. Ante un sistema como AgentGeom aparecen significados específicos sobre estos procesos ya que el sistema incorpora criterios de validación propios que, en este caso, responden a planteamientos de tipo social:

- Para que una sentencia sea válida es necesario que el sistema la tenga incorporada en su lista de sentencias para una estrategia,

- Para que una argumentación (encadenamiento de sentencias) sea válida es necesario que contenga un determinado porcentaje de sentencias válidas.

El alumno-usuario no tiene porqué conocer explícitamente los mecanismos de validación que usa el sistema. Aun conociéndolos, no cabe esperar que distinga entre una validación ‘social’ como la que incorpora el AgentGeom y una validación ‘formal’ –por ejemplo, las basadas en demostración automática de teoremas geométricos que incorporan otros sistemas (Botana & Valcarce, 2001)-. Pero lo destacable es que esperamos que el alumno se apropie de la idea de demostración formal.

Algunas cuestiones son:

¿Influye el tipo de validación interna del sistema en el tipo de concepción/apropiación sobre la idea de demostración que desarrollan los alumnos? ¿en qué aspectos? A parte de percibir que la demostración formal exige el respeto a unas reglas y un lenguaje, hay otros aspectos implicados en el desarrollo de la competencia de ‘razonamiento matemático’. Según Niss (2003) esta competencia involucra percibir lo que no es una demostración, conocer otros tipos de razonamiento… ¿pueden algunos de estos aspectos ser desarrollados usando el sistema? ¿cuáles serían las actividades y cuál el contenido de los mensajes? De las distintas funciones atribuidas a la demostración en el ámbito de la educación matemática (verificar o justificar la corrección de una propiedad, explicar por qué una propiedad es cierta, sistematizar los resultados obtenidos en un sistema axiomático deductivo, descubrir nuevas propiedades o comunicar conocimiento matemático (De Villiers, 1993)) ¿cuáles prevalecen si se lleva a cabo una instrucción con AgentGeom?

5. Sobre el papel del profesor

El sistema AgentGeom también está concebido como herramienta didáctica para el profesor. Sus características permiten a este introducir problemas adaptados al nivel de los alumnos, modificar los mensajes, cambiar los parámetros que deciden si una estrategia de un alumno es válida o no… En cada una de estas acciones podemos reconocer tareas profesionales clásicas para el profesor, pero ahora se ven condicionadas por algunos elementos nuevos.

En efecto, el sistema AgentGeom está diseñado según modelos de interacción que condicionan la naturaleza y el contenido de los mensajes que devuelve; dichos mensajes deben mantener la coherencia con el espacio básico de cada problema,… parece necesario que el profesor, antes de aventurarse a modificar un mensaje, conozca exactamente qué alteración de qué estrategia está introduciendo y cuáles son sus consecuencias. Mientras en una interacción presencial el profesor no hace necesariamente explícitos a priori los contenidos de sus mensajes ni sus criterios específicos de validación de una estrategia basada en la interacción, ahora está obligado a realizar un diseño técnico de la interacción a priori y a implementarlo por escrito (el sistema se encargará después de simular un comportamiento espontáneo).

Este planteamiento abre un amplio abanico de preguntas sobre el papel del profesor, su conocimiento, su formación,…

Algunas cuestiones concretas que cabe realizar son las siguientes:

¿Es realista proponer que el profesor lleve a cabo todo ese análisis a priori de tareas/interacciones o son sólo los diseñadores del sistema los que –tomando como referencia los modelos de interacciones, el espacio básico de cada problema, el espacio básico de la acción tutorial humana, etc- tienen garantías de implementar mensajes adecuados? Caso de que el sistema se use en un entorno presencial, ¿se ha considerado algún modelo de interacciones que combine las acciones tutoriales virtuales y las presenciales que deba ser conocido y respetado por el profesor?

Referencias

Balacheff N. (1994). *Didactique et intelligence artificielle*. En N. Balacheff et Vivet M. (Eds.): Didactique et intelligence artificielle. La pensée sauvage, pp. 9-42.

Borba M., Villareal M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Springer: Mathematics Education Library, Vol. 39.

Botana F., Valcarce J. L. (2001). *Cooperation between a dynamic geometry environment and a computer algebra system for geometric discovery*. En V.G. Ganzha, E.W. Mayr, E.V. Vorozhtsov: Proceedings of the Computer Algebra in Scientific Computing Conference. Konstanz (Germany), pp. 63-74. Berlin: Springer Verlag.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). *Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving*. Educational Studies in Mathematics, 42, pp. 115-140.

De Villiers M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas.* Épsilon n. 26, pp. 15-30.

Guin, D., Ruthven, K. and Trouche, L. (eds.) (2004). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Levy P. (1993). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.* Rio de Janeiro : Ed34, 1993.

Marrades, R.; Gutiérrez, A. (2000). *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment*. Educational Studies in Mathematics 44.1/2, pp. 87–125.

Niss, M. (2003). *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project.* In: A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.). 3rd Mediterranean Conference On Mathematical Education. Athens - Hellas 3-4-5 January 2003. Athens: The Hellenic Mathematical Society, 115-124.

Noss R., Hoyles C. (1996). *Windows on mathematical meanings. Learning cultures and computers*.

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II:

Investigación en Didáctica del Análisis

Coordinadora:

Dª Carmen Azcárate Giménez

Ponentes:

Dª María del Mar Moreno Moreno
(Universidad de Lleida)

El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros

D. Matías Camacho Machín
(Universidad de La Laguna)

Enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS

D. Vicenç Font Moll
(Universidad de Barcelona)

Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada

El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros

María del Mar Moreno Moreno
Departament de Matemàtica (UdL)
e-mail: (mmoreno@matematica.udl.es)

Resumen:

Los intentos de reforma de la enseñanza del cálculo en los diferentes países han sido muchos y distintos. La mayoría de los programas de renovación comparten los mismos criterios, y creen que los cambios deben afectar a: los currícula vigentes, al desarrollo profesional de la universidad, a la utilización sistemática de la tecnología y de otros materiales, a la formación didáctica y científica de los futuros docentes, etc. En España, cada vez son más numerosas y frecuentes las experiencias puestas en marcha por grupos de trabajo, profesores universitarios interesados y preocupados por la calidad y eficacia de su docencia, etc. La gran mayoría se apilan bajo el epígrafe de "innovación". A pesar de ello, los cambios apenas se dejan sentir. La cuestión se plantea en términos de: ¿A qué se debe esta persistencia e inmovilismo al cambio? ¿Dónde radica la dificultad de la enseñanza de aplicaciones y de modelos de situaciones próximas a la realidad? ¿Qué pueden aportar las investigaciones de didáctica de las matemáticas al proceso de enseñanza y aprendizaje en el ámbito universitario?

Este artículo pretende ser una reflexión acerca de la situación actual de la enseñanza del cálculo en la universidad, así como una justificación de la necesidad e importancia de las investigaciones didácticas en el ámbito del conocimiento del profesor, como motor del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Abstract

The calculus reform in different countries have been very interesting but quite different. Most of the renewal programs share the same general issues, and most institutions have developed an agenda which includes the changes that must be, that it is: curricula, reward systems for faculty, the kind of space used for instruction in science and mathematics, technology and materials, meaningful connections with real life, etc. In Spain, there are some people interested in new experiences and, at the same time, worried by the quality and the efficient of their teaching. There are experiences of teachers who improve new methodologies in their classrooms, use problem solving or projects to develop the calculus concept, but they are a minority compared with the number of mathematics teachers who teach calculus at university level. The questions are: Why is so difficult the change? Why do not mathematics teachers teach the derivative, differential equations and so on, using real life situations instead of exercises? Why is so difficult the relation between mathematicians and math educators?

This paper is a reflection about the teaching of calculus at university level and an analysis of the calculus reform movement. We also discuss about the importance of the research in the pedagogical content knowledge and the development of professional knowledge for teaching.

Introducción

De entre los ámbitos de estudio de la didáctica de las matemáticas nos preocupa e interesa sobre todo el referido al nivel universitario. Cada vez son más numerosas las investigaciones que buscan su centro de interés en este nivel, y en particular, sobre el papel de la didáctica en la enseñanza de las matemáticas universitarias. El hecho de que, poco a poco, se traslade el foco de interés del estudiante al profesor, o al menos los dos compartan protagonismo, hace pensar a los investigadores lo acertado de la orientación de sus investigaciones, así como de la complejidad que en sí mismo entraña el tema. Esta complejidad no sólo es debida a las características particulares del profesor y de los estudiantes, sino también de la propia asignatura, cada vez más abstracta y formal, y de las características específicas de la Universidad como institución, que condiciona, limita y determina los límites de actuación en ella.

La investigación didáctica en el nivel universitario no es novedosa. Tal como recuerda Artigue (2003), ésta lleva realizándose durante más de 20 años. Tiempo, durante el cual, a parte de intentar mejorar la comprensión sobre las dificultades de los estudiantes y las disfunciones del sistema educativo, también se han intentado encontrar vías para superar estos problemas.

La enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas.

Los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, que acaba siendo rutinaria (Artigue, 1995; Yusof y Tall, 1999), y a menudo intentan inculcar desde los inicios, los tradicionales métodos rigurosos de demostración matemática (Yusof y Tall, 1999). Asimismo, el profesor evalúa las competencias adquiridas por el estudiante en este dominio algorítmico y algebraico, generalmente a partir de ejercicios similares o iguales a los presentados en clase, ejercicios que responden exactamente al mismo esquema de pensamiento.

Como argumenta Artigue (1995) este fenómeno, que comienza en la enseñanza y se continúa con la evaluación, acaba convirtiéndose en un círculo vicioso pues para obtener niveles aceptables de éxito se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, convirtiendo lo evaluado en lo esencial para los estudiantes.

Alguno de los problemas detectados como consecuencia de esta forma de enseñar es que si bien el conocimiento adquirido por los estudiantes les puede ser útil para resolver ejercicios y problemas rutinarios, en el momento en el que se les enfrenta a contextos y situaciones que requieren mayor conocimiento conceptual, la mayoría falla y no saben cómo abordar la situación (Selden, Mason y Selden, 1994). En palabras de Skemp (1980), lo que sucede es que los estudiantes aprenden el "producto del pensamiento matemático" en vez del "proceso".

Para Artigue (1995), la evidencia de tales dificultades, los problemas detectados en los estudiantes y, en general, la insatisfacción existente tanto entre profesores como estudiantes ha tenido dos consecuencias interesantes:

- Potente desarrollo de las investigaciones didácticas de la enseñanza superior centradas fundamentalmente en el área de cálculo.

- Desarrollo y aparición de numerosos proyectos de innovación de la enseñanza.

El mayor exponente sobre temas de investigación didáctica en temas propios del cálculo queda recogido en el texto "Advanced Mathematical Thinking" (Tall, 1991), aunque se pueden citar otras tantas investigaciones recogidas en revistas como: Educational Studies in Mathematics, Recherches en

Didactique des Mathématiques, y las monografías de la American Mathematical Society sobre la reforma del cálculo, entre otras.

Por lo que respecta al tema de la innovación, se podrían citar casos como la renovación global del curriculum en Francia y Australia, o como las innovaciones y experimentaciones de Estados Unidos (Artigue y Ervynck, 1992; Lynn, 1993; Page et al., 1993), o los trabajos de innovación en el aula realizados en diversos lugares de España (Gómez i Urgellés, 2000; Llorens, J. L., 1995; Sánchez-Pérez, E.A., García Raffi, L.M. y Sánchez-Pérez, J.V, 1999; Guzmán, 1994, 2000), todos ellos con el objetivo de abordar el aprendizaje de las matemáticas de forma creativa, significativa y constructiva en la universidad.

No obstante, y en contra de lo que sería deseable, el informe Tucker (1991) deja claro el distanciamiento tan grande existente entre el mundo de la investigación y el de la innovación. A modo de ejemplo, en Estados Unidos la mayoría de los proyectos inscritos en el área de renovación del cálculo se han aplicado de forma independiente de los trabajos de investigación existentes.

Investigación vs. Innovación y renovación

Tanto la investigación como la innovación o renovación tienen sus propias dificultades, que quizás hoy por hoy, están lejos de encontrar puntos en común. Tratamos de adentrarnos en el problema, reflexionar sobre el interés de cada una, y la manera de establecer conexiones entre ambas.

Las investigaciones didácticas se han desarrollado atendiendo a diferentes enfoques teóricos y conceden un peso variable a cada una de las tres dimensiones que resultan esenciales: la epistemológica, la cognitiva y la didáctica; pero, además, existe un gran problema: los marcos teóricos que las sustentan. El hecho de no existir un paradigma dominante hace que no se facilite la comunicación entre investigadores, intentando cada corriente de investigación mantenerse en su torre de marfil.

De la misma forma, los intentos por la innovación también resultan problemáticos. Generalmente el entusiasmo de las personas que lo realizan y la necesidad de convencer hace que se dejen a un lado los problemas, y se sobrestimen las potencialidades y virtudes. En este sentido Artigue (1995), y sobre las innovaciones, advierte de la peligrosidad de caer en un discurso ingenuo, donde se toma como análisis cognitivo y didáctico el hecho de que tales herramientas se constituyan como un buen catalizador para forzar la evolución de las prácticas pedagógicas de los profesores y para comprometerlas en un enfoque más constructivista del aprendizaje.

a) *Reformas en la enseñanza del cálculo en el nivel universitario*:

Las distintas reformas a las que se han visto abocados los diferentes programas de cálculo aunque han sido interesantes, no han acabado con los problemas y las dificultades de los estudiantes. Según Artigue (1995), algunas de las críticas más destacadas hacia los programas de cálculo en Francia fueron: introducción de las nociones básicas desligadas de problemas reales; construcción lineal de los conceptos; escasa relevancia de la resolución de problemas; empleo muy precoz de un lenguaje formalizado; enseñanza muy centrada en el discurso del profesor, etc.

Estos puntos que Artigue señala como críticas a la enseñanza de los años setenta en Francia, son perfectamente equiparables a las consecuencias obtenidas en el estudio Moreno (2001) con profesores de universidad, en el que se detectaba que la forma general de plantear la enseñanza era de acuerdo a muchos de esos principios básicos.

Las reformas actuales recomiendan una revisión de los programas de cálculo, y de hecho los profesores intentan acomodar los programas a las realidades de los estudiantes. No obstante, en el caso español no se ha realizado un debate tan específico como en el caso francés para abordar la problemática de las diferentes áreas de las matemáticas que se tratan en el nivel universitario.

De la misma forma, la mayoría de los proyectos de los Estados Unidos, y ponemos como ejemplo el de Rouche (1992) o Page et al. (1993), desarrollan los conceptos del cálculo a partir de situaciones cotidianas y de problemas. Las ideas principales que se sustentan son que los objetos mentales preceden a los conceptos formales, y que éstos pueden servir para organizar ciertos campos de experiencia, y que los conceptos matemáticos se formalizan únicamente cuando son necesarios o bien útiles para demostraciones.

Muchas de las renovaciones curriculares realizadas, por ejemplo en Estados Unidos, Australia o Francia, son reformas orientadas tecnológicamente. Evidentemente la orientación dada por cada país e incluso por cada universidad puede variar considerablemente. En el caso de Estados Unidos las reformas han tomado dos caminos opuestos, uno radical que intenta una reconstrucción del curriculum partiendo de cero, como es el enfoque de la Universidad de Duke; o bien el resto, que buscan una reestructuración de la enseñanza de acuerdo a las consideraciones epistemológicas, cognitivas y tecnológicas (Schwingendorf, 1992).

El caso australiano (Mack, 1992) se ha centrado en desarrollar software que facilite las representaciones gráficas y algebraicas de las nociones de cálculo. Dadas las dificultades producidas por los enfoques tradicionales el gobierno y las instituciones educativas están apoyando aquellos proyectos que produzcan una introducción intuitiva al cálculo a través de la resolución de problemas.

b) Investigaciones didácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las nociones del cálculo en la universidad:

Para Harel y Trgalová (1996), revisando el panorama actual de las investigaciones didácticas en el área de cálculo, es posible entresacar tres ejemplos de tres nuevos enfoques en la enseñanza del cálculo que pueden ser representativos de los movimientos actuales de cambio en diferentes países del mundo:

El primero al que los autores hacen referencia es del denominado “Proyecto de Cálculo en Contexto” (1987) y en el que participa la Universidad de Massachusetts. La idea principal es que el cálculo es un lenguaje (el lenguaje de la ciencia), una red de conceptos y un conjunto de técnicas útiles. El objetivo principal del proyecto es que los estudiantes construyan las matemáticas a través de sus aplicaciones y comprendan las relaciones entre todos los elementos que configuran el cálculo. La instrucción se organiza de forma que los principios generales emergen de los problemas y de las situaciones reales tratadas. Los estudiantes trabajan en pequeños grupos y los problemas se tratan inicialmente con métodos numéricos, con ayuda del ordenador, antes de desarrollar técnicas de obtención de soluciones analíticas (O’Shea y Senechal, 1992).

Otro nuevo enfoque que se está dando a la enseñanza del cálculo se presenta bajo el formato de “Proyecto de Debate Científico” (Legrand, 1992) y su objetivo principal es conseguir que los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos mediante la introducción de diferentes conceptos del cálculo en el contexto de problemas científicos. Los estudiantes formulan preguntas, proponen conjeturas, dibujan sus propias conclusiones de acuerdo a la relevancia y validez de las conjeturas, y discuten y argumentan sus puntos de vista con los compañeros de clase. El mayor obstáculo didáctico de este proyecto es el conflicto existente entre el enfoque científico y los hábitos de aprendizaje establecidos por las instituciones educativas.

El tercer enfoque novedoso al que se refieren los autores es el propuesto por Artigue y sus colaboradores (Artigue 1989, 1991, 1992, 1994; Alibert, Artigue et al., 1989; Artigue, Menigaux y Viennot, 1990; Artigue y Rogalski, 1989) que desarrollan un modelo teórico y de enseñanza denominado ingeniería didáctica. Un ejemplo, lo encontramos en una de las primeras investigaciones realizas por Artigue (1989) sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, las cuales han acabado enseñándose como si de un catálogo de recetas de solución algebraica en los casos clásicos de funciones integrables se tratara. Para ello la investigadora propone estudiar la viabilidad de un nuevo enfoque de enseñanza que intente desde el principio coordinar los enfoques algebraico, numérico y gráfico con la solución de la correspondiente ecuación diferencial asociada. Se plantea una investigación en tres fases: análisis e interpretación de la enseñanza; análisis de las restricciones en la enseñanza; diseño de una ingeniería didáctica.

El proceso de enseñanza se lleva a cabo en fases organizadas alrededor de situaciones consideradas claves por los investigadores. Las experimentaciones sucesivas con este modelo han mostrado, no sólo, la viabilidad "teórica" de tal tipo de enseñanza, sino, el interés que puede generar en los estudiantes a pesar del aumento de dificultad. Son muchos los investigadores que han seguido y aplicado los trabajos de Artigue, aplicándolos a diferentes contextos y contenidos de cálculo.

Otras investigaciones didácticas con interesantes repercusiones en la enseñanza han sido las que han hecho del ordenador el centro de interés. Muchas de estas investigaciones han consistido en el desarrollo de un software especializado para la enseñanza efectiva de conceptos de cálculo (Tall, 1986b; Tall et al., 1990; Koçak, 1986; Hubbard y West, 1990). Por su especial relevancia, destacamos como ejemplo los trabajos de Tall en la línea de potenciar la visualización y las diferentes representaciones de un mismo concepto, como aspectos facilitadores del aprendizaje. Aunque Tall ha dedicado mucho tiempo a los trabajos sobre límites y continuidad, también son interesantes sus aportaciones en el estudio de la derivada, la tasa de cambio y los trabajos sobre visualización en dos y tres dimensiones de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

El software "Graphic Calculus" (Tall 1986a, 1986c; Tall et al., 1990) intenta abordar los conocidos obstáculos conceptuales en la comprensión del concepto de límite, y propone una nueva secuencia de aprendizaje construida sobre la base de la visualización de la "rectitud local" de los gráficos. Usa el gráfico y las posibilidades dinámicas del ordenador para dar una base cognitiva a las nociones de derivada e integral en educación secundaria, y que pueden llevar a formalizaciones posteriores en diferentes ramas del Análisis. La importancia de este software, especialmente diseñado para trabajar con las nociones del cálculo, es que permite a los estudiantes explorar inicialmente las ideas geométricas y numéricas, desarrollar sus propias concepciones y finalmente, conectarlas con los productos de los procesos simbólicos, dándoles una interpretación significativa.

Otro modelo que actualmente utilizan los investigadores para avanzar en el conocimiento de las dificultades de los alumnos con los conceptos matemáticos, y que además, propone secuencias posibles de enseñanza es el modelo APOS desarrollado por Dubinsky (ver Tall, 1991) y modificado posteriormente (Asiala et al., 1996; Dubinsky y McDonald, 2003). APOS no sólo es un marco teórico de referencia sino también un modelo que permite analizar las construcciones mentales utilizadas en el aprendizaje de conceptos matemáticos de nivel superior. Este modelo se basa en las acciones, procesos, objetos y esquemas que cada individuo realiza sobre los conceptos matemáticos que aprende. Los investigadores que trabajan dentro de este modelo teórico, forman un grupo de trabajo e investigación denominado RUMEC, que elaboran descomposiciones genéticas de diferentes conceptos matemáticos enseñados en el nivel universitario, y diseñan secuencias de enseñanza de acuerdo a las descomposiciones genéticas, las cuales son experimentadas y modificadas en lo necesario. Estas secuencias de enseñanza se organizan en lo que lo se denomina ciclo ACE: actividades para ser realizadas en el ordenador, discusiones de clase y, ejercicios para ser hechos con lápiz y papel. Hoy por hoy, las investigaciones sobre la teoría APOS son un claro referente para cualquier investigador que desee orientar su investigación hacia la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de cálculo en el nivel universitario.

Finalmente, y por tratarse de un ejemplo de investigación con repercusiones en la enseñanza, queremos destacar la interesante contribución del profesor Gómez (2000) al trabajo sobre modelización en el nivel universitario. Dicha investigación fue realizada en el marco de la enseñanza de las matemáticas a futuros ingenieros de la Escuela Universitaria Politécnica de Vilanova i la Geltrú.

Uno de los objetivos del trabajo fue analizar la viabilidad de introducir elementos nuevos de aprendizaje, como es la modelización, y diseñar un curriculum innovador, mejorando y evaluando el proceso de aprendizaje.

Para ello se diseñaron unidades didácticas específicas, y se utilizó la metodología de trabajo por proyectos, eligiendo problemas adecuados a los contenidos y a los conocimientos previos de los estudiantes (modelización de un sistema de resortes; el astronauta y las ecuaciones diferenciales, etc.). Los datos e información disponible procedían de grabaciones de vídeo y cassette, y cuestionarios pasados a los estudiantes.

La valoración que el autor hace del trabajo es positiva. La experiencia demostró que los alumnos eran capaces de descubrir el significado de las situaciones propuestas, aprendían a construir modelos y sentían la necesidad de resolver modelos específicos para encontrar la solución. Asimismo, el trabajo por proyectos resultó muy útil, y permitió a las estudiantes lograr un equilibrio entre las matemáticas y la aplicación de éstas a la realidad. Para el autor, los principales obstáculos de la investigación fueron: el tiempo empleado para realizar las prácticas con los estudiantes; el desconcierto de los alumnos habituados a un tipo de práctica rutinaria, y el miedo de los profesores a la pérdida de la tradicional pureza de las matemáticas.

Si bien hay otros grupos de investigación y modelos teóricos de referencia que con sus trabajos e investigaciones contribuyen al desarrollo de la Didáctica del Análisis, hemos hecho esta selección por tratarse de investigaciones que abordan la problemática de la enseñanza de diferentes aspectos del Análisis en el ámbito universitario, y donde el profesor adquiere una gran relevancia.

Es cierto que cada vez las ideas de renovación se van asentando en la enseñanza de las matemáticas de los niveles iniciales universitarios, dejando un poco de lado el formalismo y rigor prematuro propio de las enseñanzas más tradicionales, y abriendo las puertas a la adquisición de ideas y conceptos de forma significativa y profunda. Aunque tal como comentaba Artigue (1995), la enseñanza actual se basa fundamentalmente en el énfasis de las destrezas procedimentales y en la aplicación de reglas, asimismo el estudiante parece sentirse cómodo en ese papel y prefiere tal enfoque frente a otros que supongan un aprendizaje significativo y relacional. Igualmente, Rogalski (1990), considera que los estudiantes no están interesados en observaciones epistemológicas ni históricas sobre las matemáticas, dudan a la hora de realizar preguntas, y prefieren métodos de solución directos frente al intento por parte de algunos profesores de profundizar en los conceptos que aprenden.

El problema de la renovación e innovación no sólo resulta problemático por parte de los estudiantes sino también, a menudo, por parte de los profesores que dudan y no se sienten seguros en las nuevas metodologías de enseñanza, por motivos diferentes. No obstante, y a pesar, de que puedan existir detractores de la utilización de nuevas tecnologías en la enseñanza del cálculo, o bien, profesores que prefieren mantenerse en la postura tradicional de potenciar la enseñanza de los métodos de resolución algebraica muy por delante de los numéricos o geométricos, la realidad es que cada vez más profesores intentan mostrar a los estudiantes las matemáticas como un mundo de exploración y de resolución de problemas.

La cuestión de fondo es preguntarse acerca de lo que está pasando, porque las experiencias innovadoras suelen ser bastante puntuales, y nuestros métodos de enseñanza siguen siendo poco eficaces y no demasiado buenos para enseñar a una población estudiantil universitaria, que en su mayoría, no serán matemáticos y, sin embargo, tendrán que utilizar las matemáticas en sus profesiones.

La respuesta no proviene de un único lugar, y es evidente que hay muchos factores que deben tenerse en cuenta. Este trabajo pretende captar la atención de los lectores hacia uno de los elementos, que desde nuestro punto de vista, es clave para el éxito, y necesario para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tenga su origen en la investigación: el profesor. Hablar del profesor implica hacerlo del conocimiento y del desarrollo profesional. Una de las componentes que tanto Benedito et al. (1995), desde el ámbito de la pedagogía, como Cooney (1998) desde la didáctica de las matemáticas, consideran inseparables del término profesionalización, son las creencias y los conocimientos[1]. Desde nuestro punto de vista, las creencias juegan un papel muy importante en todo lo que se relaciona con el profesor y la toma decisiones en su ámbito profesional, por lo que cualquier intento de implementación de la calidad docente debería pasar por detectar, identificar, analizar e interpretar cuáles son esas concepciones y creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la materia en sí misma en su contexto específico de enseñanza.

Desde una perspectiva de enseñanza y aprendizaje constructivista, Benedito (1995) caracteriza la figura del profesor universitario en término de lo deseable:

> *[...] El profesor universitario debería provocar procesos de aprendizaje en el aula, conocer la dinámica de la misma, seleccionar, organizar los contenidos, facilitar el surgimiento y formulación de interrogantes, alimentar la discusión y el debate, establecer relaciones positivas, evaluar el trabajo de los alumnos y facilitar la búsqueda y construcción con sus alumnos del conocimiento científico. El profesor ha de comprender cómo se utiliza y elabora o reconstruye el conocimiento científico, se resuelven situaciones inciertas y desconocidas, se elaboran o modifican rutinas, se toman decisiones, se experimentan hipótesis de trabajo, se utilizan técnicas, instrumentos y materiales nuevos o conocidos, se recrean estrategias, se inventan procedimientos, tareas y recursos, se realizan las tareas de evaluación, se modifican sus teorías previas en contraste con la realidad, etc."* (Benedito et al., 1995)

Todas las acciones a las que se refiere Benedito, están condicionadas por esas creencias específicas del profesor, por lo que cualquier cambio resulta muy complejo, y no suele producirse a menos que el propio profesor, tal como apunta Cooney (2001), sienta la duda y vea la evidencia de que el cambio es necesario y puede reportar beneficios. Si no hay motivo para dudar de las creencias propias, tampoco hay razón para cambiarlas. En este sentido, nos parecen muy interesantes las reflexiones de Cooney sobre este elemento de "la duda" que, bien se puede sembrar en el propio profesor, o simplemente surge espontáneamente, y es el punto central para promover el cambio.

Desde nuestra experiencia como investigadores, estamos convencidos de la necesidad de una detección previa de las concepciones y creencias del profesor, como punto de partida para poder incidir e implementar el desarrollo profesional del profesor. En este sentido, nos gustaría detenernos en la investigación que realicé en el 2001 con matemáticos de diferentes universidades españolas, para así poder argumentar por qué las concepciones y creencias sobre el profesor deberían ser el punto de inicio de cualquier investigación sobre el profesor y su desarrollo profesional.

Un ejemplo de investigación sobre creencias de profesores de matemáticas en el nivel universitario

Para identificar y detectar las concepciones y creencias de algunos profesores de matemáticas universitarios sobre la enseñanza y aprendizaje de algunos aspectos del cálculo[2], decidimos realizar una investigación que así nos lo permitiera (Moreno, 2001). Para realizar esta investigación contamos con la inestimable colaboración de seis profesores de universidad, matemáticos especialistas en matemática aplicada, y que impartían docencia no sólo en facultades de matemáticas sino también en facultades como química, biología o veterinaria. Entre todos los profesores había tanto expertos como novatos, pero al menos todos tenían un mínimo de 6 años de experiencia docente en la universidad.

---

[1] Las definiciones y discusión que aceptamos para los términos concepciones y creencias se corresponden con los explicados detalladamente en Moreno, M. (2002) El pensamiento del profesor. Evolución y estado actual de las investigaciones. En G.A. Perafán y A. Aduriz-Bravo (Eds.) *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales, p. 61-78*, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

[2] La investigación a la que nos referimos, Moreno (2001), versaba sobre ecuaciones diferenciales y el problema de la modelización; sin embargo, hemos empleado la expresión genérica "conceptos/nociones del cálculo" porque los aspectos que resaltamos de la investigación en este capítulo, pueden hacerse extensivos a cualquier noción de cálculo. Básicamente nos interesa mostrar al lector una manera de aproximarnos a las creencias de los profesores de universidad y la posterior utilización de toda la información obtenida.

El instrumento diseñado para la recogida de datos pretendía que surgiera la duda y la autorreflexión de los profesores participantes sobre su propia actuación docente. El cuestionario constaba de cuatro tareas, todas ellas elegidas de textos propuestos habitualmente por los profesores en las asignaturas impartidas a los químicos, biólogos y veterinarios. Salvo la primera tarea, que fue calificada por la mayoría de los profesores como estándar, por el hecho de ser muy habitual y fácilmente identificable por los estudiantes; las otras tres cuestiones rompían con los esquemas de trabajo clásicos en estos cursos.

A partir de todos los datos procedentes, tanto de los materiales disponibles de cada profesor (programas asignatura, hojas de ejercicios y problemas, bibliografía recomendada…), como de las respuestas de los profesores al cuestionario (respuestas recogidas en una entrevista grabada en audio), realizamos un doble análisis. El primer análisis tenía carácter global y su finalidad era proporcionar una visión muy general sobre las concepciones y creencias, que mayoritariamente manejaban los profesores de nuestra investigación, sobre aspectos de enseñanza, aprendizaje y modelización. El segundo análisis lo denominamos particular pues pretendía dar una caracterización individual de cada profesor, destacando incoherencias, si era el caso, entre aspectos de bloques diferentes pero relacionados entre sí, o bien, evidenciando la coherencia mantenida en la mayoría de sus respuestas. Asimismo, este análisis nos permitió hablar del grado de permeabilidad de las creencias y concepciones de cada profesor, y la posibilidad de que, bajo determinadas circunstancias, todos o alguno de ellos pudieran encontrarse en disposición de evolucionar o, simplemente modificar algunas de las creencias y concepciones mantenidas por ellos respecto a la materia y, a su enseñanza y aprendizaje.

Si bien, ambos análisis no pueden verse independientemente, en este trabajo vamos a centrarnos en el análisis particular de los datos, pues en cierta manera, es el que nos aporta información acerca de la importancia de la investigación sobre creencias como paso necesario a la profesionalización de los profesores universitarios y al establecimiento de conexiones entre la innovación y la investigación didáctica.

El análisis particular proporcionó una caracterización de cada profesor atendiendo a tres aspectos: las concepciones sobre los conceptos matemáticos; la práctica docente que interpretamos que realiza cada profesor a la vista de los datos disponibles; las creencias de cada profesor sobre lo que piensa que debería ser su propia práctica docente. Un análisis más detallado de los resultados lo podemos ver en Moreno y Azcárate (2003).

Prácticamente todos los profesores sostienen una visión platónica de la existencia de los objetos matemáticos y están convencidos de tratar con una realidad objetiva, si bien explícitamente mantienen una concepción formalista de las matemáticas. Tan sólo el profesor C muestra cierta tendencia instrumentalista, y el profesor F, aún con su marcado carácter formalista, hace ciertos guiños al intuicionismo, y no está en total desacuerdo con dicha escuela de pensamiento.

Cuando el análisis se centra en lo que los investigadores hemos interpretado como la práctica docente de cada profesor, las diferencias comienzan a surgir. Los profesores A, C y F son claramente instrumentalistas (no sólo por lo que ellos dicen que hacen y creen acerca de la enseñanza y aprendizaje, sino que tales creencias coinciden con la interpretación que los investigadores hemos realizado teniendo en cuenta toda la información disponible de cada profesor); el profesor B también lo podemos calificar de instrumentalista aunque con tendencia a lo pragmático-constructivista; el profesor D claramente lo calificamos de dogmático-conservador (idea que como en el caso de los profesores instrumentalistas, es una conclusión a la que llegamos los investigadores y coincide totalmente con las creencias personales del profesor y los datos disponibles); finalmente, el profesor E entra en una contradicción pues aunque la creencia personal de este profesor sobre su docencia le hace enmarcarse en la categoría de pragmático-constructivista, el análisis de los datos disponibles para los investigadores y de los materiales proporcionados por el propio profesor, nos hace calificar su actuación docente como una mezcla de dogmático-conservador e instrumentalista.

Nuevamente, cuando analizamos las creencias de cada profesor sobre lo que cada uno piensa que debería ser su práctica docente, vuelven a aparecer las diferencias: los profesores A, B y E creen que deberían actuar más como pragmáticos-constructivista; el profesor F se inclina más hacia el intuicionismo con matizaciones y ligera tendencia hacia lo pragmático-constructivista; el profesor C claramente se define instrumentalista; mientras que el profesor D se mantiene en la línea dogmático-conservadora.

A pesar de la aparente homogeneidad entre los seis profesores, fuimos capaces de agruparlos en tres grupos, atendiendo a la concepción que tienen de la matemática, a cómo creen que debería ser su docencia y, a cómo hemos interpretado los investigadores que es su práctica docente (a la luz de los materiales y datos recogidos de cada profesor): I (profesores A, B y F), II (profesores C y D) y III (profesor E). En esta tipificación es donde tienen un gran valor las creencias y concepciones de cada profesor, y donde más allá de que algunas de éstas puedan ser diferentes, se pueden encontrar elementos comunes unificadores.

Ahora bien, ¿qué es lo que nos ha conducido a tipificar así a los profesores? ¿Qué diferencia, desde el punto de vista de las creencias, a los profesores de los diferentes grupos?

Esta tipificación se debe, en gran medida, al estudio del nivel de coherencia mostrado por los profesores, y al grado de permeabilidad o consistencia de sus creencias. Asimismo, la posibilidad de disponer de mucha información complementaria sobre las creencias y concepciones particulares de cada uno de los profesores del estudio con todo tipo de matizaciones, permitió no solo la tipificación más general, sino también, los informes particulares y detallados de cada profesor.

Los profesores del grupo I son, desde nuestro punto de vista, los menos coherentes y consistentes en sus concepciones y creencias. Este grupo es el más reflexivo y autocrítico consigo mismo, y es precisamente, de la reflexión de su práctica docente y de sus creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje, donde surgen contradicciones entre lo que creen que se debería hacer y lo que realmente hacen. La realidad dominante es que se acaba haciendo un ejercicio de docencia muy instrumentalizado, donde la resolución de tipos de ecuaciones diferenciales, problemas estándar y la casi ausencia de conceptos teóricos demasiado complejos son los protagonistas de la materia. Estos profesores están convencidos que sería necesario buscar la parte más significativa de las ecuaciones diferenciales, aproximarse más a los intereses de los estudiantes y de las profesiones en las que se están formando. Asimismo, piensan que sería más importante que el estudiante tuviera una idea global y más completa de las ecuaciones diferenciales, aunque fuera más intuitiva y menos formal de lo que cabría esperar de dicho conocimiento para un matemático.

El problema, según los profesores, es que, ni se dispone del tiempo ni de los medios apropiados para ello; y, además, carecen de la formación adecuada para progresar como docentes.

En el otro extremo tenemos a los profesores del grupo II, que podrían ser calificados como los más coherentes y consistentes en sus concepciones y creencias, a pesar de una práctica docente tan diferente. Mientras que el profesor C es claramente instrumentalista, el profesor D lo es dogmático-conservador. A ambos les une la fuerte convicción de que su actual práctica docente es la única posible y la que debe ser. El profesor C cree que dado el pobre nivel de competencia de los estudiantes, su desmotivación natural hacia la materia, etc., la única posibilidad de enseñanza con estos colectivos de químicos y biólogos es utilizando ejercicios, técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales, y tipos de situaciones modelizables bajo modelos previamente explicados por el profesor en clase, y que se ajusten perfectamente a dichos modelos. Por su parte, el profesor D, está convencido de la necesidad de no perder los valores propios de las matemáticas, la importancia de mostrar la belleza de una demostración, etc.; y la obligación de los estudiantes, aunque no sean futuros matemáticos, de ser conscientes de la dificultad que en sí misma entrañan muchos conceptos matemáticos de nivel superior.

La propia firmeza en las concepciones y creencias de los profesores del grupo II, elimina cualquier atisbo de duda sobre su práctica docente, y aleja cualquier expectativa, por parte de los investigadores, de cualquier tipo de cambio o puesta en práctica de una experiencia de innovación. En ningún momento se plantean que su forma de enseñar no sea la más adecuada ni eficaz; tampoco hay, en principio, argumentos suficientemente convincentes que les lleven a creer que los estudiantes pueden mejorar sus aprendizajes bajo contextos o circunstancias diferentes.

El caso del profesor E (grupo III) es totalmente distinto al del resto de los profesores, a pesar de que, desde el punto de vista del análisis de la consistencia o permeabilidad de las creencias, el resultado es similar al del grupo II. Este profesor se siente muy cómodo con su modo de enseñar, considera que ha alcanzado el objetivo perseguido por muchos profesores, como es el de ser constructivista (en un sentido muy genérico de la palabra); y, además, cree que los estudiantes aprenden y están muy conformes con su manera de enseñar. En este profesor hay, asimismo, un factor de inconsciencia que distorsiona lo que como investigadores pensamos que es la realidad de su enseñanza.

Como en el caso del grupo II, la ausencia de duda justifica la ausencia de motivos para el cambio; sin embargo, en este caso, llamamos la atención en la incoherencia del discurso de este profesor, que se podría justificar por cómo el profesor E presenta los temas en clase (a veces recurre a ejemplos de la realidad), la utilización de un discurso eminentemente didáctico y, su preocupación por los estudiantes y, en general, por la enseñanza. El resultado de los análisis de los materiales proporcionados por el profesor E muestran los equilibrios que hace para mantenerse entre las posturas más dogmáticas-conservadoras (no perder el valor ni naturaleza del conocimiento matemático) y las instrumentalistas (una práctica excesivamente mecánica que acabará proporcionando un conocimiento parcial de las ecuaciones diferenciales, y de unas cuantas técnicas de resolución). Este profesor muestra muchas contradicciones entre su discurso y lo que los investigadores creemos que hace. El hecho de que este profesor no sea consciente de tal contradicción nos lleva a pensar en la dificultad de incidir en su desarrollo profesional..

Mirada a dos casos particulares: los profesores A y D

La visión del perfil particular de cada profesor y la comparativa entre grupos nos proporciona pistas de cuáles serían aquellos aspectos más interesantes sobre los que actuar, detectar los puntos débiles de los profesores, los elementos de duda que se explicitan y suelen ser punto de partida y motor del cambio, etc. Mostraremos a modo de ejemplo, parte de un análisis entre dos profesores de dos grupos diferentes, y así ilustrar al lector y dar una idea de cómo puede ser la actuación posterior una vez detectadas e identificadas estas creencias de los profesores y analizado el grado de consistencia o permeabilidad de éstas, así como las coherencias e incoherencias internas.

Un elemento fundamental para el análisis particular fue la lista de descriptores elaborada durante la investigación en la fase del análisis de los datos. Estos descriptores, como los hemos denominado, proceden de las sucesivas reducciones de datos realizados a lo largo de las siete fases en las que tuvo lugar el proceso de análisis. La lista de descriptores esta organizada en torno a tres grandes bloques: aprendizaje, enseñanza y modelización. A su vez, cada uno de estos bloques incluía varios apartados directamente relacionados con los bloques en los que estaban incluidos. Por mostrar un ejemplo: dentro del bloque aprendizaje se incluyeron 4 apartados: respuestas y razonamientos de los estudiantes-dificultades y errores-percepción modelos de ecuaciones diferenciales-grado de formalización; dentro del de enseñanza incluímos 5 y, dentro del de modelización 4. La riqueza de esta lista de descriptores es que en cada uno de los apartados correspondiente a cada uno de los tres grandes bloques identificados inicialmente, se recogían prácticamente todas las respuestas diferentes y matices que los profesores proporcionaron al reflexionar sobre los diferentes temas tratados.

De esta forma, basta con aplicar la lista de descriptores a cada profesor para obtener el perfil de cada uno de ellos, y conocer exactamente las creencias sobre las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de diferente tipo, como por ejemplo: de resolución de problemas tipo estándar, otras de tipo no estándar, problemas que parten de un planteamiento gráfico, o bien tareas de carácter eminentemente teórico. Al igual que sobre dificultades, podríamos hacer lo mismo con cualquiera de los muchos apartados que aparecen en la lista. Esto nos proporciona una radiografía bastante exacta de cada profesor, en términos de concepciones y creencias sobre un aspecto matemático concreto, sin olvidar la importancia del contexto y los condicionantes que ello supone. Igualmente nos permite, con cierta sencillez, comparar perfiles de profesores, global o parcialmente; detectar creencias coincidentes y diferentes; etc. En resumen, contamos con una vasta información que puede ser reutilizada con cierta sencillez y que puede ponerse al servicio de los profesores de cara a su desarrollo profesional.

Para desarrollar este apartado hemos elegido dos profesores: el profesor A perteneciente al grupo I, y el profesor D del grupo II.

Fijémonos, por ejemplo, en las concepciones y creencias de cada profesor respecto al “formalismo exigido y esperado de los estudiantes”, apartado incluido en el bloque de aprendizaje. Mientras que el profesor A cree que no se debe exigir excesivo formalismo matemático, y que sería suficiente que los estudiantes fueran capaces de comprender lo que se les pregunta y fueran capaces de explicarlo de forma inteligible. El profesor D piensa que es necesario transmitir a los estudiantes el valor de los objetos matemáticos y sus significados, y exigir rigor y bastante grado de formalismo tanto en las definiciones como teoremas explicados en clase. Al mismo tiempo, la respuesta del profesor A en el apartado “dificultades y errores cometidos por los estudiantes”, también del mismo bloque, entra en contradicción con la creencia anteriormente manifestada, al afirmar que en una definición matemática hay ausencia de dificultad, pues se trata de una tarea que no requiere comprensión sino sólo memorización. El profesor D confirma el nivel de coherencia en sus respuestas, tal como quedó patente, al considerar que las dificultades de los estudiantes suelen relacionarse con la comprensión del enunciado y su redacción bastante abstracta, y la falta de conocimientos.

Veamos algo sobre otro bloque como es el de enseñanza. Si analizamos las creencias sobre la enseñanza en el apartado “definiciones, teoremas y demostraciones”, volvemos a encontrar diferencias considerables entre ambos profesores. El profesor A elige definiciones sencillas y ausentes de formalismos, suele enunciar teoremas en clase y trabaja sobre su significado, y no demuestra nada, tan sólo se intenta usar el sentido común para comprenderlos. Por el contrario, el profesor D, coherente con sus concepciones sobre las matemáticas y sus creencias sobre la enseñanza confirma que: elige aquellas definiciones que surgen como ‘consecuencia de’ y también aquellas que sean matemáticamente relevantes; se enuncian teoremas y se trabaja sobre su significado, pero al contrario que el profesor A, hace todas aquellas demostraciones que sean constructivas y cuya técnica de demostración sea adaptable a otras situaciones de interés matemático.

Dentro del mismo bloque nos fijamos, a modo de ejemplo, en el apartado “profesionalización y formación”, por tener éste bastante interés para los investigadores. Mientras que el profesor A asume la deficiente formación inicial alejada de los modelos químicos o biológicos, y la influencia que ésta tiene sobre su enseñanza pues le impide dar explicaciones convincentes de algo que ni domina ni conoce suficientemente; el profesor D, aún asumiendo la deficiente formación inicial, piensa que la formación inicial como matemáticos proporciona herramientas suficientes como para superar cualquier laguna de conocimiento.

Cuando dentro de este mismo apartado se aborda el tema de las repercusiones de cara a la docencia, el profesor A revela cierta sensación de vacío de conocimiento específico aplicado a estas disciplinas, y siente que explica contenidos carentes de interés para los estudiantes. Asimismo, justifica la deficiente y mediocre preparación de sus clases por la falta de textos y otros materiales didácticos adecuados. Por el contrario, el profesor D cree que todo profesor, según sus concepciones y creencias personales, se ve obligado de alguna manera a optar por la parte más instrumental o más aplicada de las ecuaciones diferenciales debido a la dificultad conceptual de conciliar ambas. Además, cree que la formación específica del profesor no repercute en modo alguno en la docencia, ya que el bajo nivel de conocimiento del alumnado impide al profesor mostrar su propio desconocimiento del tema.

La riqueza de estas creencias y pensamientos evocados por estos profesores es grande, y proporciona información valiosísima que nos permite desenmascarar dos profesores que aunque en apariencia y en muchos aspectos son similares, y en la práctica su enseñanza puede llegar a ser muy parecida, sus creencias ocultas destapan dos personalidades muy diferentes, con inquietudes y creencias distintas sobre la enseñanza, y con actitudes contrarias sobre lo que su formación puede o no repercutir en su docencia.

Aunque a modo de ejemplo, la comparativa entre las creencias de estos dos profesores justifica la pertenencia a dos grupos diferentes el I y el II, respectivamente; y cómo las dudas, la autocrítica y las propias contradicciones internas en las que a menudo cae el profesor A, son el germen de duda al que se refería Cooney (2001) que pone al profesor en situación de cambio de creencias, por sentirse incómodo en las suyas, o al menos, ser consciente de la necesidad de encontrar otro "algo" no sólo que le llene más como docente, sino también a sus estudiantes. Por el contrario, el caso del profesor D, perteneciente al grupo II, muestra la otra cara de la moneda, y es la del profesor muy coherente, seguro y convencido de su actuación como profesor y matemático, y sin sentir ningún tipo de carencia en su formación profesional. Este es el caso de la persona que tiene unas creencias firmes, seguras y muy arraigadas, y que al no sentir duda, tampoco siente ninguna necesidad de cambiar nada. Desde su perspectiva como docente y matemático el cambio no tiene sentido, las cosas funcionan de manera aceptable; la palabra cambio no tiene cabida en su vocabulario.

Conclusiones y retos futuros:

Aunque la dificultad conceptual de la modelización y el bajo nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes sea una realidad; la sencillez de la enseñanza de técnicas frente a la dificultad de enseñar a resolver problemas acaba imponiéndose; y el profesor sienta miedo a la pérdida de "las matemáticas de verdad" en favor de unas "matemáticas aplicadas"; sean, entre otros, motivos reales, finalmente, acaban sirviendo a los profesores para justificar la persistencia de los métodos, a menudo, tan poco eficaces en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos de nivel superior. Los resultados de esta investigación permite que confirmemos la hipótesis de partida que hablaba de la necesidad de ir más allá de las evidencias, que la experiencia personal y la práctica docente nos hacen percibir sin necesidad de grandes investigaciones, y reafirma esta línea de investigación que concede:

- Importancia a las creencias y concepciones de los profesores como punto clave de la mayoría de toma de decisiones como docente.

- Evidencia la necesidad de una detección previa de las creencias de los profesores, y del grado de coherencia y permeabilidad de ellas.

- Valor al análisis de las concepciones y creencias fuente de incoherencia, y de las que son poco consistentes como punto de partida de cualquier intervención que pretenda modificar, cambiar o simplemente mejorar la formación profesional del docente universitario.

- Interés a la necesidad de contar con instrumentos de detección de concepciones y creencias completos, eficaces y sencillos de utilizar que no supongan un esfuerzo extra por parte de los investigadores para investigar y desarrollar otros aspectos relacionados indirectamente con las creencias de los profesores.

El otro tema importante al que hicimos referencia al comienzo, es la desconexión entre la práctica de aula y los resultados de las investigaciones; lo que no debería ser así, y como apunta Ponte (2001), ignorar las contribuciones de las investigaciones didácticas sería dejar de lado un conjunto de poderosas perspectivas para la educación y un conjunto de conceptos básicos sobre los que intervenir y analizar en las situaciones prácticas. Igualmente, los procesos de desarrollo profesional tienen sus propios ritmos y dinámica, hecho que tampoco pueden olvidar los investigadores. El desarrollo profesional implica una madurez gradual de las potencialidades de cada profesor, la construcción de nuevo conocimiento, todo ello marcada por el contexto social y colectivo en el que se produce la actividad del profesor. Que la investigación y la práctica no establezcan puentes de unión, significaría malgastar un importante capital de experiencia e investigación, que el propio profesor puede utilizar en beneficio del estudiante.

Por lo tanto, ¿por qué pensamos que, efectivamente, la investigación didáctica sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesor puede ser un dinamizador de los procesos de cambio? Porque nos permite tener un conocimiento muy vasto de las ideas más profundas del profesor, y hasta cierto punto intuir los compromisos que está dispuesto a asumir, el interés o no que para cada profesor pueda tener su desarrollo profesional y su disposición a crecer profesionalmente tanto en el terreno didáctico como en el conceptual. También, ese conocimiento de las creencias y concepciones del profesor informa sobre cómo conviven los aspectos didácticos y conceptuales en cada profesor: si se solapan total o parcialmente, si por el contrario son totalmente independientes, si para un profesor sólo existe el plano de los contenidos, etc. Porque podemos aprovechar la riqueza de las creencias de cada profesor para acercarnos más a su realidad y sus preocupaciones, y poder dar respuestas más ajustadas a sus necesidades. Porque la detección de "las dudas" y aspectos deficitarios, o simplemente menos desarrollados de su perfil profesional nos pueden permitir romper esa barrera que habitualmente existe entre el docente y el investigador, precisamente porque somos capaces de ofrecerle aquello que sin necesidad de demandarlo explícitamente, aparece como tal demanda implícita en lo más profundo de sus pensamientos. De esta forma, y por ejemplificar algo, si como en el caso del profesor A de nuestro estudio, parte de su demanda surgía de la falta de materiales adecuados para alumnos y profesores, un buen punto de partida puede ser presentarle diversos materiales desarrollados por investigadores para trabajar las nociones de cálculo, y trabajar conjuntamente en la utilización de éstos, la adaptación al contexto de enseñanza, a las necesidades de los estudiantes, etc.

En definitiva, el conocimiento con cierto detalle de esa parte oculta de los profesores puede permitirnos ir un paso por delante de ellos, y estar en una buena posición de trabajar con los profesores partiendo de sus necesidades, con la ventaja de poder acercarles a la didáctica y aprovechar gran parte del conocimiento, que actualmente la didáctica puede ofrecer a los profesores universitarios sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo, en su beneficio y desarrollo profesional.

Asimismo, y parte de la clave del éxito en la intervención con el profesor es que, el investigador tiene que ser capaz de transmitir al profesor que sus métodos de enseñanza o las actividades propuestas en determinadas situaciones de enseñanza no son buenas o malas en sí mismas, sino más bien, es el propio contexto, los alumnos, etc., los que las hacen ser efectivas o no. En este sentido, pensamos que la mejor manera de concretar los resultados de esta investigación en la práctica sería la posibilidad de promover grupos de trabajo interdisciplinares, a varias bandas, que permitan poner sobre la mesa los problemas de los profesores, situaciones muy diversas de enseñanza, etc., sobre los que todos los miembros implicados puedan reflexionar, analizar, discutir y aportar puntos de vista, para así generar situaciones que provoquen esa "duda" a la que hicimos referencia anteriormente y que activa los procesos de cambio en los profesores, con los subsiguientes cambios y repercusiones en la enseñanza.

El momento actual de cambios que vive la Universidad debido al proceso de convergencia europea en el que estamos inmersos y la adaptación a los ECTS, está provocando la necesidad en muchos profesores de repensar su metodología de enseñanza, buscar alternativas que involucren más al alumno, etc. Es un buen momento para trabajar con los profesores e incidir en su desarrollo profesional y desarrollar vías de investigación como pueden ser los grupos interdisciplinares de trabajo, a los que hacía referencia en el apartado anterior que, además, favorezcan la reflexión, el aprendizaje, el desarrollo del conocimiento, la colaboración y las interacciones entre miembros de diferentes áreas de conocimiento, pero con intereses comunes.

Finalmente, para acabar con este apartado de conclusiones, nos gustaría recordar que se trata de una investigación abierta, muy novedosa y reciente en nuestra comunidad investigadora, por lo que debemos trabajar para profundizar en las múltiples cuestiones abiertas que aún quedan por responder, mejorar los métodos de investigación y de aproximación a las creencias y concepciones de los profesores universitarios, desarrollar e implementar propuestas concretas de formación en los niveles requeridos por los profesores, planteándonoslo como un trabajo en etapas, que no tiene porqué ser lineal y ni continuo en el tiempo, aunque sí profundo y duradero. Lo esencial es: primero sembrar la semilla de la duda, después establecer puentes de conexión entre la matemática y la didáctica de la matemática, comenzar a trabajar al ritmo requerido, fijar metas a corto plazo, y objetivos muy concretos, claros y concisos, y esperar que los resultados obtenidos permitan mantener vivo el espíritu del crecimiento personal e intelectual.

Referencias bibliográficas

Alibert, A.; Artigue, M. et al. (1989). *Différentielles et procédures différentielles au niveau du premier cycle universitaire*. Research Report. Ed. IREM, Paris VII.

Artigue, M. (1989). *Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en primer cycle universitaire*. Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, Edition IMAG.

Artigue, M. (1991). Analysis. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 67-198.

Artigue, M. (1992). Functions from algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. En Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.), *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy*. MMA 25.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En Bielher, R. et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academis Press. 27-39.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. 97-140.

Artigue, M. (2003). The teaching and learning of mathematics at university level. En D. Holton et al. (Eds.), *An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp. 207-220.

Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.) (1992). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus.* ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá.

Artigue, M. y Rogalski, M. (1989). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG première année. En *Enseigner autrement en DEUG scientifique*, Publication Inter-IREM.

Artigue, M.; Menigaux, J. y Viennot, L. (1990). Some aspects of student's conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of Physics, Vol. 11*, pp. 262-272.

Asiala, M.; Brown, A.; De Vries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for the research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, Vol. 2*, pp. 1-32.

Benedito, V.; Ferrer, V.; Ferreres, V. (1995). *La formación universitaria a debate*. Barcelona: Universitat de Barcelona.

Cooney, T. (1998). Conceptualizing the professional development of teachers. *Proceedings of ICME-8*, Sevilla, pp. 108-124.

Cooney, T. (2001). Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. En Lin, F.-L. y Cooney, T. (Eds.) *Making Sense of Mathematics Teacher Education, 9-31*. 2001 Kluwer Academic Press, Netherlands.

Dubinsky, E. y Mcdonald, M.A. (2003). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate

Mathematics Education Research. En D. Holton et al. (Eds.), *An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp. 275-282.

Gómez i Urgellés, J. (2000). *Per un nou ensenyament de les matemàtiques*. Barcelona: Ediciones CEAC.

Guzmán, M. (1994). El ordenador en la educación matemática. *Vela Mayor, Revista de Anaya Educación, 3*, pp. 33-40.

Guzmán, M. et al. (2000). *Curso: laboratorio de matemáticas,* Versión en la red: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm

Harel, G. y Trgalová, J. (1996). Higher mathematics education. En Bishop, A.J. et al. (Eds.). *International handbook of mathematics education, Part Two,* pp. 675-700. Netherlands: Kluwer Academic Press.

Hubbard, J. H. y West, B. (1990). *Ordinary differential equations* (with software for the Macintosh computer). New York: Springer-Verlag.

Koçak, H. (1986). *Differential and difference equations through computer experiments*. New York: Springer-Verlag.

Legrand, M. (1992). Débat Scientifique en Cours de Mathématiques. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus.* ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 59-60.

Llorens, J. L. (1995). *Complementos sobre la resolución de ecuaciones diferenciales*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.

Lynn, A. (Ed.) (1993). *Calculus for a new century*. Mathematical Association of America, United States of America.

Mack, J. (1992). Report from Australia and some neighbouring countries. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 101-113.

Moreno, M. (2001). *El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos*. Tesis Doctoral. Bellaterra: UAB.

Moreno, M. (2002). El Pensamiento del profesor. Evolución y estado actual de las investigaciones. En G.A. Perafán y A. Adúriz-Bravo (Eds.) *Pensamiento y Conocimiento de los Profesores. Debate y Perspectivas Internacionales*, pp. 61-78, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Moreno, M. y Azcárate, C. (1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos. *Enseñanza de las Ciencias, Vol. 15 (1)*, pp. 21-34.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 21(2)*, pp. 265-280.

O'Shea, D. y Senechal, L. (1992). Student learning difficulties and calculus in context. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 53-55.

Page, W.; Bushaw, D. et al. (Eds.) (1993). *Resources for calculus collection*. Mathematical Association of

America, United States of America.

Ponte, J. P. (2001). Investigating mathematics and learning to teach mathematics. En Lin, F.-L. y Cooney, T. (Eds.) *Making Sense of Mathematics Teacher Education, 53-72*. 2001 Kluwer Academic Press, Netherlands.

Rogalski, M. (1990). Quels étudiants, quels objectifs d'enseignement?. *En Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*. Principes et Réalisations, Brouchure de la Commission Inter-IREM Université, pp. 4-8.

Rouche, N. (1992). Le projet AHA d'introduction à l'analyse élémentaire. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*. ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 61-62.

Sánchez-Pérez, E.A; García Raffi, L. M. y Sánchez-Pérez, J.V. (1999). Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas. *Enseñanza de las Ciencias, Vol. 17 (1)*, pp. 119-129.

Schwingendorf, K. (1992). Calculus reform in the U.S.A.: a closer look at the purdue project. . En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*. ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 96-100.

Selden, J.; Mason, A. y Selden, A. (1994). Even good calculus students can't solve non-routine problems. En Kaput, J. y Dubinsky, E. (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learnin*g. MAA 3, pp. 19-26.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata. Madrid.

Tall, D. (1986a). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using computer graphics*. Ph. D. Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

Tall, D. (1986b). *Graphic calculus I, II, III* (BBB Compatible Software). Glentop Press, London.

Tall, D. (1986c). Lies, damm lies and differential equations. *Mathematics Teaching, Vol. 114*, pp. 54-57.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Press, Netherlands.

Tall, D.; Blokland, P. y Kok, D. (1990). *A graphic approach to the calculus* (I.B.M. Compatible Software). Sunburst, Pleansantville NY.

Tucker, T.W. (1991). *Priming the calculus pump: innovations and resources*. MMA 17.

Yusof, M. y Tall, D. (1999). Changing attitudes to university mathematics through problem solving. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 37*, pp. 67-82.

La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system)

Matías Camacho Machín
Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presentan dos investigaciones que hemos venido desarrollando en los últimos años, centradas en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida y la integral impropia. Se destacarán aquéllos aspectos que se relacionan con el uso que se hace de los CAS[1] Derive y Maple respectivamente, incidiendo en el papel que ha jugado cada uno de ellos en la investigación y mostrando algunos de los resultados obtenidos.

Abstract

In this work we present two researches that we have come developing in the last years, centred on the teaching and learning of Definite Integral and Improper integral. It will be the aspects that relate to the use that is done of the CAS Derive and Maple respectively, affecting in the role that has played each of them in the research and showing some of the obtained results.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la generalización del uso de programas informáticos potentes y el fácil acceso a ellos, ha provocado un reconocimiento más o menos oficial de la necesidad de integración de las distintas herramientas tecnológicas en los estudios universitarios. Las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) están empezando a constituirse en recursos que ayudan a cambiar los métodos de enseñanza, principalmente en los primeros cursos de Universidad. El reciente informe del ICMI (Holton, 2001) dedica una de sus secciones a la Tecnología y (King, et al, p. 350) destaca la importancia de la Tecnología como un medio para facilitar el aprendizaje de los estudiantes, haciendo énfasis en algunas de las potencialidades de las TIC para promover un aprendizaje más activo así como el trabajo cooperativo, motivar las explicaciones, indagar sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes, etc. Desde la década de los 80, existen en el mercado diferentes programas que poco a poco han ido incorporándose en la enseñanza, algunos concebidos con ideas educativas y otros no especialmente pensados con esa idea. Aparecieron programas tales como el *Macsyma, Mumath,* etc. -denominados manipuladores simbólicos- que son capaces de resolver fácilmente los ejercicios rutinarios, que, de otro modo, requerirían de una instrucción en técnicas de cálculo muy laboriosas. Comenzó en ese momento, principalmente en USA y Canadá, un replanteamiento sobre qué y cómo debe ser enseñado el Cálculo en los últimos cursos de Secundaria y primeros cursos de Universidad. En la década de los noventa y con la aparición de algunos programas más específicos, con más capacidades tanto simbólicas como gráficas (*Maple, Mathemática, Matlab, Mathcad*, *Derive*, etc.), el uso de este software se ha ido extendiendo a la enseñanza del Cálculo o Análisis Matemático, aunque en ningún caso el manejo de éstos puede considerarse como generalizado. Todo este software es generalmente denominado en la literatura anglosajona Computer Algebra System (CAS), dado que son

[1] Hemos optado por utilizar este término, porque es el más usado internacionalmente. También se utiliza SCF (Système de Calcul Formal) en la literatura francesa y PCS (Programa de Cálculo Simbólico) en la española.

programas informáticos que facilitan el trabajo simbólico y que permite manipular con expresiones algebraicas y numéricas. También los CAS permiten la representación de gráficas de funciones así como la conjugación de todos estos aspectos. También en esta década de los 90, surgen las calculadoras simbólicas, que son aquéllas que tienen implementadas algún CAS, como es el caso de la TI-92 o la Voyage 200. Cada vez más, aparece en los libros de texto la alusión al uso de las calculadoras tanto gráficas como simbólicas para la resolución de problemas.

Quizás uno de los CAS que por sus propias características (fácil manejo, economía de memoria, etc.) ofrece más posibilidades didácticas, es el *Derive*. Se han desarrollado diferentes proyectos de investigación subvencionados por las instituciones académicas responsables que han tratado de extender el uso de tal software (Artigue et al, 1995; Drijvers et al, 1997; Heugl 1997), aportando resultados bastante alentadores. A pesar del temprano optimismo despertado por el uso de CAS existe un amplio abanico de cuestiones sin responder. Por ejemplo:

¿Cuál es la relación entre lápiz-papel y el trabajo en un entorno informático?

¿Cómo afecta el uso de CAS al currículo?

¿Cómo afectan los CAS a la comprensión de los conceptos?

¿Qué conocimientos previos se requieren para usar un CAS de forma productiva?

El Documento de Discusión del 12 ICMI Study titulado *"The Future of the Teaching and Learning of Algebra"* señaló las siguientes interrogantes como cuestiones básicas que necesitan de respuestas más o menos inmediatas

- *¿Para qué estudiantes y cuándo es apropiado introducir el uso de un CAS?*
- *¿Cuándo las ventajas de usarlo sobrepasan el esfuerzo que hay que poner en aprender a utilizarlo? ¿Hay actividades en los que pueden ser realizados con provecho por estudiantes más jóvenes?*
- *¿Qué intuiciones algebraicas y "sentido simbólico" necesita el usuario de un CAS y a qué intuiciones conlleva el uso de éste?*
- *Una de las potencialidades de los CAS es que favorecen múltiples representaciones de conceptos matemáticos. ¿Cómo se puede utilizar esto correctamente? ¿Pueden ser "sobreutilizados"?*
- *¿Cuáles son las relaciones e interacciones entre distintas aproximaciones y filosofías de la enseñanza de las Matemáticas con el uso de CAS?*
- *Los estudiantes que utilizan distintas herramientas informáticas resuelven los problemas y piensan en los conceptos de forma distinta. Los profesores tienen más opciones para cómo enseñar. ¿Qué impacto tiene esto en la enseñanza y el aprendizaje? ¿Qué tipos de sistemas favorecen qué tipos de aprendizaje? ¿Pueden ser caracterizadas teóricamente estas diferencias?*
- *¿Cómo debería ser un currículo de Álgebra en un país donde los CAS están disponibles libremente? ¿Qué habilidades manipulativas deberían retenerse?* (Chick et al, 2001)

Es claro que la integración de los CAS en la educación matemática hace emerger muchas cuestiones que aún están por responder. Consecuentemente, la investigación sobre el la integración de estos programas en el aula en los diferentes niveles, ha ido configurándose poco a poco como campos de investigación en el que aparecen involucrados colectivos de investigadores cada vez más amplios. En algunos países, el impacto de estas tecnologías ha llevado a dedicar un espacio de discusión e investigación emergente, en el que han surgido elementos teóricos que nos ayudan a interpretar las dificultades y potencialidades que aparecen al introducir las TIC en el aula. Por ejemplo, en Francia, M. Artigue directora del IREM de París, ha liderado un grupo de investigación que ha tratado de explicitar la complejidad que tiene el proceso de enseñanza y aprendizaje utilizando CAS. Desde ese punto de vista (Artigue, 2002, Trouche, 2004, Guin, Ruthven y Trouche, 2005), establecen las bases de lo que se viene llamando recientemente la Aproximación Instrumental, como un elemento que ayuda a organizar la enseñanza e interpretar el aprendizaje de los estudiantes. Desde este punto de vista, el trabajo en un entorno de aprendizaje con ordenadores (CLE, Computerized Learning Environments) se hace efectivo mediante lo que se denomina Génesis Instrumental, que es el proceso mediante el cual un instrumento resulta de la construcción hecha por un individuo, en un entorno práctico, sobre las base de un “artefacto” (la Calculadora Simbólica).

En este trabajo describiremos dos investigaciones que hemos venido desarrollando durante los últimos años, cuyos enfoques son esencialmente diferentes: en la primera, que está dedicada a la enseñanza y aprendizaje de la integral definida, elegimos el CAS *Derive*, como mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje y en la segunda, utilizamos el CAS *Maple V*, con el objetivo principal de operacionalizar algunos de los resultados teóricos que han sido presentados a los estudiantes en una secuencia de enseñanza sobre la integral impropia con alumnos de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Esta investigación cubre un aspecto, que se relaciona con el currículo habitual del Cálculo. Se introduce, previo al estudio del cálculo de primitivas, el concepto de Integral Definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica partiendo de la idea de aproximación y utilizando ***Derive.*** Se pretende analizar la viabilidad de esta modificación del currículo, las potencialidades y dificultades que surgen en su implementación y, finalmente, analizar cómo adquieren los estudiantes el concepto de Integral Definida.

Hemos considerado como soporte teórico de nuestro trabajo, dado que nos propusimos analizar cómo entienden los estudiantes el concepto de área e integral definida después de participar en un curso en el que se utilizaba *Derive*, dos componentes importantes. Por un lado, consideramos un modelo de competencia adaptado del que define Socas (2001) cuando estudia el papel de los Sistemas Matemáticos de Signos en la comprensión de los objetos matemáticos en relación con el pensamiento numérico y algebraico, y, por otro, aspectos relacionados con el uso de la TIC, como elementos que facilitan el proceso de formación de los conceptos.

En relación al primer aspecto, el modelo de competencia se utiliza como un marco de referencia que al compararlo con las actuaciones de un estudiante, nos ayuda a determinar el grado de comprensión del concepto (Camacho y Depool, 2003) y funciona como un elemento organizador que facilita el análisis de la comprensión del concepto de Integral Definida por parte de los estudiantes.

El segundo elemento que ya hemos indicado, tiene que ver con el uso herramientas tecnológicas como mediadores entre el proceso de instrucción y el aprendizaje. En los últimos veinte años, aparte de los cambios experimentados por el software matemático y los propios ordenadores, las teorías sobre cómo los CAS pueden influir en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, también han venido refinándose cada vez más (Mariotti, 2002). (Heid, 2002) establece en su trabajo que es importante analizar cómo las teorías existentes sobre la enseñanza y aprendizaje pueden influir en el papel que representan los CAS en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Para Heid, existen dos tipos de teorías que podrían resultar útiles para explorar el papel de los CAS en el aprendizaje de las Matemáticas: las teorías que tienen que ver con las relaciones entre el aprendizaje y la estructura del currículum de Matemáticas, y, las teorías que tienen que ver con las relaciones entre el aprendizaje y los contenidos del currículum.

En cuanto al primer tipo de teorías, Heid señala que los CAS constituyen una tecnología cognitiva que facilita el acceso de los estudiantes a procesos de pensamiento matemático de un nivel más alto. Con un CAS los estudiantes pueden generar y manipular expresiones simbólicas que de otra manera necesitaría un gran tiempo de trabajo. Para Pea (1987) como tecnología cognitiva, los CAS pueden ser considerados como “amplificadores” o “reorganizadores u organizadores” del currículum. En el primer sentido, gracias a la función amplificadora, los CAS permiten extender el currículum y ampliar los tópicos que se trabajan en el currículum habitual. La segunda manera de usar CAS, como tecnología cognitiva, es como reorganizadora del currículum, cambiando la naturaleza y ordenación del currículum. En las investigaciones que se han desarrollado en los últimos años, resulta difícil de separar totalmente la relación de estas dos funciones que hemos señalado. Sin embargo, esta categorización nos ayuda principalmente al tratar de examinar los efectos de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Como consecuencia de lo anterior, nuestra investigación se ha configurado combinando ambos elementos. De esta forma, vamos a considerar que el CAS *Derive* constituye un amplificador del currículum desde el momento que ha sido utilizado para que los estudiantes desarrollen un conjunto de Prácticas de Laboratorio en un aula de ordenadores para introducir y establecer el concepto de Integral Definida, usando métodos de aproximación numérica que no se encuentran en los currícula habituales del curso de de Cálculo I para una carrera de ingeniería en una Universidad Latinoamericana[2]. En el otro sentido, consideramos el CAS *Derive* como un reorganizador del currículum, puesto que en el programa de formación optamos por organizar la enseñanza de otra forma, es decir, adelantando la enseñanza del concepto de Integral Definida como área, al cálculo de primitivas que es como se presenta habitualmente a los estudiantes de esos niveles.

Heid distingue como segundo tipo de teorías aquéllas que relacionan los contenidos y los procesos que aparecen en el currículum de Matemáticas, estableciendo además diferentes subcategorías de análisis:

El papel de los CAS en el álgebra escolar, el paso de las estrategias informales a las formales, la influencia de los CAS en las teorías que relacionan los procesos y objetos matemáticos y, finalmente, la influencia en las teorías de la representación para el aprendizaje de las Matemáticas.

Nos centraremos en esta última subcategoría que resulta ser la que más se relaciona con nuestro estudio. Pese a que existen diferentes interpretaciones de las representaciones (internas, externas, semióticas…), creemos, al igual que Heid, que lo que importa es el sistema en el que se produce la representación, no la perspectiva que se tome sobre las representaciones. Lo esencial en este caso es la conversión entre representaciones para su articulación coherente.

Los CAS y sus capacidades multirrepresentacionales constituyen un entorno de trabajo privilegiado. Muchas investigaciones han mostrado, como elementos claves en los que los estudiantes fracasan, la conexión entre las distintas representaciones. Santos (2000) en su investigación, encontró que un aspecto importante que favorece las conexiones entre las distintas representaciones, es la reflexión sobre la información que cada sistema de representación puede aportar a otro sistema de representación.

El trabajo que desarrollamos se centró en dos aspectos, primeramente en el papel que desempeñan las representaciones en el aprendizaje del concepto de Integral Definida, cuando se utiliza un CAS como *Derive,* y en segundo, nos centramos en cómo influye el uso de un CAS en la construcción de dichas representaciones.

El análisis de estos dos aspectos nos permitió, por una parte, establecer la competencia de los estudiantes mediante un modelo definido con anterioridad (Camacho y Depool, 2003a) y, por otra, determinar una serie de perfiles de actuación en la resolución de los problemas no rutinarios que se utilizaron en nuestra investigación, lo que constituye el trabajo que se presenta aquí.

La secuencia de enseñanza para la integral definida

En la investigación participaron un grupo de 31 estudiantes que recibieron un curso de Cálculo I entre los meses de octubre de 2001 y marzo de 2002. En este curso se combinaron las clases habituales de tiza y pizarra con una serie de Prácticas de Laboratorio (PL) para realizar con *Derive.* Una vez que los estudiantes habían asistido a las clases, desarrollaban las PL que se diseñaron para el trabajo de laboratorio. Los temas contenidos en el programa oficial fueron:

Se preparó un Módulo Instruccional que constaba de 8 Prácticas de Laboratorio. Las primeras cinco dedicadas al estudio de Funciones, Límites y Derivadas que se configuraron utilizando sencillos Programas de Utilidades (PU) similares a los expuestos en algunos libros de Cálculo (Stewart, 1999) así como los comandos de cálculo directo que se incluyen en los diferentes menús del *Derive*. El resto de las prácticas se diseñaron para el estudio de la Integral Definida, y se basaron principalmente en el uso de un Programa de Utilidades diseñado por nosotros (ver Camacho y Depool, 2003b, Depool 2004). Estas prácticas fueron concebidas con la intención global de que los estudiantes puedan seguir

[2] En líneas generales, en Latinoamérica la integral definida se introduce en los primeros cursos de Universidad

paso a paso el cálculo del área de la región limitada por una curva, utilizando aproximaciones con rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (Simpson), para interpretar desde un punto de vista el concepto de Integral Definida partiendo del cálculo aproximado de áreas de regiones. Se enfatiza el aspecto gráfico en la práctica 6, en la que se realizan lo que hemos denominado cuadraturas de la región cuya área queremos calcular, utilizando construcciones progresivas de rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (en el sentido de Simpson). En la práctica 7 se le presenta al estudiante un resumen del desarrollo gráfico expuesto en la anterior y se introduce el aspecto numérico calculando las diferentes aproximaciones totales al área, mediante las sumas de las distintas divisiones que se han hecho para la región que se está estudiando (práctica 7). En la última práctica (8) se incluyeron diferentes problemas de aplicación en los que se deben aplicar los conocimientos trabajados desde el punto de vista teórico en las clases habituales y en las PL anteriores.

De esta manera, para la formación de los estudiantes se desarrolló un trabajo dividido en tres fases principales:

Fase 1: *Clases habituales:* El profesor hace una presentación de los contenidos usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Stewart, 1999), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.

Fase 2: *Prácticas en el Laboratorio de ordenadores:* Los estudiantes realizan por parejas, en el laboratorio de ordenadores, las Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional. Las parejas de estudiantes llevan a cabo las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado. Se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la práctica y para aclarar dudas en su desarrollo.

Fase 3: *Puesta en común:* Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes de las prácticas que presentaron.

Ya se indicó que las PL constituyeron el núcleo central de la instrucción. Cada práctica de laboratorio constaba de un comentario general sobre la misma y un protocolo que los estudiantes deben seguir como instrucción de la práctica, con el asesoramiento del profesor. El contenido de cada práctica se proyecta en una pantalla con un cañón de proyección, y se les entrega a los alumnos con el objetivo de aclarar los puntos que sean necesarios de la misma. Cada práctica de laboratorio es recurrente, es decir, cada práctica nueva se comienza abriendo el archivo que contiene la práctica anterior en la que los estudiantes leen las observaciones de ésta y la calificación respectiva. Una vez terminado el módulo, se realiza una evaluación final que contiene los puntos más importantes tratados en las prácticas. Un ejemplo de Práctica de Laboratorio sería la resolución del siguiente problema que aparece en un libro de texto clásico:

Un fabricante necesita hacer hojas de metal corrugado de 36 pulgadas (90 cm) *de ancho con secciones transversales con la forma de la curva* (figuras 1, 2)

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x, \qquad 0 \le x \le 36$$

¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas hojas corrugadas?

(Edwards y Penney 1996, pp. 370-371).

Teniendo en cuenta que la longitud de un arco de curva entre dos puntos cualesquiera *a* y *b* viene dada por la fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,,$$

se tiene en este caso

$$S(x)=\int_0^{36}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\;dx=36\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\;dx$$

Figura 1. Lámina de metal

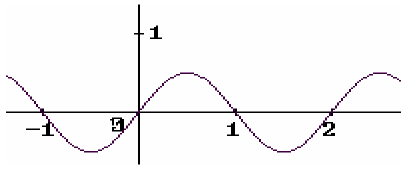


Figura 2. Gráfica de $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x$

En el texto mencionado se señala *Estas integrales no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales* (p. 370) para remitir al lector a otro capítulo del libro donde se trata la integración numérica. Presenta entonces la siguiente solución:

$$\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\;dx=1{,}46$$

Indicando a continuación que la solución del problema es: $36.(1{,}46)=52{,}56$ pulgadas.

Con la secuencia de enseñanza desarrollada por los estudiantes para el estudio del concepto de Integral Definida vista como el cálculo de áreas limitadas por una curva, no necesitamos darle solamente una solución numérica tal y como se hace en el texto, sino que podría obtener dicha solución desde el punto de vista gráfico y numérico. Para lo cual bastaría con considerar la función:

$$F(x):=\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}$$

que al representarla gráficamente (figura 3) nos permite observar que es una función positiva. El PU servirá ahora para resolver el problema, se puede observar en la figura los distintos rectángulos y el "llenado" de la superficie limitada con el eje de abscisas.

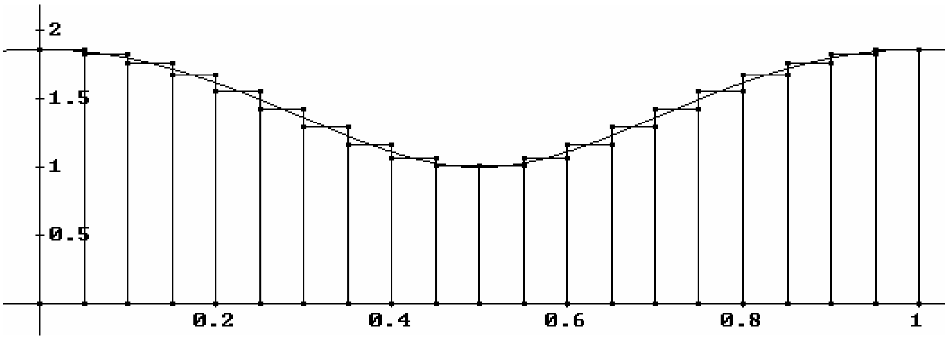


Figura 3. Gráfica con Rectángulos Punto Medio

Utilizando la matriz con 10, 20 y 30 subintervalos en la que aparecen las diferentes aproximaciones tenemos que la integral es aproximadamente 1.46369.

N. S	R. INF	R.PTO. M	TRAP.	TRAP. PARAB.	R.SUP.
10	1.377485726	1.463695629	1.463695315	1.463632875	1.549904904
20	1.420590677	1.463695472	1.463695472	1.463695524	1.506800266
30	1.434958942	1.463695472	1.463695472	1.463695472	1.492432002

El estudiante concluirá en definitiva que, el fabricante debe utilizar hojas extendidas de aproximadamente $36(1{,}46369)\approx 52{,}69$ pulgadas de ancho.

Análisis de los resultados

Los instrumentos de análisis utilizados para la recolección de datos fueron: un cuestionario de conocimientos y una entrevista. El primero fue aplicado a todo el grupo, y el segundo a seis de estos estudiantes. Estos últimos se seleccionaron según su actuación cuando resuelven por escrito las tareas propuestas en el cuestionario de conocimientos. En (Camacho, Santos, Depool, 2004a, 2004b) se incluye una síntesis general de las respuestas dadas por el gran grupo, así como de los estudiantes que se seleccionaron. Pasamos ahora a describir con mayor detalle los instrumentos utilizados:

El cuestionario y la entrevista: Las tareas propuestas tanto en el cuestionario de conocimientos como en la entrevista, se organizaron en torno a tres grupos de acuerdo con las características y las formas potenciales de solución:

- Primer grupo de preguntas: Preguntas en las que el registro gráfico constituye el elemento básico de la información que se suministra para la resolución del problema.
- Segundo grupo de preguntas: Preguntas en las que la información suministrada viene dada en el registro algebraico.
- Tercer grupo de preguntas: Cuestiones más generales en las que los estudiantes tienen que poner en juego un alto nivel de comprensión del concepto de Integral Definida para usar los diferentes registros de representación semiótica considerados durante la instrucción (numérico, gráfico y algebraico)

Los estudiantes cumplimentaron el cuestionario en tres escenarios diferentes:

Escenario 1, en el que los estudiantes resuelven las tareas del cuestionario empleando solamente lápiz y papel e informan por escrito sobre sus planteamientos o soluciones a los problemas.

Escenario 2: que corresponde al trabajo que presentan los estudiantes al resolver el cuestionario con el empleo del software *Derive*; aquí los estudiantes entregan una copia del disquete que contiene sus soluciones y sus comentarios sobre el contenido de la práctica.

Escenario 3: en el que los 6 estudiantes seleccionados (E1, E2, E3, E4, E5, E6) son entrevistados y se les pregunta directamente sobre su manera de resolver los problemas planteados. Aquí ellos eligen libremente qué tipo de herramienta deben emplear durante sus explicaciones o soluciones al cuestionario.

Conviene señalar que no todas las preguntas se propusieron en los tres escenarios, dado que un análisis previo de las respuestas dadas por el gran grupo (la clase) en los escenarios 1 y 2 nos sugirió incluir o descartar algunas de las preguntas que quedaron para la entrevista semiestructurada (escenario 3) que se desarrolló con el grupo de estudiantes seleccionado.

El análisis de las entrevistas nos permitió definir tres perfiles de actuación de los estudiantes

- En el primer perfil, situamos a los estudiantes que utilizan el CAS simplemente para realizar cálculos algebraicos o localizar cortes de la curva con el eje OX; aplican procedimientos algebraicos y/o numéricos en la resolución de los problemas, con escaso soporte gráfico.
- Los estudiantes incluidos en el segundo perfil, usan el software como una herramienta que les permite hacer más fáciles la resolución de las tareas.
- En un tercer perfil se encuentran los estudiantes que muestran una disposición clara al uso de *Derive*.

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Pasamos ahora a describir la segunda investigación que hemos venido realizando sobre el estudio de la Integral Impropia. Esta investigación se desarrolló dentro del marco de la Universidad y en particular de la Licenciatura de Matemáticas.

La secuencia se basa en presentar la integral impropia destacando su condición de generalización de la integral definida, por lo que se pretende ir complementando un conocimiento que los estudiantes deberían tener. Esta elección de comenzar el estudio partiendo de un problema matemático (el de generalización) viene condicionada por el nivel de conocimiento de nuestros alumnos de Primer Curso (no es posible comenzar con un problema de aplicación, puesto que nuestros estudiantes no conocen aún la Teoría de Probabilidades ni aplicaciones físicas de los conceptos estudiados). En el anexo se esquematiza el desarrollo que proponemos.

El hecho de suprimir una de las condiciones iniciales para definir el nuevo concepto puede ocasionar algún problema a los estudiantes. Sin embargo, el hecho de partir de la misma definición pretende crear una continuidad entre ambas definiciones (aunque es evidente que no se conservan todas las propiedades). Otra de las rupturas evidentes es la diferencia en las condiciones de existencia de una integral propia e impropia (por ejemplo, para el valor absoluto[3]). Además, funciones en las que siempre existe la integral definida (como polinomios) aparecen como imposibles de integrar en un intervalo infinito.

La secuencia de enseñanza utilizada incluyó dos sesiones en un laboratorio de ordenadores con la intención principal de promover lo que se denomina génesis instrumental[4]. Desde esta perspectiva, en la enseñanza de los conceptos utilizando CAS, se distingue entre un artefacto tecnológico y el instrumento que un ser humano es capaz de construir a partir de él. Mientras el artefacto se refiere a una herramienta objetiva, el instrumento se refiere a una construcción mental hecha por el usuario de la herramienta. El instrumento no viene dado con el artefacto, se construye mediante el proceso complejo que se denomina génesis instrumental y da forma a la actividad y el pensamiento matemático.

La génesis instrumental trabaja en dos direcciones. En la primera, se dirige hacia el artefacto, cargándolo progresivamente con potencialidades; se llama a este proceso instrumentalización del artefacto. En la segunda dirección, se dirige hacia el sujeto y lleva al desarrollo y apropiación de esquemas de acción instrumentada que se constituyen progresivamente en técnicas que permiten una respuesta efectiva a tareas dadas. Esto último es lo que se denomina propiamente instrumentación.

Es en esta perspectiva global y teórica, en la que Artigue (2001) establece un análisis sobre todos estos factores mediante el cual trata de caracterizar su marco teórico, centrándolo en los siguientes aspectos:

- La inesperada complejidad de la génesis instrumental.
- Las necesidades matemáticas de instrumentación.
- El estatus de las técnicas instrumentales, los problemas surgidos de su conexión con las técnicas de papel /lápiz, y su administración institucional

Entre los resultados más relevantes de las investigaciones con calculadoras simbólicas se encuentran los de Trouche (2004, 2005). Concluye que existen efectos negativos sobre los procesos de conceptualización, al hacer un uso individual de la calculadora simbólica. Guin y Trouche (1999) muestran que hay tres tipos de restricciones: internas, de comandos y de organización; es fundamental tenerlas en cuenta según la necesidad de una socialización del proceso de instrumentación, dado que:

- La utilización de las calculadoras conduce a los estudiantes, con más probabilidad, a construir su propia comprensión matemática gracias a una reflexión consciente.
- El comportamiento ideal que describen, induce un aporte benéfico de las calculadoras.
- Los profesores son investidos de una responsabilidad importante dentro de la elección de situaciones para acompañar el proceso individual de instrumentación.
- El rol del profesor es: subrayar las contradicciones no percibidas, incitar a una reflexión para encontrar una coherencia matemática, ayuda a los alumnos a acceder a esta

[3] Se tiene que, en un intervalo $[a, b]$, si existe la integral de $f(x)$ también existirá la de $|f(x)|$. Sin embargo, si se toma el intervalo $[a, +\infty)$ este resultado es falso. Más adelante mostramos algunos ejemplos.
[4] Para una exposición detallada del tema, consultar Artigue, 2002.

coherencia, introducir los nuevos conocimientos matemáticos necesarios y administrar las dificultades que surjan dentro del nuevo entorno.

Nos muestran además, cómo los estudiantes trabajan en un solo registro (gráfico, numérico, simbólico) y existen dificultades de conversión entre registros.

Cuando los alumnos aprenden por sí solos a utilizar las calculadoras ¿Cuáles pueden ser las consecuencias?

Se observa que los estudiantes:

- No consideran que la pantalla tiene límites mientras que la gráfica no los tiene.
- Consideran que las asíntotas forman parte de la función.
- Creen fielmente lo que les dice la calculadora sin buscar relaciones con los conocimientos adquiridos.

En las sesiones experimentadas con el *software Maple V* tratamos de evidenciar a los estudiantes algunas de las restricciones internas propias de este programa con el objetivo de ampliar las perspectivas de enseñanza y aprendizaje de la integral impropia.

También los obstáculos globales y locales definidos por Drijvers (2002) nos servirán para que los estudiantes reflexionen sobre su propio aprendizaje. Las ideas que aparecen establecidas en el marco teórico juegan un papel esencial, no solamente en el análisis del trabajo de los estudiantes, sino también en el diseño y estructura de nuestro estudio.

La secuencia de enseñanza de la Integral Impropia

Tal y como se ha indicado con anterioridad, la secuencia de enseñanza experimentada constó de diez sesiones, estando las dos últimas dedicadas al trabajo con el CAS *Maple V.* Consideramos que el uso del registro gráfico de forma más activa durante la instrucción y en los ejercicios y problemas propuestos podría paliar algunas de las carencias mostradas por los alumnos en investigaciones precedentes (González-Martín y Camacho, 2004; González Martín, 2002).

En la secuencia de enseñanza utilizada se destaca que el aprendizaje de los nuevos conceptos puede utilizarse para reforzar los conocimientos previos de los estudiantes. y por ello supone una retroalimentación de los conceptos aprendidos; por una parte, utilizamos activamente el aprendizaje anterior de los estudiantes para construir los nuevos conceptos y, por otro, estos nuevos conceptos serán utilizados para revisar los anteriores y aclarar algunos aspectos de ellos. En particular, se tiene en cuenta en la propuesta de enseñanza que:

- La introducción de la integral generalizada a partir del problema de extensión de la definición de Riemann puede reforzar la comprensión de ésta, en particular las condiciones bajo las que se define. Con este enfoque, algunos obstáculos ligados al concepto de integral definida pueden revisarse.
- La presentación de la función integral como elemento central del discurso puede reforzar la visión de la integral como un proceso dinámico.
- El cálculo de límites de la función integral para decidir el carácter de una integral puede hacer que los estudiantes revisen su visión de los procesos límite. De esta forma, se pretende combatir el obstáculo generado por el empleo de una concepción estática de los procesos límite.
- La decisión de abordar la secuencia en paralelo a la secuencia habitual para la enseñanza de las series y la evidencia de sus relaciones a partir del Test Integral puede enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre las series, favoreciendo nuestro esquema de retroalimentación de los conceptos nuevos con los previos.
- El uso activo de ejemplos y contraejemplos enriquecerá el conjunto de experiencias de los estudiantes, haciéndolos más sensibles a los engaños de la intuición y dándole un mayor estatus matemático al registro gráfico.

La secuencia de enseñanza está divide en seis bloques (Integral de una función en un intervalo infinito: Introducción y primeras intuiciones, Estudio de la integral impropia de funciones estrictamente positivas, Estudio de las propiedades que se conservan al extender la definición, Relaciones entre integrales impropias y series, Estudio de la integral impropia de funciones que cambian de signo, Ampliación al caso de integrales de funciones no acotadas en el intervalo de integración) con un total de ocho sesiones en el aula (donde se utilizarán hojas de actividades, debates y discusiones, ejemplos y contraejemplos) y dos en el aula de ordenadores.

En cuanto a los objetivos que nos hemos propuesto para alcanzar durante el desarrollo de las sesiones de laboratorio, tendremos:

- Reforzar el uso de criterios mediante la resolución de problemas más difíciles de resolver con lápiz y papel e incorporando funciones no prototípicas

- Mostrar las limitaciones del software para decidir la convergencia de algunas integrales, lo que motiva el interés del aprendizaje y el uso de criterios

- Reforzar el uso del registro gráfico en las actividades y resvisar contenidos institucionalizados

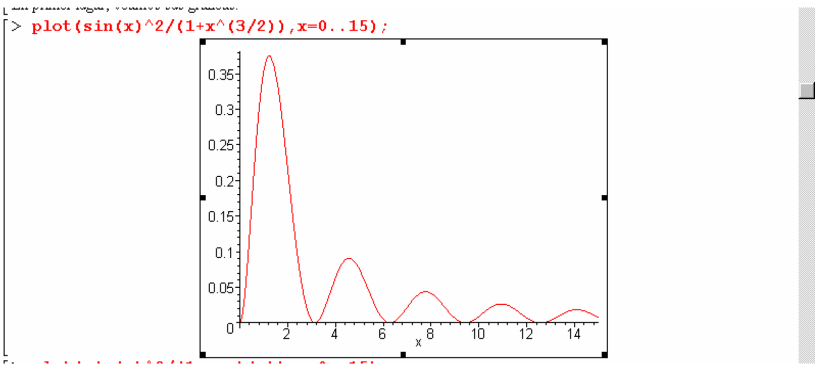
- Analizar si es posible adaptar las condiciones ecológicas para la socialización de la génesis instrumental a un contexto de aprendizaje con ordenadores.

- Analizar la viabilidad para la observación de génesis instrumentales y la posibilidad de generalizar algunos obstáculos observados en entornos de calculadoras gráficas en un contexto de aprendizaje con ordenadores.

Conviene destacar que se usa el ordenador sólo para reforzar los conceptos aprendidos y no para hacer surgir nuevas ideas.

La primera sesión diseñada hace un acercamiento al *software Maple V* y presenta las órdenes que se utilizarán en las actividades. Las actividades están organizadas de forma que la complejidad del uso de las órdenes es gradual, permitiendo al estudiante instrumentalizar la máquina y generar sus propios esquemas de acción instrumentada (instrumentación). La estrategia diseñada para que el estudiante tuviera una actitud crítica y tratara de utilizar resultados teóricos fue mostrar algunos defectos del *software* (restricciones internas) y la poca manejabilidad de algunos resultados que éste ofrece. La orquestación empleada (Trouche, 2002) contaba con un alumno *sherpa* con su computadora conectada a un cañón de proyección, de modo que sus acciones se presentaban en una pantalla, permitiendo al resto de alumnos controlar el desarrollo de las actividades y aportar sus propios métodos de resolución.

Una de las actividades presentadas plantea el estudio de la convergencia de la integral de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^{3/2}}$, en el intervalo $[0, +\infty)$, cuya gráfica es:



La estrategia que esta actividad tiene por objetivo desarrollar es la implementación de un criterio de comparación para concluir la convergencia de la integral. Esto se debe a que la evaluación directa de la integral produce un resultado difícil de interpretar, que se muestra en la siguiente figura:

```
> int(sin(x)^2/(1+x^(3/2)),x=0..infinity);
```

$$\frac{1}{8}\sqrt{3}\left(\frac{128}{1215}\frac{\pi^{\left(\frac{7}{2}\right)}\operatorname{hypergeom}\left([1],\left[2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{11}{6},\frac{4}{3}\right],\frac{-1}{729}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)}-\frac{8}{45}\pi^{\left(\frac{7}{2}\right)}\sqrt{3}\operatorname{hypergeom}\left([\;],\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{11}{6},\frac{4}{3}\right],\frac{-1}{729}\right)\right.$$

$$+\frac{64}{81}\frac{\pi^{\left(\frac{7}{2}\right)}\operatorname{hypergeom}\left([\;],\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right],\frac{-1}{729}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)}-\frac{512}{315}\pi^{3}\sqrt{3}\operatorname{hypergeom}\left([1],\left[\frac{3}{4},\frac{17}{12},\frac{5}{4},\frac{19}{12},\frac{13}{12},\frac{11}{12}\right],\frac{-1}{729}\right)+\frac{1}{1296}$$

$$\pi^{\left(\frac{5}{2}\right)}\sqrt{2}\sqrt{6}\left(\sum_{\_k1=0}^{\infty}(-1)^{(2\_k1)}\left(-\Psi(1+\_k1)-\pi\tan\left(-\pi\_k1+\frac{1}{6}\pi\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\_k1\right)+\pi\tan(\pi\_k1)\right.\right.$$

$$-\Psi\left(\frac{2}{3}+\_k1\right)+\pi\cot\left(\frac{1}{3}\pi-\pi\_k1\right)+\pi\cot\left(\frac{1}{4}\pi-\pi\_k1\right)-\pi\tan\left(\frac{1}{4}\pi-\pi\_k1\right)-\Psi\left(\frac{5}{6}+\_k1\right)-\Psi\left(\frac{7}{6}+\_k1\right)$$

$$\left.-\Psi\left(\frac{4}{3}+\_k1\right)-6\ln(3)\right)3^{(-6\_k1)}\sec(\pi\_k1)\sec\left(-\pi\_k1+\frac{1}{6}\pi\right)\csc\left(\frac{1}{3}\pi-\pi\_k1\right)\sec\left(\frac{1}{4}\pi-\pi\_k1\right)$$

Time: 23.1s | Bytes: 2.37M | Available: 491M / 44%

En particular, esta actividad tiene por objetivo que el estudiante emplee el criterio de comparación por cociente y pruebe diferentes funciones con las que comparar, generando así esquemas de acción y de reconocimiento de regularidades. Una posible solución sería:

Probamos con otra función:

```
> f:=x-> x^(1/3)/(1+x^(3/2)) ;
```

$$f := x \to \frac{x^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{1+x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

```
> int(f(x),x=0..infinity);
```

$$\frac{2}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{9},\frac{8}{9}\right)$$

```
> evalf(%);
```

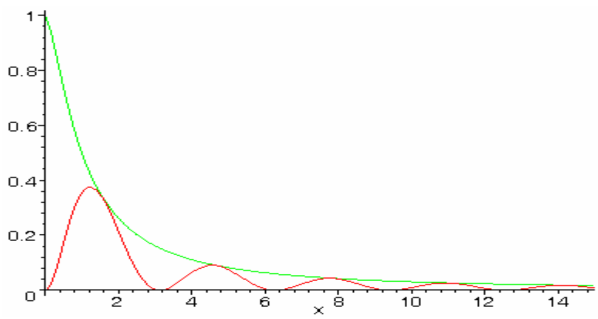
$$6.123601617$$

```
> limit((sin(x)^2/(1+x^(3/2)))/f(x),x=infinity);
```

$$0$$

Hemos elegido una función en este caso tal que su integral es "**sencilla**" de calcular y resulta ser convergente. Además, el límite del cociente de funciones tiende a cero.
El criterio de comparación nos asegura que la integral de partida es **convergente**.

Se observó que algunos estudiantes lo que hacen es dibujar conjuntamente las funciones $f(x)$ y $\dfrac{1}{1+x^{3/2}}$, obteniendo una gráfica como la siguiente:



La segunda integral es convergente (se puede comprobar fácilmente), por lo que $f(x)$, al encerrar un área menor, es también convergente. Este tipo de razonamiento nos parece una muestra muy significativa de la elaboración de los estudiantes de sus propios esquemas de acción instrumentada y del proceso de instrumentación, al elegir un criterio de comparación mucho más fácil de implementar en este caso.

Mencionamos, finalmente, que el trabajo con el ordenador resulta especialmente útil cuando se trabaja con integrales de funciones que cambian de signo. Así, la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ constituye un ejemplo clásico de función con integral convergente pero no absolutamente convergente. Sin embargo, este ejemplo está fuera del alcance intuitivo de los estudiantes. Utilizando la teoría de series y los conocimientos previos, es mucho más sencillo construir contraejemplos de funciones que convergen condicionalmente (González-Martín y Camacho, 2005)

Análisis de los resultados

En la primera sesión participaron 18 estudiantes y en la segunda se contó con la presencia de 22. Se observó, en general, un primer nivel de instrumentación. Los estudiantes descubren los comandos y sus efectos, aunque no tienen en cuenta otras fuentes de información. En algunos de los estudiantes se observó, además, un intento de comprensión de la herramienta y de combinación de los elementos teóricos con los comandos aprendidos, resolviendo el problema de no encontrar una función adecuada para el Criterio del Cociente mediante el uso del Criterio de Comparación, lo que puede constituirse en los primeros pasos hacia la instrumentalización

Para la génesis instrumental colectiva de estos procesos, pensamos que la elección del alumno sherpa resultó ser fundamental, pese a que algunos problemas propios de la sintaxis del programa, incluso las carencias de conocimientos de los estudiantes dificultó la génesis de estos procesos.

Las actividades utilizadas, las elecciones hechas y la orquestación seguida han permitido observar algunos de los procesos de instrumentación e instrumentalización en los estudiantes, lo que alienta el diseño de otras sesiones futuras donde los estudiantes tengan mayor libertad y puedan movilizar sus conocimientos.

Se observó en nuestra experiencia con el ordenador que hay también una presencia de varios de los obstáculos tanto locales como globales en el mismo sentido que (Drijvers, 2002) establece en un contexto de CAS para calculadoras simbólicas. Conjeturamos además que estos obstáculos tienen un carácter dual que sobrepasa la dependencia del tema concreto que se esté estudiando.

Finalmente, se observó que las dificultades no previstas por los estudiantes para visualizar conjuntamente series y funciones, así como la confusión existente entre la serie asociada y las sumas de Riemann, han oscurecido la introducción del Test Integral y su operacionalización y además se han mostrado resistentes. Como conclusión, pensamos que será conveniente desarrollar más experiencias de enseñanza en el futuro donde se tenga en cuenta esta situación para ofrecer estrategias que permitan a los estudiantes superar estas dificultades.

CONCLUSIONES

A lo largo de este artículo se han mostrado las bases fundamentales de dos secuencias para la enseñanza y aprendizaje de dos conceptos importantes del Análisis Matemático haciendo un diferente uso de los CAS *Derive* y *Maple V.* La primera para el concepto de integral definida, basada principalmente en un trabajo amplio de laboratorio y la otra secuencia, más teórica, en la que el papel del CAS es esencialmente diferente a la primera.

Resulta pertinente destacar que, a nuestro parecer, el uso del software proporciona un importante instrumento para que los estudiantes puedan librarse de memorizar formulas o procedimientos de cálculo, aunque es fundamental tener en cuenta que los estudiantes necesitan un cierto tiempo para madurar y desarrollar una comprensión conceptual segura de los conceptos. Necesitan prestar atención al proceso de transformación y relación que pueden establecerse entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas.

Hemos constatado además que los estudiantes necesitan desarrollar un conjunto de estrategias para la resolución de problemas que pudieran ayudarlos a decidir cuándo usar el software y cómo dirigir su trabajo con el mismo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Artigue, M.; Abboud, M.; Drouhard, P.; Lagrange, B. (1995). *Une recherché sur le logiciel Derive.* Cahier de DIDIREM 3 (número especial). IREM. Paris 7.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol. 7 (3), pp. 245-274.

Camacho, M.; González-Martín, A. S. (2002). *Análisis de una experiencia con Maple en primer curso de Ingeniería Técnica Industrial: las opiniones de los estudiantes.* Póster. Congreso de la Real Sociedad Matemática Española (RSME2002), Puerto de la Cruz (Tenerife).

Camacho, M.; Depool, R. (2002). El concepto de Integral Definida y su relación con el concepto de área limitada por una curva. Análisis de una experiencia piloto. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática IV,* pp. 79-132.

Camacho, M.; Depool, R. (2003a). Modelo de competencia para el campo conceptual de la integral definida. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática,* Vol. 5, pp. 71-104.

Camacho, M.; Depool, R., (2003b). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (CAS) *Derive. Educación Matemática.* 15(3), 119-140.

Camacho, M.; Santos, M.; Depool, R. (2004a). Promoting Students´ Comprehension of Definite Integral and Area Concepts Through the Use of Derive Software. *Proceedings of the 26 PME-NA.* Vol 2, pp. 447-454

Camacho, M.; Santos, M.; Depool, R. (2004b). La comprensión del concepto de área e integral definida en una entorno computacional. Perfiles de actuación. *Formación del Profesorado en investigación en Educación Matemática,* Vol. 6, pp. 21-46

Chick, H.; et al (2001). *Proceedings of the 12th ICMI study conference the future of the teaching and learning of algebra.* Melbourne: The University of Melbourne.

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna. Tesis Doctoral.

Drijvers, P.; Verweij, A., Winsen E. (1997). Mathematics Lessons with *DERIVE*. Developed by the CAVO working group. En *ZDM*. 4, 118-123.

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 5,189-209.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 34 (5), 221-228.

Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment

Edwards, C.; Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.

González-Martín, A. S. (2002). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia*. Tesina. Universidad de La Laguna (sin publicar).

González-Martín, A. S.; Camacho, M. (2004). What is First-Year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol 35 (1) pp. 73-89.

González-Martín, A. S.; Camacho, M. (2005). La integral impropia. Una ingeniería didáctica para su enseñanza. En Hitt, F. (ed.) *Reflexiones sobre la enseñanza del Precálculo y el Cálculo.* ISBN: 970 703 213 pp.265-280. Morevallado Editores. México

Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (eds.) (2005) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.*

Springer. New York

Guin, D.; Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 3, 195-227.

Heid, M. K. (2002). How theories about the learning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in school mathematics: One perspective. *International Journal of Computers Algebra in Mathematics Education.* 9 (2), 95-112.

Heugl, H. (1997). Experimental and Active Learning with *DERIVE*. En *ZDM*. 4 (4), 142-148.

Holton, D. (ed.) (2001) en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands

King, K., Hillel, J.; Artigue, M. (2001). Technology. A working group report, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 349-356.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in Mathematics courses. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D. ed), Kluwer Academic Publishers, pp. 127-135.

Mariotti, M. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L. English, M. G. Bartolini Bussi, G. Jones, R Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 695-723

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. *Educational Communication and Technology.* New York University. 89-122.

Santos, M. (2000). The Use of representations as a Vehicle to Promote Students' Mathematical Thinking in Problem Solving. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 7 (3), 193-212.

Socas, M. (2001), *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna (sin publicar).

Stewart, J (1999): *Cálculo.* México: Thomson.

Trouche, L. (2002), Genèses instrumentales, aspects individuels et collectives. *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (Guin, D. y Trouche, L. eds), pp. 243-276. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Trouche, L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 281-307

Trouche, L. (2005) An instrumental aproach to mathematics learning in symbolic calculators environments. En Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (eds.) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.* New York: Springer.

Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada

Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona

Resumen

En este trabajo se presenta un resumen del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y se comentan diferentes investigaciones, sobre la didáctica de la derivada, en las que se ha utilizado esta teoría. Dichos trabajos han permitido detectar determinados fenómenos didácticos y sugerir su explicación.

INTRODUCCIÓN

En diferentes trabajos Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, en prensa; Godino, Batanero y Roa, en prensa; Godino, Contreras y Font en prensa) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática. Para referirnos a esa manera de enfocar la investigación en didáctica de las matemáticas utilizaremos la expresión "enfoque ontosemiótico" (EOS)[1]. Se trata de un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta línea de trabajo recientemente se ha aplicado a la didáctica del análisis matemático (Font, 2000a, 2000b y 2005; Contreras y Font, 2002; Inglada y Font, 2003; Ordóñez y Contreras, 2003; Contreras, Luque y Ordóñez, 2004, Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

A continuación se presenta un resumen del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y se comentan diferentes investigaciones, sobre la didáctica de la derivada, en las que se ha utilizado esta teoría

EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

A continuación se exponen, de manera breve, algunos de los constructos del enfoque ontosemiótico

a) Los objetos institucionales y personales

Un objeto matemático institucional se considera en el enfoque ontosemiótico como un ente que emerge progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas

[1] En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la "función semiótica" es un constructo clave de dicho enfoque.

a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Puesto que las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, se ha de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado, es reconocido como tal objeto por la institución, pero, incluso después de esta etapa, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado.

Figura 1

Los objetos personales (Godino y Batanero 1994) se consideran como emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas. Estos objetos personales van cobrando forma —van emergiendo— en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

b) Significado y sentido de un objeto

La emergencia progresiva de los objetos matemáticos institucionales se concreta en diferentes definiciones (según el programa de investigación en el que se enmarquen). Este hecho hace que tenga sentido utilizar, de entrada, la diferencia entre sentido y referencia de un término introducida por Frege (1998). La referencia será el objeto matemático nombrado, mientras que el sentido es la manera de presentación.

El ejemplo de la mediatriz puede ilustrar la diferencia entre sentido y referencia. Podemos definir la mediatriz de un segmento como la perpendicular que pasa por el punto medio o como el lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes de los extremos. En cada definición relacionamos el concepto de mediatriz con conceptos diferentes, pero nos estamos refiriendo a la misma referencia. Las dos definiciones tienen sentidos distintos porque la manera de presentación (la conexión con otros conceptos) es diferente. Entender que las dos definiciones son equivalentes informa que dos definiciones, que se podrían considerar definiciones de objetos diferentes, se refieren al mismo objeto.

Cada definición hay que entenderla como una definición-regla que, de entrada, no parece que indique que haya algo que sea preciso hacer. A partir de las definiciones-reglas podemos atribuir valores veritativos (verdadero y falso) a ciertas proposiciones (por ejemplo, ante la afirmación “esta recta es la mediatriz del segmento AB” podemos decir si es verdadera o falsa). Ahora bien, de una definición-regla también se puede deducir una regla práctica que nos da instrucciones para construir la mediatriz. Esta práctica se puede dar en diferentes situaciones, por lo que se puede afirmar que una definición genera un conjunto de prácticas. A su vez, otra definición equivalente generará otro subconjunto de prácticas. Por tanto, en cada definición de mediatriz relacionamos el objeto definido con objetos diferentes y con procedimientos de construcción diferentes (se generan prácticas diferentes).

En el EOS se entiende el objeto matemático institucional como un emergente y su significado de la siguiente manera:

$S(O)$ = {Conjunto de prácticas P_i tal que en cada práctica P_i, la institución utiliza el objeto O}

Cuando se adopta una perspectiva pragmatista y se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir en el EOS dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos *sentido* y *significado***.** En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, en el EOS se entiende el sentido como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto.

El significado de un objeto matemático, entendido como sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevas técnicas, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos sistemas de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

El significado de un objeto personal se entiende como el sistema de prácticas matemáticas personales que una persona realiza para resolver el campo de problemas del cual ha emergido el objeto.

Esta manera de entender los objetos y su significado supone que la institución o la persona disponen de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca.

c) Práctica matemática

En el EOS no se considera que el objeto personal sea la causa eficiente (dicho en términos aristotélicos) de la realización de la práctica. Contrariamente a este punto de vista, se considera más conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha, puesto que para la realización de una práctica primero hay que valorar y decidir lo que uno va a hacer, después se tiene que decidir qué secuencia de acciones es la más indicada para conseguir lo que se ha decidido y, por último, se ha de seguir un curso temporal, desde el inicio hasta el final. Reflexionar sobre cómo se supera esta brecha lleva a reflexionar sobre: a) qué es una *práctica matemática* y b) qué hay que entender por *realización de una práctica matemática*.

En el EOS se considera *práctica matemática* (Godino y Batanero 1994) a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Una vez asumida la centralidad del constructo "práctica" se distingue la práctica de la conducta. En el EOS se considera que no podemos interpretar las conductas observables de los alumnos si no les atribuimos una finalidad. Por tanto, se distingue entre conducta humana, entendida como comportamiento aparente y observable de las personas, y práctica, que, en tanto que acción humana orientada a una finalidad, tiene una razón de ser, tanto para quien la realiza como para quien la interpreta.

Si entendemos la práctica como "acción orientada a un fin", se observa que en la definición de práctica que se ha dado anteriormente se pueden considerar tres intenciones diferentes, las cuales permiten considerar tres tipologías de prácticas que llamaremos: a) *operativas o actuativas* -toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, b) *discursivas* o *comunicativas* - comunicar a otros la solución, validar la solución- y c) *regulativas o normativas* - generalizarla a otros contextos y problemas-. Aunque es más conveniente pensar en una práctica como una acción compuesta en la que puede primar el componente operatorio, el discursivo o bien el regulativo.

Las prácticas en las que prima el componente operatorio o actuativo nos permiten realizar “acciones” y “argumentaciones” cuya finalidad es la resolución de “situaciones problemas”. Las prácticas discursivas (comunicativas) están relacionadas con el dominio y la creación del “lenguaje” así como en su uso para la realización de “argumentaciones” que permitan dar una justificación de la validez de las acciones realizadas. Las prácticas regulativas (normativas) están orientadas básicamente a conseguir establecer “propiedades” (proposiciones) y definiciones de “conceptos”.

La reflexión anterior sobre las prácticas hace necesario ampliar lo que se entiende por objeto matemático y no limitarnos a los conceptos. En el EOS, se entiende por objeto alguno de los siguientes elementos: *lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación problema*. Cada uno de estos elementos (excepto las situaciones problemas) se puede entender como un emergente de las prácticas cuya finalidad es la resolución de situaciones problemas. A su vez, las situaciones problemas se pueden entender como emergentes de otros tipos de prácticas (necesidad de contextualizar y aplicar las matemáticas, necesidad de generalizar, necesidad de resolver problemas, etc.)

En lo dicho anteriormente se ha considerado los objetos que emergen de las prácticas. Ahora bien, a su vez, para la realización de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. Para realizar una práctica matemática (por ejemplo la representación gráfica de una función) el sujeto necesita una serie de conocimientos sobre la representación gráfica de funciones que son fundamentales para: 1) la realización de la práctica que consiste en representar una función determinada y 2) para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Es decir, que hay que tener en cuenta que el sujeto tiene un *conocimiento* sobre la “representación gráfica”, (por ejemplo, como resultado del proceso de instrucción). También podemos considerar que tiene unas *capacidades y habilidades* de tipo general.

Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el sujeto tenga adquirido para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una determinada situación problema (por ejemplo, representar una función determinada) vemos que, de entrada, el sujeto ha de utilizar un determinado *lenguaje* verbal (dominio, puntos de corte, asíntotas, etc.), simbólico (por ejemplo la fórmula de la función) y gráfico (sistema de ejes de coordenadas, gráfica, etc.). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de *conceptos* (función, gráfica, dominio, etc.) y *propiedades* (por ejemplo, si la derivada es positiva la función es creciente) que son necesarios para justificar las *acciones* que realizará el alumno (por ejemplo calcular la derivada primera o las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, etc.), las cuales también se utilizarán en la *argumentación* (implícita o explícita) que realizará el alumno para decidir que las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias.

Las consideraciones anteriores nos llevan a considerar que cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama *configuración.* Estas configuraciones pueden ser *cognitivas* (conglomerado de objetos personales) o *epistémicas* (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

En el EOS se considera que para superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto personal es determinante hay que considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal.

d) Dualidades cognitivas

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan (Wittgenstein 1983) pueden ser considerados desde las siguientes dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002). Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos, dando lugar a distintas "versiones" o "miradas" de dichos objetos.

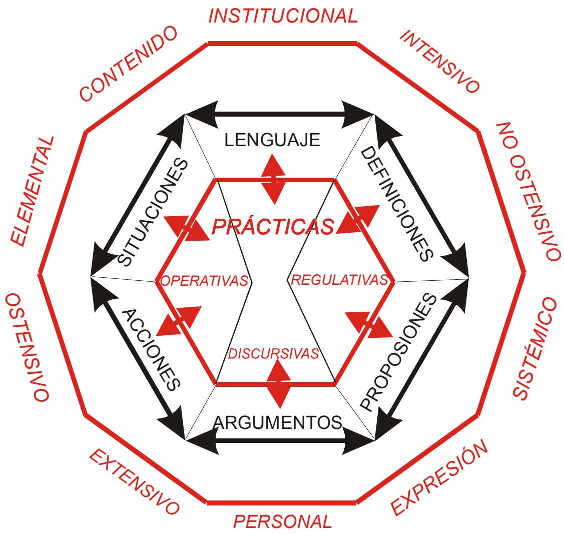


Figura 2

En la figura anterior se representan los diferentes constructos teóricos que se han comentado anteriormente. En el interior tenemos las prácticas. Para la realización de las prácticas es necesario activar una configuración (hexágono) y a su vez, los objetos que forman las configuraciones son emergentes de las prácticas. Por último, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono).

e) Tipos de significado

Para explicar la dialéctica institucional-personal, en el EOS se consideran diferentes tipos de significados institucionales y personales: 1) *significado institucional de referencia* — cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas". Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas que designamos como significado institucional de referencia del objeto.—, 2) *significado institucional pretendido* — sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional—, 3) *significado institucional implementado* — sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes— y 4) *significado institucional evaluado* —colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes—.

Desde el punto de vista del estudiante cabe hacer la distinción entre el *significado personal global* —corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático—; *el declarado* —da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional—; y *el logrado* —corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

EJEMPLO DE CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA COMO CONTEXTO DE REFLEXIÓN

A continuación sigue un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (17 años) como parte de un proceso de instrucción sobre la derivada. Este episodio de clase se va a utilizar como contexto de reflexión (Font 2005).

Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes.

Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

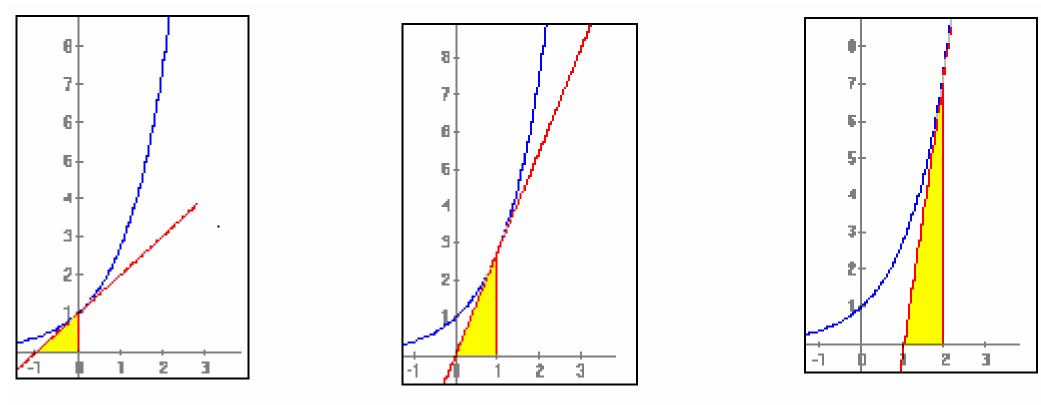


Figura 3

b) Calcula $f'(a)$

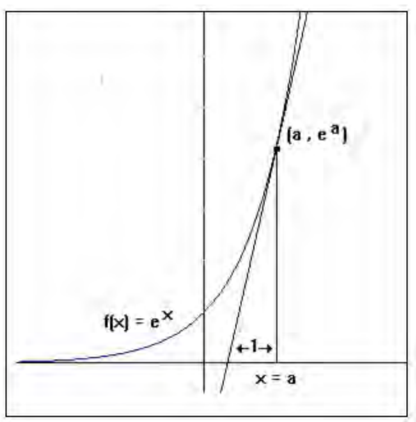


Figura 4

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$.

Para realizar la práctica que permite calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ hay que poner en funcionamiento una configuración (epistémica / cognitiva) cuyos componentes se pueden describir brevemente mediante el esquema de la figura 5.

Si nos fijamos en el cuadro de las acciones de la figura 5, resulta que para calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ los alumnos han de aplicar una serie de acciones (una técnica) que consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla primero una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1). Esta condición después se simboliza, aplicando la interpretación geométrica de la derivada, lo que permite calcular la derivada en $x = a$. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. De esta manera se obtiene la expresión simbólica de la función derivada.

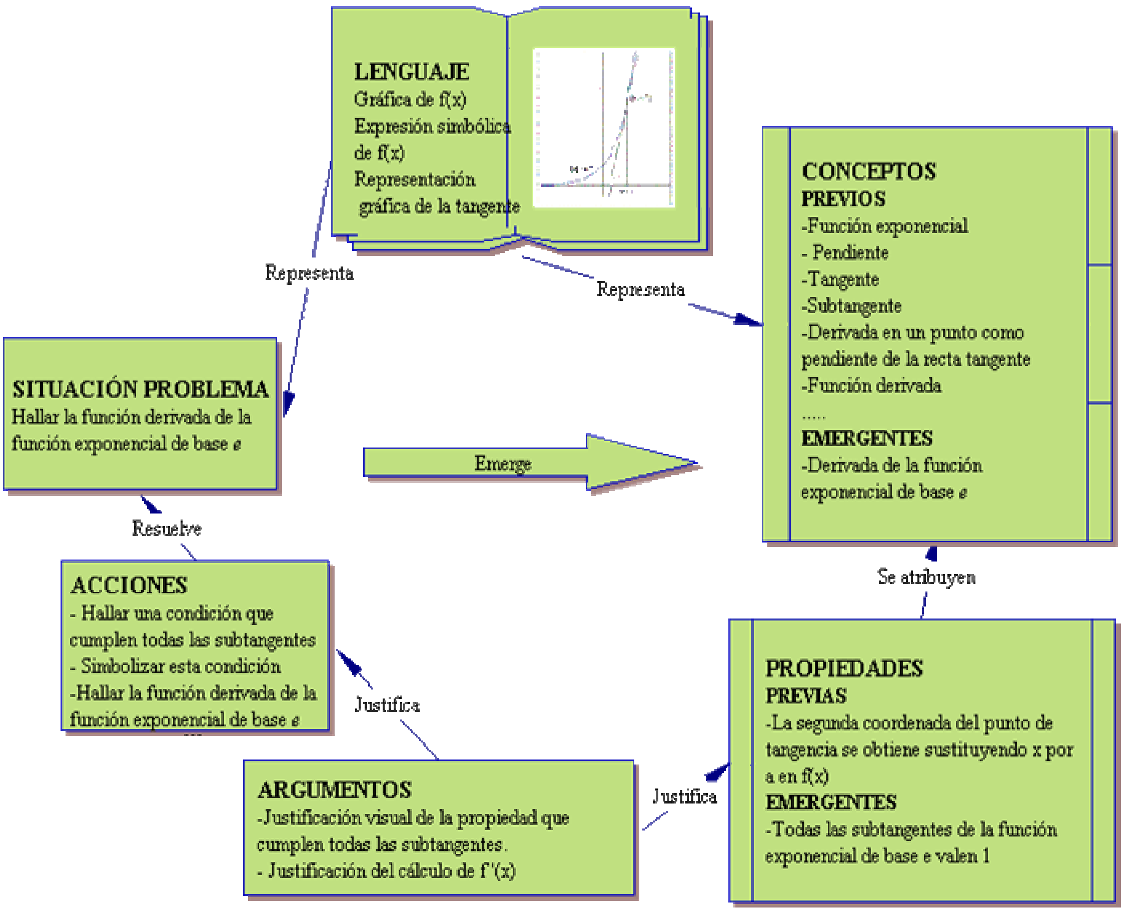


Figura 5

Para que las acciones que constituyen esta técnica se puedan aplicar son necesarios los demás objetos de la configuración (figura 5), es decir se tiene que realizar una argumentación, se ha de utilizar, entre otros, el concepto de derivada entendido como pendiente de la recta tangente, se tienen que utilizar gráficas y fórmulas, etc.

REPRESENTACIONES OSTENSIVAS ACTIVADAS EN EL CÁLCULO DE $F'(X)$

1) Representaciones ostensivas activadas en el cálculo de la derivada de $f(x) = e^x$

A continuación vamos a centrarnos en el cuadro del lenguaje de esta configuración (figura 5). Para contestar el cuestionario, además de utilizar la gráfica de la función, se ha de utilizar que la expresión simbólica de la gráfica es $f(x) = e^x$. Esta técnica relaciona los siguientes ostensivos:

Gráfica de $f(x)$ y Expresión simbólica de $f(x) \Rightarrow$ Expresión simbólica de $f'(x)$

Con este esquema, simbolizamos que el punto de partida de las acciones de los alumnos para hallar una condición que cumplen todas las tangentes es la gráfica de la función. La expresión simbólica de $f(x)$ es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de $f'(x)$. Si los alumnos conocen el cálculo de la pendiente y el significado geométrico de la derivada en un punto, pueden llegar a obtener la expresión simbólica de $f'(x)$ sin mucha dificultad.

En este cuestionario, el uso de la representación gráfica en un software dinámico es necesario para hallar una condición que cumplen todas las tangentes (el punto de partida del cuestionario). Para contestar de manera aproximada el apartado *a* es necesaria sólo la representación gráfica, pero para contestar de manera exacta es necesario utilizar también la expresión simbólica de la función exponencial. Para contestar al apartado *b* es necesario el uso conjunto de la representación gráfica y de la simbólica.

Dicho de otra manera, la técnica que la institución escolar pretende que apliquen los alumnos en este cuestionario sólo es posible si se introduce una configuración epistémica en la que el componente "lenguaje" contemple la representación gráfica y la simbólica conjuntamente. Si no se contempla la representación gráfica, la técnica no es viable. Por tanto, contemplar la representación gráfica, además de la simbólica, permite realizar determinadas prácticas que con sólo la representación simbólica no serían posible. Ahora bien, es importante resaltar que no conviene focalizar la atención sólo en la relación de dos de los componentes de la configuración epistémica (lenguaje y técnica) y olvidar los demás componentes puesto que estos también son esenciales (es necesario que la derivada se haya definido como pendiente de la recta tangente, que se acepte una argumentación basada en la observación visual de que las subtangentes miden 1, etc.).

El objetivo de este cuestionario es proponer a los alumnos una secuencia de actividades que está a mitad de camino entre lo que se conoce históricamente como el problema de la tangente y su inverso —no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de la función— Este método fue sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow y permite que los alumnos calculen determinadas funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites, siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto.

Este método tiene un campo de aplicación limitado ya que, previamente, el alumno ha de descubrir una propiedad que cumplen todas las rectas tangentes. Ahora bien, se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta, y también a las funciones exponenciales y logarítmicas. El hecho de que se pueda aplicar este método para calcular la derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas permite una organización de la unidad didáctica sobre derivadas que tiene importantes consecuencias curriculares (por ejemplo, permite prescindir del estudio previo de la indeterminación 1^{∞}).

2) Representaciones ostensivas activadas en el cálculo de $f'(x)$

En Font (2000a), se considera que el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se puede interpretar como una práctica, en la que a su vez se han de considerar tres subprocesos:

1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$

2) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$.

3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

Para considerar los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos, en Font (2000a) se propone la tabla 1 con el objetivo de considerar simultáneamente una función y su función derivada.

En esta tabla tenemos, en las casillas con rayas verticales, las traducciones entre las diferentes formas de representar una función y, en las casillas con rayas horizontales, las traducciones entre las diferentes formas de representar la función derivada. Las casillas blancas nos conducen de una forma de representar la función a una forma de representar la función derivada, mientras que las grises nos permiten hallar la primitiva de una función a partir de la función derivada.

a / de	Expresión simbólica $f'(x)$	Gráfica $f'(x)$	Tabla $f'(x)$	Descripción verbal de la situación (en términos de $f'(x)$)	Expresión simbólica $f(x)$	Gráfica $f(x)$	Tabla $f(x)$	Descripción verbal de la situación (en términos de $f(x)$)
Expresión simbólica $f(x)$								
Gráfica $f(x)$								
Tabla $f(x)$								
Descripción verbal de la situación (en términos de $f(x)$)								
Expresión simbólica $f'(x)$								
Gráfica $f'(x)$								
Tabla $f'(x)$								

Descripción verbal de la situación (en términos de $f'(x)$)								

Tabla 1

En la siguiente explicación de un libro de texto podemos observar conjuntamente los tres subprocesos, ya que primero se hace una traducción en la forma de presentar la función, después se obtiene la función derivada aplicando las reglas de derivación y, por último, se buscan distintas maneras de representar la función derivada. Es decir, se sigue el esquema siguiente:

Expresión analítica de $f(x)$ Ψ Expresión analítica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expresión analítica de $f'(x)$ Ψ Expresión analítica de $f'(x)$

Derivada de la función $f(x) = \log_a x$

Al estudiar la familia de las funciones logarítmicas, hemos constatado que todas son el resultado de una dilatación en la función $f(x) = \ln x$. Es decir, que cualquier función logarítmica cumple $\log_a x = k \cdot \ln x$. Por consiguiente, la función derivada de la función $f(x) = \log_a x$ será:

$$f'(x) = k\cdot (\ln x)' = k\,\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

Ahora bien, al estudiar el cambio de base, se observa que k es igual a $\log_a e$ o bien a $\frac{1}{\ln a}$.

Por lo tanto:

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad \text{o bien} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Ambas expresiones de la función derivada se emplean indistintamente

4) Técnicas alternativas de cálculo de $f'(x)$

Entender el cálculo de la función derivada como una práctica en la que intervienen tres subprocesos, cada uno de los cuales puede utilizar representaciones diferentes, permite ampliar el abanico de técnicas de cálculo de la función derivada que no se restrinja al cálculo por límites o bien al uso de reglas de derivación (Font 2000a).

El cuestionario anterior es un ejemplo de una de estas técnicas alternativas. En Font (2000b) se pueden hallar varias técnicas alternativas para cálculo de la derivada de la función seno.

COMPLEJIDAD SEMIÓTICA RELACIONADA CON EL CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DERIVADA.

1) Complejidad semiótica

Si observamos los tres apartados del cuestionario anterior (cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e*) podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general. En el apartado *a* se pide calcular la derivada para tres valores concretos (0, 1 y 2). En el apartado *b* se pide calcular la derivada para un valor concreto "a" y en el apartado *c* para un valor cualquiera. Es decir, el tránsito de lo particular a lo general ha estado muy presente en el diseño del cuestionario.

Sin entrar en análisis detallados utilizando funciones semióticas como los que se realizan en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa), podemos decir que para calcular la función derivada a partir de una condición que cumplen todas las tangentes, el alumno ha de:

1) Tratar separadamente las variables relacionadas por la fórmula y la gráfica de la función exponencial de base *e*. Para ello, ha de entender el objeto función exponencial de base *e* como un proceso en el que intervienen otros objetos, uno de los cuales es x y el otro es $f(x)$. Es decir, ha de relacionar el objeto $f(x)$ con el objeto x.

2) Asociar a x la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x.

3) Asociar la expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x con $f'(x)$. En este caso se tiene que relacionar una notación con otra diferente pero equivalente.

4) Considerar x como una variable. En este caso se tiene que relacionar un objeto con una clase a la cual pertenece.

5) Entender la función que ha obtenido como un caso particular de la clase "función derivada". En este caso se tiene que relacionar un objeto con la clase a la cual pertenece.

Si nos fijamos en el cuestionario que se ha presentado a los alumnos podemos observar que la secuencia de apartados tiene por objetivo facilitar el establecimiento de los pasos anteriores. El uso de la letra *a* y de la igualdad $x = a$ en el apartado *b* del cuestionario tienen la función de introducir un elemento concreto en el razonamiento del alumno y facilitar el paso 1. La opción de utilizar conjuntamente la gráfica y la fórmula y el uso de la notación simbólica para el punto de coordenadas $(a\ ,\ e^a)$ tienen por objetivo que el alumno realice los pasos 2 y 3. Los pasos 4 y 5 se pretenden conseguir a partir de la pregunta del apartado *c*.

Este ejemplo permite ilustrar un fenómeno que en el enfoque EOS se considera muy relevante: *la realización de la mayoría de prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica*. Por ejemplo, si en el cuestionario que estamos considerando se hubiera eliminado el apartado *b,* seguiríamos pretendiendo que el alumno aplicara la técnica de cálculo de la función derivada que se ha comentado anteriormente y continuaríamos utilizando gráficas (las de la actividad previa con el ordenador y las del apartado *a*) y expresiones simbólicas (apartado *c*), pero la complejidad semiótica que tendría que afrontar el alumno aumentaría notablemente y, con ello, las posibilidades efectivas de resolver la tarea.

2) Conflictos semióticos

Según como se gestione en el proceso de instrucción la complejidad semiótica asociada a las prácticas matemáticas, se puede facilitar (o no) la aparición de *conflictos semióticos*, entendidos como*: "(...) disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la* *institución."* (Godino, 2002, p. 258). Dos ejemplos de conflictos semióticos potenciales son los siguientes: a) Cuando se considera ingenuamente que es bueno introducir diferentes representaciones del mismo objeto matemático y se introducen el mayor número posible de representaciones y de traducciones entre ellas, sin tener en cuenta la complejidad semiótica asociada, b) En algunos libros de texto se puede observar un *conflicto semiótico potencial causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto al usar la notación incremental* $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en \ x=a)}$ como primera notación para definir la derivada en un punto (Badillo, 2003; Inglada y Font, 2003; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

La regularidad con la que se manifiestan en los alumnos conflictos semióticos relacionados con la función derivada se considera en el EOS un aspecto de un fenómeno relevante. En el EOS (Wilhelmi, Godino y Font, 2005) se utiliza una metáfora vectorial para describir los fenómenos. Se considera que todo fenómeno queda descrito como una n-tupla, donde cada componente representa una característica del mismo. Las *características* o *variables* pueden considerarse en la investigación desde dos puntos de vista diferentes: uno, como *variables explicadas* ($v_1, \ldots, v_r$), que son problematizadas por la perspectiva teórica utilizada para analizar el proceso de instrucción; otro, como *variables explicativas* ($w_1, \ldots, w_s$), que se usan para describir las explicadas en dicha perspectiva y predecir su comportamiento en situaciones "controladas" (generalmente de forma parcial). De esta manera un fenómeno es:

$$\text{Fenómeno} \equiv (w_1, \ldots, w_s; \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}); \text{ donde} \boldsymbol{v_i} \equiv (w_1, \ldots, w_s),\ i = 1, \ldots, r$$

Dos enfoques teóricos diferentes pueden coincidir en que determinadas características o variables están presentes en el fenómeno considerado (por ejemplo, dos enfoques por muy diferentes que sean llegarán a un consenso sobre la edad de los alumnos, el nivel escolar, etc.) pero pueden diferir en su consideración de dichas variables como explicadas o explicativas.

En el caso de la función derivada, el fenómeno observado en el EOS se puede describir de la manera siguiente:

> Fenómeno EOS = (alumnos de bachillerato, institución de educación secundaria, función derivada, complejidad semiótica asociada a la función derivada; dificultad de comprensión de la noción "función derivada" manifestada en conflictos semióticos)

La característica explicada y que por lo tanto ha de ser problematizada es "la dificultad observada en la comprensión que tienen los alumnos de este objeto "función derivada" manifestada en conflictos semióticos". Las variables explicativas son "edad", "tipo de institución", "objeto matemático" y "complejidad semiótica asociada".

El análisis ontosemiótico, al resaltar el papel que podían tener determinados usos de la notación incremental en dicho fenómeno, puso de manifiesto la magnitud que podía llegar a tener este fenómeno en los países en los que este tipo de notación tuviese un papel predominante y, de esta manera, dirigir investigaciones posteriores como la de Badillo (2003). Dicha investigación, realizada con profesores colombianos, documenta que dicho fenómeno en Colombia no se limita a los alumnos sino que es de mayor magnitud ya que en muchos casos son los propios profesores los que confunden la derivada en un punto y la función derivada.

3) La dualidad extensivo/intensivo en el uso de los elementos genéricos

En Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa) la "complejidad semiótica" se concreta en una trama de funciones semióticas. En concreto, se analiza la trama de funciones asociadas a la definición de la función derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Para ello, se tienen en cuenta ocho funciones semióticas y una sola de las cinco dualidades propuestas en el enfoque ontosemiótico, nos referimos a la dualidad extensivo-intensivo.

La introducción de la dualidad extensivo-intensivo y de las 8 funciones semióticas utilizadas son el resultado de la reflexión sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y de la observación de episodios de aula en los que se fijan sus reglas de uso. Como resultado de estas reflexiones, en el EOS se destaca otro factor, tanto o más importante que el tipo de representación utilizado, que interviene de manera determinante en la complejidad semiótica asociada al uso de ostensivos que son considerados elementos genéricos: las reglas del juego de lenguaje en el que nos situamos.

Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos una representación ostensiva como un elemento genérico estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. Para conocer los detalles sobre las características de este juego del lenguaje, y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre profesores y alumnos relacionados con el uso de elementos genéricos. La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los alumnos puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene el elemento genérico.

A continuación siguen dos diálogos en los que el profesor explica a los alumnos las reglas que rigen el uso del ejemplo genérico (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

Diálogo 1

En este diálogo la profesora propone a los alumnos que resuelvan la siguiente actividad de su libro de texto:

Ejercicio 14: Dada la función $f(x)=ax+b$, demuestra que $f'(x_0)=a$, independientemente del valor x_0 considerado.

Esta actividad se propone justo después de que la profesora haya explicado en clase un párrafo del libro de texto en el que se justifica que la derivada de la función constante $f(x)=k$ *es* $f'(x)=0$ primero gráficamente, razonando sobre la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de la recta, y después calculando el límite de las tasas de variación media:

> *Profesora*: Lo vais a hacer de dos formas diferentes: gráficamente y utilizando límites. ¿De acuerdo? Venga, y después sale alguien a la pizarra a corregirlo. Mientras os voy repartiendo más material que después haremos servir, eh!, y así ya lo tenéis.
>
> *Alumno(Iván)*: Pero gráficamente, podemos... Eso es un ejemplo, si lo representamos gráficamente es un ejemplo...
>
> *Profesora*: (mientras hace gestos con la cabeza de que lo que dice el alumno es correcto y se acerca hacia él). Sí, Correcto!
>
> *Iván:* Y dice que *x* cero se considera...
>
> *Profesora:* Sí, pero Iván, para poderlo justificar coges un punto cualquiera de esta recta, cualquiera, y lo haces, y como esto lo podrías hacer con cualquier punto y con cualquier recta, sirve par justificarlo. ¿De acuerdo? Pero tienes razón, claro, para poderlo dibujar has de escoger un punto concreto y una recta concreta (mientras habla la profesora va repartiendo hojas a los alumnos).

Diálogo 2

Después de que el profesor haya introducido en clases anteriores la derivada en un punto como $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ y justo después de haber introducido la función derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se produjo el siguiente diálogo:

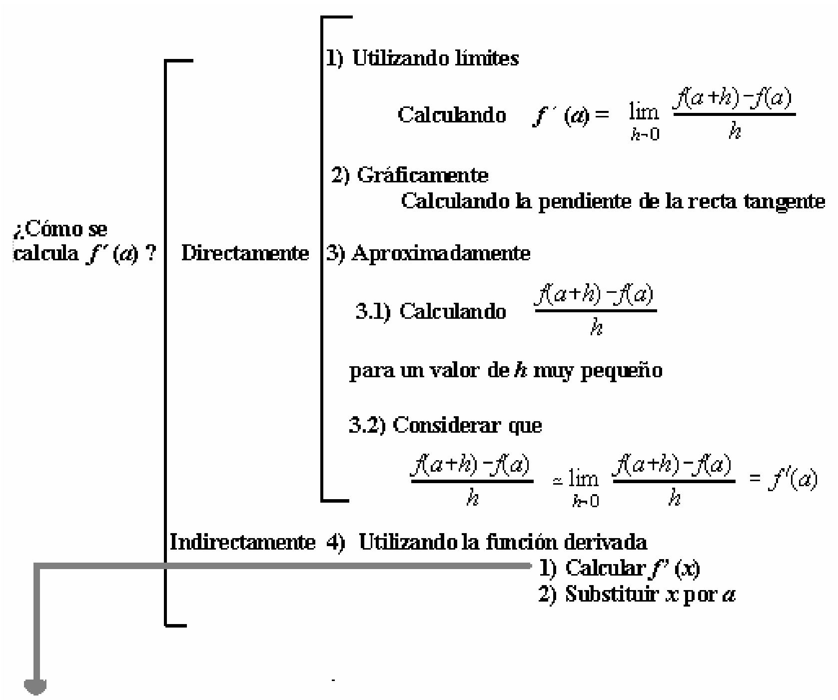
> *Alumna(Laura)*: ¿Qué diferencia hay entre la definición de función derivada y la definición de derivada en un punto?.
>
> *Profesor*: La derivada en un punto es $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, en esta expresión la *a* es fija, no varia, lo que varia es la *h.* En cambio, en el caso de la función derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, primero has de suponer que la *x* no varia y que sólo varia la *h* para obtener $f'(x)$, y después has de suponer que la *x* varia. Por tanto, cuando calculas la derivada en un punto el resultado es un número, mientras que cuando calculas la función derivada, el resultado es una fórmula de una función.

EXPERIMENTACIÓN DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN

A partir de las consideraciones anteriores, entre otras, en Font (2000a)[2] se describe un proceso de instrucción para el objeto "derivada" que toma en consideración la complejidad semiótica que implica el paso de la derivada en un punto a la función derivada. La descripción de este proceso de estudio se desarrolla teniendo en cuenta los constructos elaborados por el EOS. En concreto se describe con detalle el proceso que va del significado de referencia al significado pretendido. También se describen el significado implementado y el evaluado. La institución es, en este caso, una clase de 1º de bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria de la Comunidad Autónoma de Catalunya.

El significado pretendido se concretó en una unidad didáctica que tenía por objetivo que, después del proceso de instrucción, el alumno dominase las técnicas de cálculo de la función derivada que se deducen de la parte inferior de la figura 6. Para que estas prácticas resulten comprensibles a los alumnos, es necesario relacionarlas con otro sistema de prácticas que permita calcular la derivada de una función en un punto, así como con otro sistema de objetos institucionales que las justifiquen. De todo esto, se desprende la necesidad de seleccionar previamente un sistema de prácticas para calcular la derivada en un punto, que son las que se deducen de la parte superior de la figura 6.

[2] En Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa) se puede encontrar un resumen del proceso de instrucción descrito en Font (2000a)



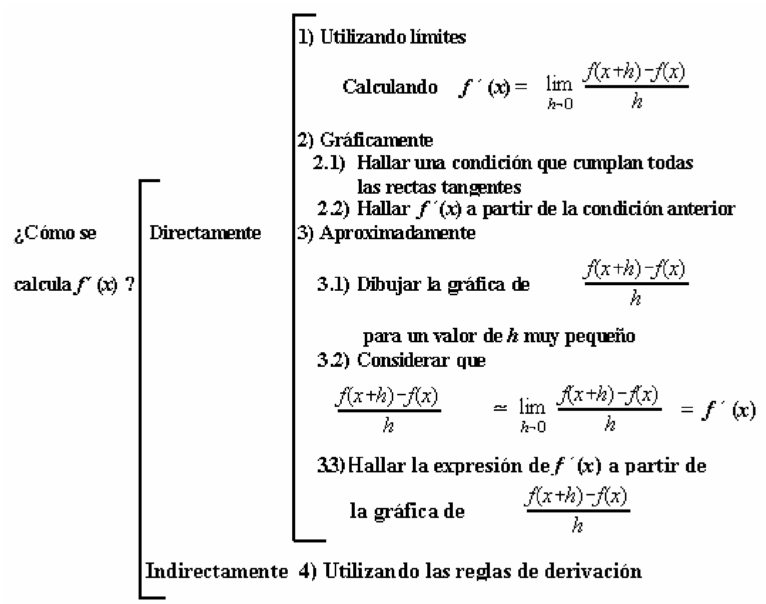


Figura 6

Con relación a las unidades didácticas habituales en la comunidad autónoma de Catalunya este significado pretendido incorpora procedimientos correspondientes a las formas 2 y 3 (ver esquema inferior de la figura 6) de introducción de la función derivada. Puesto que cualquier recta tangente en un punto de la gráfica de la función $f(x) = e^x$ cumple que la subtangente vale 1, se puede aplicar el procedimiento 2 a $f(x) = e^x$, lo cual permite prescindir, en la unidad de límites, del estudio previo de la indeterminación 1^∞, mientras que la aplicación del procedimiento 3 a la función seno (Tall (1992) permite prescindir, en la unidad de trigonometría, del estudio de las fórmulas trigonométricas que convierten una diferencia de senos en un producto. Por tanto, la incorporación de estas dos técnicas alternativas, además de permitir una emergencia diferenciada de los objetos derivada en un punto y función derivada, permite una organización de la unidad didáctica de derivadas que reduce considerablemente los contenidos de dos unidades (límites y trigonometría) que se han impartido previamente.

En la experimentación del proceso de instrucción descrito en Font (2000a) la trayectoria que va del significado de referencia al significado pretendido tuvo en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, la complejidad semiótica y los conflictos semióticos potenciales; pero también la elección de actividades adaptadas a los alumnos que fuesen a la vez motivadoras para ellos, con el objetivo de conseguir una buena implicación en las tareas propuestas. Por otra parte, fue determinante la consideración de las restricciones que imponen los documentos curriculares y, sobre todo, la disponibilidad de recursos materiales y temporales puesto que se diseñó una propuesta de organización del significado pretendido que fuese viable en una institución escolar de secundaria cualquiera.

La descripción del proceso de instrucción, realizada en forma de crónica y de manera exhaustiva, muestra por una parte la complejidad del proceso de instrucción cuando se trata de estudiar y enseñar el objeto "derivada" y, por otra parte, permite llegar a conclusiones importantes, entre las que destacamos algunas:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los alumnos, lleva a proponer significados pretendidos que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por este motivo, resulta difícil compaginarlas con las restricciones materiales y temporales reales.

- El significado personal de objetos que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad, etc.) era insuficiente. De aquí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieren un buen significado personal del objeto derivada consiste en conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos.

- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.

- El hecho de diseñar un significado pretendido que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas (de $f(x)$ o de $f'(x)$), modificó los significados de los objetos personales "funciones elementales" de los alumnos. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de alumnos incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de instrucción, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado pretendido.

CONSIDERACIONES FINALES

Los análisis ontosemióticos, como por ejemplo el que se realiza en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa) sobre la dualidad extensivo-intensivo en el uso de elementos genéricos en la derivada, son análisis "finos" que permiten complementar otro tipo de análisis más "gruesos" (por ejemplo, un estudio sobre las técnicas de derivación, su campo de aplicación, sus modificaciones, etc.). El análisis ontosemiótico permite "ver" nuevos fenómenos didácticos relevantes y sugerir su explicación.

Uno de estos fenómenos es, por una parte, la regularidad con la que se manifiestan conflictos semióticos en las prácticas de los alumnos de bachillerato cuando han de distinguir la derivada en un punto de la función derivada, y, por otra parte, la poca importancia que se da a la complejidad semiótica que implica el paso de la derivada en un punto a la función derivada en las unidades didácticas que se proponen en el nivel de bachillerato español y que, evidentemente, tiene una influencia importante en lo anterior.

REFERENCIAS

Badillo, E. (2003), *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia*. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona. [URL:http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/ VAILABLE/ TDX-0611104-144929/]

Contreras, A. y Font, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón (Boletín nº 14), pp. 1-21. [URL: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin14.htm]

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (en prensa), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 25(2).

Contreras, A. Luque, L. y Ordóñez, L. (2004), Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo, *Educación Matemática*, pp. 59-87.

Font, V. (2000a), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2000b), Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno. *Uno,* 25, pp. 21-40.

Font, V. (2005) Funciones y derivadas. Actas del *XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*, tomo II, pp. 5-54. Bogotá. Colombia

Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia, en L.M. Valdés (ed.): *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica,* pp. 84-111. Tecnos, Madrid.

Godino, J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22(2/3), pp. 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14(3), pp. 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (en prensa). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 25(3).

Inglada, N y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/ siidm/boletin15.htm]

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2003), El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida en E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (ed): *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 277-287. Granada: Universidad de Granada.

Tall, D. (1992), L'enseignement de l'analyse a l'age de l'informatique. en B. Cornu (ed.) *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (pp. 161-182). Paris, Presses Universitaires de France.

Wilhelmi, M. R., Godino, J.D. y Font, V. (2005). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. *Actas del Colloque International «Didactiques : quelles references epistemologiques ?»*, Bordeaux, France.

Wittgenstein, L. (1983), *Investigacions Filosòfiques,* Barcelona: Laia.

COMUNICACIONES

Proyecto “mete” (mathematics education traditions of europe[1]): El foco matemático

Paul Andrews
Universidad de Cambridge

José Carrillo Yañez
Universidad de Huelva

Nuria Climent Rodríguez
Universidad de Huelva

Resumen

Este artículo presenta los resultados de un estudio sobre las tradiciones de enseñanza en cuatro países europeos: Bélgica (Flandes), Inglaterra, Hungría y España. Se trata de un estudio a pequeña escala en el que se emplean métodos cuantitativos y cualitativos, y que, en lugar de pretender obtener generalizaciones, está orientado a arrojar alguna luz que posibilite la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Establece comparaciones con los resultados de los test TIMSS y PISA y extrae alguna conclusión para la formación inicial de maestros y profesores de matemáticas. Extraemos de éste los resultados relativos a los datos cuantitativos y nos centramos en el foco matemático.

Abstract

This paper shows the results from a study on the teaching traditions in tour European countries: Flemish Belgium, England, Hungary, and Spain. It is a small-scale study, which deals with the mathematical focus and that applies quantitative methods. Instead of being aimed at generalising, this study tries to contribute some insights in order to improve mathematics teaching and learning. It establishes some comparisons with the results from TIMSS and PISA tests, and arrives to some conclusion concerning initial mathematics primary and secondary teacher education.

Por lo general, la investigación comparativa adopta uno de los siguientes enfoques: gran escala – cuantitativo o pequeña escala – cualitativo (Kaiser, 1999). Los primeros suelen ser “decepcionantes en detalle” (Theisen y Adams, 1990; p. 278) y parecen poco más que “intentos de cuantificar lo incuantificable” (Jenkins, 2000, p. 137). Presentan problemas de comparación de datos, validez y fiabilidad, y tienen una dirección etnocéntrica en el manejo y la difusión del estudio (Wiliam, 1998; Prais, 2003). Los estudios cualitativos a pequeña escala se centran generalmente en la clase y su proceso es hermenéutico (Jenkins, 2000). A diferencia de los primeros, la riqueza de sus datos aporta luz (Kaiser, 1999). Tratan de informar de la influencia del contexto, aunque presentan problemas de fiabilidad y, en el peor de los casos, pueden conducir a “correlaciones no garantizadas” y “especulaciones infundadas” (Jenkins, 2000; p. 137).

[1] El proyecto “METE”, cuyo código es 2002-5048, está financiado por la Unión Europea, Acción 6.1 del programa Sócrates.

Chabbott y Elliott (2003) clasifican los procesos de la educación comparada en 3 tipologías. El tipo I se corresponde aproximadamente con el primero anteriormente descrito. El tipo II pretende informar políticas educativas y aplicar prácticas de unos países en otros. Reconocen el valor de los enfoques cuantitativo y cualitativo y son de menor escala que los del tipo I. Los estudios del tipo III intentan aumentar nuestra comprensión de los procesos educativos en su sentido más amplio y no tratan de influir en las políticas y prácticas de un país. Pueden ser cuantitativos o cualitativos, pero suelen permitir a los investigadores adquirir nuevas ideas a través de la observación sistemática de las prácticas de otros.

Situamos nuestro estudio en el tipo III, pues es un intento genuino de comprender mejor los modos en que la matemática se conceptualiza y presenta a los aprendices en 4 países, lo que no impide que puedan derivarse consecuencias sobre la formación de profesores. Se adopta una mezcla de métodos, cuantitativo y cualitativo, y asume que el conocimiento es una construcción social que necesita negociación entre los participantes. Sus objetivos se refieren a la mejora de la comprensión de la enseñanza de las matemáticas y no al intento de influir en ninguna política educativa.

El proyecto "METE" y sus métodos

El proyecto "METE" (Mathematics Education Traditions of Europe) aborda el estudio comparativo sobre la enseñanza de las matemáticas en Bélgica (Flandes), España, Finlandia, Hungría e Inglaterra durante 2003 y 2004 (en este artículo no incluimos los datos fineses por no haber concluido su análisis). Estos países representan adecuadamente la diversidad socioeconómica del continente y la diversidad de logros en el aprendizaje matemático según estudios internacionales recientes como TIMSS y PISA. Además, debido a que las culturas dominantes en todos estos países se ubican en la tradición judeo-cristiana, creemos que muchos problemas relacionados con la transferencia pedagógica (Hatano e Inagaki, 1998) se minimizan.

En lo que concierne a este artículo, donde nos centraremos en el estudio cuantitativo, se han extraído datos de grabaciones en vídeo de secuencias de 4 o 5 clases sobre cada uno de los siguientes contenidos matemáticos relevantes:

- porcentajes (5º, 6º EP)
- polígonos (5º, 6º EP)
- polígonos (1º, 2º ESO)
- ecuaciones lineales (1º, 2º ESO).

Esto supone la grabación de secuencias de enseñanza de cuatro profesores de cada país, uno por tópico. Estos profesores fueron elegidos por los investigadores de cada país como ejemplos, en su contexto, de buena práctica, entendiéndose por tal, entre otras cosas, que son profesores preocupados por el aprendizaje de sus alumnos, por su formación general, y que están bien considerados por sus compañeros.

Los cámaras intentaron captar las intervenciones de los profesores (que portaban un radio-micrófono), y lo escrito en la pizarra. Se usaron dos cámaras simultáneamente, lo que aportó otro micrófono ambiente y la posibilidad de registrar las intervenciones de los alumnos. Las grabaciones se mezclaron y se pasaron a formato CD y se subtitularon en inglés. Esto permitió realizar y posteriormente comparar el análisis efectuado por codificadores de diferentes países, pudiendo establecer niveles satisfactorios de fiabilidad. En todos los casos se obtuvo un valor superior a 0.79 para el coeficiente Kappa, lo que hizo posible confiar en el análisis efectuado por cada país del tópico asignado (cada país se encargó de elaborar el informe de un contenido matemático). Para conseguir este nivel de fiabilidad y para desarrollar unos instrumentos de análisis compartidos por todos se desarrolló un programa de observaciones en vivo de clases en cada país que duró un año. Durante una semana, investigadores de todos los países del proyecto asistían a clases de uno de los países, visionaban la grabación y analizaban, compartían y discutían sus interpretaciones. Uno de los objetos de estudio es el foco matemático, que se refiere a los objetivos genéricos observables o a los logros de un episodio dado. Sobre él presentamos los resultados aquí.

Dispusimos de una tabla para registrar las observaciones, que permite constatar si un determinado foco ha sido observado (1) o si estamos convencidos de que no ha existido (0) en cada episodio. En caso de no estar seguros de su existencia o su ausencia, se deja en blanco la casilla correspondiente o se pone un guión. Entendemos por episodio un fragmento de la lección en el que la intención didáctica o relativa a la gestión del profesor es constante (por ejemplo, un período de trabajo en las mesas).

Resultados

Debe entenderse como resultado del estudio la propia categorización de los focos matemáticos, pues se ha ido desarrollando a lo largo del proyecto y responde a una comprensión compartida por los participantes desde sus respectivos marcos teóricos a la luz de las discusiones sobre las observaciones de aula (de acuerdo con los presupuestos de la teoría emergente de los datos, Strauss y Corbin, 1998), así como al deseo de considerar el conocimiento *de* y *sobre* matemáticas (Ball & McDiamird, 1990). El acuerdo que supone el establecimiento de dicha categorización añade, al valor intrínseco de integrar en una la perspectiva de educadores matemáticos de distintos países, el que surge de la discusión sobre actuaciones de aula concretas.

Describimos dicha categorización en la tabla 1.

Conceptual	El profesor enfatiza o promueve el desarrollo conceptual de sus alumnos
Derivado	El profesor enfatiza o promueve el proceso de desarrollo de nuevos entes matemáticos a partir del conocimiento existente
Estructural	El profesor enfatiza o promueve los lazos o conexiones entre entes matemáticos diferentes: conceptos, propiedades, etc.
Procedimental	El profesor enfatiza o promueve la adquisición de destrezas, procedimientos, técnicas o algoritmos
Eficacia	El profesor enfatiza o promueve la comprensión o adquisición por parte del alumno de procesos o técnicas que desarrollan flexibilidad, elegancia o comparación crítica del trabajo
Resolución de problemas	El profesor enfatiza o promueve la implicación de los alumnos en la solución de tareas no triviales o no rutinarias
Razonamiento	El profesor enfatiza o promueve el desarrollo y la articulación de justificaciones y argumentos por parte de los alumnos

Tabla 1: Foco matemático (categorías)

Para entender mejor los resultados sobre el foco matemático, presentamos la tabla 2, comparativa sobre número de episodios y duración de las lecciones. Las lecciones flamencas son las que más se asemejan a la media del proyecto, donde duran más las clases es en España, y las lecciones húngaras son las que poseen menos episodios y duran menos. Asimismo, en Inglaterra el número de episodios es significativamente mayor que en el resto.

	Flandes		**Inglaterra**		**Hungría**		**España**		**Proyecto**	
	Media	SD	Media	SD	Media	SD	Media	SD	Media	SD
Episodios	5.6	1.7	*7.1*	2.2	*4.3*	0.8	5.2	1.6	5.5	1.8
Duración	50.1	6.8	53.1	5.7	*45.9*	2.3	*58.2*	10.1	52.0	8.3

Tabla 2: Media de episodios (y desviación típica) y duración de las lecciones por país. En cursiva aparecen los casos más dispares.

Pasamos a mostrar las medias de episodios en función del foco matemático (tabla 3).

	Flandes	**Inglaterra**	**Hungría**	**España**	**Proyecto**
Conceptual	3.9	*5.4*	*2.9*	3.6	3.9
Derivado	0.3	0.1	0.3	0.1	0.2
Estructural	0.7	*0.1*	*1.9*	0.6	0.9
Procedimental	3.0	3.7	2.4	3.3	3.0
Eficacia	0.6	0.7	*1.7*	0.7	0.9
Res. problemas	*0.4*	1.4	1.3	*1.8*	1.2
Razonamiento	1.8	2.1	2.1	1.1	1.8
Total	10.5	13.3	12.6	11.3	11.8

Tabla 3: Número medio de episodios por lección en que se observan los diferentes focos matemáticos.

En un episodio se puede registrar más de un foco. Todos los valores deben ser considerados teniendo en cuenta el número de episodios de las lecciones en cada país, como se verá en la tabla 4. En cursiva aparecen los casos más dispares.

De nuevo, a excepción del foco "Resolución de problemas", Flandes ofrece el mayor parecido con la media del proyecto. España no se separa demasiado de dicha media, salvo en el foco mencionado por exceso, lo que en principio podríamos considerar un mayor énfasis de los profesores españoles elegidos como ejemplos de buena práctica en dicho foco; este hecho contrasta con la menor media en "Razonamiento".

En cuanto a la media del proyecto, podemos afirmar que los profesores observados en el proyecto enfatizan lo conceptual y que en ellos predomina el foco conductual por encima del cognitivo en relación con los procedimientos matemáticos, la resolución de problemas y el razonamiento, que son privilegiados sobre las propiedades específicas de las matemáticas (eficacia, estructura y conocimiento derivado deductivamente). Podemos incluso afirmar que las destrezas procedimentales se consideran más importantes que el razonamiento lógico.

Discusión

Uno de los objetivos del proyecto fue examinar cómo profesores de diferentes sistemas educativos conceptualizan y enseñan matemáticas. Este análisis se basa en episodios que representan las oportunidades dadas a los estudiantes. Para facilitar la comparación presentamos la tabla 4, en la que se detallan los porcentajes de episodios.

	Flandes	**Inglaterra**	**Hungría**	**España**	**Proyecto**
Conceptual	70.4	79.5	65.7	67.9	71.1
Derivado	4.5	1.1	5.5	2.1	3.7
Estructural	16.8	*0.5*	*42.9*	13.5	18.8
Procedimental	56.0	52.4	58.1	62.5	57.4
Eficacia	10.8	11.1	*39.0*	11.8	18.0
Res. problemas	*5.7*	21.7	29.5	*35.0*	22.7
Razonamiento	32.8	31.5	47.2	27.6	34.6
Total	197.0	197.8	287.9	221.9	226.3

Tabla 4: Porcentaje medio de episodios por lección en que se observan los diferentes focos matemáticos (en cursiva, casos dispares).

La lección media de Flandes es la más parecida a la lección media del proyecto. Sólo difiere significativamente de las otras en relación con el menor número de episodios que dan oportunidades para hacer resolución de problemas. Parece que los profesores observados dan poca importancia a esta actividad.

La lección media inglesa posee bastantes más episodios con foco conceptual y menos con foco estructural que la media del proyecto. Si comparamos con el elevado número de episodios de la lección inglesa, podemos decir que los estudiantes ingleses del proyecto tuvieron muy escasas oportunidades de examinar las propiedades estructurales de las matemáticas.

Lo más destacable de la lección media húngara es la existencia de más episodios con énfasis en lo estructural y en la eficacia. Esto sugiere que los profesores húngaros dan más importancia a las propiedades estructurales de las matemáticas y la noción de elegancia matemática que sus colegas del proyecto.

Con relación a España, es destacable la importancia dada a la resolución de problemas, aunque presenta el porcentaje inferior en razonamiento.

Llegados a este punto conviene indicar que los análisis basados en el número de episodios y en los porcentajes son complementarios. Por ejemplo, podemos apreciar que en la tabla 4 no aparece en cursiva el porcentaje del foco conceptual de Hungría, mientras que estaba en cursiva en la tabla 3. Que no aparezca en la tabla 4 indica que la proporción de foco conceptual no difiere demasiado de la media del proyecto; sin embargo, la tabla 3 nos informa de que, en realidad, hay pocas oportunidades para los alumnos relacionadas con este foco (entiéndase pocas oportunidades en el sentido de pocas ocasiones diferentes, no en tiempo dedicado). Observando los totales de las tablas 3 y 4 vemos que la mayor cantidad es la húngara, a pesar de tener menos episodios; además, comparando sus datos con la media del proyecto, vemos que supera la media en todos los aspectos, salvo en el conceptual, donde se sitúa cerca, siendo el único país en el que ocurre esto, lo que puede significar que las lecciones húngaras integran más aspectos que las de los demás países.

Se recuerda al lector que estos resultados provienen del análisis de 69 lecciones de 16 profesores en 4 países. Los datos se han interpretado con cautela, aunque, al mismo tiempo, debido a que los profesores participantes se consideraron representativos de una buena práctica en su contexto, algún tipo de reflexión sería posible. Se encontraron semejanzas en los objetivos de los profesores, que se relacionaban más con logros conductuales que cognitivos; asimismo, prácticamente no se vio evidencia de la matemática como conocimiento derivado. Las lecciones del proyecto estuvieron dominadas por el desarrollo conceptual y las destrezas procedimentales apoyadas por ciertas dosis de razonamiento. En resumen, parece que los profesores del proyecto poseen puntos de vista similares respecto a los objetivos clave de la enseñanza de las matemáticas. ¿Qué se entiende, pues, por buena práctica en cada país? Por ejemplo, la escasez de énfasis derivado, estructural, de eficacia y razonamiento en los profesores españoles nos lleva a preguntarnos si en nuestro país, en la formación de profesores, no se tienen en cuenta suficientemente estos aspectos. Esto puede ser una falta de atención de los propios formadores, no sólo de profesores. El resto de focos puede hacernos pensar sobre algunas diferencias entre tradiciones. Las lecciones húngaras enfatizaron la estructura matemática y la eficacia, como ya identificó Andrews (2003). Las lecciones flamencas y españolas mostraron menor y mayor énfasis, respectivamente, en resolución de problemas. Las lecciones inglesas no mostraron apenas énfasis en la estructura matemática. Algunas de estas diferencias aluden a modelos de enseñanza propios de cada país y reflejan asunciones que suelen estar arraigadas y no articuladas sobre los procesos educativos (Schmidt et al., 1996; Stigler et al., 2000). Es en este sentido que este estudio, en la línea de lo que explicábamos en la introducción del artículo, intenta aportar datos para la reflexión a los interesados en la enseñanza de la matemática en cada país.

Finalmente, de los 4 países del proyecto, Flandes ha sido el que ha obtenido mayor éxito en todos los últimos tests sobre el logro matemático. Los 3 tests TIMSS examinaron competencias técnicas de los estudiantes, mientras que los 2 PISA evaluaron aspectos relativos a la aplicación de las matemáticas. Hungría obtuvo buenos resultados en los TIMSS, e Inglaterra obtuvo un buen resultado en el primer PISA, mientras que España obtuvo siempre malos resultados. Junto a esto, conviene recordar que las lecciones de Flandes son las más parecidas a la media del proyecto. O sea, con la excepción de resolución de problemas, las lecciones flamencas fueron las más equilibradas en relación con las oportunidades que se dan a los estudiantes. Por consiguiente, desde nuestro punto de vista, un modo de mejorar la educación matemática en España sería proporcionar a los estudiantes experiencias que se asemejen más a las identificadas en la lección media del proyecto. En particular, esto implicaría un trabajo más extenso en los aspectos estructurales de las matemáticas (conexiones dentro y entre tópicos) y en los procesos de razonamiento. Tal cambio exigiría de los profesores un mayor conocimiento de la matemática escolar y de los procesos de adquisición de conocimiento matemático por los alumnos. De nuevo, por tanto, estamos ante unos datos y unos resultados que ponen de relieve la necesidad de profesionalizar a los profesores desde el trabajo realizado en el área de Didáctica de la Matemática.

Referencias

Andrews, P. (2003). Opportunities to learn in the Budapest mathematics classroom, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1 (2), 201-225.

Ball, D.L. & McDiamird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. En W.R. Houston (ed) *Handbook of Research on Teacher Education*. New York: Macmillan.

Chabbott, C. & Elliott, E.J. (eds) (2003). Understanding others, educating ourselves: getting more from international comparative studies in education. Committee on a Framework and Long-term Research Agenda for International Comparative Education Studies. National Research

Council. Washington, DC: The National Academic Press.

Hatano, G. & Inagaki, K. (1998). Cultural Contexts of Schooling Revisited: A Review of The Learning Gap from a Cultural Psychology Perspective. En S. Paris & H. Wellman (eds) *Global Prospects for Education: Development, Culture and Schooling*. Washington, D.C.: American Psychological Association.

Jenkins, E.W. (2000). Learning from TIMSS? *Education in Chemistry*, 37, 4, 105-6.

Kaiser, G. (1999). Comparative studies on teaching mathematics in England and Germany. En G. Kaiser, E. Luna and I. Huntley (eds.) *International comparisons in mathematics education*. Londres: Falmer.

Prais, S.J. (2003). Cautions on OECD S Recent Educational Survey (PISA). Oxford Review of Education, 29(2). http://www.pisa.oecd.org/Docs/Download/prais.pdf

Schmidt, W., Jorde, D., Cogan, L., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., Shimizu, K., Sawada, T., Valverde, G., McKnight, C., Prawat, R., Wiley, D., Raizen, S., Britton, E. and Wolfe, R. (1996). *Characterizing pedagogical flow*. Dordrecht: Kluwer.

Stigler, J., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures. *Educational Psychologist,* 35(2), 87-100.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oakes, CA: SAGE.

Theisen, G., & Adams, D. (1990). Comparative Education Research: What are the Methods and Uses of Comparative Education Research. En R. M. Thomas (ed) *International Comparative Education: Practices, Issues, and Prospects* (pp.277-300). New York: Butterworth-Heineman.

Wiliam, D. (1998). Making international comparisons: the third international mathematics and science study, *British Journal of Curriculum and Assessment*, 8(3), 33-37.

Proyecto "mete" (mathematics education traditions of europe[1]): Polígonos en primaria

Nuria Climent Rodríguez y José Carrillo Yañez
Universidad de Huelva

Resumen

El proyecto METE aborda el estudio comparativo de la enseñanza de la matemática en Bélgica –Flandes-, España, Finlandia, Hungría e Inglaterra, desde una perspectiva cuantitativa y cualitativa. Presentamos parte de los resultados relativos a la enseñanza de los polígonos en el último ciclo de Primaria, extraídos del análisis de cuatro unidades didácticas puestas en práctica por profesores de dichos países. Mostramos la complementariedad de ambos tipos de datos y sus posibilidades para profundizar en la enseñanza de dicho tópico.

Abstract

The METE Project deals with a comparative study on the teaching of mathematics in Flemish Belgium, Spain, Finland, Hungary, England, from a quantitative and qualitative perspective. We present the outcomes related to the teaching of polygons in grades 5-6, which derive from the analysis of four units which were implemented by teachers from those countries. We show the complementariness of both types of data and the opportunities they provide to go deeper in the teaching of the mentioned topic.

La investigación desarrollada en el proyecto METE es un estudio de casos centrado en los dos últimos cursos de Primaria y los dos primeros de Secundaria, y en los tópicos de porcentajes, ecuaciones y polígonos. De la información recogida se extraen datos cuantitativos y cualitativos, complementariedad que permite comparar la práctica de los docentes. El objetivo de esta comparación es, sobre todo, profundizar en la comprensión de la enseñanza de dichos tópicos en los niveles señalados y, en concreto, reflexionar sobre dicha enseñanza en el país.

Esta comunicación debe considerarse ligada a la de Andrews et al. (2005) (en este simposio), que presenta el estudio general (de todos los tópicos) del proyecto METE y se centra en uno de los aspectos estudiados (el foco matemático). Aquí nos restringiremos a los datos relativos al estudio de los polígonos en Primaria en cuatro de los cinco países (los datos fineses estar por analizar). Resaltaremos sólo algunos aspectos, sobre los que centraremos nuestra discusión de los resultados referidos al análisis cualitativo de los datos, y no repetiremos características del estudio general que se explican en la comunicación mencionada[2].

Un aspecto fundamental en el estudio de los polígonos es el de las relaciones entre distintas figuras geométricas, lo que está estrechamente ligado a su clasificación. En la geometría tradicional, tal clasificación se ha trabajado como contenido puramente conceptual y de manera memorística. Autores como De Villiers (1994) han señalado las diferencias entre dos tipos de clasificaciones: disjuntas, que subrayan las diferencias entre las distintas clases, e inclusivas, que destacan lo que tienen en común. Las ventajas de este tipo, desde el punto de vista de la construcción matemática, son evidentes en cuanto a la extensión de propiedades de unas figuras a otras. Hay que tener en cuenta, según el trabajo de los Van Hiele, que las clasificaciones inclusivas son más complejas que las disjuntas, requiriendo

[1] METE (código 2002-5048) está financiado por la UE, Acción 6.1 del programa Sócrates
[2] Remitimos igualmente a ella para la fundamentación general sobre el enfoque del proyecto y sus métodos

un mayor nivel de desarrollo intelectual (en la mayoría de los casos fuera de Primaria, Jaime et al., 1992). El estudio de las características comunes a distintos tipos de figuras está relacionado con la geometría *interfigural* (que se ocupa de las relaciones entre distintas figuras) e *intrafigural* (relaciones entre los elementos de una misma figura) (Piaget y García, 1985; Vecino, 2003). Es necesario abordar en la escuela los dos tipos de geometría, siendo la propia actividad de clasificar característica de la interfigural.

Por otra parte, la geometría puede suponer un contexto especialmente adecuado para que el alumno de Primaria haga matemáticas y adquiera conocimiento *sobre* matemáticas (Ball, 1990). El estudio de figuras concretas y sus propiedades, por ejemplo, favorece la búsqueda de conjeturas y sus demostraciones, o en algunos casos el seguimiento de demostraciones ya hechas. Además, puede iniciarse a los niños en distintos tipos de verificaciones (visualizaciones, comprobaciones) que si bien no demuestran de manera general, en algunos casos captan el argumento que sustenta la demostración.

Metodología

Para el estudio de la enseñanza de los polígonos al final de Primaria, hemos grabado en vídeo la unidad didáctica (4-5 lecciones) de un profesor de cada país asociada a la introducción de ese tópico en grado 6 (11-12 años). Estos profesores son considerados ejemplos de buena práctica en su contexto por el grupo de investigadores del proyecto de su país. Además, hemos recogido sus planificaciones y material escrito.

Respecto del análisis cuantitativo, cada lección se ha dividido en episodios (un fragmento de la lección en el que la intención didáctica o relativa a la gestión del profesor es constante) y cada episodio analizado según un sistema de categorías construido previamente en el seno del proyecto. Cada unidad fue analizada por el equipo local y después han sido analizadas las dos primeras lecciones de cada unidad (subtituladas en inglés) por nuestro equipo (el responsable del tópico de polígonos en Primaria). El grado de fiabilidad obtenido entre los análisis de estas lecciones por parte de los equipos (coeficiente Kappa superior al 0.79) ha permitido asumir el análisis cuantitativo del resto de la unidad (no subtitulada). Remitimos a Andrews et al (2005) para la explicación del proceso anteriormente descrito. Este estudio se ha completado con un análisis cualitativo de las unidades. La base de éste ha sido la observación de los vídeos y análisis del material complementario. Ha sido realizado principalmente por el equipo responsable del tópico, junto con el equipo de cada país. Teniendo en cuenta algunas consideraciones de la literatura de investigación sobre la enseñanza del tópico en Primaria, nos hemos fijado en las actividades y en general las formas de abordar la enseñanza de dichos contenidos por parte de los cuatro profesores (por ejemplo, recursos que usan y su papel o tipo de clasificaciones), sus diferencias y sus similitudes. Partiendo de dichas consideraciones y en un análisis reiterado de las lecciones, comparándolas entre ellas, surgen los elementos que nos parecen más destacables del contenido de cada unidad.

Los grupos observados en Bélgica (B) y Hungría (H) son de habilidad media, el de España (E) es un grupo con especiales dificultades y el de Inglaterra (I) es un grupo de alto rendimiento. El alumnado de las correspondientes escuelas belgas e inglesas es de nivel socioeconómico medio-alto y el de los otros países es de nivel medio. Los cuatro profesores poseen entre diez años de experiencia (Pierre, B) y 25 (Ewa, H).

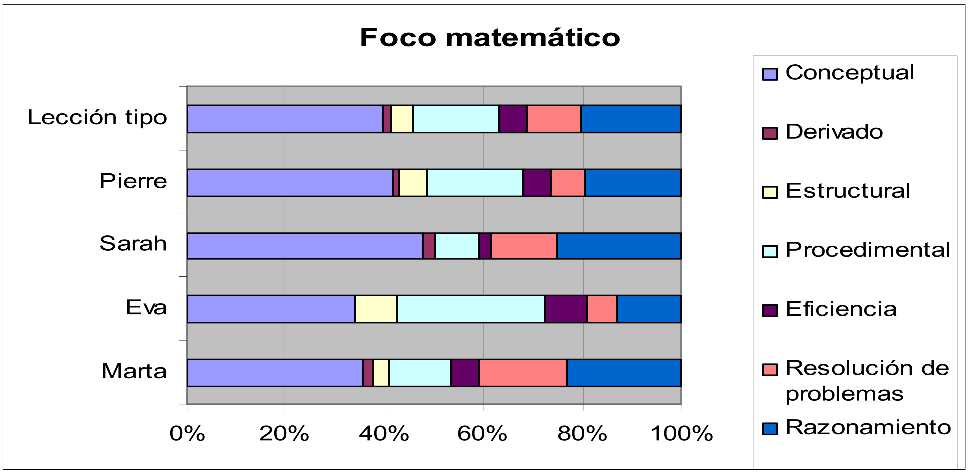
Resultados y discusión

Análisis cuantitativo

La lección tipo o media del proyecto, extraída con las medias de los valores de las variables correspondientes a los cuatro profesores estudiados, nos apoya en la comparación de los cuatro casos, sirviéndonos para la reflexión sobre posibles características comunes y diferenciadas en los cuatro países.

A modo de introducción, describiremos las características principales de esta lección media, pasando a centrarnos en el foco matemático. En la lección media predomina el *trabajo con el grupo-clase*, siendo los datos de todos los países consistentes con esto. Las formas dominantes de actividad pedagógica se centran en el des*arrollo de teoría o el trabajo sobre problemas u otras tareas* relativas al contenido. El contexto matemático dominante, donde subyace la concepción de la matemática observable en las tareas propuestas a los alumnos, es el de *tareas no provenientes del mundo real, con datos inventados por el profesor*. El foco matemático más común (gráfico 1) es el conceptual, seguido del razonamiento y el procedimental (Andrews et al., 2005). No hay apenas presencia del foco derivado y muy poco del estructural y eficiencia. Finalmente, las estrategias didácticas observadas se basan en: *los alumnos comparten públicamente sus ideas, soluciones o respuestas; el profesor explica una idea o solución, ofrece pistas o sugerencias, y formula cuestiones que permiten al alumno construir o refinar ideas matemáticas*.

Nos centramos ahora en cada uno de los profesores estudiados y en el foco matemático (remitimos a Andrews et al., 2005, para la definición de sus categorías y la explicación de cómo se obtienen los datos siguientes en el caso de un tópico cualquiera).



	Marta (E)	Ewa (H)	Sarah (I)	Pierre (B)	Proyecto
Conceptual	35,71	*34,04*	*47,72*	41,67	39,78
Derivado	1,78	*0*	*2,27*	1,39	1,36
Estructural	3,57	*8,51*	*0*	5,55	4,4
Procedimental	12,5	*29,79*	*9,09*	19,44	17,7
Eficiencia	5,36	*8,51*	*2,27*	5,55	5,42
Resolución de problemas	*17,86*	*6,38*	13,64	6,94	11,2
Razonamiento	23,21	*12,76*	*25*	19,44	20,1

Gráfico 1: Porcentaje medio de indicadores relativos a los distintos focos matemáticos (respecto del total de indicadores de la lección de cada profesor –en cursiva aparecen los casos extremos).

Podemos observar cómo las lecciones de Pierre y Marta son las que presentan todos los indicadores, aunque algunos con escasa presencia (derivado, estructural y eficiencia). Se diferencian básicamente en que Pierre pone más énfasis procedimental que Marta, lo contrario ocurre con la resolución de problemas. Sarah y Marta otorgan una importancia similar a la resolución de problemas y al razonamiento; diferenciándose en el mayor énfasis conceptual de la primera. Ewa es la que presenta una distribución más diferente a las restantes (es sólo similar a Marta en el indicador conceptual), con una distribución más homogénea respecto de los distintos indicadores (exceptuando el derivado) y con el mayor énfasis procedimental. La lección media de Ewa es las que más difiere de la del proyecto, mientras que la de Pierre es la más parecida. Puede sorprender que en todos los indicadores Ewa y Sarah presenten los casos extremos, excepto en resolución de problemas. Además, mientras que Ewa presenta los valores máximos en los focos estructural, procedimental y eficiencia, y los mínimos en conceptual, derivado, resolución de problemas y razonamiento (Sarah presenta los extremos opuestos).

Resultan especialmente sorprendentes las diferencias en resolución de problemas y razonamiento en Ewa. El análisis cualitativo de los vídeos y el material de clase nos ayudan a interpretar estas diferencias. Hemos de entender la diferencia en resolución de problemas, según se ha puesto de manifiesto en el transcurso del proyecto, en el contexto de cada grupo-clase. Si analizamos las tareas a las que se enfrentan los alumnos de ambas clases, las de Ewa son más complejas intelectualmente y encierran una matemática más avanzada que las que propone Marta (la tarea que se describe en el siguiente epígrafe [2ª sesión de Ewa] y, en la 2ª sesión de Marta, la de extraer cuáles son las características que nos permiten distinguir distintos cuadriláteros, son ejemplos de ambas). Sin embargo, teniendo en cuenta la complejidad de dichas tareas para cada uno de los grupos correspondientes, para los alumnos de Marta se trata en más ocasiones de tareas no rutinarias. En cuanto al razonamiento, creemos que la causa del bajo valor en la clase de Ewa es que ella no pide a sus alumnos que formulen sus argumentos. Parece interesante el perfil de la lección de Sarah, con gran énfasis conceptual, y prácticamente sin presencia de los focos estructural y eficiencia (lo que relacionamos, como veremos, con el conocimiento *sobre* matemáticas). En el análisis de los vídeos podemos observar cómo son los alumnos los que tienen que articular en muchas ocasiones los argumentos y se destaca la relación entre distintos conceptos y propiedades. Se trabajan muy pocos procedimientos (los más ligados a lo conceptual, como clasificar los cuadriláteros). En el caso de Marta, los valores son bastante cercanos a la media, destacando el indicador de resolución de problemas, antes comentado. Tras el análisis cualitativo volveremos sobre los valores de algunos de los focos matemáticos.

Análisis cualitativo

En este apartado ejemplificaremos cómo integramos en nuestro estudio los datos de tipo cuantitativo y cualitativo y, a su vez, extraeremos algunas consideraciones sobre la enseñanza de este tópico. Nos centraremos en el tratamiento (inclusivo o disjunto) de clasificaciones de figuras, relacionado con la terminología de cada país, y la consideración de un conocimiento *sobre*. En cada aspecto nos fijaremos en los profesores que representen tratamientos más diversos.

Pierre trabaja explícitamente la clasificación de triángulos según sus lados de manera inclusiva (equiláteros como isósceles), a excepción de considerar los "isósceles" y los "no-isósceles", y la clasificación de cuadriláteros de igual modo (paralelogramo como trapecio). No usa los términos "escaleno", "trapezoide" ni "romboide". De hecho, éstos no se usan en la escuela belga-flamenca (ni en los restantes países; "trapezoid" en inglés es poco utilizado). Marta, como es habitual en España, diferencia los triángulos escalenos, isósceles y equiláteros como tres clases disjuntas (no trata la clasificación de cuadriláteros). En este sentido, nos parecen interesantes dos cuestiones. Una es que la propia terminología usada en cada país (ligada a las conceptualizaciones tradicionales) puede favorecer o no el tratamiento inclusivo de las clasificaciones (nuestros términos son los que más favorecen las clasificaciones disjuntas). Otra es que en el resto de los países, ya en la escuela primaria los alumnos se enfrentan a clasificaciones inclusivas. Esto contrasta con nuestra situación, donde si algunas propuestas consideran unas clases como casos particulares de otras, lo hacen sólo en casos muy especiales (cuadrado-rectángulo o cuadrado-rombo). ¿Tendrían más dificultades nuestros alumnos de edades similares de entender dicho tipo de clasificaciones? Quizás tengan el problema añadido, si se pretende hacer a partir de cierto nivel cognitivo de éstos, de tener que desechar términos y conceptos que pierden su sentido (como escaleno). Estos hechos contrastan con la idea de no abordar la inclusividad en Primaria, referida al comienzo.

Por otra parte, las lecciones de Ewa destacan sobre las restantes por el uso de notación matemática tanto por parte de la maestra como por parte de los alumnos (por ejemplo, para nombrar los vértices, A, B, C, lados, a, b, c o AB, BC, CA, y ángulos de un triángulo, α, β, γ, o para nombrar el simétrico de un punto respecto de un eje, P y P’). No sólo se usa, sino que se discute el significado de dicha notación (por ejemplo, que pueden usarse las letras mayúsculas que se quieran para los vértices de un triángulo, pero se usan entonces para los lados correspondientes las minúsculas relativas para evidenciar qué lado se opone a cada ángulo) y su utilidad (se comenta que la notación puede no ser la convencional pero debe ser clara). Además, se enfatizan otros aspectos del conocimiento *sobre* matemáticas como, en el caso de problemas geométricos, el procedimiento de partir de lo que se desea obtener. El siguiente fragmento de clase ejemplifica lo anterior:

Se plantea a los alumnos la tarea de dibujar un triángulo simétrico dado el eje de simetría y uno de sus vértices (P, exterior al eje). Para ello, se sugiere la estrategia de pensar primero en qué se quiere obtener (cómo debe ser la figura resultante) y pensar después en qué pasos deben darse desde los datos que se tienen para llegar a ese dibujo. Se pide cuántas soluciones tiene, acordándose que hay infinitas, tantas como posibilidades de colocar el vértice sobre el eje de simetría (todos los puntos del eje menos el punto de corte con el segmento PP’). *[2ª sesión de Ewa]*

Pierre y Sarah se centran en el conocimiento *de* matemáticas, mientras que Marta enfatiza también algunos modos de proceder propios del quehacer matemático, como el heurístico “organizar los datos de un problema” o proceder sistemáticamente en su resolución, aspectos relativos al conocimiento *sobre* matemáticas, más básicos (pero no menos importante) que los considerados por Ewa..

Volviendo a los datos cuantitativos referidos al foco matemático, Ewa presentaba el mayor énfasis estructural (8’51%), seguida de Pierre (5’55%) y Marta (3’57%); los valores coinciden con los anteriores en lo que se refiere a la eficacia en el caso de Ewa y Pierre, y sigue Marta (con un 5’36%) muy cercana a Pierre. Si sumamos ambos valores, obtenemos un 17’02% en el caso de Ewa, un 11’1% en el caso de Pierre y un 8’93% en el caso de Marta. Es interesante, además, tener en cuenta la distribución de estos indicadores a lo largo de la unidad. En el caso de Ewa, hay indicadores entre un 7 y un 15% en cuatro de las cinco lecciones en el foco estructural, y entre un 10 y un 15% en tres de las cinco en eficiencia; Pierre presenta indicadores en el foco estructural sólo en dos de sus cinco lecciones (casi 20 y 5%) y en eficiencia en otras dos (una no coincidente con las anteriores, con aproximadamente 10 y 15%); Marta sólo presenta indicadores en el foco estructural en una lección (cerca de 15%) y eficiencia en otra lección (algo más de 20%). La distribución por lecciones da un retrato más fiel de lo que supone la matemática que se presenta a los alumnos en estos casos respecto de la matemática *sobre*. La matemática que se presenta y manejan los alumnos de Ewa enfatiza más y más constantemente (como una característica propia de la maestra, no como algo puntual) la estructura y las bases de la materia, desde el punto de vista del esqueleto de sus contenidos y de sus modos propios de proceder. Podría decirse que es una matemática más formal, sin caer en un formalismo vacío de significado para el alumno y no justificado. El empleo de la notación por parte del alumno, por ejemplo, es entendido como un recurso para favorecer su razonamiento matemático, además de como un contenido. Este dato coincide con lo que se observa en los profesores húngaros estudiados en relación con los distintos tópicos (Andrews et al., 2005) y lo observado por Andrews (2003).

En ese sentido, nos parece interesante la formación matemática que ponen en evidencia los profesores estudiados. Ewa muestra soltura en el conocimiento matemático (tanto *de* como *sobre*), ¿cuántos de nuestros maestros estarían preparados para abordar en sus aulas dicho conocimiento? ¿Se trata de una cuestión de hábitos y/o capacidades de sus alumnos? ¿Qué observamos y trabajamos en las aulas de formación de maestros? Son algunas cuestiones que pueden servir de hilo conductor de un debate necesario sobre la naturaleza de la matemática que se estudia en nuestras aulas.

Referencias

Andrews, P. (2003). Opportunities to learn in the Budapest mathematics classroom, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1 (2), 201-225.

Andrews, P, Carrillo, J. y Climent, N. (2005). Proyecto “METE” (Mathematics Education Traditions of Europe): El foco matemático. Comunicación *IX Simposio de la SEIEM.*

Ball, D.L. (1990). The mathematical understanding that prospective teacher bring to teacher education, *Elementary School Journal,* 90, 446-449.

Carrillo, J. y Climent, N. (2005). The mathematics education traditions of Europe (METE) project: The teaching of polygons in Primary school. Paper aceptado en la *11th Biennial EARLI Conference* (European Association for Research on Learning and Instruction), a celebrar en Chipre, 23-27 agosto 2005.

De Villiers, M. (1994). The role of a hierarchical classification of quadrilaterals, *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-21.

Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B., *Epsilon*, 23, 49-62.

Piaget, J. y García, R. (1985). *Psicogenesi e storie delle scienze*. Milano: Garzanti.

Vecino, F. (2003). Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria. En M.C. Chamorro (coord) *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación

Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración

Vicente Vicario y José Carrillo Yañez
Universidad de Huelva

Resumen

Este trabajo examina las concepciones que dos profesores de educación secundaria presentan respecto a la demostración matemática y sus funciones. Los datos son recogidos a través de entrevistas relacionadas con aspectos de la demostración. Los resultados sugieren que los profesores reconocen la variedad de las funciones de la demostración pero que tienen puntos de vista limitados sobre su naturaleza y una inadecuada comprensión de lo que constituye una demostración matemática.

Abstract

This study examined 2 in-service secondary school mathematics teachers´ conceptions of proof and its functions. Data were gathered from a series of interviews and teachers´ responses to designed tasks focusing on proof. The results of this study suggest that teachers recognize the variety of roles that proof plays in mathematics but they hold limited views of the nature of proof in mathematics and demonstrated inadequate understandings of what constitutes proof.

Motivación

Muchos profesionales de la enseñanza de la Matemática consideran la demostración como uno de los núcleos principales de la disciplina, coincidiendo con Ross (1998, p. 254): "la esencia de la Matemática está en las demostraciones". El papel de las demostraciones en la educación secundaria ha sido de carácter periférico y esencialmente destinado a un contexto relativamente limitado.

En este contexto surge el trabajo encaminado a la tesis doctoral (en curso) "Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática", dirigido por el segundo autor de este informe.

Muchos trabajos pioneros en este campo, de entre los que destacan sin ánimo de ser exhaustivos Hanna (1989a,b, 1990), de Villiers (1993), Hersh (1993), Hanna & Jahnke (1996), Ibañes & Ortega (1997), Recio (1999), Knuth (2002), indican la importancia asociada a la demostración matemática, a sus funciones y a las concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración.

El objetivo de este trabajo es acceder a las concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática y sus funciones. Esto nos dará pistas para plantearnos qué funciones de la demostración pueden ser utilizadas en el aula para hacer de ella una actividad más significativa. Nos acercaremos a estas preguntas a través de las declaraciones de dos profesores.

Perspectiva teórica

Tradicionalmente la demostración matemática se ha tratado casi exclusivamente en términos de verificación o justificación de enunciados matemáticos. Se ha tenido la sospecha de que los profesores de secundaria han mantenido estos términos como referentes básicos de la función exclusiva de la demostración. Uno de los campos de batalla estriba en criticar este punto de vista por ser parcial y estudiar funciones de la demostración asumidas por los profesores susceptibles de ser aplicadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Desde esta perspectiva resumiremos las funciones de la demostración matemática propuestas por de Villiers (1993) sin ánimos de exhaustividad, y caracterizamos otras funciones emergentes:

* **Verificación** (concerniente a la verdad de una afirmación)
* **Explicación** (profundizando en por qué es verdad)
* **Sistematización** (organización de resultados dentro de un sistema axiomático)
* **Descubrimiento** (descubrimiento/invención de nuevos resultados)
* **Comunicación** (transmisión del conocimiento matemático)

Una amplia bibliografía caracteriza esta problemática asociada a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática: Davis & Hersh (1983), Guzmán (1995), Ibañes y Ortega (1997), Ibañes (2001), Guzmán (2003), Macías et al. (2004).

Asumimos la óptica de Lakatos (1978), quien, desde el análisis epistemológico de ejemplos de la historia de la Matemática, asume la falibilidad de la demostración, y coincidiendo con Sáenz (2001) al establecer la hipótesis de que el sistema co*njetura-pruebas-refutaciones* constituye la lógica del descubrimiento matemático escolar.

Metodología

Se analizaron las funciones que dos profesores de educación secundaria asignaron a varias demostraciones alternativas, para así poder percibir sus concepciones. Las demostraciones fueron proporcionadas con antelación y estudiadas por ellos antes de efectuar una entrevista semiestructurada.

La entrevista fue grabada en audio y transcrita después, siguiendo las pautas de la metodología cualitativa y el enfoque interpretativo en este estudio de casos (Stake, 2000).

Exponemos a continuación las demostraciones alternativas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que presentamos a los profesores, una breve caracterización de dichos profesores y el guión de las entrevistas.

Demostraciones de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

1ª Demostración: Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces tendremos dos números naturales p y q , con $q \neq 0$ tales que $\sqrt{2} = p/q$ y con M.C.D.(p,q)=1. Por tanto $2q^2 = p^2$ y p^2 es par. Además p también es par porque el cuadrado de un número impar es impar. Por tanto $p = 2k$ para algún número natural k. Sustituyendo en la relación anterior y dividiendo por 2 tenemos que: $q^2 = 2k^2$, por lo que q^2 es par y también lo es q. Hemos llegado, pues, a una contradicción ya que p y q eran primos entre sí.

2ª Demostración: En esta demostración emplearemos el conocido teorema fundamental de la aritmética, que afirma que "*Todo número natural se puede descomponer, salvo reordenaciones triviales, como producto de factores primos y de forma única*".

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces tendremos dos números naturales p y q , con $q \neq 0$ tales que $\sqrt{2} = p/q$. Por tanto $2q^2 = p^2$ lo que es absurdo, ya que en el primer miembro de la igualdad tenemos multiplicándose un número impar de factores primos y en el segundo miembro un número par.

3ª Demostración: Esta demostración recurre al método de descenso infinito. Supongamos que √2 es racional. Entonces existirán números naturales p y q, con q≠0 tales que √2 = p/q. Ahora, de entre todos los números racionales iguales a √2, consideremos aquel tal que el valor de p sea mínimo.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

Sabemos que:

Si sustituimos el primer valor de √2 por p/q y despejamos en el segundo √2, obtenemos que:

$$\sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}$$

Ahora, puesto que p > q , entonces 2q – p < p y además:

$$\frac{2q-p}{p-q} = \frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

en contradicción con lo supuesto.

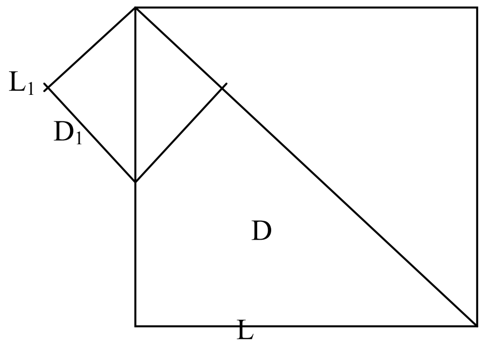
4ª Demostración: Supongamos que √2 es un número racional. Entonces deben existir dos números naturales p y q, q≠0 tales que √2 = p/q con p y q primos entre sí.

Como √2 = p/q entonces $2q^2 = p^2$. Construyamos una tabla con todas las cifras en las que pueden terminar p, q, p^2, q^2 y $2q^2$ en el sistema decimal de numeración:

p	q	p^2	q^2	$2q^2$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	2
2	2	4	4	8
3	3	9	9	8
4	4	6	6	2
5	5	5	5	0
6	6	6	6	2
7	7	9	9	8
8	8	4	4	8
9	9	1	1	2

Si comparamos las columnas correspondientes a p^2 y $2q^2$ nos damos cuenta de que $2q^2 = p^2$ si ambos miembros de la igualdad terminan en cero, y esto sucede únicamente si p termina en cero y q termina en cero ó en cinco; en cualquier caso p y q serían múltiplos de cinco y por tanto no serían primos entre sí.

5ª Demostración: Consideremos un cuadrado de lado unidad. Tracemos una de sus diagonales y observemos que su longitud, aplicando el teorema de Pitágoras, viene dada por $\sqrt{2}$. Pasemos ahora a demostrar que la diagonal y el lado del cuadrado son dos segmentos inconmensurables entre sí, es decir que $\sqrt{2}$ es irracional.



Midamos el lado del cuadrado sobre la diagonal y tracemos la perpendicular a la diagonal a partir del punto de corte. Obtenemos así un nuevo cuadrado de diagonal D_1 y lado L_1.

Todo el proceso anterior puede aplicarse al nuevo cuadrado: se mide su lado sobre la diagonal y a partir del punto de corte se traza la perpendicular a la misma. Evidentemente este proceso puede repetirse indefinidamente. Aunque este proceso no termina, el resto obtenido será gradualmente menor, es decir: $L > L_1 > L_2 > ...$

Cada uno de estos restos constituye la diferencia que existe entre la diagonal y el lado del cuadrado correspondiente: $L_1 = D - L$; $L_2 = D_1 - L_1$...

A partir de aquí procederemos a la demostración. Asumiremos que el lado y la diagonal son conmensurables y llegaremos a una situación contradictoria. Si ambos son conmensurables tienen una medida común, un segmento u que divide exactamente al lado y a la diagonal. Si dos segmentos cualesquiera son múltiplos enteros de u, la diferencia entre ambos también es un múltiplo de u. Es decir, si D y L son múltiplos enteros de u, también lo es L_1. Por otra parte, resulta que $D_1 = L - L_1$ (es fácil verificarlo aplicando el teorema de Pitágoras), lo cual, siendo una diferencia entre múltiplos de u, también es un múltiplo de u.

Del primer cuadrado hemos pasado al segundo. Podemos continuar de la misma forma. Tomando L_1 y D_1 resulta que L_2 y D_2 son múltiplos de u, y esto continúa en los sucesivos cuadrados. Llegamos ahora a la contradicción ya que si D y L son múltiplos enteros de u, también lo son L, L_1, L_2,... Pero estos múltiplos de u decrecen continuamente. Esta es la contradicción que prueba el teorema ya que en el proceso de descenso llegaríamos a múltiplos de u menores que el propio u.

Los profesores

Los dos profesores (P_1 y P_2) implicados en esta investigación son profesores de secundaria, licenciados en Matemáticas y llevan ejerciendo la profesión 8 y 10 años respectivamente.

El guión de la entrevista

1. ¿Crees que los argumentos presentados son demostraciones? ¿Puedes plantear algún inconveniente?

2. ¿Qué impresiones fundamentales has sacado al estudiar estas demostraciones? ¿Propondrías alguna demostración alternativa?

3. ¿Encuentras que estas demostraciones aparte de verificar el enunciado o justificarlo, cumplen alguna otra finalidad?

4. De estas cinco demostraciones, ¿cuál es para ti la más idónea desde el punto de vista didáctico? ¿Y personalmente?

5. ¿Te incomodan las demostraciones por reducción al absurdo? ¿Sería obligado para ti sustituir, siempre que sea posible, una demostración por reducción al absurdo por otra directa? ¿Qué problemas puede causar en el alumno este tipo de demostraciones por reducción al absurdo?

Análisis

Presentamos un breve análisis de las concepciones y funciones que los profesores asignan a la demostración matemática, confeccionado a partir de los datos extraídos de los cuestionarios y entrevistas.

Las respuestas a la primera pregunta indican de forma transparente una poco clara comprensión de la demostración por parte de P_1 al calificar de "indefinidas" a las demostraciones 1ª, 3ª y 5ª:

> *"...En las demostraciones 2ª y 4ª no encuentro ningún problema, son claras y transparentes, rotundas. Las demostraciones 1ª, 3ª y 5ª están formuladas de una manera indefinida,..."* (P_1).

Esta afirmación se afianza más cuando expone sobre la 5ª demostración:

> *"...a mí la 5ª demostración no me ha gustado nada, me parece insoportable, porque parte de un argumento geométrico en el que luego hay que implementar un procedimiento muy complicado disminuyendo tamaños y sin embargo la explicación del fundamento del proceso no es intuitiva. No tengo muy claro que demuestre lo que quiere demostrar"* (P_1).

También dice que en la 3ª demostración (por descenso), no se deja claro lo que se quiere demostrar:

> *"...la 3ª demostración, su formulación, el método de descenso infinito, no me gusta. Da una falsa impresión de circularidad debido a que se demuestra una desigualdad que es evidente y no se deja claro lo que se quiere demostrar"* (P_1).

Según el profesor P_2 los cinco argumentos presentados son demostraciones pero aunque al principio comenta que la 4ª demostración empleada efectivamente lo es, después dice que:

> *"...La 4ª demostración, más que reducción al absurdo, llega a ver que es imposible que $\sqrt{2}$ sea irracional"* (P_2).

indicando en cierto sentido que esta demostración es más bien una demostración directa y no una demostración por reducción al absurdo.

En cuanto a la segunda cuestión, P_1 asume que el contenido de la demostración 1ª se puede remodelar para simplificarla más, sin darse cuenta de que la demostración ya es "elemental":

> *"Propondría reformulaciones, sobre todo de la 1ª demostración a un lenguaje más llano y menos rebuscado"* (P_1).

Una de las funciones de la demostración que emerge en este estudio es la función *simplificativa* (carácter de encontrar un argumento relativamente breve y sencillo) que es contemplada en el marco de De Villiers como una "subfunción" de la función *sistematización*.

Ni P_1 ni P_2 mencionan que aunque a los dos les ha parecido altamente estética la 2ª demostración, ésta no es más elemental que la 1ª, que no recurre a ningún otro teorema de la envergadura del *teorema fundamental de la aritmética* al que sí recurre la 2ª demostración.

Además, muestran poca familiaridad con demostraciones como la 3ª, que les parece a ambos bastante artificial (no la habían visto nunca) e incluso dudosa, ya que por ejemplo a P_1 le parece que supone un argumento circular:

> *"...porque ya digo que la demostración por descenso infinito parece que está contenida en ella (la 1ª demostración)..."* (P_1).

y a P_2 le parece que introduce operaciones con el "irracional" $\sqrt{2}$ antes de probar su irracionalidad y sin ningún derecho a manipular este número algebraicamente:

> *"La 3ª demostración, el método es artificial de la descomposición de la fracción del irracional del denominador. Maneja el uso de irracionales en la propia demostración, pero esto no quita la propiedad de que sea irracional, ¿no?.."* (P_2).

A la tercera pregunta P_1 responde literalmente de forma sorprendente que:

> *"...La 2ª demostración muestra la raíz de la contradicción. También es una reducción al absurdo, pero en la 2ª demostración está patente la raíz de la contradicción, cosa que en la 1ª demostración está totalmente ausente..."* (P_1).

caracterizando así su escasa comprensión de lo que supone una demostración por reducción al absurdo. Los profesores P_1 y P_2 asumen que algunas demostraciones como la 4ª son más "didácticas" y tienen mayor carácter "explicativo" que otras, y la 2ª es la más "bella" o "ingeniosa". Aparece, pues, la función *explicativa* propuesta por de Villiers y creemos que la función *didáctica* como una subfunción, de la función *explicativa*, además de la función *estética* que el propio de Villiers considera fuera de su esquema de funciones pero perfectamente factible.

Con respecto a la cuarta pregunta, están de acuerdo en considerar la 4ª demostración como la de mayor carácter "didáctico" por estimar que es la más cercana al horizonte cultural de sus alumnos. Coinciden en que la 2ª demostración es su preferida por su fuerte carácter estético y la brevedad en obtener la contradicción:

> *"Personalmente la que más me gusta es la 2ª demostración...Ahora, como didáctica, no hay ninguna demostración como la 4ª..."* (P_1).

> *"... pienso que la 4ª demostración es muy sencilla de entender por el alumno... Personalmente me gusta la 2ª... No aporta otras cosas pero es muy elegante e ingeniosa"* (P_2).

A la pregunta 5ª, en general P_1 y P_2 están de acuerdo en que siempre que les sea posible es conveniente la sustitución de una demostración por reducción al absurdo por otra de carácter directo, pero no especifican que tal sustitución puede que en algunos casos sea imposible, es decir, no aclaran que puede que un argumento sólo se pueda demostrar por reducción al absurdo aunque de varias formas alternativas:

> *"...Visto en general sí creo que es conveniente esta sustitución...y utilizar otras demostraciones más directas y contundentes..."* (P_1).

> *"... Si puedo usar una demostración más directa y si tiene algún gráfico que les permite ver a los alumnos más fácilmente, la usaría...Si no tuviese demostración directa, entonces recurriría a otra por reducción al absurdo, por ejemplo a la 1ª demostración, quizás, que es habitual, pero viendo la 4ª demostración, ahora mismo usaría esta otra"* (P_2).

De los comentarios anteriores, surgen, de nuevo, la función *explicativa* y la subfunción *didáctica* de la demostración.

Resumen de resultados y conclusiones

Observamos que estos profesores reconocen algunas de las funciones de la demostración, además de la *verificativa* o *justificativa*. Una de las funciones de la demostración que el trabajo de De Villiers (1993) propone es la *explicativa*, obtenida en este estudio.Los profesores analizados la función *estética* o grado de "belleza" o "ingenio" puesto en juego. Asimismo, aparecen las subfunciones *simplificativa* y *didáctica* respecto de las funciones sistematización y *explicativa* respectivamente.

Resumimos las funciones (cursiva) y subfunciones (subrayado) de la demostración detectadas en las respuestas de los profesores P_1 y P_2 a las cinco preguntas de la entrevista (Ei) en la tabla 1:

	P_1	P_2
E_1	*Verificativa*	*Verificativa*
E_2	*Simplificativa* *Estética*	*Estética*
E_3	*Explicativa* *Didáctica*	*Explicativa* *Didáctica*
E_4	*Explicativa* *Estética* *Didáctica*	*Explicativa* *Estética* *Didáctica*
E_5	*Explicativa* *Verificativa*	*Explicativa* *Verificativa* *Didáctica*

Tabla 1

Queremos resaltar, finalmente, que estos profesores presentan puntos de vista limitados respecto a la comprensión de la esencia de una demostración matemática, sobre todo en lo que se refiere a las demostraciones por reducción al absurdo, algo que pone de relieve carencias en el conocimiento *sobre* matemáticas (Ball y McDiamird, 1990).

Referencias

Ball, D.L., y McDiamird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. En W.R. Houston (ed) *Handbook of Research on Teacher Education*. New York: Macmillan.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1983). *Experiencia Matemática*. Madrid: Labor.

Guzmán, M. de (1995). *Capítulo 2: Demostración Matemática*. http://www.matucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm

Guzmán, M. de (2003) Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas. Iniciación al método matemático. *Base universitaria*. Madrid: Anaya.

Hanna, G. (1989a). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.

Hanna, G. (1989b). Proofs that prove and proofs that explain. Proceedings of the *13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, 45-51.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21, 6-13.

Hanna, G. & Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. En Bishop, A.J. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education. (p 887-908).*

Hersh, R. (1993). Proving is convencing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24, 389-399.*

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). La demostración matemática. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. *Educación Matemática*, 9(2), 65-104.

Ibañes, M. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M.F. Moreno et al. (eds) *Investigación en educación matemática*. Almería: Universidad de Almería.

Knuth, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers´ Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza.

Macías et al. (2004). La enseñanza de la demostración matemática. Parte 3 del diagnóstico de la situación actual*: Análisis de las concepciones de los docentes de Matemática sobre la demostración de proposiciones y su enseñanza.* Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura- UNNE. Corrientes.Argentina.

Martínez Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y al aprendizaje de la demostración matemática.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, 3, 252-255.

Sáenz, C. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M.F. Moreno et al. (eds) *Investigación en educación matemática*. Almería: Universidad de Almería.

Stake, R.E. (2000). Case Studies. En N.K. Denzin & Y. Lincoln (eds) *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks: Sage Publications.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.

Análisis de las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo

David Arnau y Luis Puig Espinosa
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

Resumen

En este trabajo presentamos una división en pasos ideales del Método de Resolución de la Hoja Electrónica de Cálculo y analizamos las dificultades propias del método que su uso plantea al resolutor. También mostramos los resultados de un estudio exploratorio realizado con alumnos de primer curso de secundaria en el que pretendíamos observar cómo resolvían problemas en el entorno de la hoja de cálculo y cómo se enfrentaban a las dificultades propias del método.

Abstract

In this work we show a division in ideal steps of the Spreadsheet Resolution Method and analyze the difficulties of the method itself the use of which raises to the solver. We also show the results of an exploratory study made with students of first course of secondary in which we tried to observe the way they solved problems in the spreadsheet environment and how they faced the difficulties of this method itself.

INTRODUCCIÓN

Como señalan Bednarz y Janvier (1996) los conceptos y procedimientos de origen aritmético, que serán la base sobre la que se construirá el conocimiento algebraico, pueden actuar como obstáculos en el uso del álgebra para resolver los problemas verbales. Nuestro proyecto de investigación pretende determinar el carácter mediador del Método de Resolución de la Hoja Electrónica de Cálculo (MHEC), señalando qué aspectos del método fomentan la evolución hacia el pensamiento algebraico y cuáles pueden intervenir como obstáculos en el proceso.

En esta comunicación expondremos la división en pasos ideales del MHEC, analizaremos las dificultades que su uso puede plantear al resolutor y mostraremos algunas observaciones de cómo los estudiantes se enfrentan a una de estas dificultades.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Nuestro marco teórico y metodológico ha sido el que Filloy (1999) denomina "Modelos Teóricos Locales", que venimos utilizando desde hace años en los trabajos de nuestro grupo (Fernández, 2001; Nassar, 2001 y Puig, 1996).

ANTECEDENTES

A partir de los trabajos de Dettori, Garuti y Lemut (2001), Rojano (1996) y Rojano y Sutherland (1991, 1993a, 1993b, 1997) hemos realizado un catálogo de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo, que nos ha permitido elaborar el modelo de cognición del modelo teórico local.

Rojano y Sutherland (1993a) señalan que el uso de la hoja de cálculo favorece la evolución del pensamiento aritmético hacia el pensamiento algebraico. Los estudiantes de entre 10 y 11 años, a los que se les plantea la resolución de problemas en el entorno de la hoja de cálculo, tienden inicialmente a pensar con ejemplos específicos y tienen dificultad en aceptar el trabajar con cantidades desconocidas como si fueran conocidas (Rojano y Sutherland, 1993a). Tras recibir instrucción en la resolución de problemas verbales en este entorno se observa:

- Un aumento de la percepción de todas las relaciones entre valores conocidos y desconocidos.

- El uso del simbolismo de la hoja de cálculo para expresar relaciones generales.

- La aparición de estrategias de prueba y error cuando los alumnos trabajan en un entorno no informático.

- La integración de los métodos no algebraicos parte-todo y de prueba y error en un método de la hoja de cálculo.

- Una evolución hacia un “método más general y algebraico” consistente en ir de lo desconocido a lo conocido.

(Rojano y Sutherland, 1993b)

Algunos estudios previos han realizado análisis no exhaustivos de las limitaciones que el entorno de la hoja de cálculo plantea a la enseñanza del álgebra. Dettori, Garuti y Lemut (2001) señalan, entre otras, las siguientes:

- La ecuación nunca puede ser explícitamente expresada. El signo igual en la hoja de cálculo significa asignación de un valor calculado a una celda, mientras que en álgebra significa relación. La incapacidad de escribir relaciones en una hoja de cálculo indica que no es posible usarla para manejar modelos algebraicos.

- Las manipulaciones formales no se pueden llevar a cabo en el entorno de la hoja de cálculo, sólo podemos asociar significado a los símbolos.

- Otro aspecto del lenguaje algebraico que tampoco se puede plasmar es la lectura de una relación en cualquier dirección ya que las relaciones en sí mismas no están presentes en la hoja de cálculo.

LA DIVISIÓN EN PASOS IDEALES DEL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE LA HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO

La división en pasos ideales del MHEC supone el catálogo de aquello que debemos hacer cuando resolvemos problemas verbales algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo, sin que ello suponga un orden estricto.

- El primer paso es una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.

- El segundo, la elección de las celdas que van a representar a las cantidades, ya sean conocidas o desconocidas, y qué celda, representante de una cantidad desconocida, servirá de referencia en el paso siguiente. A esta celda, que debe ser única, la llamaremos "celda de referencia" ya que todas las celdas que representan cantidades desconocidas harán referencia directa o indirecta a ella.

- El tercero, representar ciertas cantidades mediante expresiones en la forma superficial de la hoja de cálculo que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras. En esta fase puede ser necesario resolver una lista de dificultades que pueden surgir y que expondremos más adelante.

- El cuarto, el establecimiento de una ecuación, lo que se hace igualando explícita o implícitamente dos celdas que representan la misma cantidad. La igualación explícita se hace usando una función booleana (=Celda1=Celda2) que implementa la hoja de cálculo[1] y que da VERDADERO cuando el valor contenido en las celdas igualadas es el mismo, o FALSO cuando no lo es. De manera implícita la comparación la hace el usuario.

- El quinto paso será la variación del valor presente en la celda de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad.

- En el tercer paso las decisiones que tome el resolutor pueden provocar la aparición de dos dificultades asociadas a las limitaciones del entorno:

- El exceso de colisiones.

- Las referencias circulares.

Llamamos "colisión" a la presencia de dos celdas que representan la misma cantidad. El exceso de colisiones se produce cuando al poner el problema en la hoja de cálculo aparece más de una colisión. Esto conlleva la existencia de más de una celda de referencia y de más de una igualdad en el segundo y cuarto paso, respectivamente. Para evitar el exceso de colisiones debemos modificar las fórmulas generadas a partir de las relaciones involucradas en las colisiones hasta que el número de éstas se reduzca a una.

Las referencias circulares surgen cuando en una celda encontramos una fórmula que depende del valor de otra celda y en ésta aparece una segunda fórmula que depende, de manera directa o indirecta, del valor de la primera celda. Para resolver una referencia circular hemos de duplicar una de las dos cantidades y reestructurar el problema (evitando la aparición de exceso de colisiones) para que estas dos celdas, que representan la misma cantidad, sean la condición que plantee la ecuación.

LOS GRAFOS

Para representar la estructura de relaciones entre cantidades en los problemas utilizamos una representación en forma de grafo, evolucionada a partir de los grafos trinomiales (Fridman, 1990). Estos grafos, a diferencia de los estudiados por la teoría de grafos, pueden tener más de dos vértices en una arista. Cada arista representa una relación entre cantidades y cada vértice situado sobre la arista representa a una de estas cantidades. Las cantidades conocidas se representan por vértices oscuros y las desconocidas, por vértices claros.

Cuando la lectura del problema se plasma sobre la hoja de cálculo, las relaciones entre cantidades se expresan como operaciones aritméticas. Hemos modificado los grafos con la finalidad de que puedan representar la estructura de cantidades y relaciones de los problemas y dar cuenta del proceso de solución en el entorno de la hoja de cálculo. A los grafos que representan las operaciones entre las cantidades les llamaremos grafos orientados. Orientar una arista de un grafo es indicar con una flecha el vértice que representa a la cantidad resultante de realizar la operación con los otros vértices de la arista, a los que llamaremos antecedentes. Si la operación es conmutativa[2], el orden de los antecedentes es intrascendente. Si la operación no es conmutativa (únicamente consideraremos relaciones ternarias), el primer antecedente será el vértice más alejado del que representa la cantidad resultante.

En la Figura 1 se muestra el uso de los grafos orientados para identificar los dos tipos de colisión que se pueden producir al resolver un problema en el entorno de la hoja de cálculo. La colisión sobre vértice oscuro obligaría a dedicar dos celdas a la misma cantidad, una para el valor conocido y otra para el resultado de operar los antecedentes. La colisión sobre vértice claro también exigiría dedicar dos celdas a la misma cantidad, una para cada uno de los valores obtenidos de operar con los antecedentes de las dos aristas.

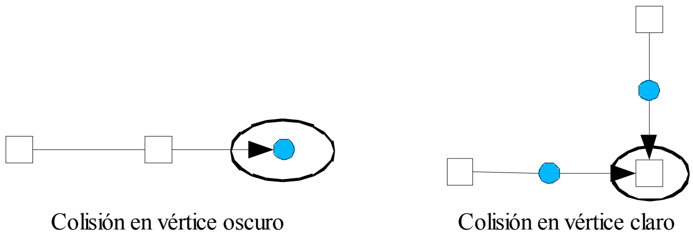


Figura 1. Tipos de colisión.

LA EXPERIMENTACIÓN

LOS SUJETOS

Hemos seleccionado 12 alumnos de primer curso de secundaria del Col·legi Sant Bertomeu de Godella elegidos entre los que tenían mejor historial académico en matemáticas. El test inicial se administró individualmente, mientras que el estudio de casos se realizó agrupando a los alumnos por parejas por las razones descritas en Schoenfeld (1985) y Puig (1996). Tanto en la secuencia de enseñanza como en el estudio de casos a cada pareja se le asignó un ordenador que disponía de la hoja de cálculo Microsoft Excel 2000. Los estudiantes debían resolver los problemas planteados utilizando esta hoja de cálculo.

EL DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

Se aplicó un test individual que evaluaba las habilidades previas en la lectura e interpretación de enunciados y que permitió determinar que los esquemas utilizados por los estudiantes en la solución de los problemas eran aritméticos (incluso en aquellos problemas del test que se resolvían habitualmente de manera algebraica[3]).

A continuación se desarrollo la fase de enseñanza en el aula de informática del centro a lo largo de ocho sesiones de cincuenta minutos. En ella podemos diferenciar dos partes: la familiarización del estudiante con el entorno de la hoja de cálculo y la aplicación de un modelo didáctico basado en la división en pasos ideales del MHEC.

Por último se llevó a cabo un estudio de casos que consistió en observar las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentaban a una prueba formada por cuatro problemas. Éstos se eligieron con la finalidad común de observar cómo aplicaban el MHEC, qué dificultades encontraban y qué errores cometían. La recogida de datos se realizó mediante grabaciones en vídeo y anotaciones del investigador, a partir de las cuales se obtuvo la transcripción de las sesiones. Por tratarse de una investigación que pretende observar la resolución de problemas, tomamos la decisión de que el investigador tuviera un grado de intervención muy bajo.

ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES EN EL ESTUDIO DE CASOS

Analizaremos cómo los estudiantes se enfrentaron a dos problemas que fueron seleccionados con el propósito concreto de observar cómo actuaban ante la presencia de un exceso de colisiones. El problema 1 presenta dos colisiones sobre vértice oscuro (ver Figura 2); mientras que en el problema 2 se observa una colisión en vértice claro y otra colisión en vértice oscuro (ver Figura 3).

Problema 1. En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

Número de cabezas = Nc = 20.
Número de patas = Np = 52.
Conejos = C.
Gallinas = G.
Número de patas por conejo = Pc = 4.
Número de patas por gallina = Pg = 2.
Número de patas de los conejos = Tpc.
Número de patas de las gallinas = Tpg.

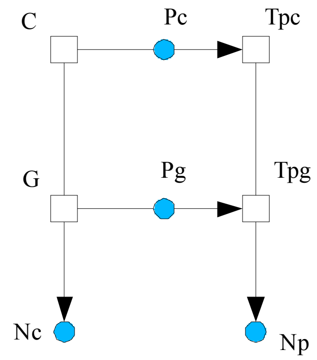


Figura 2. Grafo del problema 1.

Problema 2. Tres muchachos ganaron novecientos sesenta euros. Luis ganó veinticuatro euros menos que Joan y la décima parte de lo que ganó Roberto. ¿Cuánto ganó cada uno?

Dinero total ganado = T = 960.
Dinero ganado por Luis = L.
Dinero ganado por Joan = J.
Dinero ganado por Roberto = R.
Cantidad que resta = S = 24.
Cantidad que divide = D = 10.

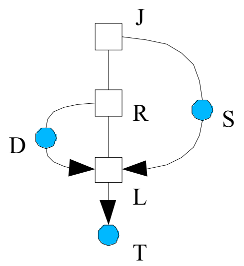


Figura 3. Grafo del problema 2.

LAS ACTUACIONES EN EL PROBLEMA 1

El problema 1 se abordó mayoritariamente de manera aritmética y ninguna pareja consiguió resolverlo correctamente. Únicamente la pareja formada por Ángel y Javier utilizaron las cantidades desconocidas como conocidas, pero no tuvieron en cuenta todas las relaciones presentes en el problema.

La actuación de Ángel y Javier.

Presentamos un fragmento del diálogo que mantuvieron en el que observamos como Ángel percibe la necesidad de duplicar la cantidad Nc con la finalidad de establecer una ecuación.

Ángel: ¡Ah! Pero es que te dice cuántos conejos y cuántas gallinas. ¿No sería número de conejos y número de gallinas? O sea total de conejos y gallinas. ¿Sabes?

Javier: Sí.

Javier: Sería total de conejos y gallinas…

Ángel: Total de conejos y gallinas. (Escribe en la celda A5 "total de conejos y gallinas".)

Javier: Veinte.

Ángel: Sí, pero podríamos hacer de otra manera.

Javier: ¿Cómo?

Ángel: Poner B1 más B2.

Javier: Sí

(Ángel escribe en la celda B5 "=B1+B2".)

Ángel: Y ahora… ¡Madre mía! Hay dos sin número y tendría que haber una. (Inaudible). No sé me he *liao*… Es que lo de las patas sería …

La constatación de que "hay dos sin número" nos indica que Ángel se ha dado cuenta de que para resolver el problema mediante el MHEC es necesario que haya una única celda de referencia (una única celda sin número). En lugar de seguir buscando relaciones en el problema para conseguir una única celda de referencia, prefirieron intentar resolverlo aritméticamente sin llegar a la solución correcta.

LAS ACTUACIONES EN EL PROBLEMA 2

Para resolver el problema 2 los estudiantes utilizaron mayoritariamente el MHEC y tres de las parejas que emplearon este método consiguieron dar la solución correcta. Mostramos a continuación tres fragmentos en los que se observa cómo los estudiantes identifican la doble colisión y cómo se enfrentan a ella.

La actuación de Manel y Jorge.

En el fragmento de diálogo que presentamos se observa cómo esta pareja se centró en la relación entre las cantidades L y R para evitar la doble colisión.

Manel: Luis veinticuatro euros menos que a Joan. (Escribe en la celda B2 =B3-24)

Jorge: Luis la décima parte de lo que gana Roberto… (Silencio.) También dice que tiene veinticuatro euros menos que Joan, entonces no se pueden poner los dos… la décima parte… al revés será igual que por diez.

Manel: Sí.

Jorge: Esto es igual a esto por diez. (Escribe =B2*10 en la celda B4 al tiempo que habla)

La estructura de relaciones y cantidades que acabaron representando en la hoja de cálculo se muestra en la Figura 4, donde entre paréntesis se especifica la celda o celdas que representan cada cantidad.

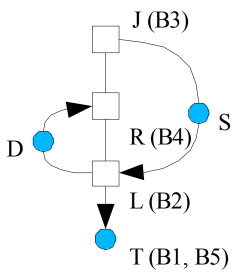


Figura 4. La representación del problema 2 en la hoja de cálculo según Manel y Jorge.

La actuación de Clara y Lucía.

Lucía elaboró un plan para deshacerse de la doble colisión en el que podemos identificar las siguientes partes: establecer como celdas de referencia las celdas que representan a las cantidades J y R; eliminar la cantidad T, y con ella la relación que producía la colisión en vértice oscuro; y duplicar la cantidad L, aquélla en la que se produce la colisión sobre vértice claro.

Clara: Ya está. A ver. Luis ganó veinticuatro menos que Joan.

Lucía: Vale pues. Es igual…

Clara: A esto menos veinticuatro. (Introduce =B3-24 en la celda B2)

Lucía: Y…

Clara: Joan ganó la décima parte… (Silencio)

Lucía: Pues vamos a poner dos libres.

Clara: Esto es igual… No.

Lucía: Espérate. Vamos a hacer una cosa. Vamos a quitar de aquí el total y vamos a poner Luis. (Eliminan la etiqueta de la cantidad T y la sustituyen por otra etiqueta para la cantidad L.)

Lucía: Y tenemos que es igual también…

Clara: A la décima parte de Joan. (Al mismo tiempo que hablan escribe =B4/10 en la celda B1)

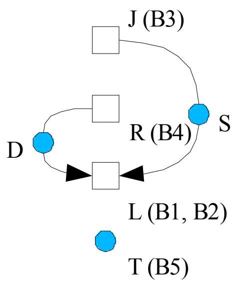


Figura 5. La representación del problema 2 en la hoja de cálculo según Clara y Lucía.

Esta pareja continuó en su empeño de obtener la solución del problema aun sin haber tenido en cuenta todas las relaciones del problema (ver Figura 5). En coherencia con la decisión de "poner dos celdas libres" (dos celdas de referencia), generaron dos secuencias iguales de posibles soluciones para las cantidades J y R. En el fragmento de diálogo que se presenta a continuación, Clara se da cuenta de que el hecho de que las dos secuencias de valores sean iguales equivale a introducir una relación entre las cantidades J y R que no aparecía en el problema.

Clara: Pero entonces ¿qué se supone?, ¿que Joan y Roberto tienen los mismas?

Lucía: No tienen los mismos. O sea no tendrían que tener las mismas. Vale me he dado cuenta; pero es que aunque salga la misma cantidad no tiene por qué (inaudible)… O sea…

Profesor: Queréis hablar un poco más alto. Aunque sea la misma cantidad, ¿qué?

Lucía: Que aunque sea la misma cantidad, si el resultado de Luis no es el mismo, es imposible que sea… Vale, y no va a dar bien.

La actuación de Jaume y Miquel.

En el fragmento de diálogo entre Jaume y Miquel se observa que evitan la doble colisión centrando su atención en la relación existente entre las cantidades L y R y entre las cantidades L y J.

Jaume: Dinero de Joan igual a dinero de Luis más veinticuatro. (Escriben =B2+24 en la celda B3.)

Miquel: A mí no me cuadra esto. Yo creo que sería…

Jaume: Espera, espera. Y dinero de Roberto… (Vuelve a leer en voz alta parte del enunciado.) Luis ganó veinticuatro euros menos que Roberto y la décima parte que Joan.

Miquel: Por eso. Sería Luis igual a dinero de Joan menos veinticuatro.

Jaume: Y dinero de Roberto sería igual a dinero de Luis…

Miquel: Correcto.

Jaume: … por diez.

Miquel: Dinero de Luis por diez.

En la Figura 6 se muestra la estructura de relaciones y cantidades que acabaron representando en la hoja de cálculo, en la que se observa cómo utilizaron como celda de referencia la celda que representaba la cantidad L.

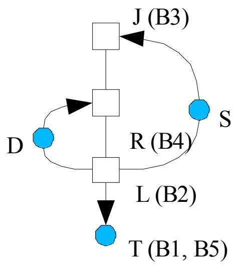


Figura. 6. La representación del problema 2 en la hoja de cálculo según Jaume y Miquel.

CONCLUSIONES

Como conclusiones teóricas destacamos que hemos elaborado una división en cinco pasos ideales del MHEC y hemos identificado las dos dificultades propias del método que su uso plantea al resolutor: el exceso de colisiones y las referencias circulares. También hemos definido y utilizado los grafos orientados para analizar la estructura de los problemas verbales cuando se resuelven en el entorno de la hoja de cálculo.

Tras la enseñanza del MHEC hemos constatado que los estudiantes utilizan elementos propios de la resolución algebraica al enfrentarse a problemas verbales; ya que son capaces de considerar las cantidades conocidas y desconocidas como si fueran conocidas y de utilizar la igualdad como comparación de dos cantidades. Además se aprecia una tendencia a trabajar con las relaciones generales que se establecen entre las cantidades de los problemas.

Respecto a las actuaciones de los estudiantes ante la presencia de colisiones, hemos de indicar que el problema 1 no proporcionó información, ya que ningún estudiante lo resolvió mediante el MHEC. La única pareja que lo intentó no consiguió establecer la relación no explicitada entre el número de conejos y gallinas, el número de patas por conejo y por gallina y el total de patas. Sin embargo, de las actuaciones del problema 2 podemos concluir que los estudiantes, ante la necesidad de resolver una colisión sobre vértice claro o una colisión sobre vértice oscuro, prefieren eliminar (o se muestran más competentes al eliminar) las colisiones sobre vértice claro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra*, pp. 115-136. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Dettori, G.; Garuti, R. & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on School Algebra*, pp. 191-207. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora,* 17-18, pp. 51-59.

Nassar, A. (2001). *El efecto de enseñar algunas estrategias de resolución de problemas en la actuación de los alumnos del nivel 3º de Secundaria al resolver problemas verbales algebraicos en Gaza (Palestina)*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In E. Filloy y T. Rojano (eds.) *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.

Rojano, T. (1996). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving Within a Spreadsheet Environment. In Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (eds.), *Approaches to Algebra*, pp. 137-145. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1991). Symbolising and Solving Algebra Word Problems: The Potential of a Spreadsheet Environment. *Proceedings of the 15th Psychology of Mathematics Education Conference*, vol. 3, pp. 207-213. Assisi, Italy.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1993a). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, pp. 353-383.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1993b). Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets. *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference*, vol. 1, pp. 189-196. Tsukuba, Japan.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1997). Pupils' Strategies and the Cartesian Method for Solving Problems: The Role of Spreadsheets. *Proceedings of the 21st Psychology of Mathematics Education Conference*, vol. 4, pp. 72-79. Lahti, Finland.

Schoenfeld, A. (1985). Making Sense of "Out Loud" Problem-Solving Protocols. *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 4, pp. 171-191.

[1] En contra de lo afirmado por Dettori, Garuti y Lemut (2001) la hoja de cálculo sí que dispone de un igual comparador.

[2] La conmutatividad de la que hablamos no es la de la operación aritmética abstracta sino la del significado en la situación de las cantidades que se operan. Por ejemplo, en una situación de cambio, la adición no es conmutativa.

[3] Evitamos referirnos a los problemas como algebraicos ya que lo que puede considerarse aritmético o algebraico es el proceso de resolución, la lectura analítica o la ecuación que traduce el enunciado; pero no el problema (Puig y Cerdán, 1990).

Análisis diacrónico de la producción española de tesis doctorales en Educación Matemática mediante la metodología ARIMA en datos de diseños longitudinales

Mónica Vallejo Ruiz
Universidad de Granada

Manuel Torralbo Rodríguez
Universidad de Córdoba

Antonio Fernández Cano
Universidad de Granada

Resumen

Hoy día, disponemos de una metodología conocida como modelos de Box-Jenkins, sus creadores, la metodología ARIMA (Auto-Regressive Integrated Moving Average)-modelo autorregresivo integrado de medias móviles- permite ajustar con mayor rigor una serie de datos secuenciales, superando las técnicas clásicas por regresión y componentes de varianza, e inferir a partir del modelo determinado valores de pronóstico y/o post-intervención experimental.

La función explicativa y de pronóstico de la metodología ARIMA se ejemplifica mediante su aplicación al estudio diacrónico de las tendencias en la producción española en tesis doctorales de Educación Matemática y de las áreas de conocimiento más productivas de la misma; coadyuvando, entonces, a la mejora de las propuestas analíticas un tanto simplistas de los modelos de crecimiento de la ciencia propuestas por Price.

Abstract

Today, there is available a methodology, denominated by the names of its creators Box-Jenkins models, in fact ARIMA methodology (Auto-Regressive Integrated Moving Average), which permits more rigorous adjustments on time series of longitudinal data, overcoming the classic techniques of regression and components of variance and inferring forecasting values and experimental post-intervention data.

The explicative and forecasting functions of the ARIMA methodology are exemplified by its application to the diachronic study of trends in the Spanish production of doctoral dissertations (theses) on Mathematics Education and the areas of knowledge concerned with this research topic. So, it is an improved analytical proposal in comparison to the scientific growth models anticipated by Price.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones de tipo longitudinal están teniendo una importancia creciente en las ciencias sociales y del comportamiento, siendo la base de este desarrollo los importantes estudios emprendidos en los años 60 (véase Keeves, 1997). En el ámbito de la Educación Matemática son muy variados, por lo que, los más importantes y actuales, han sido agrupados en área de interés.

Dentro del ámbito del desarrollo de destrezas lógico-matemáticas destacan los estudios realizados por Blatchford, Goldstein, Martin y Browse, (2002)[1]; Boaler, William y Brown, (2000)[2], Safford-Ramus, (2001)[3] y Skaalvik y Valas, (1999)[4].

En el ámbito de la investigación en Educación Matemática reseñar los trabajos realizados por *Nacional Science Foundation*, (1982); Owens y Reed, (2000) y Suydam, (1989). Y por último, citar los trabajos realizados por la *National Assesment of Educational Progress* que han sido varios los relativos a la Educación Matemática, desde un tipo de diseño longitudinal; de entre todos ellos hemos rescatados los de Mullis (1994) o Campbell, Hombo y Mazzeo (2000).

El uso del tiempo en los estudios longitudinales puede tratarse de dos maneras diferentes: el primero donde el tiempo es usado como una característica del tema, y el segundo, cuando se utiliza como una señal, una característica del diseño. Un ejemplo del primer caso puede ser cuando la edad cronológica se emplea como la base para la selección de un individuo; y del segundo, la característica tiempo como una variable alterable. Esta utilización del tiempo nos lleva a plantearnos 5 tipos de investigaciones longitudinales: estudios simultáneos, estudios de intervención, estudios de panel, estudios de tendencia y estudios de series temporales, donde centraremos nuestra investigación.

1. *Estudios simultáneos*: Dentro de esta tipología, dos o más estudios transversales son realizados al mismo tiempo pero con diferentes grupos de edad en cada estudio.

2. *Estudios de intervención*: Los estudios de intervención involucran una variación del diseño de series temporales; pudiendo ser aleatoria la probabilidad de prueba, la distribución de temas o grupos de tratamiento.

3. *Estudios de panel*: En los estudios de panel intervienen tres variables: grupo, tiempo y edad. Existen dos tipos de paneles: Panel tradicional, donde la muestra es fija, y en la que se miden reiteradamente las mismas variables; y panel ómnibus; con una muestra fija, pero las variables son diferentes cada vez.

4. *Estudios de seguimiento*: Este tipo de estudios longitudinales tiene sus orígenes en la Psicología del desarrollo; y asumen que el desarrollo humano es un proceso continuo, evaluable en una serie de momentos o intervalos de tiempo apropiados, intervalos que no tienen porqué ser iguales. De este modo, el desarrollo puede examinarse de una manera válida con el análisis de estos intervalos temporales.

5. *Estudio de tendencias*: Son estudios que describen actitudes y opiniones, con personas diferentes (muestras distintas procedentes de poblaciones distintas), utilizándose mayoritariamente en pruebas de aprovechamiento, de aptitud escolar, verbal, etc.

Una clasificación de los diversos estudios longitudinales nos la ofrece el siguiente cuadro extraído de Fernández Cano (2004).

[1] Sobre la relación ratio y desempeño.
[2] Sobre éxito fracaso escolar.
[3] Sobre Educación Matemática de adultos.
[4] Sobre la relación entre rendimiento, autoconcepto y motivación.

Tabla 1. Clasificación de estudios longitudinales (Est.)

	Misma muestra	**Misma población**	**Tratamiento experimental**	**Observaciones sucesivas**	**Misma variable**
Est. simultáneos	NO	NO	NO	NO	SI
Est. experimental de intervención: serie temporal	SI	SI	SI	SI	SI
Est. Experimental de intervención N= 1	CASO	-	SI	SI	SI
Est. cuasi-experimental de cohortes	NO	SI	SI	SI	SI
Est. observacionales de cohortes	NO	SI	NO	SI	SI
Est. de panel clásicos	SI	SI	NO	SI	NO
Est. de panel omnibus	SI	SI	NO	SI	NO
Est. de seguimiento	CASO	-	NO	SI	SI
Est. de tendencias	NO	NO	NO	SI	SI

Fuente Fernández Cano (2004).

Estudio de series temporales: Concepto general.

El estudio de las series temporales se constituye como una de las técnicas más habituales que se emplean para prever los fenómenos de cualquier naturaleza, utilizándose con el propósito de describir la "historia" de una determinada variable o variables (Rodríguez Morilla, 2000). Esta finalidad principal se puede dividir en dos objetivos básicos:

1. Extraer las regularidades que se observan en el comportamiento pasado de la variable, obteniendo el mecanismo que genera para, en base a ello, tener un mejor conocimiento de la propia variable.

2. Predecir el comportamiento futuro de la misma reduciendo la incertidumbre.

Así, podemos definir a la serie temporal como una sucesión de observaciones correspondientes a una variable en distintos momentos de tiempo; por lo general, serán en intervalos de tiempo regulares y de duración constante. De este modo, las series temporales se contraponen a las denominadas transversales o de sección cruzada, que recogen el comportamiento de una variable para diferentes elementos, pero relativos a un mismo momento temporal, al igual que a los datos de panel, que combinan datos de serie temporal y de corte transversal; proporcionando observaciones relativas a distintos elementos en diversos momentos de tiempo (Rodríguez Morilla, 2000).

La sistematización de las diferentes metodologías empleadas en el tratamiento de una serie temporal puede hacerse basándose en criterios diversos, que dan lugar a enfoques duales como los que apunta Álvarez (2001): Determinista *versus* estocástico, Univariante *versus* multivariante y Dominio temporal *versus* frecuencial.

Componentes de una serie.

Los componentes más importantes de una serie temporal serían:

1. *Tendencia*: Movimiento de larga duración que indica la marcha general y persistente del fenómeno, siendo el componente que refleja la evolución de la serie a largo plazo.

2. *Variación estacional*: Componente causal debida a la influencia de ciertos fenómenos que se repiten periódicamente.

3. *Variación cíclica*: Componente de la serie que recoge las oscilaciones periódicas de amplitud superior a un año. Son movimientos irregulares alrededor de una tendencia regular en donde, a diferencia de las variaciones estacionales, el periodo y la amplitud son variables.

4. *Variación aleatoria, accidental o errática*: Movimiento de tipo causal que no muestra ninguna regularidad y, en consecuencia, no sería posible su predicción. Dentro de esta componente se distinguen aquellas irregularidades cuyas causas se pueden identificar (factor errático) y tales atribuibles al azar (factor aleatorio).

En suma, digamos que en una serie no tienen por qué estar presenta todas las componentes, sino que según el fenómeno estudiado algunos componentes dejarán de tener sentido.

El enfoque moderno de series temporales: Modelos ARIMA

El estudio clásico o descriptivo de las series temporales se ha venido utilizando desde la segunda mitad del siglo XIX; pero en 1970, con los trabajos de Box, profesor de Estadística de la Universidad de Wisconsin, y Jenkins, profesor de Ingeniería de Sistemas de la Universidad de Lancaster, se produce un avance respecto a los modelos de series temporales, apareciendo lo que conocemos como metodología ARIMA o modelos Box-Jenkins (véase Box y Jenkins, 1970). La edición más reciente de tales desarrollos ARIMA está localizable en Box, Jenkins y Reinsel (1994). Esta metodología está basada en la teoría de los procesos estocásticos, proporcionando mejores resultados, sobre todo, en las predicciones a corto plazo.

Lo importante es que para utilizar la metodología Box-Jenkins, se debe tener una serie de tiempo estacionaria o una serie de tiempo que sea estacionaria después de una o más diferenciaciones.

Fases de la metodología ARIMA.

El proceso en la determinación de un modelo ARIMA consta de cuatro fases o etapas, que se aplican de manera iterativa hasta alcanzar el resultado más satisfactorio:

1ª Fase. Identificación: Consiste en proponer un modelo ARIMA para representar el proceso que ha generado las observaciones. Se trata de determinar los valores (*p, d, q*).

2ª Fase. Estimación: Identificados los valores de (*p, d, q*), la siguiente etapa es estimar los parámetros autorregresivos y de media móvil incluidos en el modelo. Este cálculo puede hacerse a través de mínimos cuadrados simples o con métodos de estimación no lineal; aunque, actualmente, esta labor se lleva a cabo a través de rutinas en diversos paquetes estadísticos.

3ª Fase. Validación: El modelo estimado debe representar adecuadamente el proceso que se supone ha generado las observaciones, ya que es posible que exista otro modelo ARIMA que también lo haga.

4ª Fase. Predicción: Una de las razones de la popularidad del proceso de construcción de modelos ARIMA es su éxito en la predicción. En muchas ocasiones, las predicciones obtenidas por este método son más contables que las obtenidas en la elaboración tradicional de modelos, particularmente para predicciones a corto plazo.

ANÁLISIS DE DATOS

Como ejemplificación de un análisis de series temporales aplicando el modelo ARIMA, seleccionamos la producción española de tesis doctorales de Educación Matemática durante el periodo 1975-2002 y los departamentos universitarios donde se han realizado tales trabajos.

I. Productividad General.

La serie temporal de la productividad general de tesis doctorales, se recoge en el siguiente cuadro-resumen:

Tabla 2. Desarrollo diacrónico anual de la producción general

AÑOS	**1975**								
Tesis	1								
Años	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**	**1981**	**1982**	**1983**	**1984**
Tesis	2	2	1	1	0	2	3	1	0
Años	**1985**	**1986**	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**
Tesis	2	7	4	7	6	6	17	11	8
Años	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**
Tesis	16	15	16	18	21	15	20	28	18

El examen descriptivo de la producción de tesis doctorales en Educación Matemática durante el primer decenio (1975-1985) muestra un fuerte carácter esporádico; leyéndose una media de 1 ó 2 tesis doctorales al año. En años posteriores, la producción aumenta de manera considerable y paulatina.

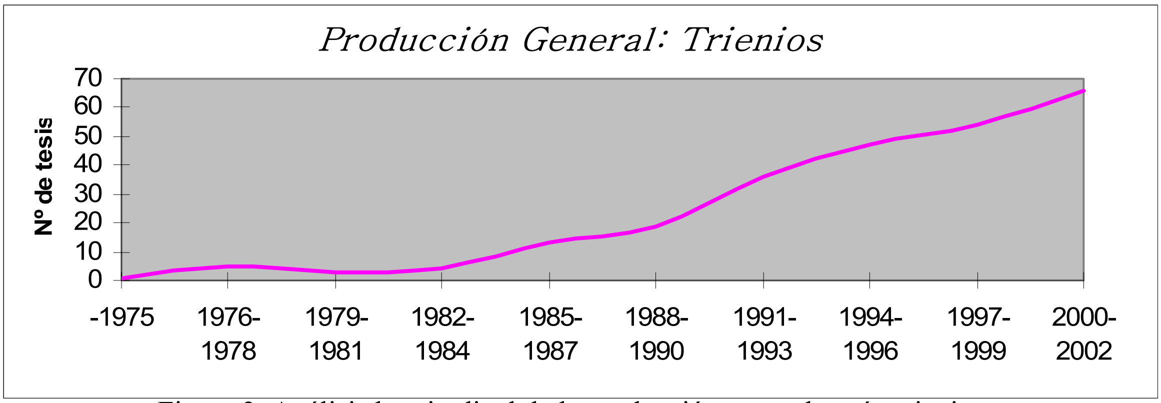


Figura 2. Análisis longitudinal de la producción general según trienios.

Este presenta semejanzas con lo estimado por Price (1986) para la ciencia en general, el cual determinó que la información científica durante un periodo de 10-15 años llegaba a duplicarse creciendo, por tanto, a un ritmo muy superior al de otros procesos o fenómenos sociales (véase Fernández Cano, Torralbo y Vallejo, 2004).

Este crecimiento acentuado de la producción parece disminuir en el último año del estudio en donde las 28 tesis doctorales realizadas en el 2001 se reducen a 18 en el 2002.

Para conocer si la producción de tesis en educación Matemática ha llegado a esa etapa de saturación, explicitada por Price, o aún, se encuentra en un periodo de crecimiento; realizamos el ajuste a distintos modelos de crecimiento: Modelo ARIMA y modelos clásicos y un análisis prospectivo del mismo.

A. Ajuste.

Una vez realizado el análisis descriptivo de los datos obtenidos, efectuamos el ajuste a los siguientes modelos:

A. Modelo ARIMA (3,1,3) con ajuste matemático de Box-Cox

B. Media constante = 8,85

C. Tendencia lineal: -1745,64 + 0,88 t

D. Media móvil simple de 5 términos

E. Alisado simple exponencial con alpha = 0,50

Model	MSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	6,26139	1,61736		0,130363	
(B)	63,9788	6,96939		-3,17207E-15	
(C)	11,7357	2,67648		-4,87229E-14	
(D)	18,993	3,34783		2,54783	
(E)	15,1779	2,68308		1,36429	

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	2,50228	OK	OK	OK	OK	OK
(B)	7,99868	OK	***	***	***	***
(C)	3,42574	OK	*	OK	OK	OK
(D)	4,3581	OK	OK	OK	**	**
(E)	3,89589	OK	OK	*	OK	***

Esta búsqueda nos determina que el modelo óptimo de ajuste para la producción general es un modelo ARIMA (3,1,3) con ajuste matemático de Box-Cox, con un error medio cuadrático (MSE) de 6,26. Con respecto a los modelos denominados clásicos, la producción general se ajusta a un modelo de tendencia lineal cuya función es: y = -1745,64 + 0,88 t, donde y es la producción (nº de tesis) y t, tiempo en años.

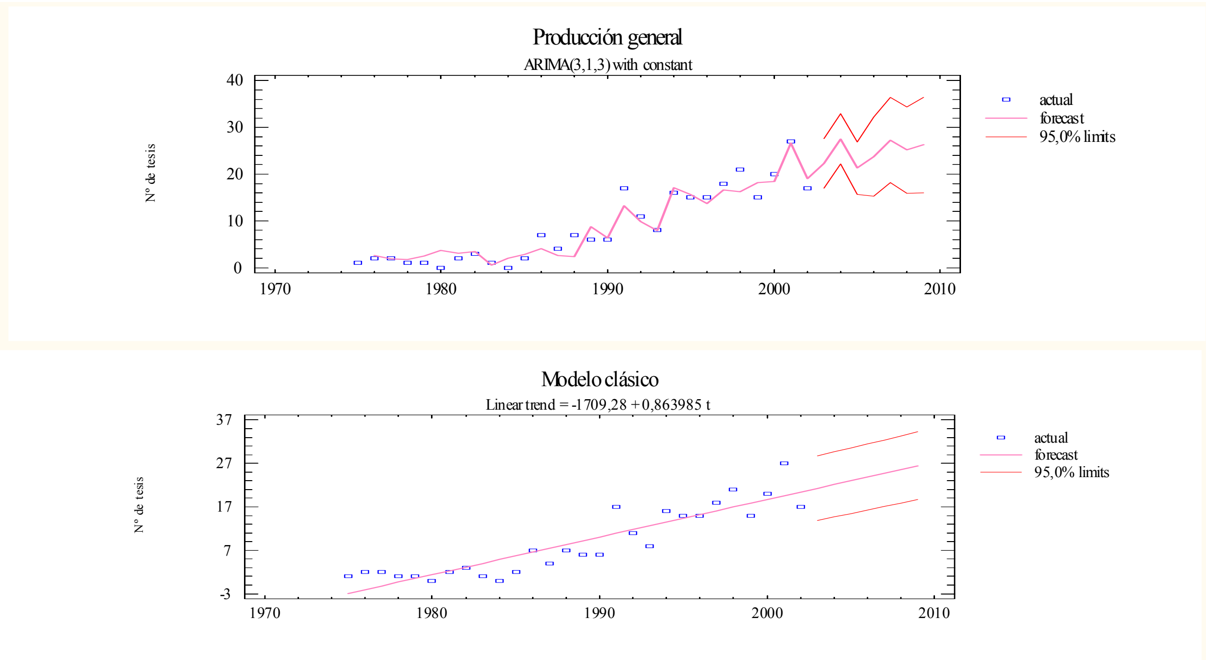


Figura 3. Modelo gráfico ARIMA y Clásico de la productividad general.

B. Pronósticos.

Determinado que el mejor ajuste plausible es un modelo ARIMA, este mismo nos proporciona los datos-pronósticos a esperar en un periodo de tiempo de 7 años. Los resultados son:

Tabla 3. Valores-pronósticos de la producción general en los siete años siguientes

PRONÓSTICOS	Nº DE TESIS	LÍMITE INFERIOR 95,0%	LÍMITE SUPERIOR 95,0%
2003	22	16	28
2004	26	17	32
2005	23	17	29
2006	23	16	34
2007	27	17	37
2008	27	17	37
2009	27	17	39

* Las cifras han sido redondeadas

El análisis de ajuste y prospectivo, representado en la figura 3, determina que la producción de tesis doctorales en este campo va a continuar aumentando a lo largo de este periodo hasta un máximo de 27 tesis doctorales; oscilando este pronóstico en unos límites inferior (situación más pesimista) y superior (situación más optimista), al 95% de confianza, de 17 y 39 tesis doctorales (valores máximos de tales límites).

Estos resultados parecen determinar que el crecimiento no ha sido acelerado (exponencial) y aún no se ha llegado al nivel de saturación (logístico). El hallazgo de que el crecimiento se ajuste (segundo mejor ajuste) a una recta de pendiente crecimiento (a = 0,88; arco-tangente de a = 41º) es propio de series reducidas y de bajo tamaño muestral.

Price (1986) obtiene su modelo de crecimiento exponencial-logístico trabajando con un gran volumen de datos. Aún sin verificar el modelo de Price, el hallazgo es de una relevancia insoslayable que muestra la fertilidad del campo de la Educación Matemática.

II. Centro de realización o Departamento

La diversidad de departamentos de lectura obligó a establecer una agrupación relativa a los mismos, en función de la relación con la Educación Matemática. Las categorías que se establecieron fueron: *Generalistas, Especialistas, Psicológicos, Matemáticos* y *Otros.*.

Según esta clasificación, podemos obtener un desarrollo diacrónico de cada una de estas categorías, destacando que las primeras tesis doctorales se efectuaron desde departamentos generalistas (1975) y psicológicos (1976). (Ver tabla 4).

Tabla 4. Desarrollo diacrónico anual de la producción según centro de realización

CENTRO DE REALIZACIÓN	PERIODO	AÑOS CON REALIZACIONES	TOTAL
Generalistas	1975-1977, 1979, 1981, 1985-2002	23	88
Especialistas	1983, 1989, 1991-2002	14	81
Psicológicos	1976, 1982, 1985-1986, 1988, 1991-2002	17	51
Matemáticos	1989, 1992, 1994, 1997-2002	10	12
Otros	1978, 1980-1981, 1989-1991, 1994-2001	14	16

Se constata que los departamentos generalistas cuentan con una mayor tradición/antigüedad investigadora, comenzando su producción en 1975 y manteniéndola a lo largo de 23 años. Por el contrario, los departamentos especialistas empiezan a realizar tesis doctorales en los años 80, concretamente en el año 1983; aunque su producción no tendrá un carácter continúo hasta el año 1991.

Para obtener un conocimiento más detallado de cuál ha sido la evolución de estas categorías establecidas, se han representado tales periodos de producción en la figura 4. En esta figura podemos observar como la realización de tesis doctorales en departamentos *generalistas* fue mayoritaria hasta el año 1991; pudiéndose considerar éste el año de despegue de la investigación del área de conocimiento de la Didáctica de la Matemática. Y es por ello por lo que, a partir de este momento, los departamentos *especialistas* comienza a tener un crecimiento exponencial muy acentuado, que continúa hasta la actualidad.

Con respecto a los departamentos *psicológicos* podemos decir que han tenido una gran influencia y representatividad en la realización de tesis doctorales sobre Educación Matemática, influencia que se ha sostenido casi constante con el paso del tiempo.

Por último, mencionar que los departamentos *matemáticos* y los denominados *otros*, han mantenido un escaso aporte a lo largo del periodo analizado.

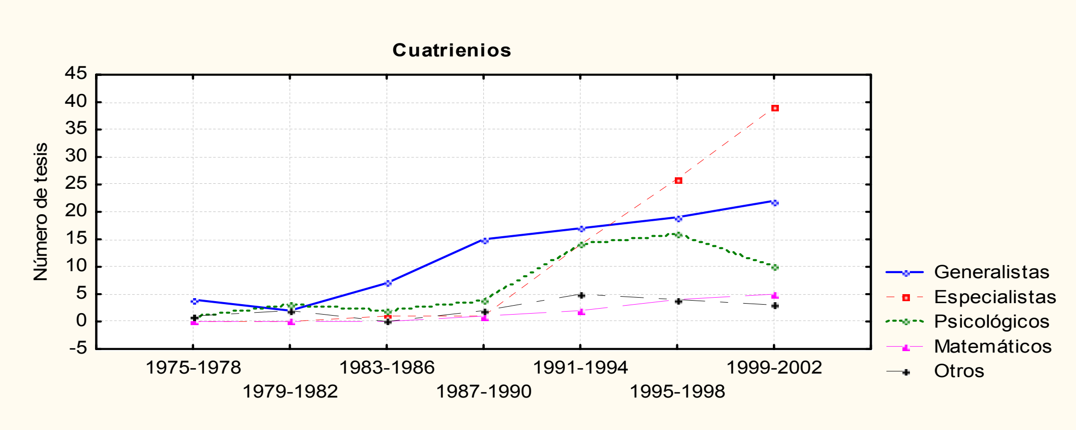


Figura 4. Producción de tesis doctorales según centros de realización (1975-2002).

A. Ajuste.

El ajuste se realizará únicamente sobre las dos primeras categorías establecidas, por ser ambas las más productivas en la realización de tesis doctorales. En el caso de los departamentos *generalistas*, los modelos de verificación/ajuste tendrían los siguientes valores:

A. ARIMA (4,2,4) con ajuste matemático de Box-Cox

B. Media constante = 3,14

C. Tendencia lineal: -445,28 + 0,23 t

D. Media móvil simple de 5 términos

E. Alisado simple exponencial con alpha = 0,32

Model	MSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	3,26316	1,11621		0,0604121	
(B)	6,71958	2,16327		3,48927E-16	
(C)	3,40461	1,44198		-3,85723E-14	
(D)	4,56	1,6		0,626087	
(E)	4,39495	1,40939		0,518129	

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	1,80642	OK	OK	OK	OK	OK
(B)	2,59221	OK	***	**	***	OK
(C)	1,84516	OK	OK	OK	OK	OK
(D)	2,13542	OK	OK	OK	OK	**
(E)	2,09641	OK	OK	OK	OK	OK

La producción de tesis doctorales por parte de los departamentos *generalistas* se ajusta a dos modelos con unas diferencias mínimas y ratificando todos los supuestos del análisis de series temporales.

Estos modelos: ARIMA (4,2,4) con ajuste matemático de Box-Cox en este caso, al contrario que en otras variables anteriores, se ha tenido que diferenciar dos veces para hacer la serie estacionaria; y al modelo clásico de tendencia lineal y = -445,28 + 0,23 t. De estos dos modelos se selecciona el modelo ARIMA, como mejor modelo de ajuste, con un error menor (MSE = 3,26).

Este modelo determina un crecimiento desigual en la producción de tesis doctorales con amplias fluctuaciones anuales, que se producen igualmente a los límites superior e inferior (al 95% de confianza) delimitados por este modelo.

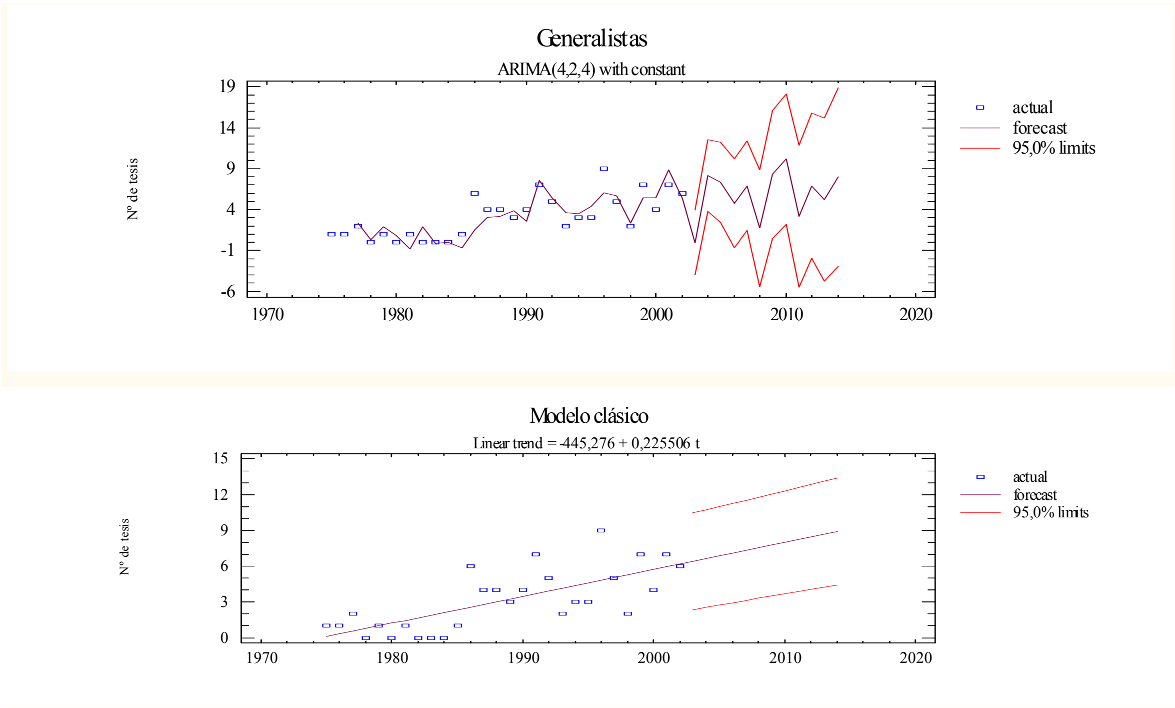


Figura 5. Modelo gráfico ARIMA y Clásico de la producción generalista.

En el caso de los departamentos *especialistas*, el ajuste a los modelos sería:

A. ARIMA (2,2,6) con ajuste matemático de Box-Cox

B. Media constante = 2,89

C. Tendencia lineal: -805,24 + 0,41 t

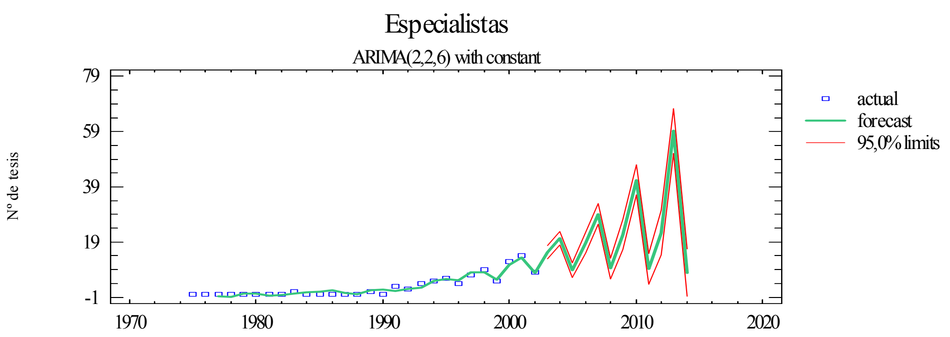
D. Media móvil simple de 5 términos

E. Alisado simple exponencial con alpha = 0,56

Model	MSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	1,03541	0,644639		0,0244612	
(B)	16,0251	3,22704		-1,14194E-15	
(C)	5,03552	1,69916		4,06024E-14	
(D)	6,1513	1,64348		1,31304	
(E)	4,32299	1,29144		0,626807	

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	1,01755	OK	OK	OK	OK	OK
(B)	4,00314	***	***	***	***	***
(C)	2,244	**	*	***	OK	OK
(D)	2,48018	OK	OK	OK	OK	***
(E)	2,07918	***	OK	OK	*	***

La producción en este tipo de departamentos se ajusta, de manera concluyente, al modelo ARIMA (2,2,6) con ajuste matemático de Box-Cox, seguido del modelo alisado simple exponencial con alpha 0, 56 .



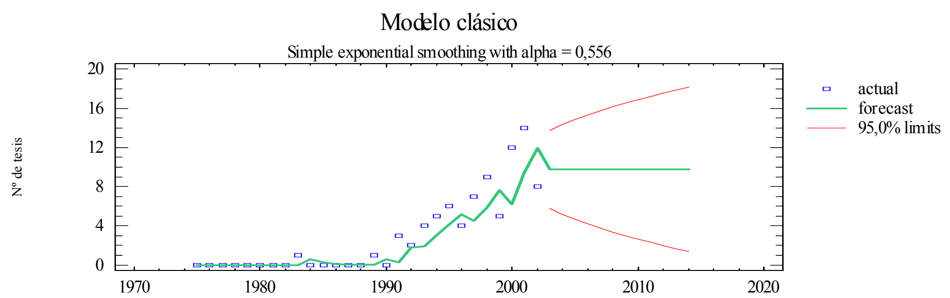


Figura 6. Modelo gráfico ARIMA y Clásico de la producción especialista.

Si se comparan las pendientes de regresión, según ajuste, al modelo lineal se observa como la tendencia de crecimiento de los departamentos especialistas ($a = 0.41$, con una arcotangente $a = 22,1º$) es más pronunciada que la de los departamentos generalistas ($a = 0,22$, con una arcotangente $a = 12,4º$). Para ratificar estos datos obtenidos y arrojar mayor claridad sobre cuál será la tendencia de crecimiento de ambos tipos de departamentos, el análisis prospectivo aportará los valores cuantitativos a esperar para los próximos siete años.

B. Pronósticos.

Como determinamos anteriormente, tanto los departamentos *generalistas* como los *especialistas* manifiestan un crecimiento con importantes fluctuaciones en sus valores pronósticos, dificultando, este hecho, determinar patrones de crecimiento con cierta regularidad.

Tabla 5. Valores-pronósticos de la producción en centros generalistas y especialistas

PRONÓSTICOS	**CENTROS**		**LÍMITE INFERIOR 95,0%**		**LÍMITE SUPERIOR 95,0%**	
	Generalistas	**Especialistas**				
2003	1	17	0	13	4	20
2004	8	20	3	17	13	24
2005	7	10	2	7	13	14
2006	5	22	0	16	11	28
2007	7	30	1	23	13	36
2008	2	13	0	8	9	19
2009	8	28	0	20	16	37

Tales oscilaciones anuales, nos llevan a realizar una agrupación trienal, semejante a la del análisis descriptivo, a través de la cual inferimos una tendencia de estabilización en el caso de los departamentos *generalista* (valor medio de 14-15 tesis doctorales), algo que se había hecho explícito en el primer análisis realizado. Por el contrario, los departamentos *especialistas* marcan un crecimiento continuo, cuyos máximos límites de crecimiento (inferior y superior) estarían en 23 y 37 tesis doctorales respectivamente; por lo tanto, se confirma el resultado obtenido a través de las pendientes de regresión, corroborando que el patrón de crecimiento será mayor en departamentos *especialistas* que en los *generalistas* y con una tendencia más acusada.

CONCLUSIONES

- Necesidad de realizar estudios longitudinales para analizar la producción científica, ya que los estudios longitudinales permiten hacer inferencias cualificadas que superan la inmediatez de los hallazgos propios de los estudios transversales.

- La metodología ARIMA es un modelo analítico potente que permite realizar pronósticos ajustados, sobre datos de diseños longitudinales.

- La investigación española en Educación Matemática, a nivel de tesis doctorales, se manifiesta como un campo fértil de indagación ajustado a un modelo de crecimiento lineal; aunque los pronósticos obtenidos por la metodología ARIMA manifiestan que seguirá creciendo en un futuro a medio plazo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, N. (2001). *Econometría: Análisis de modelos econométricos de series temporales*. Madrid: Editorial AC.

Blatchford, P., Goldstein, H., Martin, C. y Browne, W. (2002). A study of class size effects in English school reception year classes. *British Educational Research Journal, 28* (2), 169-185.

Box, G. E. P. y Jenkins, G. M. (1970). *Time series analysis: Forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M. y Reinsel, G. (1994). *Time series analysis: Forecasting and control* (3ª edición). Englewood Cliff, NJ: Prantice Hall.

Boaler, J., William, D. y Brown, M. (2000). Students´ experiences of abilities grouping-disaffection, polarisation and the construction of failure. *British Educational Research Journal, 26* (5), 1141-1192.

Campbell, J. R., Hombo, C. y Mazzeo, J. (2000). NAEP 1999. Trends in Academia Progress. Three decades of student performance. *Educational Statistics Quarterly, 2* (4), 31-36.

Fernández Cano, A. (2004). *Diseños longitudinales en investigación evaluativa*. Informe de docencia. Facultad de Educación: Universidad de Granada.

Fernández Cano, A., Torralbo, M. y Vallejo, M. (2004). Reconsidering the Price´s model of scientific growth: An overview. *Scientometrics*, *61* (3), 301-321.

Keeves, J. P. (Ed.) (1997). *Educational research, methodology and measurement. An international handbook*. Nueva York: Pergamon Press.

Makridakis, S., Wheelwright, S. C. y Hyndman, R. J. (1998). *Forecasting. Methods and applications*. Nueva York: John Whiley & Sons.

Molinero, L. M. (2004). Análisis de series temporales. *Ajuste, 1*, 1-8.

Mullis, I. V. S. (1994). *NAEP 1992.Trends in Academia Progress*. Washington: NAEP.

National Science Foundation (1982). *Academic science: Scientists and engineers*. Washington: NSF.

Owens, D. T. y Reed, M. K. (2000). *Research in mathematics education*. Washington: ED.

Price, D. J. S. (1986). *Little science, big science… and beyond*. Nueva York: Columbia University Press. Edición original Little science, big science (1963).

Rodríguez Morilla, C. (2000). *Análisis de series temporales*. Madrid: La Muralla.

Safford-Ramus, K. (2001). *A review and summary of research on adult mathematics education in North America (1980-2000)*. Nueva Jersey: Peppercorn Press.

Skaalvik, E. M. y Valas, H. (1999). Relations among achievement, self-concept and motivation in mathematics and language arts: A longitudinal study. *Journal of Experimental Education, 67* (2), 135- 149.

Smith, J. K. y Heshusius, L. (1986). Closing down conversation: The end of the quantitative-qualitative debate. *Educational Research, 15* (1), 4-12.

Suydam, M. N. (1989). Research on mathematics education reported in 1988. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (4), 379-426.

Vallejo Seco, G. (1996). *Diseño de series temporales interrumpidas*. Barcelona: Ariel.

Reconstrucción del concepto de límite: estudio de un caso[1]

Rosa Elvira Páez Murillo
Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia

Resumen

El objetivo de este estudio fue investigar la reconstrucción del concepto de límite en estudiantes de posgrado en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión. Diseñamos veintidós actividades, las cuales se desarrollaron durante catorce sesiones de dos horas y media cada una. La dinámica consistió en impulsar primero, la participación activa de los estudiantes a través de pequeños grupos, para la resolución de las tareas incluidas en las actividades diseñadas. En segundo termino, todos los miembros del grupo participaban en el debate científico, para revisar y analizar los enfoques de los equipos. Y tercero, se pedía al estudiante que fuera de clase llevara a cabo una reflexión de las tareas desarrolladas en el salón. En este artículo presentaremos aspectos generales de la investigación y un caso específico con uno de los alumnos.

Abstract

The aim of this study was to investigate students' reconstruction of the limit concept in a scientific debate/cooperative learning environment. We design twenty-two activities, which developed during fourteen sessions of two hours and a half each one. The dynamics consisted of stimulating first, the active participation of the students in a discussion in small groups, for the resolution of the tasks included in the designed activities. In the second term, all the members of the group were taking part in the scientific debate, to check and to analyze the approaches of each team. And third, it was asked the student to reflect about the tasks developed in the classroom. In this article we will present general aspects of the investigation and a case study.

Introducción y Marco Teórico

La historia de las ideas matemáticas nos muestra que el concepto de límite es complejo. Manifestación de ello es: *la definición de límite en términos de ε y δ es el resultado de más de cien años de ensayo y error, e incorpora en unas pocas palabras el fruto de un esfuerzo persistente para dotar a este concepto de una base matemática sólida... Sin embargo, una comprensión clara y una definición precisa de los límites estuvieron bloqueadas durante largo tiempo por una dificultad aparentemente insuperable*. (Courant y Robbins, 1941, p. 342 en la ed. en español). De la misma manera, la historia nos revela los obstáculos que tuvieron determinados matemáticos para entender y formalizar el concepto de límite (véase por ejemplo, Cajori, 1915; Grattan-Guinness, 1970; Bell, 1940); de ahí entonces que dificultades también se presenten en el aula. En este contexto, nuestro interés se enfocó

[1] Los resultados descritos en este reporte de investigación son parte de uno de los 17 casos analizados en la tesis doctoral dirigida por el Dr. Fernando Hitt (Cinvestav-IPN).

en investigar dificultades de aprendizaje y procesos de construcción o reconstrucción del concepto de límite, en estudiantes de posgrado que han ejercido como profesores de matemáticas y/o de cálculo.

Investigadores en educación matemática, como Cornu (1981 y 1994), Sierpinska (1985, 1987 y 1988), Tall y Schwarzenberger (1978) y Hitt y Páez (2001, 2003, 2004), entre otros, se han preocupado por identificar la problemática relativa a las dificultades que tienen los estudiantes en la construcción del concepto de límite. Cornu y Sierpinska han relacionado estas dificultades con aspectos históricos del concepto de límite, estableciendo así obstáculos de corte epistemológico.

Nuestra investigación está enmarcada desde una perspectiva de la construcción de conceptos, fundamentada en la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1998; Hitt, 2003). En particular, consideramos de suma importancia las producciones semióticas de los estudiantes en el proceso de construcción del concepto de límite. Otro aspecto esencial fue la posibilidad de detectar en ellos procedimientos que reflejen cierto tipo de conocimiento; al que identificamos como una concepción[2] en el sentido de Duroux (1983). Este conocimiento funciona localmente y dependiendo de la situación el estudiante puede resolver un problema y en otras situaciones, ese conocimiento, promueve el error.

Para fines de la investigación, tomamos como concepción el conocimiento del alumno con respecto a un concepto, útil en determinadas situaciones matemáticas y en otras genera fracaso. Este conocimiento funciona en el estudiante como una unidad, cada vez que se enfrenta a un problema, y se manifiesta a través de sus producciones semióticas. Algunas concepciones provocaran un obstáculo epistemológico en el sentido de Brousseau (1983) y Sierpinska (1985). Un ejemplo de una concepción que se vuelve obstáculo es el siguiente: en un estudiante de primer semestre de universidad (ver Páez, 2001) identificamos que tiene la concepción de límite como sustitución, cuando en un ejercicio de la forma $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1}$ responde que el límite es dos porque sustituye. Esta concepción le permite encontrar la respuesta, cuando las funciones son continuas. Pero, en el caso contrario los conduce a un error, como en el ejemplo utilizado de una representación gráfica de una función discontinua, donde prevalece la sustitución y si el punto de discontinuidad es a, afirma que el límite cuando x tiende a a es $f(a)$.

Las preguntas de investigación que rigieron este estudio fueron: ¿Qué concepciones de límite presentan algunos estudiantes de posgrado? y ¿Qué avances con respecto al proceso de construcción o de reconstrucción del concepto de límite se pueden observar en los estudiantes de posgrado, frente a situaciones no rutinarias en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión?

Metodología

Los sujetos que participaron en el estudio son diecisiete estudiantes de una maestría de educación matemática que han ejercido como profesores de matemáticas y/o de cálculo.

Para lograr el objetivo propuesto de esta investigación, diseñamos veintidós actividades, las cuales incluían diferentes representaciones del concepto de límite (gráfica, numérica, algebraica y en lenguaje natural). Para su resolución necesariamente se verían obligados a realizar procesos de conversión entre representaciones. Por ejemplo, en la actividad No. 7 el estudiante tiene que integrar las dos representaciones, la geométrica y el lenguaje natural, para comprender el problema. Luego, para su solución es indispensable un cambio a la representación algebraica.

---

[2] Duroux (1983) define este término como un saber local que se produce cuando se privilegian ciertas situaciones, en menoscabo de otras, en la adquisición del conocimiento. Por lo tanto, una concepción es operante sobre una parte de lo que Vergnaud designa como campo conceptual y por ende presenta necesariamente insuficiencias.

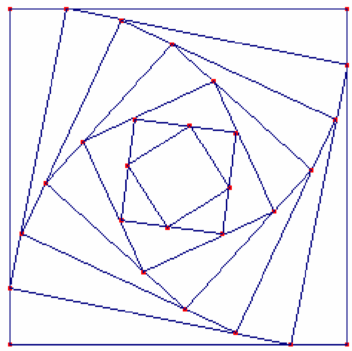
Actividad No. 7

Partiendo de un cuadrado grande, trace otro al interior desplazando sus vértices como se indica en la figura: cada vértice está sobre un lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Dibuje otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro más y así sucesivamente.

a. ¿Hasta dónde se puede realizar esta construcción?

b. Compare este problema con el de los cuadrados construidos en los puntos medios de los lados de cada uno de los cuadrados.

c. Compare este problema con el de los hexágonos y dodecágonos.



La actividad está diseñada para discernir dos posiciones, para unos es un proceso finito y para otros se trata de un proceso infinito ligado al infinito potencial (ver Páez, 2004). La controversia se podrá resolver cuando pasen al terreno algebraico. De hecho, el paso a la representación algebraica se presenta como necesario para poder argumentar a favor o en contra, ya que en el ámbito perceptivo, la discusión no podría ir muy lejos. Es importante señalar, que con este problema, la propiedad de iniciar con un cuadrado e ir construyendo otro cada vez, el límite es también un cuadrado. En otros problemas se había llegado a la conclusión que el límite era un punto (actividades con cuadrados y hexágonos).

Las actividades se desarrollaron durante catorce sesiones de dos horas y media cada una. La metodología utilizada en el desarrollo del curso fue la del debate científico (Alibert y Thomas, 1994; Legrand, 2001) en un ambiente de aprendizaje cooperativo (Hagelgans, et. al, 1995) y de reflexión personal.

Para seguir las indicaciones de la metodología del aprendizaje cooperativo, con respecto a la conformación de los grupos y con relación al nivel académico, aplicamos un cuestionario diagnóstico. De acuerdo a los resultados, clasificamos a los estudiantes de posgrado según su desempeño, en tres tipos:

1. Los estudiantes que demostraban afirmaciones no contradictorias en sus respuestas y buen desempeño en general.

2. Los estudiantes que planteaban afirmaciones contradictorias en sus respuestas.

3. Los estudiantes que mostraban limitaciones en su conocimiento pero sin contradicciones en sus repuestas.

Una vez realizada la clasificación procedimos a formar los equipos de trabajo, incluyendo un miembro de cada uno de los tres grupos y procurando que en cada uno hubiese estudiantes cuya formación inicial fuese de matemática o de ingeniería.

En cada sesión, había un tiempo para que los miembros de los pequeños grupos discutieran y desarrollaran la o las actividades planteadas. Éstas fueron diseñadas para fomentar la participación activa dentro de los equipos. En ellos, cada uno asumiría un rol diferente por sesión. Por ejemplo, uno manejaría la calculadora; otro, asumiría el papel de redactor y un tercero de expositor. La finalidad, permitir la interacción entre ellos.

Cuando llegaban a "un consenso" cada equipo, pasábamos a la discusión general aplicando nuestro punto de vista particular de la llamada metodología del debate científico, en el sentido de Alibert y

Thomas (1994) y Legrand (2001). La discusión general ayudaba a reafirmar o a cambiar la posición que tenía cada uno dentro de sus pequeños grupos. Al final de cada sesión, los equipos debían de entregar todos los ensayos realizados en la búsqueda de la solución del problema y a la siguiente clase entregar un informe individual (fase importante de reconstrucción individual de lo realizado en el pequeño grupo y en el debate). En la última sesión los estudiantes presentaron un examen escrito y una semana después se les hizo la entrevista.

En resumen, los pasos importantes que seguimos en nuestra metodología son los siguientes:

- Los estudiantes trabajaban sobre las tareas en pequeños grupos, en un ambiente de aprendizaje cooperativo.

- Los alumnos participaban en una discusión plenaria con la totalidad de la clase en un ambiente de debate científico. Luego, entregaban todo lo que habían realizado en la sesión (las diferentes propuestas, dibujos, etc.).

- Los estudiantes reexaminan la actividad (en una reflexión personal de reconstrucción como tarea) basado sobre sus trabajos previos (discusión en los pequeños grupos y con la totalidad de la clase).

- Los alumnos presentaron un examen final y participaron en una entrevista personal.

Resultados y discusión

Como ya lo señalamos, estamos interesados en presentar un caso: el de "Pedro", cuya formación inicial es la de licenciado en matemáticas y física. Mostraremos brevemente el trabajo realizado por este estudiante, especialmente en el examen y en la entrevista.

a. **Cuestionario diagnóstico y sesiones de clase:** Pedro inició con deficiencias en el concepto de función, por ejemplo, dificultades para identificar el dominio y el rango, graficar funciones racionales y realizar cambios de registro. Aunque estaba inmerso en un ambiente de aprendizaje cooperativo y debate científico, a lo largo de las sesiones fueron evidentes las concepciones y dificultades que presentó. Por ejemplo, la concepción de que para cada epsilon basta tomar el delta igual a epsilon. Concepción que mantuvo a pesar de los ejemplos, explicaciones del profesor y del trabajo en pequeños grupos. Esta estrategia funciona para algunos casos (por ejemplo, $f(x) = x + c$ siendo c una constante). La dificultad estriba en que él pretende aplicar esta estrategia en todos los casos. Es importante señalar que en su desempeño prevaleció una tendencia a participar poco con respecto al trabajo en grupo, él no estaba acostumbrado a una metodología como la utilizada y no se integró plenamente a su pequeño grupo de discusión; sin embargo, participaba en el debate regularmente.

b. **Examen:** En una de las preguntas del examen se le solicitó que proporcionara una definición de límite. Pedro suministró las siguientes (ver Figura 1a):

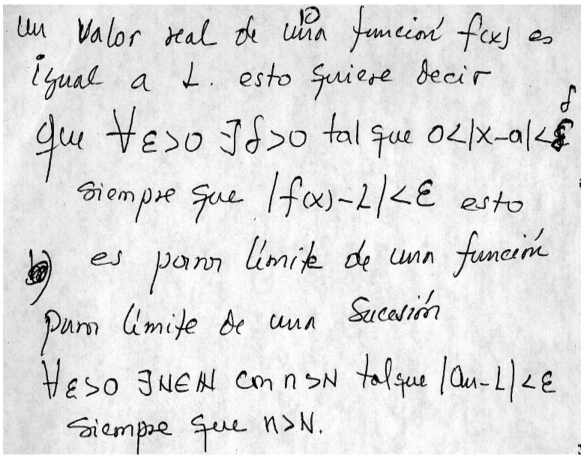


Figura 1a

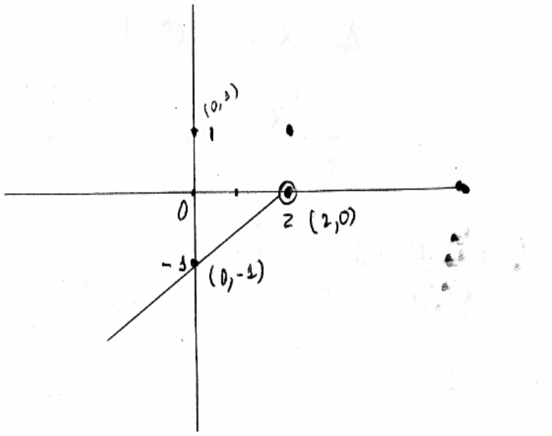


Figura 1b

Como podemos observar, en la definición de límite de una función, cambió el orden de la implicación, esto es, afirmó que $|f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow |x-a|<\delta$. Este fue un error muy común de los estudiantes que proporcionaron una definición incorrecta. Pensamos que el error puede provenir de la forma en cómo se presenta la definición. Por ello revisamos algunos libros de cálculo e identificamos cómo expresan la definición de límite de una función en un punto. En el cálculo de Leithold (1982), Spiegel (1978), Kitchen (1986), Larson y Hostetler (1986), y Stewart (1999), la muestran así: "… $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $0<|x-a|<\delta$", la cual podría generar justamente esa dificultad de cambiar el orden de la implicación, de ahí, que algunos estudiantes piensen que "… $|f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow |x-a|<\delta$". Creemos que la mejor manera, desde un punto de vista educativo, de definir el límite de una función en un punto, es como aparece en los libros de cálculo de Spivak (1999), Stein (1982), Swokowski (1982), y como la presentamos en el curso, es decir, de la forma si $p \Rightarrow q$ ("…*si* $0<|x-a|<\delta$ *entonces* $|f(x)-l|<\varepsilon$").

Retomando el análisis de la definición que proporcionó Pedro en el examen, podemos conjeturar que se aprendió una definición de memoria y al quererla recordar, recupera sólo algunas partes de ésta. Es evidente que no construyó una articulación entre la definición y otro tipo de representaciones que le pueda ayudar a no olvidar la definición.

Es interesante el hecho que después de cometer este error, proporciona la definición del límite de una sucesión colocando correctamente el orden de la implicación. Puede ser que se deba a que en el curso se enfatizó más en sucesiones o se aprendió bien la definición.

En la segunda parte del examen se le pidió trazar una gráfica de la función *f* que cumpliera las siguientes condiciones:

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$	b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$	c. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$
d. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$	e. $f(2)=1$	f. $f(0)=$ no está definido

Pedro dibujó una gráfica que cumplía sólo con las condiciones a), b) y e). O más bien, marcó puntos y los unió con una línea recta (ver Figura 1b). El que no haya podido construir la función solicitada es indicio que tiene dificultades para pasar del registro algebraico al gráfico.

En la representación gráfica, el marcar con puntos el $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$, es una señal para considerar que Pedro posee la concepción de límite como una simple sustitución. Es decir, considera el límite como el valor que toma la función, en el punto que se está analizando, sin importar si la función es continua o no (el límite es el valor que se obtiene al sustituir *a* en la función f(*x*). $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$). En ello, no hay un análisis del comportamiento de la función en vecindades que contengan al punto. Es el reflejo de considerar el proceso al infinito como una simple sustitución. Concepción que conduce a una respuesta correcta, cuando la función es continua, pero en el caso contrario lleva a una respuesta errónea.

Esta conjetura sobre su concepción la hemos podido corroborar con uno de los ejercicios siguientes que se le propuso en el examen. Se le preguntó por el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ donde $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es entero}\\ 0 & \text{si } x \text{ no es entero}\end{cases}$. Él escribió que *por unicidad del límite no existe*. Está considerando que hay un límite para los *x* enteros y uno para los *x* no enteros. Supone la existencia de dos límites, porque sustituye el valor *a* en cada una de las expresiones que componen la función. Además, hace una mala interpretación del teorema: “Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en *a*” (Spivak, 1999, p. 120).

Del mismo modo se hace evidente que Pedro interpreta mal el siguiente teorema: “Suponga que la función *f* está definida en una vecindad perforada del punto *a*. Entonces el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y es igual al número *L* sí y sólo si los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existen y son iguales a *L* (Edwards y Penney, 1994, p.75)”. Pedro no se percata que *L* debe ser un número real, afirma que sí existe el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ cuando $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.

c. **Entrevista:** La entrevista fue de tipo semi-estructurada. Allí se le solicitó que proporcionara un ejemplo de una sucesión convergente y de una divergente. Él inició con una divergente y suministró las definiciones de convergencia y no-convergencia (ver Figura 2a). Como en la definición de convergencia olvidó hacer explícita la condición “para toda *n*”, en la de no-convergencia omitió el “existen algunos *n*”. Luego pasó a realizar la representación gráfica, para explicar, a través de ella y de la idea intuitiva de vecindad, que la sucesión diverge. Como podemos observar en la Figura 2a, Pedro representó la gráfica de una sucesión como continua y no discreta, como debería ser.

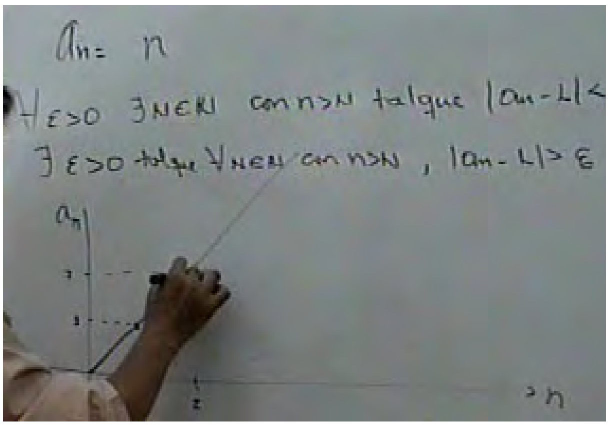


Figura 2a

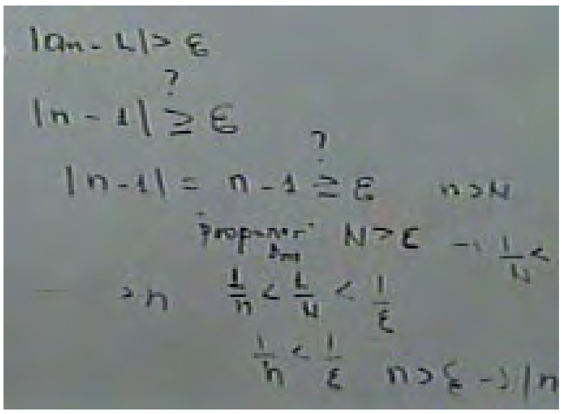


Figura 2b

Sus dificultades mayores iniciaron cuando entró a lo formal. Empezó la demostración de que la sucesión *n* diverge sin especificar las condiciones del contradominio y del dominio (ver Figura 2b) y tuvo dificultades con el valor absoluto. Advertimos que él opera algebraicamente sin un referente geométrico, puesto que olvidó por completo la gráfica que lo ayudó a explicar su idea intuitiva.

Después de hacer el desarrollo algebraico que ilustramos en la Figura 2b se presentó el siguiente diálogo con el entrevistador:

Pedro (P): *Ya con esto estoy demostrando que no puedo encontrar un valor que pueda encerrarlo en el límite que he considerado. Y así sucesivamente. Si lo tomo para 2, para 3, no voy a encontrar, lograr meterlo dentro de esa vecindad, dentro de ese entorno.*

Entrevistador (E): *Pero no tiene que ver que tú tomaste como un ejemplo particular el uno, no tendría que ver que el* $|n-1|$ *es mayor o igual que ε, no que el n, porque dado cualquier ε, siempre puedo encontrar un n grandote.*

P: *Ah!!!!!! Sí, si, si... tienes toda la razón* [Y realizó el siguiente proceso]

$n \geq \varepsilon + 1$

$n > N$

$N \geq \varepsilon + 1$

$\frac{1}{N} \leq \frac{1}{\varepsilon+1}$

[*como*] $n > N$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{\varepsilon+1}$

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\varepsilon + 1}$

$n \geq \varepsilon + 1$

$n - 1 \geq \varepsilon$

Entonces si lo introduzco en valor absoluto quedaría que regreso a demostrar que $|n-1| \geq \varepsilon$

E: *¿qué pasa si tomas un ε = 500*?

P: ε = 500, $|n-1| \geq 500$ *Entonces el N, para que esto se cumpla... si ε = 500... ese N tiene que ser mayor que 500...*

E: *Pero en la negación dice que para toda N, ¿por qué tenemos que tomar N > 500? Si es para toda N...*

En el momento en que el entrevistador le hace notar que está restringiendo el valor de *N*, Pedro entró en contradicciones, a tal punto que para salvaguardar lo que desarrolló, aceptó que cometió errores, al proporcionar las definiciones, y modificó el cuantificador $\exists N$ por $\forall N$ en la de convergencia y viceversa en la de divergencia (ver Figura 3a)

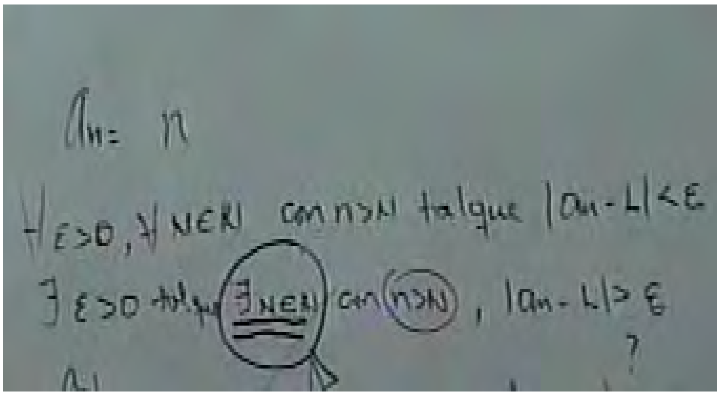


Figura 3a

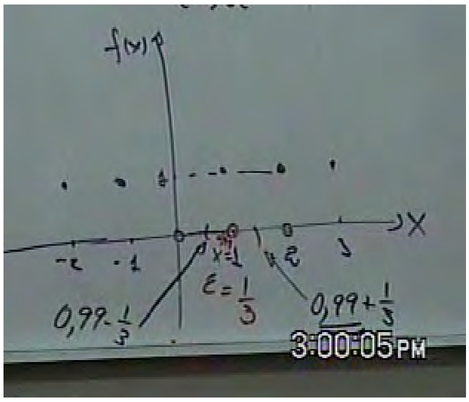


Figura 3b

Pedro tiene una idea intuitiva que no fue capaz de formalizar. El problema es que él separa lo intuitivo y lo formal. Cuando entra a lo formal no se da oportunidad de que lo oriente su idea representada en la gráfica. Además, prefiere aprenderse las definiciones de memoria que utilizar la gráfica, para tener un referente geométrico, al momento de evocarlas.

Retomamos la pregunta sobre el $\lim_{x\to a} f(x)$ de la función $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es entero}\\ 0 & \text{si } x \text{ no es entero}\end{cases}$, en el examen respondió que este límite no existe porque el teorema de la unicidad no permite que tenga dos límites diferentes. Aquí mencionó de nuevo lo mismo, es decir, él afirma que cuando a es entero el límite es uno y cuando a no es entero es cero. Sólo que a esta dificultad le podemos añadir tres más, que surgieron en el desarrollo de la explicación. La primera fue que dibujó el ε en el eje de las x (ver Figura 3b). La segunda fue cuando estaba analizando el límite por la derecha de 0.99, aquí manifestó que en esa vecindad se debía de considerar dos casos: un límite para los no enteros y el límite cuando se analiza estrictamente el uno. La última fue que a va variando.

Podemos afirmar que Pedro no tiene una construcción adecuada del concepto de límite y que la metodología, a corto plazo, no tuvo el impacto que esperábamos en él. Probablemente se deba a que es un estudiante acostumbrado a aprenderse los procesos de memoria, sin ningún significado geométrico. Pedro prefiere la metodología tradicional, en donde se hace énfasis a la representación algebraica. Pareciera que su buen desempeño en cursos anteriores es porque bajo una metodología tradicional, es costumbre aprenderse las definiciones de memoria y realizar algunos ejercicios rutinarios. Además, sus conceptos previos no están bien fundamentados, precisamente porque no hay una articulación entre las diferentes representaciones. La conceptualización implica una coordinación de registros de representación (Duval 1998), libre de contradicciones (Hitt, 2001).

Reflexiones

La investigación que llevamos a cabo pretende abarcar no sólo algunos aspectos relacionados con problemas que plantea el concepto de límite, sino un panorama amplio de las dificultades que este concepto puede ocasionar. En particular, cuidamos el hecho de solicitar diferentes representaciones: verbal, algebraica y geométrica, en una variedad de situaciones que, según lo esperado, constituirían una muestra representativa de la diversidad de dificultades que se pueden encontrar. Los sujetos de estudio de esta investigación nos lo permitía, debido a su formación previa. Con alumnos principiantes en este tema, hubiéramos tenido que seleccionar un campo más restringido, formado de los aspectos considerados más relevantes para un proceso de aprendizaje.

En general la metodología utilizada en esta experimentación resultó positiva para la mayoría de los estudiantes. Hemos querido mostrar un caso difícil donde es claro que la metodología no funcionó del todo. Pedro estaba acostumbrado a aprender de memoria definiciones y demostraciones de teoremas, y las actividades en general eran de tipo no rutinario.

Algunas de las dificultades presentes en estos estudiantes son las siguientes:

- Una dificultad, con respecto a la notación $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, es que varios estudiantes creen que esto significa que el límite de la función cuando *x* tiende a *c*, existe. Lo anterior es evidencia de la dificultad que existe en la interpretación de una igualdad, en esta expresión. En muchos libros de texto señalan que el símbolo "∞" no es un número, que cuando se escribe, por ejemplo, que $x \to \infty$ significa que "*x* crece sin límites", sin embargo, algunos estudiantes le otorgan otro significado.

- Al proporcionar la definición formal de límite, una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes es con el uso de los cuantificadores y el orden de la implicación. Algunos omiten los cuantificadores, cuando proporcionan la definición. Otros expresan que $|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow n > N$ para sucesiones y para funciones $|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \delta$. Como ya lo señalamos, esta dificultad puede ser debido a la forma en que se distribuye el "sí" en la definición de límite. En algunos libros, después de indicar los cuantificadores, utilizan la forma $|a_n - L| < \varepsilon$ si $n > N$ en el caso de sucesiones y $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$ en el caso de funciones. Tal forma no causa ningún problema si los estudiantes han construido una articulación entre diferentes representaciones del concepto de límite, pero cuando no se tiene esa articulación, suele ser más peligrosa, porque se presta a una mala interpretación, como la que acabamos de señalar.

Algunas de las concepciones de límite que presentan los estudiantes de posgrado son las siguientes:

- Una concepción que tienen algunos de estos estudiantes y que usualmente se desarrolla en los procesos algebraicos y además se extiende a la representación gráfica, es la de considerar el límite como el valor que toma la función, en el punto que se está analizando, sin importar si la función es continua o no. Esto es, el límite es el valor que se obtiene al sustituir *a* en la función f(*x*) ($\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$). En ello, no hay un análisis del comportamiento de la función en vecindades que contengan al punto. Es el reflejo de considerar el proceso al infinito como una simple sustitución. Concepción que conduce a una respuesta correcta, cuando la función es continua, pero en el caso contrario lleva a una respuesta errónea.

- En el proceso de demostración, una concepción que detectamos en algunos de ellos, es que para cada epsilon basta tomar el delta igual a epsilon. Esta estrategia es correcta para el caso de algunas funciones (por ejemplo, $f(x) = x + c$, siendo *c* una constante o $f(x) = |x|$).

En cuanto a la construcción del concepto de límite también podemos afirmar que algunos estudiantes poseen concepciones no muy refinadas de este concepto. Por ejemplo, la concepción de límite como aproximación, la concepción de límite como una simple sustitución. Algunos alumnos lograron refinar sus concepciones, y por ejemplo, construir una noción intuitiva de límite ligada a la noción de vecindad. Asimismo, progresaron en el desarrollo de algunos procesos de demostración y en el análisis del papel de los cuantificadores en la definición de límite. Otros, construyeron un referente geométrico, el cual utilizan cuando tienen que proporcionar la definición formal, en la resolución de problemas y en los procesos de demostración (ver Páez, 2004). Es decir, articulan diferentes representaciones de este concepto.

Referencias

Alibert, D. & Thomas, M. (1994). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, pp. 215-230. Kluwer Academic Publishers.

Bell, E. (2003). The development of Mathematics. Traducción al español por Fondo de Cultura Económica. México.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*.Vol. 4 No. 2. pp. 165-198.

Cajori, F. (1915). The history of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits. American Mathematical Monthly, Vol. XXII, pp. 1-6, 39-47,77-82, 109-115, 143-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297. Traducción al español por Elisa Zacarías. Revista del seminario enseñanza y titulación. Año IV. Octubre 1987.

Cornu B. (1994). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 153-167. Kluwer Academic Publishers.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. Proceedings PME-V, Grenoble, France, Vol. I, pp. 322-326.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). What is Mathematics? Traducción al español por Fondo de Cultura Económica, México.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue: Difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit X*, No. 3, pp. 43-67.

Duval R. (1999) *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II.*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo con geometría analítica*. Prentice Hall.

Guinness, G. (1970). The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann. The MIT press.

Hagelgans, N., Reynolds, B., Schwingendorf, K., et al. (1995). A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics. *Notes of MAA,* Number 37.

Hauchart, C., y Rouche, N. (1987). Apprivoiser l'infini. Un enseignement des débuts de l'analyse. GEM, CIACO Éditeur, Belgique.

Hitt, F. (2001). El papel de los Esquemas, las Conexiones y representaciones Internas y Externas Dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.): *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, pp. 165-177. Granada: Universidad de Granada,

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. Annales de Didactique et de sciences cognitives, Vol. 8, pp. 975-999, IREM de STRASBOURG.

Hitt, F. y Páez, R. (2001). The notion of limit and learning problems. Proceedings PME-NA XXIII, Vol. 1, pp. 169-176. Utah, USA

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Revista Uno,* No. 32, pp. 97-108.

Hitt, F. y Páez, R. (2004). On the limit concept in a cooperative learning environment: A case study. Proceedings PME-NA XXVI, Toronto, Canadá, 2004, Vol. 1, pp. 103-110.

Kitchen, J. (1986). *Cálculo*. Mc Graw-Hill.

Larson, R. y Hostetler, R (1986). *Cálculo y geometría analítica*. Mc Graw-Hill

Legrand, M (2001) Scientific debate in mathematics courses. Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. Edited by Derek Holton. pp. 127-135.

Leithold, L. (1982). *El cálculo con geometría analítica*. Cuarta edición.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics An International Journal*, Vol. 48, Nos. 2-3, pp. 259-288.

Monaghan, J., Sun, S. y Tall, D. (1994). Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System. *Proceedings PME-XVIII*, Vol. 3, pp. 279-286.

Páez, R. (2001). *Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite: Ideas del infinito*. Tesis de Maestría. Cinvestav-IPN. México.

Páez, R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión.* Tesis de Doctorado. Cinvestav-IPN. México.

Sierpinska, A. (1985). Epistemological obstacles relative to the limit concept. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 6 No. 1, pp. 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, pp. 371-397.

Sierpinska, A. (1988). Sur la relativité des erreurs. The role errors play in the learning and teaching of mathematics. En Compte rendu de la 39e rencontre internationale de la CIEAEM. Sherbrooke, Canada. pp. 70-87.

Spiegel, M. (1978). *Teoría y problemas de cálculo superior*. Serie de compendios Schaum. Mc Graw-Hill.

Spivak, M. (1999). *Cálculo infinitesimal.* Segunda edición. Editorial Reverté, S.A.

Stein, S. (1982). *Cálculo y geometría analítica*. [Tercera edición, traducción del libro Calculus and analytic geometry, 1982]. México: McGraw-Hill.

Steven, W. (2001). Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 32, No. 4, pp. 341-367.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, conceptos y contextos.* [Traducción de Calculus concepts and contexts, Brook Cole, 1998]. México: International Thomson

Swokowski, E. (1982). *Calculus with analytic geometry.* Second Edition. Prindle, Weber & Schmidt, USA.

Tall, D., & Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, No. 82, pp. 44-49.

Trouche, L. y Guin, D. (1996). Seeing is reality : How graphic calculators may influence the conceptualisation of limits. Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. pp. 323-330.

Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos: investigación sobre una práctica educativa

Mercè Edo y Jordi Deulofeu
Universitat Autónoma de Barcelona

Resumen

En este informe se presentan resultados de una investigación sobre aprendizajes de matemáticas realizados en un contexto de juego de mesa en el marco escolar. En él se indaga sobre: papel que ejerce la influencia educativa de la maestra y, presenc

Abstract

We present research findings about mathematical learning in a class context with table games. We explore, on one hand, the opportunities derived from this class context in relation to the mathematical learning and, on the other, the role of the teacher. The peers' influence among them is also explored.

Introducción y objetivos

El *juego* aparece repetidamente en propuestas didácticas de primaria y hallamos, en los apartados de matemáticas, referencias al juego en todos los currículum del país (Edo, 2002). Sin embargo, disponemos de insuficientes datos que permitan concluir sobre la relación entre las situaciones didácticas con juegos de mesa y la construcción de conocimientos matemáticos.

Esta investigación trata sobre la utilización de juegos de mesa como elemento central del diseño e implementación de actividades de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos en primaria. El objetivo general es comprender mejor cómo unos alumnos concretos aprenden contenidos matemáticos en una situación didáctica que incorpora juegos de mesa, gracias a los procesos de interacción. Para ello, y a partir de la descripción e interpretación de la práctica educativa *Taller de juego y matemáticas*, se establecieron los siguientes *objetivos específicos:*

1. Identificar indicadores interpretables como mecanismos de influencia educativa por parte de la maestra relacionados con la cesión y el traspaso progresivo del control y la responsabilidad a los alumnos en su proceso de aprendizaje de contenidos matemáticos.

2. Identificar, si se dan, indicadores interpretables como influencia educativa de los alumnos en la interacción entre iguales.

En lo sucesivo se organiza el informe en tres apartados. Primero, se revisan las referencias sobre *juego y matemáticas en instituciones escolares* y se comenta el marco psicológico. En segundo lugar, se presenta la metodología de investigación. Por último, se exponen conclusiones relativas a los objetivos específicos.

Marco teórico

Hay numerosas propuestas didácticas y publicaciones de innovación en las que se relacionan juegos y matemáticas. Las más difundidas y con repercusión en educación infantil y primaria son: Kamii (1985) y Kamii y Devries (1980). También en nuestro país y en etapas educativas distintas, se han realizado estudios y propuestas didácticas (Gairín, 1990; Corbalán, 1997; Rochera, 1997), sobre juegos y matemáticas. Aunque como señaló Guzmán (2005), aún se dispone de insuficientes resultados.

El uso de juegos en el marco escolar puede tomar como finalidad la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas –juegos de conocimiento–, o bien la adquisición de métodos de resolución de problemas –juegos de estrategia– (Corbalán y Deulofeu, 1996). Nos interesan juegos que incidan en ambos aspectos: que generen situaciones problemáticas para cuyo abordaje sean necesarias técnicas y estrategias. En este sentido, las prácticas educativas escolares centradas en juegos y matemáticas pueden generar *contextos de resolución de problemas*, tal como expone Abrantes (1996), cuyo objetivo es crear ambientes que inciten a pensar matemáticamente.

El marco psicológico de referencia adoptado es la concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza (Coll, 2001). Desde esta perspectiva, en una situación didáctica, la interacción entre profesor y alumnos y entre éstos constituye el contexto en el que se proporcionan ayudas a los procesos de construcción de conocimientos escolares, entre ellos los matemáticos (Colomina, Onrubia y Rochera, 2001).

Uno de los mecanismos que opera en la interacción profesor-alumnos es el traspaso del control a medida que trascurre el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se ha constatado también que los alumnos pueden aumentar su capacidad de realizar ayudas mutuas efectivas en el marco de la interacción con sus compañeros (Colomina y otros, *op. cit.*; Coll y Rochera, 2000).

Metodología de investigación

Este trabajo se inscribe en el conjunto de investigaciones que abordan el estudio del comportamiento como resultado de procesos constructivos que tienen lugar en la misma situación de observación. Estas investigaciones, "descritas y etiquetadas de distintas formas: lewinianas, microetnograficas, etnometodológicas, etc." (Coll, 1989, p. 274) tienen como finalidad última la comprensión de los fenómenos objeto de estudio en el contexto en el que se producen.

La investigación se basa en el *modelo conceptual y metodológico para el análisis de algunos mecanismos de influencia educativa que operan en la interactividad* (Coll y otros, 1995; Coll y Rochera, 2000). Se realiza un análisis, en tres fases sucesivas, de la *interactividad*, definida como: "la articulación de las actuaciones del profesor y los alumnos alrededor de una tarea o de un contenido determinado" (Coll y otros, *op. cit.*, p. 191), para poder captar al máximo la complejidad de la situación y al mismo tiempo las particularidades de las relaciones interpersonales. Se escogió este instrumento porque responde al marco psicológico seleccionado y ofrece elementos claros y pautas para el proceso de interpretación, sin ser prescriptivo, rígido ni cerrado.

Partiendo de este modelo, nuestra investigación consta de tres fases. Las dos primeras son de naturaleza general (macroanálisis) y recorren la totalidad de los datos. La tercera fase, más específica que las anteriores (microanálisis), analiza fragmentos de interacción, aquellos que, siendo claros en su identificación, comportan potencialmente oportunidades de aprendizaje de contenidos matemáticos.

Contexto de la experiencia

Los datos forman parte de una experiencia de innovación, *Taller de juegos y matemáticas,* desarrollada en ciclo inicial de primaria del CEIP Escola Bellaterra (Barcelona). El taller se compone de cinco secuencias didácticas para cada curso, cada una en torno a un juego (Edo, 2004). Cada secuencia contiene tres o cuatro sesiones de clase. Esta experiencia involucró 9 adultos y 98 alumnos de entre seis y ocho años. Aquí se presenta parte del análisis de algunos de estos registros.

Sujetos

El grupo de seguimiento estuvo formado por cuatro alumnos de la misma edad procedentes de dos clases de segundo de primaria. En el proceso de selección, aleatorio, se tuvo en cuenta que hubiera igual número de integrantes por género. La maestra que intervino con este grupo en el taller, había sido ocho años tutora del ciclo inicial en esta escuela, aunque en el momento de la experimentación no lo era.

Recogida de datos

De las cinco secuencias didácticas se seleccionaron dos para el análisis: "Te pido un..." (la acción principal consiste en pedir una carta que junto a con una propia sumen 10 y descartarlas) y "Memori a 12" (la acción principal consiste en destapar dos cartas que, si sumadas dan 12, se recogen y en caso contrario se dejan donde estaban). La primera secuencia didáctica consta de cuatro sesiones y la segunda de tres, todas de unos 40 minutos. La frecuencia del taller es de una sesión semanal. Los datos se obtienen del registro en video y audio de siete sesiones (S) del taller, correspondientes a dos secuencias didácticas (SD). El registro se describe y transcribe para el análisis.

Análisis de los datos

Fase 1. Identificación de segmentos de interactividad (SI) y su evolución en dos secuencias didácticas: los mapas de interactividad

La unidad de análisis son los SI, en tanto que formas de organización de la actividad conjunta en el interior de cada sesión. El hecho de estudiar una actividad escolar muy pautada (juegos de mesa) permite identificar un reducido número de segmentos de interactividad, concretamente cuatro:

a) concreción de la estructura de la tarea y/o recapitulación;

b) preparación de la partida;

c) desarrollo de la partida;

d) conclusión de la partida y/o valoración.

Esta primera fragmentación de los datos proporciona dos mapas de interactividad en los cuales se observa la evolución del número, distribución y tiempos destinados a cada uno de los segmentos de interactividad dentro de cada sesión y dentro de cada secuencia. Este primer análisis ofrece la posibilidad de reconocer y ubicar en qué segmentos y en qué momentos se hace referencia –en conversaciones y acciones– a contenidos matemáticos. Se identifican contenidos matemáticos en todos los SI identificados, vinculados a sus tareas específicas, (reparto y organización del material, cálculos necesarios para jugar, recuento y comparación final de las puntuaciones, etc.).

Ejemplo 1: **SI de *preparación de partida*** *2*, *Sesión 3, SD2*

Los 4 alumnos colocan las 26 cartas en filas y columnas encima de la mesa para jugar al memori a 12. Habitualmente la disposición era de 6x4 más una última fila con 2 cartas. En esta ocasión han colocado los naipes 5x5 y queda una sola carta en la última fila. Los alumnos se extrañan.

Maestra: *¿El otro día no sobraban dos cartas aquí?* (señalando) *¿Qué puede pasar?*

Héctor*: ¡Ya! Y ahora también.*

Ejemplo 2: **SI de *desarrollo de partida*** 2, *Sesión 1, SD2*

Juegan 4 alumnos solos al memori a 12. Se trata de emparejar dos cartas que sumadas den 12.
Rubén: (gira una carta) *Un cinco...* (pensativo).
Mónica: (mirando a Rubén) *Ya lo sé*.
(Rubén no reacciona)
Héctor: (a Mónica) *¿Con el siete, no? o ¿es con el seis?*
Mónica: *¿Seis?*
Héctor: *No, que dan once*.
Rubén: (no presta atención al dialogo de los compañeros) *Es igual* (destapa al azar).

Ejemplo 3: **SI de *conclusión de partida*** 3, *Sesión 2b, SD1*

Han jugado la partida 2 alumnas y la maestra. Hay 36 cartas. La maestra pide que miren quién ha ganado y se retira. Las alumnas cuentan los tres mazos obtenidos. Reaparece la maestra.
Maestra: *¿Qué? ¿Quién ha ganado?*
María: *Empates a 12, ella y yo* (alumnas) *y tú* (maestra), *once*.
Maestra: *¿Seguro que puede ser? ¿Yo once y vosotras doce?*
María: *Sí*
Mónica: *Sí.*
Maestra: *Al inicio, ¿cuántas teníamos cada una?* (a María) *No, no cuentes, piensa.*

Estos ejemplos muestran situaciones aritméticas en el contexto de juego que, en ocasiones, se convierten en el origen de un buen proceso de resolución de problemas. Sin embargo no todas las oportunidades matemáticas que genera el contexto son aprovechadas de la misma forma por la maestra. La participación de la maestra y los alumnos en la gestión de estas situaciones varía a lo largo de cada secuencia. Los datos obtenidos en esta fase ofrecen la posibilidad de identificar y estudiar la evolución de las actuaciones en la fase siguiente.

Fase 2. Identificación y caracterización de las actuaciones (A) interrelacionadas de los participantes y su evolución en algún SI

La unidad de análisis es la identificación y caracterización de todas las A dentro de cada SI. Se consideran las actuaciones como “Los comportamientos (...) que exhiben los participantes en un determinado segmento de interactividad en función tanto del rol que asumen en éste, cómo de las condiciones que imponen la estructura de participación social y la estructura de la tarea académica.” (Rochera, 2000, p. 111).

La identificación y recuento de las actuaciones en cada SI permite realizar un estudio cuantitativo y cualitativo de la evolución de las actuaciones. Por ejemplo, permite comparar el número de actuaciones (absoluto y relativo) de maestra y alumnos en cada SI de cada sesión (en cada SD y entre secuencias) y obtener indicios de la evolución en la cesión del control (maestra) y del aumento de la participación autónoma (alumnos).

Tabla I. Número relativo y absoluto de actuaciones maestra-alumnos de la secuencia didáctica 1, en los SI de desarrollo de la partida[1]:

Sesión 1				Sesión 2a				Sesión 2b				Sesión 3			
Maestra		Alumnos		Maestra		Alumnos		Maestra		Alumnos		Maestra		Alumnos	
38%	96	62%	156	37%	50	63%	86	46%	123	54%	144	6%	9	94%	150

[1] Los porcentajes se calculan tomando como unidad cada actuación transcrita.

En las sesiones 1 y 3 participan la maestra y los 4 alumnos. En la sesión 2a participa la maestra y 2 de los 4 alumnos, más aventajados. En la sesión 2b intervienen la maestra y los otros dos alumnos. Los datos de esta secuencia (y de la SD2) muestran una tendencia de la maestra a ir reduciendo su participación y a aumentar la cesión de la gestión autónoma de la tarea. Pero muestran también una actuación diferenciada de la maestra según las competencias de los alumnos con los que interactúa. La pauta de disminución de las actuaciones relativas de la maestra y aumento de las de los alumnos aparece en todos los SI estudiados, aunque no de forma lineal.

El estudio cuantitativo es simultáneo al cualitativo; interesa tanto la cantidad de intervenciones como la calidad, es decir, determinar el grado de control (maestra) o de autonomía (alumnos) de cada actuación y estudiar su evolución.

Tabla II. Porcentajes de actuaciones de la maestra que comportan distintos grados de control en la secuencia didáctica 1, en los SI de desarrollo de la partida.

<table>
<tr><th colspan="2">Actuaciones maestra</th><th>Sesión 1</th><th>Sesión 2a</th><th>Sesión 2b</th><th>Sesión 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">Alto grado de control: informa, explica, corrige...</td><td>45%</td><td>14%</td><td>20%</td><td>Irrelevante[2]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Bajo grado de control</td><td>Plantea interrogantes: pide información, pide identificación y corrección de errores…</td><td>32%</td><td>42%</td><td>40%</td><td>Irrelevante</td></tr>
<tr><td>Refuerza actuación autónoma: repite, valora, valida la actuación de un alumno.</td><td>4%</td><td>8%</td><td>20%</td><td>Irrelevante</td></tr>
<tr><td>Modela actuación pertinente: interviene como jugador.</td><td>19%</td><td>36%</td><td>20%</td><td>Irrelevante</td></tr>
</table>

La Tabla II muestra la variación de las actuaciones de la maestra en la SD1. Hay una tendencia a: reducción de las actuaciones que implican alto grado de control; aumento de participación guiada; diversificación de actuaciones en función de las capacidades mostradas por los alumnos; cesión de la gestión de la tarea en la última sesión.

En la secuencia 2, la maestra varía la estructura de participación social. En lugar de realizar una sesión separando los alumnos por niveles de competencia, estructura la participación en pequeños grupos cooperativos de dos o más personas por equipo. Este cambio favorece la aparición de actuaciones de ayuda de unos alumnos a otros.

Fase 3. Selección y estudio de evolución de fragmentos de interacción que comportan –potencialmente– oportunidades de aprendizaje matemático

La unidad de análisis son *fragmentos de interacción* (E/D/d) que se caracterizan porque se inician con un *Error* (E), una expresión de *Dificultad* (D) o una *demanda* (d) por parte de un alumno –en relación con algún contenido matemático: cálculo o estrategia–; el fragmento finaliza cuando los participantes dejan de hacer referencia al motivo que lo ha generado. El estudio de la evolución de estos fragmentos se realiza atendiendo a distintos parámetros. Por una parte, se caracteriza el número de actuaciones en cada E/D/d:

i) Fragmentos tipo A: 3 o 4 actuaciones.

[2] En la sesión 3 el número de actuaciones de la maestra es 9 y el de los alumnos 150.

ii) Fragmentos tipo B: de 5 a 14 actuaciones.

iii) Fragmentos tipo C: de 15 a 34 actuaciones.

Por otra parte, se recuentan los fragmentos:

- resueltos positivamente y no resueltos;
- aparecidos en cada SI;
- donde interviene la maestra y donde actúan los alumnos solos;
- centrados en contenidos matemáticos de cálculo y/o en estrategias de juego.

Tabla III. Fragmento tipo B, en SI de desarrollo de partida 2, sesión 2b, SD1.

Transcripción		*Actuaciones*
Maestra y 2 alumnas juegan a “Te pido un...”. Una vez repartidas todas las cartas cada jugador debe descartar todas las parejas que sumadas den 10.		
María	(Descarta la primera pareja, siete y dos; no descarta nada más).	Error
Maestra	(a María) *A ver, ¿esto es correcto?* (Pone la mano encima de la única pareja que ha hecho María, un siete y un dos).	Plantea cuestión
María	(Coge la carta con el dos) *¡Ay!*	Identifica error
Maestra	*¿Qué era? Siete y ...*	Plantea cuestión
Mónica	*Tres*.	Corrige
María	(Cambia el dos por un tres. Continúa teniendo una sola pareja encima de la mesa).	Resuelve

Tabla IV. Fragmento tipo A, en SI de desarrollo de partida 2, Sesión 2b, SD1

Transcripción		*Actuaciones*
Juegan las 2 alumnas y la maestra a “Te pido un...”. La acción a realizar consiste en pedir una carta que junto con una propia sumen 10 y descartarlas. Tienen el turno Maria y le quedan pocas cartas. En una jugada anterior Maria había pedido un “uno” a Mónica.		
María	(Mira sus cartas y hace ruidos con la boca mientras pasa el tiempo) *¡Ay, dios mío, estoy perdida!*	Dificultad
Mónica	(Se dirige a María) *¡Ah! María, si antes me has preguntado a mí, ¿quién lo tendrá?*	Ayuda parcial
María	(Reaccionando enseguida y dirigiéndose a la maestra) *¿Tienes un uno?*	Corrige y resuelve

Las Tablas III y IV muestran dos ejemplos de fragmentos E/D/d en torno a contenidos de cálculo y de estrategia, respectivamente.

Esta fase del estudio permite:

a) Identificar errores, dificultades y demandas a lo largo del tiempo; se observa una tendencia a la disminución de los errores a medida que avanza cada secuencia.

b) Ubicarlos en SI concretos; al inicio de cada juego el mayor número de E/D/d aparecen en el SI de desarrollo de la partida y se centran en los cálculos necesarios para jugar; cuando este contenido deja de ser el centro de atención de aprendizaje aparecen más E/D/d en el mismo SI, centrados en aspectos de estrategia.

c) Identificar los fragmentos de mayor complejidad; estos tienden a aparecer cuando los contenidos de cálculo dejan de ser el objetivo básico de aprendizaje; aparecen en los SI de preparación de partida y conclusión, y se convierten en procesos de resolución de problemas.

d) Identificar estrategias de cesión y traspaso del control por parte de la maestra: la mayor parte de sus intervenciones, en estos E/D/d, consiste en realizar ayudas ajustadas que se concretan en plantear cuestiones que centran el tema en el cual hay que reflexionar, implicando a los alumnos en la detección y corrección de errores y dificultades propios y de los compañeros; y, no corrige directamente los errores. En la SD2 se estudian 68 E/D/d, la maestra sólo realiza una corrección directa en 2 ocasiones.

e) Identificar la evolución de la capacidad de los alumnos para gestionar los E/D/d cuando actúan solos sin la presencia de la maestra.

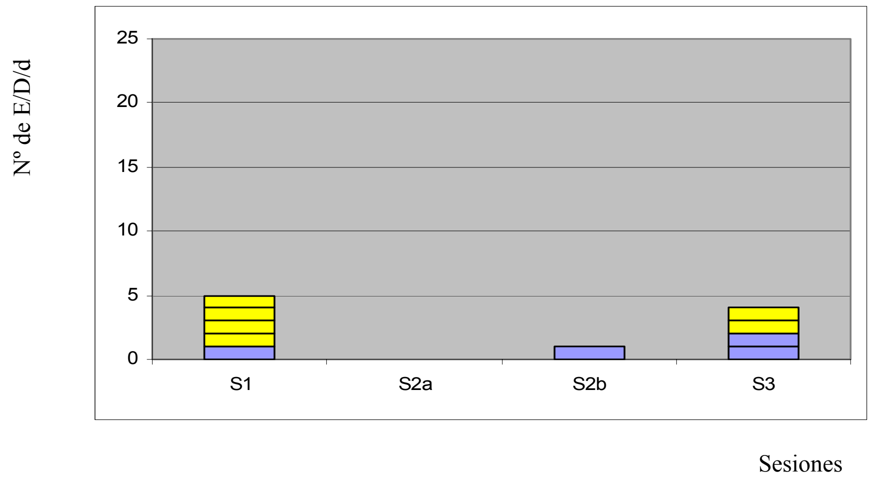


Gráfico 1. SD1

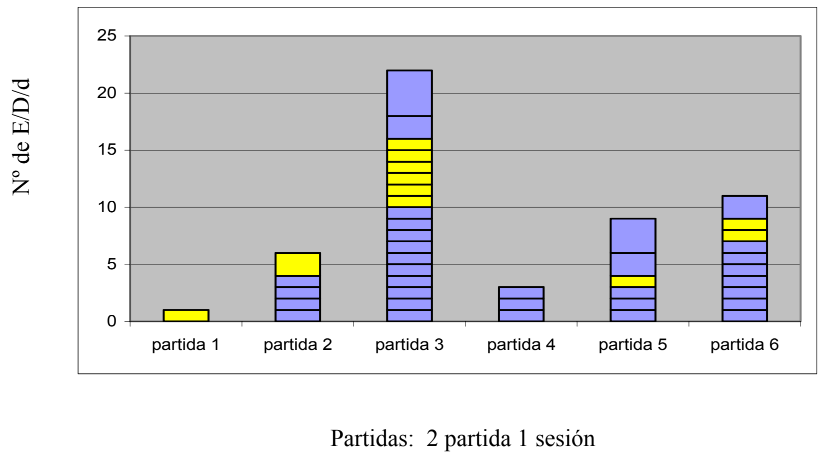


Gráfico 2. SD2

Los Gráficos 1 y 2 muestran los fragmentos que se inician con un *error*, una expresión de *dificultad* o una *demanda* por parte de algún alumno –relativos a contenidos matemáticos, de cálculo o estrategia–

y que *gestionan los alumnos solos*.

Durante la SD1, los alumnos intentan gestionar solos E/D/d muy pocas veces (10) resolviendo positivamente solo 4 E/D/d en toda la secuencia. Sin embargo, en la SD2 (trabajo en grupos cooperativos) se enfrentan muchas más veces (43) a E/D/d. Por una parte, se trata de fragmentos de interacción más complejos (contienen más actuaciones) y, por otra, hay un número muy elevado (32) de resoluciones positivas.

Conclusiones

En relación con la *influencia educativa que ejerce la maestra* se observa que ésta cede y traspasa progresivamente el control y la responsabilidad del aprendizaje a los alumnos al ir reduciendo el número y grado de las ayudas a medida que los alumnos muestran un mayor grado de autonomía. Entre las estrategias utilizadas para la cesión del control, la maestra:

1. implica a los alumnos en el proceso de detección y corrección de errores y dificultades propios y de los compañeros, preguntando directamente a distintos alumnos, invitando a participar y no corrigiendo los errores ella misma;

2. varía la estructura de participación social en las dos secuencias estudiadas, siendo más efectiva la variación consistente en estructurar la participación de los alumnos en pequeños grupos cooperativos;

3. varía la atención del grupo en distintos contenidos matemáticos. Primero se centra en el dominio de los cálculos necesarios para jugar. Luego se centra en las estrategias de juego y en las situaciones generadas por el contexto que se convierten en procesos de resolución de problemas.

En relación con la *influencia educativa que ejercen los alumnos entre sí* cabe destacar:

1. El aumento de la capacidad de los alumnos para ejercer ayudas mutuas y de la capacidad de aceptar y utilizar estas ayudas en su proceso de aprendizaje. Las ayudas son prácticamente inexistentes en las sesiones iniciales y numerosas en las finales.

2. El aumento de su capacidad de intervenir de manera efectiva cuando actúan solos. Delante de errores, dudas y dificultades aparecen, con el tiempo, diálogos más largos y complejos, únicamente entre alumnos, para llegar a soluciones efectivas y compartidas.

Todo esto nos lleva a concluir que el contexto de juego en el marco escolar facilita la construcción de conocimiento matemático cuando se plantea en un entorno constructivista de interacción entre todos los participantes.

Referencias

Abrantes, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO*, *8*, 7-18.

Coll, C. (1989). *Conocimiento psicológico y práctica educativa.* Barcelona: Barcanova.

Coll, C. (2001). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios., A. Marchesi, (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación, 2: Psicología de la educación escolar* (pp. 157-186). Madrid: Alianza.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J., Rochera, M. J. (1995). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de los mecanismos de influencia educativa. En P. Fernandez Berrocal y M. A. Melero (Eds.), *La interacción social en contextos educativos*. Madrid: siglo XXI.

Coll, C., Rochera, M. J. (2000). Actividad conjunta y traspaso del control en tres secuencias didácticas sobre los primeros números de la serie natural. *Infancia y Aprendizaje*, *92*, 109-130.

Colomina, R., Onrubia, J., Rochera, M. J. (2001). Interactividad, mecanismos de influencia educativa y construcción del conocimiento en el aula. En C. Coll, J. Palacios, A. Marchesi (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 437-458). Madrid: Alianza.

Corbalán, F., Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas, *UNO, 7*, 71-80

Corbalán, F. (1997). *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y topología de jugadores en el alumnado de secundaria*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Edo, M. (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Edo, M. (2004). Taller de juegos y matemáticas en el ciclo inicial de primaria. Desarrollo curricular. Estrategias e instrumentos. En C. Tomás y M. Casas (Eds.), *Educación Primaria. Orientaciones y Recursos*. Barcelona: CISSPRAXIS.

Gairín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las Matemáticas. *Educar*, *17*, 105-118.

Guzmán, M. (2005). Juegos matemáticos en la enseñanza. En F. Martín y I. Fuentes (Eds.), *Textos de Miguel de Guzmán* (pp. 23-60). Madrid: FESPM.

Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética, implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

Kamii, C., Devries, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza: implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

Rochera, M. J. (1997). *Interactividad e influencia educativa: análisis de algunas actividades de enseñanza y aprendizaje de los primeros números de la serie natural en educación infantil*, Tesis doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

Rochera, M. J. (2000). Interacción y andamiaje en el aula: el papel de los errores en la influencia educativa. *Cultura y Educación*, *17-18*, 63-81.

Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático

Jesús Gallardo Romero y José Luis González Marí.
Universidad de Málaga

Resumen.

La comprensión del conocimiento matemático constituye un objeto de investigación de interés creciente en Educación Matemática. No obstante, su elevada complejidad hace que los avances más recientes aún resulten insuficientes y reclama la necesidad de ir adoptando enfoques más operativos y menos preocupados por el estudio directo de sus aspectos internos. En tal sentido, se presentan aquí las bases de una aproximación centrada en los efectos observables de la comprensión, que utiliza el análisis de comportamientos y respuestas adaptadas a situaciones expresamente planificadas derivadas del análisis fenómeno-epistemológico del conocimiento matemático. La operatividad de la propuesta se ilustra con el estudio realizado sobre el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Abstract.

Understanding mathematics has recently become a research topic of increasing interest in Mathematics Education. However, its high complexity makes to be insufficient the most recent advances and demands to be adopted more operative and less interested about its internal properties approaches. Therefore, the principles of an approach based on the observable effects of understanding mathematics are exposed here, one of which refers to the individual behaviours and answers analysis when facing to specifically prepared situations derived from the phenomenon-epistemological analysis of concrete mathematical knowledge. The operativity of the proposal is also illustrated with some examples related to a study we have carried out on understanding the written standard algorithm for the multiplication of natural numbers.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha venido incrementando el interés por desarrollar una enseñanza de la matemática que favorezca la comprensión. Algunos autores (Hiebert et al., 1997) asumen, incluso, que la comprensión debería ser el objetivo fundamental de la Educación Matemática, lo que ha dado lugar a programas de enseñanza experimentales (Carpenter et al., 1999) y proyectos curriculares orientados a garantizar un aprendizaje comprensivo (Goñi, 2000).

La preocupación por la comprensión alcanza también a la investigación en Didáctica de la Matemática, influyendo en su contenido y desarrollo (Hiebert y Carpenter, 1992) así como en el interés y orientación de algunos autores (Koyama, 1993; Sierpinska, 1994; Pirie y Kieren, 1994; Romero, 2000; Godino, 2000). En la actualidad, el carácter multidimensional de la comprensión sigue provocando que su estudio resulte una tarea altamente compleja y un condicionante para los distintos trabajos en curso.

A pesar de las dificultades, venimos trabajando sobre una aproximación indirecta, menos teórica que las existentes, integradora, basada en la observación cuidadosa de comportamientos relevantes ante situaciones especialmente preparadas y que busca la operatividad entendida como capacidad para proporcionar categorías, tareas, medios e instrumentos válidos y fiables para la observación y el diagnóstico. De dicha aproximación se exponen en el presente documento los principales supuestos teóricos y metodológicos que la fundamentan y unas breves indicaciones sobre los resultados del estudio que hemos realizado en esta línea en torno a la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales (Gallardo, 2004).

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Centramos la atención en los efectos sobre la capacidad de respuesta adaptativa específica de los sujetos así como en los medios e instrumentos necesarios para observar dichas respuestas. En consecuencia:

Decimos que un sujeto manifiesta una cierta comprensión en relación con un objeto concreto (conocimiento) cuando elabora y emite a su satisfacción una respuesta adaptada, centrada en dicho objeto, ante una situación de desequilibrio cognitivo que decide voluntariamente abordar.

Para ello, el sujeto tendrá que analizar la situación, valorar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia fabricando una respuesta, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de la misma a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o continuarla retomando algunos pasos del proceso. Es, en este sentido, en el que decimos que:

Comprender es sinónimo de responder o de elaborar y emitir una respuesta adaptada. Si un sujeto emite una respuesta adaptada, podemos decir que comprende en los términos de la situación o del problema propuesto. Alternativamente, si el individuo no responde o la respuesta no es adaptada, no podremos afirmar nada sobre la situación de su comprensión por desconocer los verdaderos motivos de ese proceder.

Por otra parte, suele haber una variedad de respuestas adaptadas, más o menos completas o evolucionadas, a una situación. En otras palabras:

Lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende.

Configuración de la estrategia

Dado que en la comprensión intervienen ideas y constructos inobservables, es necesario emplear una estrategia de acercamiento indirecto (estrategia empírica). Asimismo, por tratarse de un fenómeno cognitivo y educativo complejo, es conveniente contar con un cierto apoyo del Análisis Didáctico (González, 1998) y, en particular, del análisis de la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático y de sus múltiples relaciones (estrategia teórica). El medio general que se emplea en el modelo coincide con el que proponen Duffin y Simpson (1997), es decir, la interpretación de comportamientos observables provocados ante situaciones problemáticas. La finalidad inmediata es encontrar respuestas a las siguientes preguntas: ¿es posible asegurar que un sujeto tiene una cierta comprensión de un conocimiento matemático concreto?; ¿hasta dónde comprende un individuo?; ¿de qué tipo y cuál es la calidad de dicha comprensión?; ¿cuándo (en qué condiciones) y cómo se puede averiguar esto con ciertas garantías? La finalidad a largo plazo es la de clarificar en lo posible la comprensión matemática para orientar adecuadamente los procesos de enseñanza-aprendizaje. No se hacen postulaciones sobre aspectos no observables sino sólo sobre relaciones entre comportamientos y conocimientos concretos y fenómenos que les dan sentido, entendiendo estos fenómenos como medios privilegiados en los que interactúan el sujeto y el objeto de conocimiento.

El método específico, a diferencia de los que proponen los autores mencionados, sigue el siguiente proceso: **a)** Análisis Didáctico del conocimiento en cuestión; **b)** delimitación lo más precisa posible de las estructuras epistemológica y fenomenológica de dicho conocimiento; **c)** elaboración a partir de ellas de una clasificación para las situaciones vinculadas al conocimiento matemático; **d)** conversión operativa de dicha clasificación: análisis sistemático y definición clara y precisa de las acciones interpretables de los sujetos; delimitación, categorización y enumeración de las respuestas posibles y de los criterios de valoración; construcción de un modelo centrado en las referencias y categorías que ha de utilizar el observador para interpretar los comportamientos; **e)** construcción de los instrumentos de observación (tareas, pruebas, situaciones y protocolos); **f)** obtención de datos, categorización y valoración de respuestas y conformación de perfiles de comprensión; **g)** análisis de resultados en función del problema específico (estudio muestral, comparación, estudio causal, longitudinal, etc.).

Entre las características de la aproximación planteada destacan la de ser operativa, indirecta, epistemológica y fenomenológica, positiva, provisional, limitada, abierta, integradora y objetiva.

El problema de la determinación y clasificación de situaciones

De acuerdo con la aproximación propuesta, la valoración requiere de un análisis situacional que se inicia con una búsqueda de aquellas situaciones en las que tiene sentido el empleo del conocimiento matemático considerado, para lo que se aconseja la realización de una labor de categorización y selección de situaciones que organice, simplifique y haga más manejable el conjunto situacional asociado.

Precisamente, la consideración de las estructuras epistemológica y fenomenológica constitutivas del conocimiento en estudio, que surgen del correspondiente análisis fenómeno-epistemológico, nos permite establecer unas dimensiones o categorías de situaciones utilizables desde un punto de vista práctico para el diagnóstico y evaluación de la comprensión. La comprensión se valorará entonces en términos de capacidad de enfrentar con éxito situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de tales estructuras. Se trata, en definitiva, de garantizar un cierto grado de suficiencia y representatividad en la muestra de tareas, lo que se consigue mediante las fuentes consultadas para el análisis epistemológico y fenomenológico, entre otras:

- Estudios, trabajos e investigaciones en Educación Matemática relacionados con la enseñanza-aprendizaje del conocimiento matemático en estudio.

- Libros de texto y obras de divulgación matemática.

- Conocimiento de los especialistas en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática.

COMPRENSIÓN DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Los planteamientos teóricos expuestos en el apartado anterior exigen una primera confrontación empírica con la que mostrar la verdadera potencialidad operativa de la aproximación adoptada. En este apartado presentamos, a modo de ejemplo, la aplicación de la misma al caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Estructuras asociadas al algoritmo

El análisis epistemológico y fenomenológico del algoritmo constituye el medio que posibilita la identificación y delimitación de las estructuras que se describen a continuación:

Estructura epistemológica

El algoritmo, en su faceta de tópico escolar, es considerado un método de cálculo con una *sintaxis* claramente definida. Su registro escrito, reducido a la clásica y extendida representación en columnas, se sustenta en la estructura del sistema de numeración decimal posicional, en la descomposición numérica, en las tablas de multiplicar y en la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (Gómez, 1999), siendo ésta la base de *conocimientos previos* que lo conforman. Estos conocimientos constitutivos se muestran relacionados entre sí, pudiéndose establecer tres grupos de *relaciones* claramente diferenciados:

- *Relaciones externas a nivel técnico (grupo 1).* Son las relaciones usuales entre los elementos básicos del algoritmo que hacen posible recorrer la secuencia procedimental establecida en el sentido apropiado;

- *Relaciones externas a nivel analítico (grupo 2).* Son aquellas relaciones externas no incluidas en el grupo 1. Por ejemplo, relaciones no-usuales como: el número total de resultados parciales depende del número de cifras del multiplicador, mientras que el número de cifras de éstos (su extensión o tamaño) depende del de las cifras del multiplicando o el producto de una de las cifras del multiplicador por una de las del multiplicando, además de un resultado, proporciona información acerca de la posición relativa que ha de ocupar entre el resto de cifras que configuran el espacio de resultados parciales;

- *Relaciones internas a nivel formal (grupo 3).* Son las relaciones que sustentan y validan el mecanismo subyacente al algoritmo, entre ellas las derivadas de las propiedades del sistema de numeración decimal posicional.

Estructura fenomenológica

Es específica del algoritmo en cuanto que las situaciones consideradas son las propias del conjunto situacional asociado. Asimismo, resulta oportuno limitar este conjunto al constituido por las situaciones directamente vinculadas con el algoritmo, de forma que el resto de situaciones, sin conexión alguna o bien relacionadas indirectamente a través de otros conocimientos matemáticos, no son contempladas en este nivel de análisis. Esta decisión nos permite reducir considerablemente la extensión del conjunto situacional, proporcionando una mayor garantía operativa. Otro aspecto tiene que ver con que algunas situaciones exigen un uso obligado del algoritmo, no siendo resolubles a menos que se aplique de algún modo este método de cálculo. En otras, en cambio, el algoritmo no es más que una alternativa de resolución, existiendo otros conocimientos matemáticos cuyo uso también conduce a la solución.

Extensión al plano cognitivo: facetas de comprensión del algoritmo

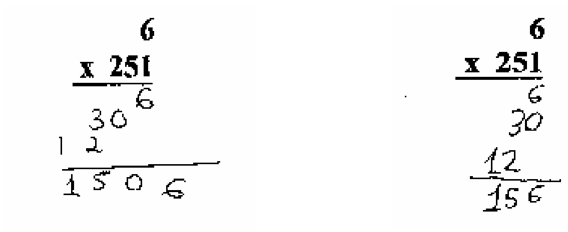
La organización obtenida del conjunto situacional del algoritmo, de origen exclusivamente fenómeno-epistemológico, llega a ser relevante a nivel cognitivo por cuanto posibilita la caracterización en los sujetos de diversas facetas de comprensión vinculadas a las distintas categorías situacionales establecidas[1]. Con ella llegamos a identificar los siguientes ámbitos de comprensión:

Comprensión Técnica, Analítica y Formal

Desde un punto de vista epistemológico, se identifican tres categorías situacionales que permiten establecer diferencias en la comprensión del algoritmo:

(1) <u>*Categoría Técnica*</u>: Reúne a aquellas situaciones donde el algoritmo se emplea de forma mecánica o rutinaria como un instrumento de cálculo. La comprensión exigida para solventarlas se limita al establecimiento de relaciones propias del *grupo 1*. Dentro del uso Técnico se identifican a su vez tres aspectos distintos interpretables en términos de comprensión: *reconocimiento*, *destreza* e

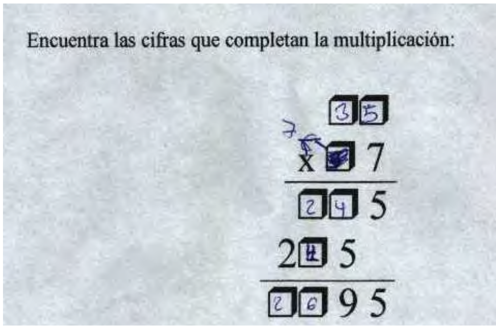
independencia a la disposición de factores. La figura 1 muestra un ejemplo de la relevancia de este último aspecto característico de la comprensión Técnica del algoritmo.



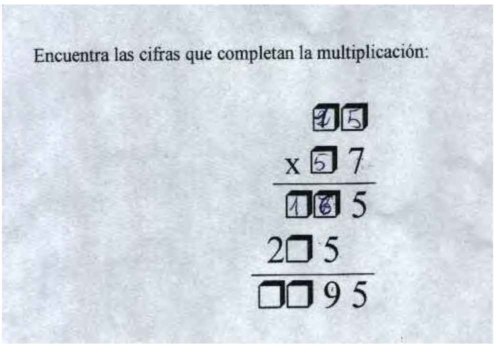
Guillermina (1º Bach.) Raúl (3º ESO)

Figura 1

(2) *Categoría Analítica*: Constituida por las situaciones que requieren para su resolución el análisis de la estructura y el funcionamiento externos del algoritmo, lo que conlleva el empleo premeditado de relaciones propias del *grupo 2*. La figura 2 recoge un ejemplo de las diferencias que pueden llegar a establecerse en la faceta de comprensión Analítica del algoritmo a través de una situación de esta categoría.



Esteban (1ºBachillerato).- *[...] y como para que te dé aquí 9 al final, tienes que sumar aquí 4, pues multiplicando he probado el 3. 7 por 3 son 21 más 3, 24 y entonces te sale* **[trasciende al orden estándar de la secuencia algorítmica. Indicio de uso Analítico]**.



Cristian (5º Primaria).- *Pues es que no me da. Con el único 7 que puedo multiplicar es el 7 por 5 que es 35, lo pongo aquí el 5. Aquí tiene que ser un 4 y un 5 para dar un 9.*
Y si hago 7 por 5, 35, me llevo 3 y 7 por 1, 7, 8, 9 y 10... 0 y 5 pues ya es que no puedo. [...]
No consigo que me dé 9 **[no fija la cifra 4. Dependencia del orden y de las relaciones externas usuales]**.

Figura 2

(3) *Categoría Formal*: Incluye todas las situaciones que demandan del resolutor un uso explícito de las relaciones del *grupo 3*. La figura 3 reúne las respuestas de tres alumnos a una cuestión propia de esta categoría representativas de diferentes estados de comprensión Formal del algoritmo.

¿Por qué al multiplicar con el algoritmo hay que ir desplazando los productos parciales un lugar hacia la izquierda, esto es, por qué se deja un "hueco"?

Ausencia de comprensión Formal

Mirella (5º Pri.).- *Porque siempre hay que ponerla debajo de la cifra que estás multiplicando. [...] por eso siempre se deja hueco, porque se pone debajo de la cifra que se multiplica.* **[Ningún indicio de uso Formal; permanece en el ámbito de las relaciones externas]**.

Comprensión Formal incipiente

Miguel Angel (3º ESO).- [Utiliza como apoyo visual la multiplicación 15 x 32, resuelta con el algoritmo]. *El espacio ese es como si hubiera un 0* **[indicio de uso Formal]**.
Investigador.- *¿Y por qué?*
M.A..- *Ya es más difícil. ¿Por qué? Porque... 0 no vale. [...] 450 sale de... de sumar así esta multiplicación. ¡Qué no sé! Que no sé lo del 0 ni lo del espacio de donde viene* **[ausencia de justificación]**.

Comprensión Formal consolidada

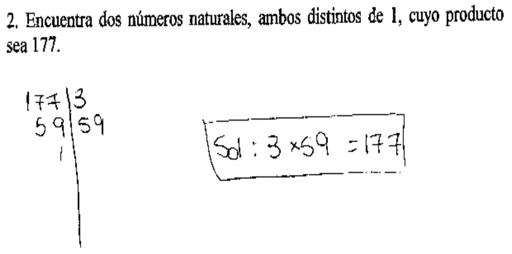
Esteban (1º Bach.).- [Como apoyo visual se emplea la multiplicación 703 x 36 resuelta con el algoritmo]. *Porque aquí coges el... ésta es la multiplicación de 6 y ésta es la multiplicación de 30. [...] ¡Claro!, de 30, por eso se deja aquí este 0.* **[valor de la posición]**. *[...] Y si hubiera centenas pues sería otro hueco...* **[indicio de uso Formal]**. *[...] O sea, va multiplicando unidades primero, después decenas y después las centenas y después las sumas* **[indicio de uso Formal]**.

Figura 3

La posibilidad de que el algoritmo intervenga en una situación de forma necesaria o como alternativa entre varios conocimientos matemáticos constituye el criterio fenomenológico del que se derivan, respectivamente, dos tipos de situaciones, *Exclusivas* y *No-Exclusivas*. El uso del algoritmo en las primeras permite caracterizar un primer ámbito de comprensión (*comprensión fundamental*), que se amplía con un segundo (*comprensión extendida*) identificado a través del desempeño ante situaciones No-Exclusivas. Ambas facetas son complementarias por lo que su consideración resulta precisa para conformar estados y perfiles de comprensión entre los sujetos.

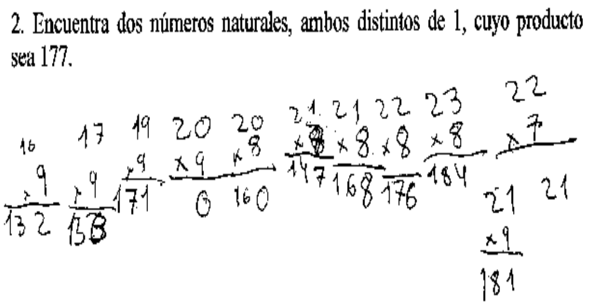
En las figuras siguientes se muestra un ejemplo de situación No-Exclusiva a la que los sujetos responden mediante el uso de distintos conocimientos matemáticos, uno de ellos el algoritmo empleado de forma Técnica y Analítica[2].

Ejemplo A



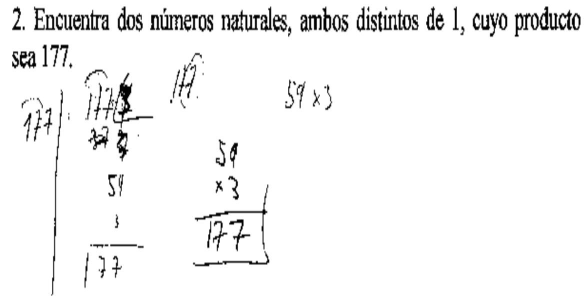
Rosa (14 años).- *Descomponiendo el número.*
Investigador.- *Descomponiendo. ¿Y se te hubiese ocurrido hacerlo de otro modo?*
Ro.- *Puede ser pero es que ahora mismo se me ha ocurrido ese.*
I.- *¿Ese nada más?*
Ro.- *Sí, ahora mismo ese. Pero a lo mejor hay otro modo, claro.*

Ejemplo B



Miguel (12 años).- *Pues multiplicando.*
I.- *Multiplicando números…*
Mi.- *Naturales. [...] Ésta es la que más se acerca.*
I.- *¿Cuál?*
Mi.- *Ésta, el 8 por 21. Entonces, 9 por 21…181.*
I.- *Bueno, ¿qué pasa? ¿No das con el número?*
Mi.- *No. 21 por 7... que va, sale demasiado chico: 147.*

Ejemplo C



David (19 años).- *[...] he intentado hacer al revés. Pues he buscado un número que multiplicado por otro me diera la terminación en 7* [**indicio de uso Analítico**], *primero, que eso es 3 por 9. Yo sabía que aquí ya tenía un 7, entonces tenía que buscar otro número que multiplicado por 3 me diera 17 o aproximado para que sumándole 2* [**nueva reflexión Analítica**]*... entonces salía mejor el 5. Me daba 15 y 2, 17.*

CONCLUSIÓN

En este documento hemos querido presentar las ideas centrales que configuran el marco teórico y metodológico desde el que proponemos examinar la comprensión del conocimiento matemático. Dada la complejidad que encierra dicho fenómeno y el estado actual en el que se encuentran los conocimientos relacionados con él, consideramos más factible y adecuado aproximarnos a su estudio desde una perspectiva integradora, que contemple todos los aspectos relevantes vinculados a la comprensión, y al mismo tiempo operativa, con el énfasis puesto en aquellos aspectos que permiten ser observados por el investigador.

Con objeto de ir aportando datos empíricos en favor de esta aproximación, hemos concluido un primer estudio descriptivo en el que, mediante entrevistas semiestructuradas realizadas sobre cuestionario escrito a muestras reducidas de alumnos, se han extraído los primeros resultados y conclusiones acerca de la operatividad real de la propuesta para observar, diagnosticar y valorar la comprensión de los sujetos en el caso particular del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

NOTAS

1. La fase teórica de aplicación de la Aproximación ha sido completada con dos estudios empíricos exploratorios, uno cuantitativo y otro cualitativo, dirigidos a contrastar la extensión a nivel cognitivo. De ellos se han obtenido las referencias precisas, en cuanto a instrumentos, respuestas y comportamientos tipo e interpretaciones en términos de comprensión, para el desarrollo de un nuevo estudio empírico cualitativo, en el que utilizando la entrevista semiestructurada sobre cuestionario escrito, se ha llegado a caracterizar de forma detallada los estados y perfiles de comprensión del algoritmo asociados a una muestra de 24 alumnos y aportar nueva información sobre las particularidades de la comprensión del algoritmo a partir de los matices y relaciones identificados. Para más detalles consúltese la Tesis Doctoral de Gallardo (2004).

2. Conviene subrayar que no se considera la preferencia en el uso como criterio de comprensión, sino el reconocimiento de vínculos entre el algoritmo y las situaciones No-Exclusivas que también le dan sentido. De este modo, entendemos que un individuo que no reconoce una situación como susceptible de ser resuelta con el algoritmo manifiesta, en este caso, una comprensión más limitada respecto de aquel que sí establece el vínculo situación-algoritmo, todo ello con independencia del procedimiento de resolución que al final decida emplear.

REFERENCIAS

Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A. y Wearne, D. (1999). Learning basic number concepts and skills as problem solving. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.) *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 45-61). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Duffin, J. y Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.166-173). Lhati, Finland:PME.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.* Tesis Doctoral inédita. Málaga: Universidad de Málaga.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.

Gómez, B. (1999). El futuro del cálculo. *Uno*, 22, 20-27.

González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-256). Osnabrück, Germany: ERME.

Goñi, J. Mª (2000). La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. En J. Mª Goñi (Coord.) *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp. 23-57). Barcelona: Grao.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, N. H.: Heinemann.

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

Romero, I. (2000). *Representación y Comprensión en Pensamiento Numérico*. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva (paper).

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional

Marta Molina González y Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada

Resumen

En este documento presentamos algunos de los resultados de un estudio[1] *que aporta evidencias de la capacidad de los alumnos de tercer grado para desarrollar pensamiento relacional y para comprender el significado del signo igual trabajando en un contexto de igualdades numéricas.*

Abstract

In this document we present some of the results of a study which provides evidence of third grade students´ capacity to develop relational thinking and to understand the equal sign meaning both in the context of number sentences.

Introducción

Recientemente investigadores como Kaput (1999), Carpenter, Franke, y Levi (2003) y Warren (2004) han argumentado sobre la importancia de fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la educación matemática escolar, con el objetivo de promover un aprendizaje con comprensión y facilitar el posterior estudio formal del álgebra. Según esta propuesta los maestros han de promover la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y crear un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2003). Se considera que los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son hábitos mentales importantes que los alumnos deben de adquirir ya que tienen el potencial de poder enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética.

En esta línea, tomamos como referencia fundamental un trabajo dirigido por Carpenter (Carpenter et al., 2003) en el que se aborda el desarrollo de diversos aspectos del pensamiento algebraico desde la enseñanza de la aritmética entre los que se encuentran la comprensión del signo igual, la observación de relaciones numéricas y la elaboración de conjeturas. Trabajamos con un grupo de alumnos de tercer grado. Llevamos a cabo varias intervenciones en el aula dirigidas a que los alumnos hagan explícito y desarrollen el significado que tienen del signo igual[2]. A su vez realizamos un estudio de la emergencia y desarrollo de estrategias de resolución de igualdades numéricas basadas en el establecimiento de relaciones entre los términos y operaciones de ambos miembros de la misma y en la consideración de las igualdades aritméticas como un todo.

---

[1] Este estudio ha sido desarrollado dentro de un proyecto del plan nacional de I+D+I financiado por el MCyT, con número BSO2002-03035, y cofinanciado con fondos FEDER. Junto a las autoras de esta comunicación, esta investigación ha sido realizada por la Dra. Rebecca Ambrose (U. California, Davis).

[2] En esta comunicación nos centramos en el significado del signo igual en contextos aritméticos (equivalencia en valor numérico de dos expresiones numéricas), siendo conscientes de que en el álgebra su significado se hace más complejo al ser empleado en diversos tipos de igualdades: identidades, igualdades limitadas a ciertos valores de las variables y definiciones, entre otros.

Nuestro punto de partida es la siguiente conjetura: se ha detectado que los alumnos de tercer grado de educación elemental o primaria muestran una comprensión muy limitada del significado del signo igual. Esto se deduce de las dificultades que encuentran en la resolución de igualdades numéricas. Suponemos que dichas dificultades no son atribuibles, en general, a falta de capacidad de los alumnos debido a su desarrollo evolutivo y que un trabajo sistemático y ordenado, con igualdades numéricas, puede permitir en estos escolares una mejor comprensión del signo igual y fomentar en ellos el desarrollo de pensamiento relacional como una estrategia para resolver igualdades numéricas.

Objetivos de la investigación

El objetivo de este trabajo de investigación es estudiar la comprensión mostrada por los estudiantes del significado del signo y la emergencia y desarrollo de pensamiento relacional en la resolución de igualdades numéricas. Para ello trabajamos con los alumnos en el aula durante cinco sesiones de duración variable (entre quince y cincuenta minutos), realizadas en días diferentes y durante el horario escolar. La sesión 1 está dirigida a diagnosticar la comprensión que tienen los alumnos, detectar posibles usos de pensamiento relacional y explorar las estrategias empleadas por los mismos en la resolución de igualdades numéricas abiertas. En las sesiones 2, 3 y 4, nos centramos en diseñar y llevar a la práctica actividades que puedan favorecer que los alumnos desarrollen la comprensión del significado del signo igual y promuevan el uso de pensamiento relacional en la resolución de las igualdades. En la última sesión, se evalúa la durabilidad de la comprensión mostrada previamente por los alumnos así como el uso de pensamiento relacional.

Marco Teórico

Pensamiento relacional

Uno de las principales expresiones utilizadas en este trabajo es “Pensamiento relacional”. Decimos que una persona *usa pensamiento relacional en contextos matemáticos* cuando examina alternativamente dos o más conceptos o ideas matemáticas para apreciar (recordar o detectar) relaciones que pueden existir entre ellos, y analiza o usa estas relaciones con la intención de resolver un problema, tomar una decisión o aprender algo sobre la situación o los conceptos involucrados. En el contexto de la aritmética, en el que se centra este trabajo, este término ha sido empleado por Koehler (2004) haciendo referencia a “las muchas relaciones que los niños reconocen y construyen entre números, expresiones y operaciones” (p. 2). Por su parte Carpenter et al. (2003) se refieren al uso de pensamiento relacional en el contexto de igualdades numéricas uniéndolo a la comprensión del significado (relacional) del signo igual. En este contexto se entiende que un alumno usa pensamiento relacional al resolver una igualdad numérica cuando obtiene la respuesta, a la misma, estableciendo comparaciones entre los números o expresiones a ambos lados del signo igual, sin necesidad de realizar explícitamente las operaciones expresadas. Por ejemplo, en la igualdad $12 + 7 = 7 + \square$ puede observar que la respuesta correcta es doce, como consecuencia de la propiedad conmutativa, siendo ésta una estrategia alternativa a realizar la suma $12 + 7 = 19$ y posteriormente resolver el problema $19 = 7 + \square$. De forma similar, la igualdad $8 + 4 = \square + 5$ se puede resolver usando pensamiento relacional observando que cinco es una unidad más que cuatro y, por lo tanto, la cantidad desconocida deberá ser una unidad menos que ocho.

La aritmética elemental da lugar a multitud de actividades (no siendo siempre necesaria una comprensión previa del signo igual) en las que se puede desarrollar el pensamiento relacional centrando el foco de atención en las relaciones entre las operaciones y los números involucrados, manteniéndolo alejado del cálculo directo de la respuesta. En algunas de estas actividades, como las que se consideran en este estudio, se trabaja además el significado relacional del signo igual y por tanto la consideración de las igualdades como un todo, como una proposición.

Estas actividades favorecen un aprendizaje significativo de la aritmética, el desarrollo de fluidez en el cálculo y el desarrollo de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter et al. 2003, Koehler, 2004). El trabajo centrado en pensamiento relacional con estas actividades, es importante, entre otras cosas, porque los conceptos o ideas matemáticas están dentro de estructuras interrelacionadas y porque el reconocimiento de dichas relaciones es considerado como una de las bases del desarrollo de la comprensión de las matemáticas (Castro, Rico, y Castro, 1987; Hiebert y Carpenter, 1992).

Estudios previos de interés para este trabajo

En lo referente a la resolución de igualdades numéricas, según recogen Lindvall e Ibarra (1980), han sido ampliamente estudiadas las estrategias y dificultades que manifiestan los alumnos al resolver igualdades numéricas abiertas[3] de las formas $a \pm b = c$ y $c = a \pm b$, analizando: la influencia de la operación, la posición de la operación y de la cantidad a averiguar (incógnita) y la existencia o no de solución en el conjunto de los números enteros. Los estudios de Behr, Erlwanger, y Nichols (1980), Falkner, Levi, y Carpenter (1999), y Freiman y Lee (2004) han centrado su atención en la resolución de igualdades abiertas de no acción[4], observando que los alumnos encuentran importantes dificultades en la resolución de este tipo de igualdades y con frecuencia tienden a cambiarlas de acuerdo con una interpretación operacional del signo igual. La mayoría de los alumnos entienden el signo igual como un símbolo que debe ir seguido a su derecha de la respuesta a la operación u operaciones situadas a su izquierda y tienden a rechazar igualdades de la forma $c = a + b$ porque "están al revés" cambiándolas a: $c + a = b$ ó $a + b = c$. Dan como respuestas más frecuentes a las igualdades de las formas $a = a$, $c = a + b$, $a + b = c$ y $a + b = c + d$, (con a, b, c o d desconocido) uno de los números de la igualdad, la suma o diferencia de algunos números de la igualdad o la suma de todos los números de la misma (Freiman y Lee, 2004). Un uso erróneo del signo igual señalado por Kieran (1981) consiste en encadenar operaciones en expresiones tales como 8 + 4 = 12 + 5 = 17.

Por otra parte, en diversos estudios (Thorton, 1978; Rathmell, 1978; Koehler, 2004), se ha destacado la bondad del uso de estrategias de pensamiento y de cálculo flexibles basadas en pensamiento relacional en el aprendizaje de los hechos numéricos. Estos investigadores han observado que la enseñanza de este tipo de estrategias favorece el aprendizaje y retención de hechos numéricos básicos así como la transferencia de este conocimiento a otros problemas. Otros estudios que resumen Liebenberg, Sasman, y Olivier (1999) sugieren que la enseñanza tradicional no ha sabido promover el uso de pensamiento relacional, habiéndose observado que la mayoría de los alumnos no son capaces de resolver igualdades abiertas sin calcular la respuesta a las operaciones expresadas, debido a una falta de conocimiento de las operaciones aritméticas y sus propiedades. Kieran (1981) alude a la dificultad en la aceptación de la falta de clausura, es decir, la dificultad de considerar expresiones como entidades en sí y la necesidad de que aparezca expresado el resultado o valor de cada expresión. Esta limitación va acompañada de una percepción de las expresiones como procesos o acciones y no como objetos matemáticos. Los estudios de Carpenter et al. (2003) y Koehler (2004), más recientes, presentan casos de alumnos de primaria que han hecho uso de pensamiento relacional de manera eficaz en la resolución de igualdades numéricas y en otras actividades aritméticas. Estos estudios, entre otros, han servido de base para nuestro trabajo de investigación.

Metodología

Diseño de la investigación

Hemos aplicado el *diseño de investigación dirigido por una conjetura* de Confrey y Lachance (2000). Este diseño está especialmente orientado a la realización de estudios de investigación que se desarrollen en el aula, habitualmente dirigidos a investigar nuevas estrategias de enseñanza o a analizar diferentes enfoques para el contenido y la pedagogía de un conjunto de conceptos

---

[3] Las igualdades abiertas son aquellas que presentan algún término desconocido (incógnita), a averiguar (Ej. 8 + 4 = _ + 5). Las igualdades cerradas, por el contrario, aparecen completas, sin ningún término desconocido (Ej. 8 + 4 = 7 + 5).

[4] Las igualdades de no acción son aquellas sin símbolo operacional en ambos miembros (Ej. 3 = 3) o con signos operacionales a ambos lados del signo igual (Ej. 3 + 5 = 7 + 1). En cambio las igualdades de acción incluyen signos operacionales únicamente en uno de los miembros (Ej. 4 + 3 + 5 = 12 ó 6 = 3 + 3). Tanto las igualdades de acción como las de no acción pueden ser abiertas o cerradas.

matemáticos. El diseño se basa en una conjetura, es decir, en "una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes" (pp. 234-235), la cual es revisada y elaborada a lo largo del proceso de investigación. No existen hipótesis a ser probadas sino que la conjetura es la guía de la investigación, existiendo, además, objetivos o preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta.

La recogida de datos que acompaña a este diseño es exhaustiva para poder describir con precisión las interacciones ocurridas en el aula, la actuación y evolución de los alumnos, y las reflexiones y decisiones tomadas por los investigadores a lo largo del proceso de investigación. Los datos son sometidos a dos tipos de análisis; uno preliminar y continuo, después de cada intervención, que permite la toma de decisiones con respecto a futuras intervenciones y facilita la revisión y el desarrollo de la conjetura, y otro, un análisis final de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos el cual conduce a la construcción de una historia coherente de la evolución de la conjetura y de los alumnos.

Sujetos

Dos investigadoras (autora y codirectora del estudio), trabajamos con una clase de 18 alumnos de ambos sexos de tercer grado de un colegio público de la ciudad de Sacramento (California). La clase era étnica y lingüísticamente diversa. Cinco alumnos hablaban un segundo idioma y dos de ellos tenían dificultades para comprender el lenguaje hablado en el aula, el inglés. Durante los meses previos, las investigadoras habíamos trabajado semanalmente con el grupo de alumnos realizando una variedad de actividades matemáticas no relacionadas con la resolución de igualdades numéricas ni el desarrollo de pensamiento relacional. La maestra del aula estuvo siempre presente y ocasionalmente colaboró ayudando a los alumnos, siendo una de las investigadoras la que condujo el trabajo en el aula en todo momento. La otra investigadora ayudó a los alumnos individualmente (especialmente a aquellos cuya segunda lengua era el inglés) cuando tenían dificultades en la comprensión de la tarea a realizar. Entre nuestras sesiones, la maestra usó un libro de texto "tradicional" para el trabajo en el aula, en el cual se incluía práctica computacional y ocasionalmente igualdades numéricas abiertas con dos términos en cada miembro.

Recogida de datos

Nuestro trabajo en el aula durante las cinco sesiones se centró en resolver y discutir igualdades numéricas (Ver organización y distribución de las sesiones en tabla 1). La mayor parte del tiempo se dedicó a realizar discusiones, intercaladas por las tareas escritas que fueron utilizadas como base de la posterior discusión y para evaluar a los alumnos. Las tareas escritas fueron resueltas por los alumnos de forma individual. En las discusiones con toda la clase se consideraron tanto las respuestas correctas como las incorrectas y se les pidió a los alumnos que explicaran cómo habían pensado las igualdades y de qué formas diferentes las habían resuelto. La investigadora a cargo de la discusión facilitó el intercambio de opiniones entre los alumnos clarificando o repitiendo sus explicaciones al resto de la clase y pidiendo aclaraciones.

La separación temporal de las sesiones fue en parte intencionada, para que nuestra intervención en el aula pudiera tener un efecto más prolongado en los alumnos, y en parte accidental debido a los periodos vacacionales y nuestra limitada accesibilidad al aula.

Sesiones	1	2	3	4	5
Fecha	11-20-03	2-5-04	2-19-04	3-4-04	5-13-04
Número de estudiantes	13	15	18	18	15
Actividades de la sesión	- evaluación escrita - dos entrevistas - discusión breve	- evaluación escrita - discusión - actividad escrita - discusión breve	- discusión - evaluación escrita	- discusión	- evaluación escrita
Tipo de Igualdades	abiertas	cerradas verdaderas y falsas	abiertas y cerradas verdaderas y falsas	cerradas verdaderas y falsas	abiertas

Las sesiones 1, 2 y 4 fueron grabadas en video. Durante la sesión 3 una de las investigadoras tomó notas de la discusión. En todas las sesiones se recogieron las respuestas de los alumnos en hojas de actividades que se les suministraron. Se tomaron anotaciones, durante los diferentes encuentros realizados entre las investigadoras en las que se recogieron las decisiones tomadas sobre el diseño de las diferentes intervenciones, junto con su justificación, así como la opinión de las investigadoras a lo largo del transcurso de la investigación.

Igualdades numéricas trabajadas

Partiendo del conocimiento aportado por una revisión bibliográfica previa decidimos utilizar igualdades numéricas abiertas e igualdades numéricas cerradas verdaderas y falsas (que debían ser corregidas por los alumnos en caso de ser falsas) de formas variadas como las siguientes: $a \pm b = c$, $c = a \pm b$, $a \pm b = c \pm d$ y $a \pm b = c \pm d \pm e$, la mayoría de ellas diseñadas especialmente para facilitar el uso y desarrollo de pensamiento relacional. Las operaciones involucradas fueron sumas, restas y ocasionalmente alguna multiplicación o división con divisor 1, que no supusieran dificultad para alumnos de tercer grado. Sólo algunas igualdades en las últimas dos sesiones involucraron números grandes (mayores que 100) con la intención de incitar al uso de pensamiento relacional.

Las relaciones implícitas en las igualdades fueron: la propiedad conmutatividad de la suma (Ej. 12 + 7 = 7 + □), la compensación en suma (a + b = (a + c) + (b – c)) o en resta (a – b = (a + c) – (b + c)), la propiedad asociativa de la suma mediante la descomposición de alguno de los sumandos (Ej. 4 + □ = 2 + 2 + 2), la magnitud de las expresiones o números (Ej. 34 = 34 + 12), y en alguna igualdad la relación inversa de la suma y la resta (Ej. 27 + 48 – 48 = 27), la multiplicación como suma repetida (Ej. 4 x 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 5) y la propiedad de que todo número menos si mismo es cero (Ej. 6 – 6 = 1 – 1). Las igualdades numéricas no fueron presentadas a los alumnos agrupadas por relaciones sino tomadas aleatoriamente (las relaciones abordadas en cada sesión se recogen en la primera parte de la tabla 2).

Tras observar en la sesión 1 una fuerte tendencia computacional en los alumnos siempre que tenían que completar una igualdad abierta, decidimos emplear este tipo de igualdades sólo para evaluar la comprensión del significado del signo igual y usar igualdades verdaderas y falsas para impulsar la verbalización y discusión entre los alumnos y promover el uso de pensamiento relacional. En cada una de las intervenciones, en el aula, se emplearon colecciones de igualdades elaboradas en función de los resultados de la sesión anterior y considerando las sugerencias dadas por Carpenter, et al. (2003). En algunos casos tomamos igualdades que habían sido propuestas por los alumnos en intervenciones previas.

Resultados

Los resultados de este estudio atienden principalmente a dos aspectos: las dificultades de los alumnos en la resolución de igualdades numéricas, y la emergencia y desarrollo de pensamiento relacional.

Dificultades en la resolución de igualdades numéricas

Durante las diferentes sesiones observamos que los alumnos presentan dificultades en la resolución de igualdades numéricas similares a las referidas por otros autores. Inicialmente todos los alumnos muestran una interpretación operacional del signo igual. Se aprecia esta interpretación en las respuestas dadas en las igualdades abiertas de no-acción. En unos casos la operación es correcta, de acuerdo con lo indicado en la igualdad. En otros, se opera con todos los números, sin tener en cuenta la posición del signo igual. En otros casos, se repite algún número de los que aparecen en la igualdad. En otros, se resuelve sólo una parte de la igualdad de la forma $a \pm b=c$, $b=c \pm d$, $a=c \pm d$ ó $a \pm b=d$.

En cuanto al reconocimiento de igualdades verdaderas y falsas, los alumnos no encuentran significado para expresiones de la forma $a=a$ por no tener una operación implicada, ni a $c=a\pm b$ por el orden de los miembros de la igualdad, indicando los alumnos que la igualdad está al revés, tampoco a expresiones del tipo $a\pm b=c\pm d$ por la posición del signo igual *"en medio"*, explicando que prefieren verlo al final.

En esta tendencia computacional, los alumnos no reparan en la igualdad como un todo sino que proceden a operar inmediatamente, involucrando todos o parte de los números de la igualdad para poder rellenar el recuadro. Consideramos que este comportamiento es una consecuencia de la orientación al cálculo que tradicionalmente domina la enseñanza de la aritmética.

A lo largo de las sesiones, la compresión del significado del signo igual de la mayoría de los alumnos evoluciona desde la interpretación operacional de este símbolo, cuyo uso sólo es aceptado por los alumnos en igualdades con las operaciones a la izquierda y la respuesta a la derecha, a una interpretación relacional del signo igual, pasando en algunos casos por una etapa intermedia de aceptación de igualdades de la forma $c=a \pm b$[5].

Emergencia y desarrollo de pensamiento relacional

Analizamos este punto centrándonos principalmente en las explicaciones dadas por los alumnos durante las discusiones. En total once de los dieciocho alumnos verbalizaron pensamiento relacional a lo largo de las cinco sesiones de trabajo en el aula: uno en la sesión 1, otro en la sesión 2, dos en la sesión 3 (en dos ocasiones cada uno), seis en la sesión 4 (uno de ellos en tres ocasiones, otro en dos y los demás en una) y siete en la sesión 5. Las explicaciones dadas por los alumnos fueron como sigue:

"[12 + 11 = 11 + 12] es verdadera porque han cambiado de orden los números".

Este alumno no realizó ningún tipo de cálculo sino que observó la igualdad en su totalidad, comparó las expresiones a ambos lados del signo igual y aplicó la propiedad *conmutativa*.

"34= 34 + 12 es falsa porque treinta y cuatro más doce va a ser más que treinta y cuatro".

Este alumno justificó la falsedad de la igualdad comparando las expresiones 34 y 34 +12 y razonando en función de su *magnitud*.

"[12 – 7 = 13 – 8] es cierto porque han sumado uno al siete y han sumado uno al doce".

Este alumno expresa así la relación de *compensación* en la resta.

---

[5] Esta evolución se detalla en Molina y Ambrose (en prensa).

En la igualdad 238 + 49 = □ + 40 + 9 algunos alumnos tras responder 238 razonaron aplicando la propiedad asociativa de la suma. Explicaron:

"Me di cuenta de que el número era 49 y 40 + 9 = 49 por eso sume 238"

"Dividí el 49 por la mitad en 40 y 9. No sumé 238 y 49".

En la tabla 2 se muestra qué tipo de explicaciones se produjeron en las distintas sesiones atendiendo a las relaciones o propiedades verbalizadas por los alumnos. En la primera parte de esta tabla se recoge el número de igualdades que abordaron (implícitamente) las relaciones conmutativa, asociativa (en situaciones de descomposición de algún término), compensación y magnitud de las expresiones. Como se observa, los alumnos no mostraron pensamiento relacional en todas las igualdades, siendo las relaciones de magnitud de las expresiones y la propiedad asociativa, en situaciones de descomposición de un algún término, las más explicitadas. En la mayoría de las igualdades la relación expresada por los alumnos corresponde a la relación con la que identificamos en la tabla dicha igualdad, sin embargo, en la igualdad 103 + 205 = 105 + 203 de la sesión 4 aunque un alumno verbalizó esta relación (**"***Han cambiado de orden el cinco y el tres"*), la relación de compensación, otros alumnos dieron explicaciones centradas en otra aplicación de la propiedad asociativa: *"Es verdadera porque ciento tres más doscientos cinco es igual a ocho y ciento cinco más doscientos tres es ocho y los dos ochos hacen juego"* o *"Yo he visto el cinco y el tres porque cinco más tres son ocho y hay dos ochos haciendo juego y entonces tenemos trescientos ocho y en el otro lado trescientos ocho."*

		Conmutativa	**Magnitud**	**Compensación**	**Asociativa-descomposición**
Relaciones trabajadas	1	+		+ + + –	
	2		+ +	+	
	3	+	+ + + + –	+ +	+
	4		+ –	+ –	+ +
	5	+		+ + + –	+
Relaciones expresadas por los alumnos	1			+	
	2		+		
	3	+	+ + +		
	4		+ +	+ –	+ +
	5				+ + + +

Tabla 2. Dos tipos de frecuencias asociadas a las principales relaciones consideradas. Los símbolos + o – refieren a la operación involucrada en la igualdad. No tenemos información de las casillas sombreadas.

Por otra parte, se observa un posible uso de pensamiento relacional en las igualdades construidas por los alumnos en las sesiones 2 y 3. Algunas de las relaciones que pueden observarse en estas igualdades son: la propiedades del cero como neutro de la suma (Ej. 10 + 9 = 19 + 0), la suma de números iguales es igual (Ej. 10 + 0 = 10 + 0), la compensación en la suma (Ej. 51 + 51 = 50 + 52), la multiplicación como suma repetida (Ej. 2 x 9 = 9 + 9), la propiedad conmutativa (Ej. 10 + 7 = 7 + 10), la resta de un número menos si mismo es cero (Ej. 100 – 100 = 0 – 0) y la propiedad asociativa de la suma (Ej. 90 + 200 = 200 + 10 + 10 + 20 + 30 + 20). Sin embargo, al interrogar a algunos de estos alumnos sobre cómo estaban construyendo las igualdades no expresaron relación alguna.

Conclusiones

Los resultados de este estudio muestran que el significado del signo igual no es un conocimiento intuitivo para los alumnos ni es adquirido directamente mediante la explicación de la persona que ejerce la autoridad en el aula. Los alumnos necesitaron trabajar con igualdades de diversas formas para ir construyendo una comprensión del significado relacional del signo igual, así como para modificar su interpretación operacional de este símbolo. Entendemos que las dificultades observadas son resultado de la reiterada consideración, a lo largo de la formación escolar de los alumnos, de igualdades con las operaciones en el lado izquierdo y la respuesta en el lado derecho de las mismas, junto con el énfasis que se hace en la obtención de una respuesta que suele dominar la enseñanza de la aritmética. Este significado operacional adjudicado al signo igual es referido en la literatura como significado aritmético del signo igual (Rojano, 2002), sin embargo la naturaleza relacional de este signo así como las importantes dificultades observadas y el interés del trabajo centrado en relaciones muestran lo poco adecuado que resulta esta limitación impuesta al uso aritmético del signo igual.

Las igualdades numéricas verdaderas y falsas probaron ser un contexto eficaz mediante el cual los estudiantes pueden verbalizar su significado del signo igual y mejorar la comprensión de este símbolo, además contribuyeron a fomentar la observación de la totalidad de la igualdad, romper su tendencia computacional, y al desarrollo de pensamiento relacional. Aunque dicho desarrollo tuvo un éxito parcial, los resultados permiten mostrar que los alumnos de tercer grado están capacitados para desarrollar pensamiento relacional y que su uso permite abordar relaciones matemáticas que habitualmente no son explicitadas en el aula y que constituyen parte de una buena formación matemática. Una dificultad observada en relación a este desarrollo mediante las actividades consideradas es la necesidad de que los alumnos se escuchen unos a otros para que el intercambio de estrategias y opiniones sea realmente fructífero.

El carácter de intervención en el aula de esta investigación la dota de consecuencias directamente aplicables al aula. Las dificultades señaladas en la resolución de los distintos tipos de igualdades y la evolución de la comprensión y de las estrategias de los alumnos observada, aportan información de utilidad para la enseñanza. Se muestra la potencialidad del trabajo centrado en el desarrollo de pensamiento relacional que favorece un enfoque no computacional y una comprensión semántica de la aritmética, además del acercamiento a la clausura de las expresiones, idea de gran importancia a tratar en la formación pre-algebraica.

Bibliografía

Behr, M, Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching,* 92, 13-15.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears." *Teaching Children Mathematics,* 10 (2), 70-83.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Castro E., Rico, L. y Castro E. (1987). Números y Operaciones. Fundamentos para la aritmética escolar. Madrid: Editorial Síntesis.

Confrey J. y Lachance A., (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly, y R. A. Lesh, (Eds.), *Research design in mathematics and science education,* pp. 231-265. NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Falkner, K. P., Levi, L., y Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics,* 6, 232-236.

Freiman, V., y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 2, 415-422.

Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 65-97. NY: Macmillan.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema, y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding,* 133-155, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12, 317-326.

Koehler, J. L. (2004). *Learning to think relationally: thinking relationally to learn.* Dissertation Research Proposal. University of Wisconsin-Madison.

Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999). *From Numerical Equivalence To Algebraic Equivalence. Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI).* Paper from the 5th annual conference of the Mathematics Education Associations of South Africa (AMESA), Puerto Elizabeth.

Lindvall, C. M., y Ibarra C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education,* V. 11 (1), 50-62.

Molina, M. y Ambrose, R. (en prensa). What is that Equal Sign Doing in the Middle?: Fostering Relational Thinking While Negotiating the Meaning of the Equal Sign. *Teaching Children Mathematics.*

Rathmell, E. C. (1978) Using thinking strategies to teach the basic facts. En M. Suydam, y R. E. Reys (Eds.), Developing computational skills, 1978 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp.13-38, Reston, VA: NCTM.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students' Access to Significant Mathematical Ideas. En L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, pp. 143-163. Holanda: Lawrence Erlbaum Associates.

Thornton, C. A. (1978). Emphasizing thinking strategies in basic fact instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(3), 214-227.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 4, 417- 424.

Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo

Jesús Murillo y Guillermina Marcos
Universidad de La Rioja. Dpto. de Matemáticas y C.

Resumen

En esta comunicación presentamos un modelo para analizar la eficacia de un entorno interactivo, en relación a la adquisición de determinadas competencias matemáticas por los alumnos de la ESO. En particular la competencia comunicativa, cuando la clase se organiza utilizando soportes informáticos y el trabajo colaborativo. El modelo diseñado consta básicamente del entorno interactivo, actividades con una determinada estructura y cuatro components del discurso con sus correspondientes indicadores que nos permiten realizar el análisis correspondiente. Presentamos unas primeras conclusiones y esbozamos algunas propuestas de futuro.

Palabras clave: Cabri, competencia comunicativa, competencia matemática, entorno de aprendizaje con ordenador, Geometría, software dinámico de geometría, educación secundaria

Abstract

In this paper we present a model to analyze the efficiency of an interactive environment, regarding the acquisition of certain mathematical skills by students of ESO (Compulsory Secondary Education). Particularly the communication skill when the class is organized using computer support and cooperative work. The designed model consists basically of the interactive environment, activities with a particular structure and four components of the speech with their own descriptors which allow us to make the correspondent analysis. We present some first conclusions and outline some suggestions for future works.

Key words: Cabri, communication skill, mathematical skill, computer learning environment, Geometry, dynamic geometry software, secondary educatión.

INTRODUCCIÓN

La situación actual en la que nos encontramos inmersos, la sociedad del conocimiento, plantea nuevos retos en el sistema educativo en general y en particular en el de las matemáticas de la educación obligatoria, que implican nuevos métodos de trabajo y de enseñanza, de manera que se facilite por una parte una formación integral del estudiante que le capacite para desenvolverse de forma adecuada en la sociedad de la información y por otra adquirir las competencias necesarias y determinadas por el currículo de matemáticas correspondiente.

Aceptar estos retos supone un cambio conceptual en la organización de las enseñanzas obligatorias para adaptarse a los modelos de formación más centrados en el aprendizaje, es decir, en el estudiante y en su trabajo, y que les permitan *"aprender a aprender"*. En nuestra clase se trabaja de forma cooperativa/colaborativa, donde la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias desarrolla la capacidad de comunicación y lleva a que estas ideas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento.

INTERÉS Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

Un breve análisis del proceso de incorporación de las TIC a los espacios escolares evidencia que esta inclusión ha sido progresiva y continua en las últimas décadas; y que a lo largo de los últimos años, han ido cambiando las concepciones relativas al aprendizaje, a la relación entre TIC y educación y a las interacciones entre los polos del proceso educativo. Más allá de que existan espacios curriculares específicos para el aprendizaje de las TIC, está claro que también es necesario incorporar las TIC a través de cada espacio curricular, en particular en el de Matemáticas.

Planteamos una metodología en la que el alumno participe formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento y en suma en su propia formación, fomentando el trabajo colaborativo entre los alumnos, de manera que éstos asuman parte de la responsabilidad de su aprendizaje, y desarrollen algunas de las funciones que en la enseñanza tradicional están reservados al profesor.

Es necesario, por tanto, una nueva concepción de la formación de nuestros alumnos de Secundaria, más centrada en el aprendizaje y en la que la función del profesor debe estar focalizada en su labor de guía y moderador del aprendizaje. Esta nueva concepción exige unas estructuras más flexibles que a la vez que posibilitan un amplio acceso social al conocimiento permitan también una capacitación crítica para interpretar la información, aspectos que se verán potenciados con la utilización de las TIC.

Por otra parte, la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de D.M. (Duval 2001, Godino 2001, Nesher 2000, Niss 1999), como en las orientaciones curriculares de muchos países, y en particular en los documentos curriculares del MEC, que al referirse a Matemáticas como asignatura de la ESO señala que: *"Es importante habituar a los alumnos a expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de notaciones y términos matemáticos."* (BOE, 2003). En el Proyecto OCDE/PISA, se define el dominio "alfabetización matemática" para referirse a "las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando identifican, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones" (Rico, 2003). Notamos la relevancia otorgada a los procesos relativos a la comunicación.

Si bien, casi todos las investigaciones se centran en la producción de textos escritos en clases presenciales; es cierto que últimamente, ha cobrado importancia el discurso escrito en entornos virtuales, utilizado éste como herramienta para las teleinteracciones con alumnos (Figueiras, 2000, Fortuny, 2000).

Nesher (2000) distingue entre dos acciones: "hablar matemáticamente" y "hablar de matemáticas". Con el término "hablar matemáticamente" se refiere a usar el leguaje matemático, aplicándolo a variados contextos, pero teniendo en cuenta su propia sintaxis. Con la expresión "hablar de matemáticas", se hace referencia al hecho de utilizar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas. Creemos que esta modalidad comunicativa, favorece el desarrollo de la competencia comunicativa en Matemáticas en particular y la mejora de las capacidades geométricas en general, en tanto que propicia la interacción, el intercambio y la reflexión.

Coincidimos con Nesher en que cuando los alumnos producen este tipo de argumentos, utilizando el lenguaje natural como metalenguaje, desarrollan aprendizaje matemático; en particular cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto, desarrollan aprendizaje geométrico.

En nuestro caso, adaptando la expresión “hablar de matemáticas” propuesta por Nesher, a la de “escribir de geometría”, para referirnos al proceso de producción de discursos –escritos- en los que los alumnos explican, justifican, describen el procedimiento que han llevado a cabo para la resolución de problemas, empleando el lenguaje natural como metalenguaje.

En este contexto, nuestra investigación de analizar el proceso de producción de discursos escritos relativos a la resolución de problemas geométricos, cobra una relevancia especial debido al formato “enseñanza bimodal”. La producción de discursos escritos juega un rol superador al de “tarea escolar” ya que adquiere una dimensión comunicativa real e imprescindible en las interacciones profesor - alumno y alumno - alumno.

Aunque, este nuevo enfoque proviene de la Didáctica de la Lengua (Mendoza, 2003) y de los modelos comunicativos, consideramos que: *“Se aprende a leer y a producir textos de Matemática en la clase de Matemática; se aprende a leer y producir textos de Biología en la clase de Biología... El mejor profesor, para alcanzar la comprensión lectora y la expresión escrita en cada uno de estos contextos, serán respectivamente el profesor de Matemática, el profesor de ...”* Lescano (2002)

OBJETIVOS.

Pretendemos analizar los beneficios cognitivos que se producen en nuestros alumnos en relación con la adquisición de determinadas competencias matemáticas, y en particular con la competencia comunicativa, cuando desarrollan trabajo colaborativo, utilizando un entorno ineractivo de aprendizaje soportado por medios informáticos.

En relación a la investigación:

Diseñar actividades adecuadas al medio utilizado, a los contenidos y a los objetivos propuestos para los alumnos.

Diseñar instrumentos e indicadores adecuados para el análisis de las actividades diseñadas y de las producciones de los alumnos.

Analizar los beneficios cognitivos de los alumnos en relación a su competencia comunicativa, de expresión y razonamiento, tomando en consideración la influencia del medio en los resultados obtenidos.

Analizar la capacidad de motivación de los medios utilizados para potenciar la participación en el trabajo colaborativo/cooperativo de los alumnos.

Analizar la producción de discursos correctos como parte de la resolución de problemas geométricos.

Analizar el desarrollo de la competencia comunicativa matemática.

Estudiar y evaluar la influencia de las interacciones escritas (interacciones electrónicas) sobre los interactuantes, haciendo uso de indicadores diseñados.

En relación a los estudiantes:

Desarrollar el interés y el gusto por el aprendizaje de las matemáticas

Adquirir técnicas de autoaprendizaje.

Utilizar herramientas informáticas para el aprendizaje.

Desarrollar habilidades de comunicación e interacción con las TIC.

Evolucionar en el uso de estrategias de trabajo colaborativo.

Resolver problemas geométricos estratégicamente.

Formular conjeturas y realizar demostraciones geométricas sencillas.

Desarrollar procesos metacognitivos que permitan reflexionar sobre el propio aprendizaje y adquieran mayor autonomía.

METODOLOGÍA

Desde una visión *constructivista* del aprendizaje, utilizamos un entorno interactivo constituido por una red electrónica, Internet, software de correo y de navegación de dominio público, un foro de discusión y software de geometría dinámica, fundamentalmente Cabri Geometre.

Metodología de trabajo con los alumnos

La asignatura considerada, para alumnos de 3º de ESO se imparte en un IES de Logroño. Las clases se desarrollan en un aula de Informática, con ordenadores que tienen Cabri Géomètre II y acceso a Internet.

En el desarrollo de la asignatura señalamos distintas fases; una primera en la que se trabaja con los alumnos sobre el manejo del entorno interactivo y del software correspondiente, en la que se apunta a que los alumnos, aprendan a utilizar el programa y el entorno, a través de la resolución de problemas. Las actividades, se proponen por escrito y las clases son coordinadas por un “profesor presencial ” que acompaña a los alumnos en el aula.

En una segunda fase, se incorpora la figura del profesor virtual, y con él una dinámica de trabajo diferente y la necesidad de manejar no sólo Cabri como entorno y la Geometría como tema sino también una manera de comunicación e interacción diferente. Los intercambios que se producen a través del correo electrónico, del foro y de la página Web del Proyecto, suponen aprender a utilizar una nueva herramienta para comunicarse. Esta modalidad comunicativa entre alumno —profesor y alumno— alumno, incluye tanto las actividades como sus resoluciones, las consultas de dudas o solicitudes de ayudas, e incluso los comentarios personales.

Metodología de la investigación.

En nuestra investigación, hemos diseñado instrumentos y definido categorías de actividades, componentes del discurso e indicadores para analizar y evaluar tanto las actividades propuestas como las producciones de los alumnos.

Las actividades.

Las actividades propuestas han sido analizadas en una primera fase, teniendo en cuenta los siguientes criterios: conocimientos matemáticos que exigen (conceptos y estructuras conceptuales, destrezas, estrategias generales), tiempo estimado para la resolución, posibles errores, tipo de actividad (ejercicios de reestructuración; ejercicios de reconocimiento; ejercicios algorítmicos; problemas de aplicación; problemas de enunciado abierto) y conocimientos lingüísticos y semánticos que intervienen (Alsina, 1997).

En una segunda fase, determinamos los elementos mínimos necesarios que deben aparecer en las actividades en función de los procesos comunicativos que ocurren en cada una de las tres etapas: etapa presencial, de correo electrónico y foro electrónico.

Las etapas mencionadas, ordenadas cronológicamente, se caracterizan por presentar modalidades comunicativas muy diferentes; haciendo entonces que las actividades propias de cada una de ellas también resulten distintas entre sí, en función de estas modalidades.

Cada una de las tres ha sido caracterizada tomando en consideración las interacciones producidas (alumno–alumno, alumno–profesor real, alumno–profesor virtual), el carácter de dichas interacciones (presencial, a distancia), la modalidad comunicativa (oral, escrita presencial, escrita asincrónica), y los roles (simetría, asimetría).

A partir de esta caracterización, se han esbozado condiciones para las actividades propuestas en cada etapa.

La actividades de la *etapa presencial*, aunque presentan la novedad del uso de Cabri II para su el abordaje y resolución de problemas geométricos (a los que los alumnos no suelen estar habituados), tienen un formato conocido por los alumnos: consisten en un texto que plantea alguna construcción o reflexión geométrica. Son problemas de aplicación que lo que persiguen es que los alumnos se familiaricen con el uso de Cabri y a la vez reflexionen sobre algunos conceptos y relaciones geométricos ya conocidos.

Otra novedad es que se plantea como parte de la solución del problema geométrico, la explicación del procedimiento y de las relaciones utilizadas usando lenguaje verbal; lo cual también constituye un entrenamiento que en la siguiente etapa se convertirá en imprescindible para la comunicación.

Las actividades de la *etapa correo electrónico* deben ser casi autosuficientes y con la posibilidad de permitir distintos niveles de exigencia y profundidad, de manera que resulten adaptables a cada interlocutor (especificar tanto como sea necesario -y suficiente- para cada alumno y permitir a cada uno el máximo desarrollo posible según sus potencialidades: desafío de atención a la diversidad).

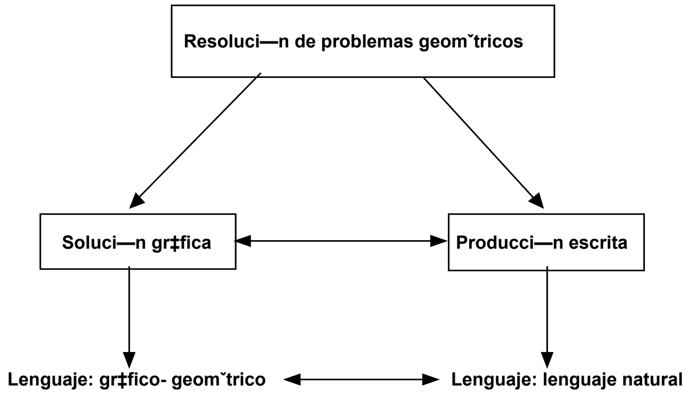
Esta adaptabilidad a receptores tan diversos, se logra a través de "ayudas progresivas" que se administran según las necesidades del caso y a través de "diversificaciones" de la actividad inicial y general (destinada al total de los alumnos) permitiendo que cada uno siga un "itinerario" conveniente.

Estas intervenciones pueden aparecer de dos maneras: a través del mismo correo electrónico o a través de enlaces –aparecen en el texto de la actividad– que permiten a cada alumno recurrir a ellas en caso de necesidad.

Las actividades de la *tercera etapa* deben ser más abiertas que en la fase anterior, porque son las interacciones entre pares las que funcionan como "ayudas" y/o diversifican el itinerario por el que se discurre. Asimismo, el profesor, tiene la posibilidad de intervenir en el foro; con lo que la actividad tiene un formato susceptible de intervenciones docentes que se irán graduando según el proceso.

Las resoluciones de los alumnos:

El siguiente esquema modeliza el análisis de las resoluciones de los alumnos:



Consideramos que las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos utilizan el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas –discursos que suelen estar parcialmente expresados utilizando términos y notaciones geométricas– son parte de la resolución del problema geométrico propuesto. Cuando los alumnos producen este tipo de discursos, desarrollan aprendizaje matemático; en particular cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto desarrollan aprendizaje geométrico.

Por esta razón, nuestro trabajo incluye el análisis de los discursos escritos producidos por los alumnos, como parte de la resolución de los problemas geométricos propuestos; discursos en los que los alumnos explican, justifican y describen el procedimiento que han llevado a cabo(competencia comunicativa)

Para dicho análisis, proponemos un modelo de cuatro componentes con sus indicadores correspondientes, tomando como referencia el modelo establecido por Canale (1995):

a) **COHERENCIA**, para analizar la capacidad de elaborar discursos coherentes y en los que no aparezcan contradicciones. Las partes del discurso deben estar conexionadas dando lugar a un mensaje claro con sentido y completo. Analizamos la coherencia tomando en consideración dos niveles, uno centrado en la propia estructura del discurso (intratextual) y otro tomando en consideración la relación entre la solución gráfica[1] y la producción escrita (extratextual).

b) **RESPETO Y ADECUACIÓN**, para analizar el conocimiento de las reglas socioculturales de uso, adecuación a la situación de los participantes, las normas sociales de interacción,… La utilización del texto adecuado en un contexto concreto para dirigirse a sus iguales o al profesor/tutor. Estos aspectos, hoy en día se consideran como reglas regulativas de la comunicación(Grice, 1991) y cuyo aprendizaje corresponde específicamente a la escuela.

c) **ORTOGRAFÍA Y VOCABULARIO**, para analizar el código lingüístico propiamente dicho. En nuestro contexto específico nos referiremos no solamente al uso correcto de las palabras y signos auxiliares del lenguaje natural, sino también a las particularidades del lenguaje geométrico y al uso de sus términos notaciones y modos de decir de un lenguaje tan específico como el matemático, que deben ser aprendidos en la clase de matemáticas.

d) **CREATIVIDAD Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMUNICATIVOS**, para analizar el dominio de estrategias de comunicación, capacidad y creatividad para resolver problemas comunicativos, asi como la originalidad de las ideas. La creatividad y la riqueza de estrategias deben ser un elemento fundamental de las clases de matemáticas, entendidas desde el *"hacer matemáticas*" y desde la

[1] No se emplea la expresión "resolución geométrica", porque entendemos que la resolución geométrica abarca tanto la construcción o solución gráfica como la expresión escrita correspondiente a dicha resolución. Denominamos texto o discurso escrito a dicha producción escrita.

"resolución de problemas". Se trataría de determinar cuando un alumno es capaz de resolver situaciones a pesar del desconocimiento de un término específico o el olvido de una definición, proponiendo caminos alternativos y superando ese escollo comunicativo.

Establecemos los siguientes indicadores:

Para **COHERENCIA**

Componente: **COHERENCIA**	Indicadores:
Intratextual	repeticiones, contradicciones, insuficiencia de ejemplos, insuficiencia de argumentos, desorden, ambigüedad, información insuficiente o excesiva, falta de claridad- inadecuación respecto al objetivo comunicativo
Extratextual	coincidencia entre el procedimiento descrito a través del texto y el llevado a cabo en la construcción

Para **RESPETO Y ADECUACIÓN**

Componente: **RESPETO Y ADECUACIÓN**	Indicadores:
Respeto	Imposiciones de voluntad o imperaciones, ofrecimiento de opciones, reforzamiento de lazos.
Adecuación	Un registro adecuado a la edad del destinatario, un registro adecuado a la relación que se mantiene con el destinatario: relación profesor- alumno, relación alumno- alumno, un registro adecuado a las circunstancias de lugar y tiempo: ámbito educativo, la clase.

Para **ORTOGRAFÍA Y VOCABULARIO.**

Componente: **ORTOGRAFÍA Y VOCABULARIO**	Indicadores:
Ortografía	Uso correcto de las palabras y signos auxiliares, propias del castellano en general y del lenguaje geométrico en particular, uso correcto de notaciones.
Vocabulario	Empleo de palabras que no son usuales en el lenguaje habitual del sujeto, precisión en la utilización adecuada de las palabras, oportunidad de su empleo en el desarrollo de la idea o de su situación en la frase.

Para **CREATIVIDAD Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMUNICATIVOS**

Componente: **CREATIVIDAD Y SOLUCIÓN**	Indicadores:
	Utilización de sinónimos cuando no se recuerda una palabra específica, Construcción de definiciones convenientes.

Se ilustran a continuación, algunas producciones de los alumnos analizadas con los instrumentos diseñados.

Análisis de la resolución propuesta por Sara

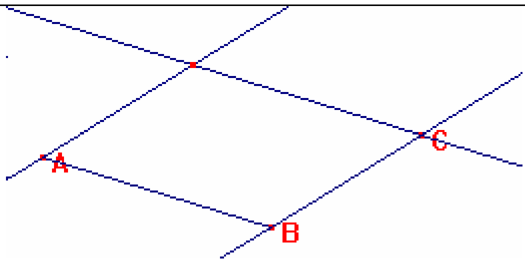
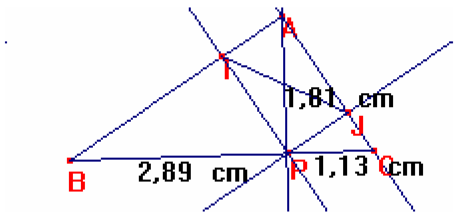
Enunciado:	Construye en la pantalla tres puntos **A**, **B** y **C** y encuentra un punto **D**, de forma que al polígono **ABCD** sea un paralelogramo Escribe el procedimiento que has utilizado
Solución gráfica:	
Texto:	*"Hice puntos ABC no aliñeados, y los junte con segmentos, menos un lado y luego hice la paralela al punto A, luego la recta al punto C, recta paralela al segmento, punto de intersecion a la recta, y despues cada punto los uni con segmentos, e hice los comentarios."*
Coherencia intratextual	El comentario presenta varias incoherencias: "menos un lado" (no queda claro a qué se refiere esa expresión), "luego hice la paralela al punto A" (información contradictoria), "la recta al punto C" (información insuficiente y poco clara), el resto de la frase es una sucesión incompleta e inconexa de acciones sin coherencia alguna. Además, en todos los pasos de la construcción faltan condiciones, lo que da lugar a ambigüedades
Coherencia extratextual	La coherencia intratextual es tan marcada, que es prácticamente imposible analizar la coherencia extratextual
Cortesía y adecuación	Se analizan exclusivamente en los casos de intercambio a través de foro o correo electrónico
Ortografía	Comete cinco errores ("aliñeados" por alineados, "junte" por junté, "intersecion" por intersección, "despues" por después, "uni" por uní) No utiliza ningún punto, separa todo por numerosas comas quedando una frase en la que se pierden las jerarquías y la claridad.
Vocabulario	Si bien utiliza muchos términos del lenguaje específico (segmento, intersección, punto, segmento), dicho empleo es totalmente impreciso e incorrecto: "puntos ABC" por puntos A, B y C "los junte con segmentos" por "los uní con segmentos" "luego hice la paralela al punto A" por paralela por el punto A "luego la recta al punto C, recta paralela al segmento" por recta paralela al segmento AB por el punto C "punto de intersecion a la recta" por punto de intersección de las rectas anteriormente trazadas
Creatividad y solución de problemas comunicativos	No se evidencia.

Ilustración de RESPETO Y ADECUACIÓN

Texto del mail:	Análisis:
"Hola profesor espero que haya pasado buena Semana Santa y espero tambien que este bien la respuesta, es lo unico que pensaba que podia ser... UN SALUDO Adrián Álvarez"	Responde a las normas de cortesía y adecuación
"Bueno profe , hace un poco de tiempo que no le contesto por las vacaciones y por que la última semana no vine al colegio, pero aqui estan las respuestas y se lo mando junto con la actividad por si acaso (las respuestas estan en color morado)."	Responde a las normas de cortesía y adecuación
"ola profe a ke mola mi letra he ya ves .una cosa tus trabajos ke nOs mandas son muy aburrios (demasiado). Bueno un saludo para los tuYos y tus alumnos de parete de el: JALDO JEJEJEJE BUENO ADIOS"	El texto, no responde a las normas de cortesía ni de adecuación
"ola q´ tal te va? a mi mu bien. un saludo adios victor"	El mensaje es cortés pero inadecuado para el destinatario.

Ilustración de CREATIVIDAD Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMUNICATIVOS

Enunciado	Sean **ABC** un triángulo rectángulo y **P** un punto móvil en la hipotenusa **BC**. Si **I** es un punto que está en **AB** y **J** es otro punto que está en **AC**, de tal manera que **PI** es perpendicular a **AB** y **PJ** es perpendicular a **AC**, ¿existe una posición del punto **P** en la que la longitud del segmento **IJ** tenga un valor mínimo?
Solución gráfica:	
Texto:	"El punto en el que tiene que estar P para que la longitud de IJ sea mínima es en el que se corta la perpendicular de BC pasando por A con el segmento BC..."
Análisis:	Sandra no recuerda o no identifica que "la perpendicular de **BC** pasando por **A**" es la altura del lado **BC**; pero evidencia creatividad al superar ese problema comunicativo construyendo una definición conveniente que sustituye el término altura.

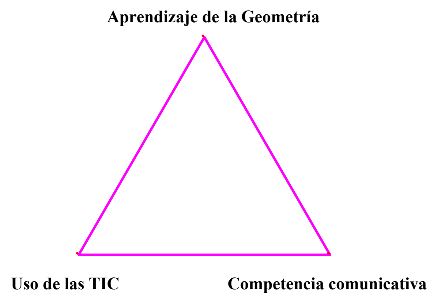
Aunque el proceso de análisis se encuentra en curso, citamos algunas conclusiones previas.

CONCLUSIONES

Podemos decir que la estructura de las actividades diseñadas se muestra adecuada al entorno de aprendizaje utilizado y que la categorización de las actividades y los instrumentos diseñados (componentes e indicadores) resultan apropiados para analizar las producciones de los alumnos.

Los primeros análisis muestran algunos beneficios en los alumnos, que recogemos en un sistema de tres dimensiones: beneficios relativos al aprendizaje de la Geometría (AG), relativos al uso de las TIC y relativos a la capacidad de interacción y comunicación (CC).

Representamos este sistema mediante un triángulo en cuyos vértices se encuentran cada uno de los aspectos mencionados y cuyos lados representan las interacciones entre los mismos.



Hemos llegado al esquema anterior al preguntarnos: ¿Por qué a lo largo del taller mejora el aprendizaje de la Geometría? ¿Por qué mejora la comunicación? ¿Por qué mejora el uso de las TIC?... y encontrar que las respuestas no son independientes entre sí.

A lo largo del proceso, estas dimensiones no se comportan como polos aislados sino como vértices en permanente interacción con los demás; dando lugar a un progreso conjunto y contextualizado en el que las mejoras en cada dimensión se nutren de los progresos de las otras pero a la vez realimentan dicho progreso.

El AG mejora en parte gracias al uso del entorno interactivo multimedia implementado; pero también este progreso en el AG contribuye a mejorar el desempeño de los alumnos como usuarios de las TIC- por el hecho de que el proceso de aprendizaje de la Geometría los ha involucrado como usuarios reflexivos de las mismas.

El desarrollo de la CC, ha favorecido el mejor aprendizaje de la Geometría –porque saber comunicar un saber añade valor a ese saber-, pero este desarrollo también se debe a las mejoras en el AG en general, porque la comunicación se aprende en un contexto específico y para comunicarse es necesario compartir unas temáticas, un registro, un lenguaje común como es en este caso el geométrico que no se aprende aisladamente sino en interacción con el resto de estrategias y conceptos geométricos: los progresos generales en el aprendizaje de la geometría dan fluidez y seguridad a los procesos de comunicación.

Con respecto a las interacciones entre los vértices TIC- CC; el uso de las TIC permiten la comunicación –ser mejores usuarios de las TIC optimiza su uso comunicativo- pero a la vez las mejoras en las estrategias de comunicación optimizan el uso de las TIC –saber qué, a quién, cómo y porqué se quiere comunicar permite un mejor uso del medio.

A lo largo del proceso, los alumnos asumen una posición activa y con autonomía creciente frente a sus aprendizajes: actuando como usuarios de las TIC, como usuarios de la comunicación y "haciendo matemáticas" que es la manera en que entendemos el aprender matemáticas.

La resolución de las actividades propuestas (y que responden a las distintas modalidades antes detalladas), requiere conceptos y procedimientos geométricos y comunicativos de distinto tipo.

El diagnóstico inicial realizado, nos mostraba que los alumnos mostraban dificultades para abordar problemas geométricos sencillos (aunque las temáticas ya habían sido desarrolladas curricularmente) y, en particular, que el uso del lenguaje verbal geométrico presentaba numerosas (y a veces graves) dificultades.

En relación a este diagnóstico inicial y al estudio de perfiles de aprendizaje, podemos decir que el entorno diseñado, el proceso de enseñanza- aprendizaje propuesto y las interacciones (reales y virtuales) producidas en el Taller, han producido mejoras en el aprendizaje de la Geometría en general y en la capacidad de comunicación de procesos geométricos en particular, en tanto han permitido la superación y/ o disminución de las dificultades mencionadas.

Asimismo, mencionamos que el cambio de actitud frente a la clase de Matemáticas manifestado por los alumnos fue notorio, evidenciándose evidencia a través de distintos indicadores (asistencia a clase, puntualidad, predisposición ante el trabajo propuesto, manifestaciones orales relativas al gusto y a la comodidad en la clase, actitud participativa, comparación con la actitud de los mismos alumnos en la clase tradicional, visión del profesorado, etc.)

REFERENCIAS

Alsina, C., Fortuny, J. M, y otros (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. España: Síntesis.

Canale, M. (1995). De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje en *Competencia comunicativa*. Madrid: Edelsa

Duval, R. (2001). La Geometría desde un punto de vista cognitivo. PMME- UNISON

Figueiras, L. (2000). *Written Discourse in Virtual Environments*. UAB

Fortuny, J. M. Y Jiménez, J. (2000). *Teletutorización Interactiva en Matemáticas para asistencia hospitalaria*. Proyecto TIMAH. PIE. Barcelona.

Godino, J. (2001). Confrontación de herramientas teóricas para el Análisis Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas (www.ugr.es/locel/jgodino/semiótica.htm).

Grice, P. (1991). Las intenciones y el significado del hablante, en *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos

Lescano, M. Y Lombardo, S. (2002). La competencia comunicativa, en *Documentos de Prodymes II*, Buenos Aires.

MECD, BOE Nº 158 (3-7- 2003), 25683, RD 831/2003.

Mendoza, A. y otros (2003). *Didáctica de la Lengua y la Literatura*, Madrid: Prentice Hall

Menezes, M. y otros (2004). Comunicación y Formación: el papel de la escritura en la formación inicial de profesores de matemática en *XVI SIMPOSIO IBEROAMERICANO*, Castellón, España

Miret, I., Tusón, A. (1996). La lengua como instrumento de aprendizaje en *Textos de Didáctica de la Lengua y la Literatura 8*, Barcelona: Graó

Morgan, C (1998). *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*. Londres: Falmer Press

Murillo, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO.* Tesis doctoral inédita. UAB

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático en *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. España: Graó

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description, en *Uddanneise* 9

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE

Oliveira, M. (1995). Letramento, cultura e modalidades de pensamento en: A. Kleiman (org.): *Os significados do Letramento: uma nova perspectiva sobre a prática social da escrita.* Campinas, SP: Mercado de Letras.

Powell, A. Y López, J. (1995). A escrita como veículo de aprendizagem da matemática: Estudo de um caso en *Boletín GEPEM, Río de Janeiro, Nº 33*

Powell, A. (2001). Captando, examinando e reagiendo ao pensamento matemático, en *Boletín GEPEM 39, Río de Janeiro*

Rico, L. (2003). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003 en E. Castro, y E. De La Torre, (eds.): *Investigación en Educación Matemática, 8º Simposio de la SEIEM.* La Coruña: Servicio de Publicaciones de la Universidad da Coruña.

Sfard, E. A. (1997). *Learning Mathematics Through Conversation: Is It as They Say? A Debate, for The Learning of Mathematics*. Documento inédito,

THALES, SAEM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad THALES.

Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Curso-taller como técnica para la obtención de datos

Gregoria Guillén
Universitat de Valencia

Olimpia Figueras Mourut de Montpellier
CINVESTAV IPN, México

Resumen

Investigaciones realizadas en Educación matemática han señalado que algunos maestros sienten la carencia de recursos para poder modificar su manera de enseñar la geometría a nivel escolar; reconocen tener limitaciones para enseñar esta materia y sienten que les es muy difícil mejorar su formación a partir de su práctica docente. En este trabajo presentamos comentarios y expresiones de maestros de primaria en ejercicio sobre la enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria, obtenidos en el estudio exploratorio desarrollado en Nayarit (México) utilizando un "curso taller" para maestros como técnica para recolección de datos. Esta información que aportaron los maestros se refiere a: i) creencias y concepciones; ii) la labor docente referida a los contenidos que se enseñan y cómo se enseñan; iii) "aspectos"señalados por los maestros que participaron en el curso sobre el desarrollo del mismo.

Abstract

In mathematics education research the following aspects have been highlighted: Teachers think they lack resources to modify their way of teaching geometry; they recognize having hindrances to teach that subject and find it difficult to ameliorate their initial education taking as a starting point their everyday practice. In this paper primary in-service teachers' ways of thinking about teaching geometry of solids obtained in an exploratory study carried out at Mexico are described. A teacher's workshop was set up in the state of Nayarit as a means to collect data about: i) beliefs and conceptions, ii) teaching linked to the contents they teach and how they teach it, and iii) 'aspects' brought out by the participants regarding the workshop.

PRESENTACIÓN

Hay una gran variedad de investigaciones relativas a la enseñanza de la geometría en primaria cuyos resultados pueden aplicarse en el salón de la clase. Sin embargo, como muestran algunas investigaciones (Barrantes y Blanco, 2004; Guillén 1997; Guillén y otros, 2004) el panorama no es muy alentador. Si nos centramos en la geometría de los sólidos, en estos trabajos se subraya la poca atención que se presta a la enseñanza de la misma en las escuelas y la "manera" en que ésta se enseña: se hace a partir de dibujos. Se apunta también que algunos docentes priorizan el estudio de la medida al de la geometría y se indican las razones que explican esta elección.

En este documento presentamos comentarios y expresiones de maestros de primaria en ejercicio sobre la enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria, obtenidos a partir de un curso-taller desarrollado en Nayarit (México). Esta información que aportaron los maestros se refiere a: i) creencias y concepciones; ii) la labor docente referida a los contenidos que se enseñan y cómo se enseñan; iii) “aspectos”señalados por los maestros que participaron en el curso sobre el desarrollo del mismo.

La investigación llevada a cabo se inscribe dentro de un proyecto más amplio[1] cuyo objetivo final es iniciar la construcción de una “Biblioteca virtual” que permite incidir en la formación de los profesores y en sus concepciones y creencias e indirectamente en la mejora de la enseñanza de las matemáticas en primaria.

ANTECEDENTES. MARCO EN EL QUE SE HA DESARROLLADO EL TRABAJO

Los resultados que se exponen en este documento forman parte de un trabajo exploratorio del que ya hemos publicado algunos resultados (Guillén y Figueras, 2004; Guillén et al. 2004). En estos trabajos se indican las hipótesis previas de partida y establecemos el marco en el que estamos realizando el trabajo, marco que vamos a describir brevemente a continuación. El estudio tenía tres propósitos: 1) Obtener información sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría en la primaria en algunas escuelas de Nayarit y sobre "aquello" que los maestros subrayan en relación con el desarrollo de un curso-taller sobre didáctica de la geometría orientado a la formación y a la investigación. 2) Contrastar la información obtenida a partir del curso-taller con los resultados obtenidos mediante una encuesta, 3) Ampliar la formación de algunos maestros sobre el *conocimiento didáctico del contenido* (Thompson, 1992) en relación con la geometría de los sólidos a nivel escolar. Los resultados de este informe se refieren al objetivo 1. Pretendemos obtener información, por un lado, sobre creencias y concepciones de los maestros en relación con la enseñanza de la geometría de los sólidos y sobre los contenidos que los maestros “dicen” impartir en sus clases; por otro, sobre los aspectos que los maestros explicitan sobre el desarrollo del curso taller.

Diferentes tipos de conocimiento. Situando la investigación actual en el marco de la formación del profesor, tomando como referente, entre otros, el trabajo de Climent y Carrillo (2003) y los que ahí se referencian, en el conocimiento del profesor se consideran diferentes componentes: Conocimiento del contenido matemático *de* y *sobre* las matemáticas y el conocimiento de la materia para su enseñanza. Nosotros en esta indagación hemos comenzado analizando las creencias, concepciones y tomas de postura ante dicotomías que pueden presentarse, todas ellas componentes del conocimiento y desarrollo profesional, y nos centramos especialmente en “la labor docente del maestro”, considerando que tiene que enseñar los contenidos matemáticos escolares de hechos, procedimientos, conceptos, etc. Este contenido lo analizamos referido a *la formación profesional* del maestro.

Los antecedentes de este trabajo hay que situarlos también en una primera indagación sobre la problemática de la enseñanza de la geometría en Escuelas de Magisterio (Guillén, 1997). La secuencia de actividades diseñadas para la toma de datos la hemos elaborado tomando como referencia esta investigación. Dando continuidad a la misma, el contenido escolar de hechos, procedimientos, conceptos, etc. lo hemos reorganizado como referido a: a) procesos matemáticos (analizar, describir, clasificar, generalizar, etc.), b) relaciones entre contenidos geométricos, c) uso de destrezas (construir, modificar, transformar) para trabajar los procesos matemáticos indicados o para desarrollar habilidades (comunicar y/o representar formas).

---

[1] Proyecto "Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas". Proyecto de investigación, co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) (con clave G37301-S).

Acerca de creencias y concepciones. Como marco para el trabajo consideramos también los estudios que han señalado la influencia de las concepciones de los individuos sobre su modo de actuar (véase por ejemplo, Peterson, Fennema, Carpenter y Loef, 1989, citado por Llinares, 1996). En nuestro estudio el término *creencia* lo utilizamos con el significado de Villoro (1982), quien considera que las condiciones necesarias para toda creencia son: *S* cree que *p* si y sólo si: 1) *S* está en un estado adquirido *x* de disposición a responder de determinada manera ante determinadas circunstancias; 2) *p* ha sido aprehendida por *S*, y 3) *p* determina *x*. De donde propone la siguiente definición: *creencia*, que se refiere a un estado interno del sujeto, es un estado disposicional adquirido, que causa un conjunto coherente de respuestas y que está determinado por un objeto o situación objetiva aprehendidos. Ese estado es una condición inicial sin la cual no se explicaría la consistencia en las respuestas del sujeto. Añadida a los estímulos y a otras condiciones iniciales (otras creencias y otras disposiciones) es causa del comportamiento. Las creencias se manifiestan a través de declaraciones verbales o de acciones. El término *concepción* lo usamos con el significado que expresa Ponte (1994): Las concepciones son los marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva, que condicionan la forma en que realizamos las tareas. Thompson (1992) apunta que las concepciones se mantienen con plena convicción, son consensuadas y tienen procedimientos para evaluar su validez.

RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

Los resultados de este trabajo se han obtenido a partir de un curso-taller que impartimos en julio de 2003, en cinco sesiones de 5 horas de duración cada una, a 20 docentes del Estado de Nayarit (México) que cubrían todos los niveles educativos (de 1º a 6º). A partir del curso, obtuvimos información por varias fuentes (Elliot, 1986)[2]. Acompañando al material de trabajo repartimos una libreta, para que la utilizase el docente al dar sus respuestas; ésta se recogió después de finalizar el curso al entregarles la certificación del mismo. Asimismo, al finalizar cada sesión, el profesor que impartió el curso escribía un resumen de la sesión. Todas las sesiones se grabaron en audio y video para poder contar también con las intervenciones de los docentes. Para el estudio tuvimos en cuenta el trabajo desarrollado por los 13 docentes que siguieron todas las sesiones del curso y entregaron en el plazo indicado las libretas así como las intervenciones de todos los docentes en las sesiones.

En el anexo indicamos preguntas que planteamos a los maestros para que las respondieran de manera individual. Las actividades 0.1 y 0.2 (véase el cuadro I del anexo), a partir de las que se pretendía obtener información sobre creencias y concepciones acerca de la enseñanza de la geometría en primaria, se respondieron en la primera sesión del curso y las actividades A-1 y A-2 (véase el cuadro II del anexo) a partir de las que se pretendía obtener datos sobre los contenidos relativos a los sólidos que los maestros imparten y cómo se imparten, las trabajaron los docentes fuera del horario del curso. Bien en la primera sesión, después de trabajar la actividad a nivel individual, o al principio de la segunda sesión (para las actividades que se respondieron fuera del horario del curso) hubo una puesta en común en la que se analizaban las respuestas dadas por algunos docentes a estas actividades. Sus respuestas las consideramos también al resolver otras actividades. Por ejemplo, las respuestas a la actividad A-2 se consideraron cuando se plantearon cuestiones en las que se reflexionaba acerca del enfoque con el que habíamos introducido y desarrollado la geometría en el curso. Después de estas reflexiones lo que se analizaba era sus respuestas a A-3.

El elemento básico para el análisis de las respuestas y de las discusiones dadas por los docentes a las cuestiones planteadas fueron "expresiones de los docentes" que caracterizamos como Barrantes y Blanco (2004, p. 245) definen las unidades de análisis: Son palabras o conjuntos de ellas procedentes de las respuestas, que constituyen un fragmento de texto de unidad variable, dependiendo de la extensión con que se hable de la cuestión o discusión planteada. Puede ser una oración o un conjunto

---

[2] El trabajo que presentamos no corresponde a una investigación/acción; ahora bien, los métodos que se proponen en Elliot (1986) para recoger información en las fases de exploración y control de la investigación en la acción las hemos considerado aquí como fuente para obtener información.

de oraciones que no tienen por qué coincidir con las respuestas o intervenciones individuales de los docentes. Estas expresiones las distinguíamos y/o agrupábamos a su vez en función de a qué hacían referencia.

Por ejemplo, las expresiones que hemos distinguido para las respuestas dadas a la actividad A-2 hacen referencia a: i) familias de sólidos que se consideran objeto de estudio; ii) aspectos en los que se centra especialmente la atención en el estudio; iii) cursos para los que se sugiere su estudio; iv) características de estas familias que se señalan; v) idea y/o definición que se expresa; vi) relaciones que se contemplan; vii) ideas erróneas que se reflejan.

Para los comentarios que escribieron los docentes al finalizar el curso, en los primeros escrutinios encontramos que lo que se quería expresar estaba relacionado con: i) las maneras de enseñar del experto al desarrollar las sesiones, ii) las maneras de enseñar del alumno-docente, iii) con las maneras de aprender del alumno-docente, iv) con su conocimiento anterior al curso-taller, v) con su conocimiento posterior a éste, vi) con las dificultades enfrentadas por el alumno-docente, vii) con expresiones sobre el currículo, sobre la situación escolar y/o sobre los libros de texto y viii) en relación con la formación de docentes. Estos aspectos sirvieron de guía para estructurar las ocho categorías que delimitamos para que pudieran servir de taxonomía de las expresiones verbales de los docentes. Estas categorías se han subdividido a su vez en subcategorías, que a su vez se han dividido en clases. Dada la extensión de este informe, no damos cuenta de ellas.

Además del análisis cualitativo hemos realizado un análisis cuantitativo sobre las frecuencias en las que aparecen los enunciados o las categorías que hemos establecido.

RESULTADOS

En el estudio realizado se han obtenido una gran variedad de resultados pero dada la brevedad de este informe sólo vamos a indicar algunos como ejemplo.

Resultados sobre creencias, concepciones y tomas de postura. La mayoría de los docentes en sus respuestas a las actividades del cuadro I del anexo plasmaron una idea de geometría como la materia que estudia las formas: los cuerpos geométricos y las figuras planas; asimismo, en sus respuestas contemplamos otras visiones sobre esta materia escolar: 1) Visión escolar estática-restringida, sugerida por el currículum tradicional; se concibe como mera asignatura que se enseña a partir de parte de los contenidos que se indican en los libros de texto. 2) Visión docente; se concibe como los contenidos que se imparten con los recursos que se utilizan. 3) Se concibe como una ciencia del espacio físico en el que el niño vive y se mueve; se conecta la geometría con el entorno cotidiano del niño. 4) Se mira la asignatura en un contexto escolar en relación con las otras asignaturas; se ve como parte de las matemáticas escolares y/o se compara su importancia con la de otras asignaturas del currículum escolar. 5) Se transciende la mera concepción como asignatura escolar; se concibe la geometría como la descripción de las formas que hay en el universo; se incluye como parte de las matemáticas y/o se considera como una ciencia del saber humano. 6) Se tiene una visión de la misma asociada a la etimología del término; así se ve la geometría como ciencia de las figuras geométricas desde el punto de vista de su forma y su medida.

Pudimos comprobar, por un lado, que las opciones elegidas como que reflejan mejor la opinión de los docentes eran las que estaban influidas por el currículum asociadas a la aritmética (opinión 4 del anexo) o a la geometría (opinión 3) y, por otro lado, que todos eligieron los sólidos en vez de la geometría plana para iniciar el estudio de la geometría. En las sesiones del curso pudimos interpretar esta elección: en la introducción se hacía referencia a algunos objetos que había en el entorno cotidiano a los que se les daba el nombre que tienen según su forma. Además se expresó la idea de que una creencia favorable hacia la enseñanza de la geometría de los sólidos no conlleva que se vaya a enseñar en las clases ya que hay otros condicionantes.

Acerca de los resultados relativos a los contenidos geométricos que se imparten y cómo se imparten. En las respuestas a varias actividades pudimos constatar que en 3º y/o 4º el estudio se centra en la terminología para distinguir unos prismas de otros y en lo manual (dibujo y construcción); y en los niveles superiores (5º y 6º) el estudio se dirige hacia la aritmetización (estudio del volumen, capacidad y del área lateral). Se corroboró también que la geometría de los sólidos y del plano se enseña como contenidos separados sin remarcar sus relaciones y conexiones.

Constatamos en repetidas ocasiones la creencia de que los conceptos geométricos hay que introducirlos y describirlos dando una "definición" de los mismos que contenga todas las propiedades que se conocen del concepto correspondiente. Las características que expresaron la mayoría de los docentes para el cilindro, cono, prismas y pirámides correspondían a las que se incluían en la definición que ellos daban para estas familias; "idea" que en la mayoría de las respuestas podría surgir del mundo de la construcción a partir de un desarrollo. Sólo dos de ellos la dieron en términos de volumen, otro, contempló el cono y/o la esfera (pero no el cilindro) como sólidos de revolución y también hubo un docente que contemplaba la esfera como lugar geométrico.

Con respecto a las caras laterales de un prisma sólo un docente indicó que eran paralelogramos. La mayoría indicaron que eran rectángulos. Si además tenemos en cuenta que dos de estos maestros indicaron que las bases del prisma son polígonos regulares y/o que las caras laterales son iguales, podemos lanzar la hipótesis de que en el estudio que se hace de estas familias no se presta apenas atención a los prismas de base irregular ni a los prismas oblicuos.

Otras expresiones de las respuestas de los docentes que cabe señalar son las que dan cuenta de que la geometría de los sólidos se enseña centrando la atención en el nombre de las familias y a partir de ejemplos prototipo colocados en posición estándar. Entre ellas: i) se dan descripciones que reflejan una colocación de los sólidos en posición estándar; ii) se plasma una idea de base del prisma o de la pirámide como cara de apoyo; iii) se expresa la idea de que en las pirámides las aristas laterales son más largas que las aristas de la base; iv) las pirámides truncadas se consideran como pirámides; v) se habla de las pirámides como si sólo tuvieran un ejemplo (el que usan en la descripción).

Acerca de los comentarios de los docentes sobre "su impresión" del curso-taller. Analizadas las categorías de las expresiones de los docentes que indicamos en la metodología hemos encontrado cambios que se apuntaron por algunos docentes en relación con la geometría escolar como consecuencia del desarrollo del curso; éstos se referían a creencias y/o concepciones y/o a la labor docente. Entre los primeros destacamos las expresiones que remarcan que con el estudio de la geometría se puede iniciar y desarrollar actividad a partir de ella en cualquier grado escolar y las que relacionan la geometría con el entorno del estudiante. Entre los segundos señalamos cambios en relación con: i) el enfoque para introducir el estudio de la geometría; ii) el énfasis que se pone en el trabajo manual y el trabajo mental; iii) el uso que se hace de las destrezas para trabajar los procesos matemáticos de describir y clasificar; iv) la utilización que se hace de los recursos didácticos; v) el papel que juegan los no ejemplos para la enseñanza escolar; vi) el papel que juegan las definiciones; vii) las creencias que se tienen sobre algunas acciones ligadas a la generalización como componentes de la práctica escolar en primaria; viii) cómo desarrollar el lenguaje geométrico de los niños; viii) cómo comportarse ante los "errores" que surgen en la clase.

CONCLUSIONES

En este estudio hemos podido comprobar ideas que tenían algunos docentes de primaria mexicanos sobre la geometría de los sólidos a nivel escolar que se han visto reflejadas en los contenidos geométricos que dicen impartir en sus clases y en la manera de impartirlos. En estas ideas tenía un gran peso el estudio de la misma dirigido hacia la aritmetización. Asimismo se le daba mucha importancia a la terminología asociada a la geometría y a su estudio mediante definiciones (que supuestamente son de las matemáticas), así como a las cosas manuales, en particular al dibujo, que tiene que ver con la destreza manual para dibujar. También constatamos que estos docentes tenían en consideración otra idea que está en contraste con la anterior: lo que se dice en su propio currículum, que para el estudio de la geometría señala partir de los objetos y de la vida real; sin embargo no les quedaba claro por qué partir de ahí ni hacia dónde ir. Se reconocía no tener un guión para la enseñanza de la geometría desde los objetos reales hacia la geometría contemplando también los modelos y otras representaciones de los objetos geométricos.

Por otro lado, en relación con el curso taller desarrollado podemos concluir que éste se ha mostrado muy efectivo para que los maestros reflexionen sobre el conocimiento que tienen acerca de la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos en primaria y sobre sus carencias, y para motivarles a continuar su formación. Dado el gran interés y motivación que mostraron los maestros que participaron en el estudio para aprender/enseñar sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría escolar y su buena disposición para colaborar en la investigación que estábamos realizando, en un intento de mejorar la situación de la geometría en la escuela primaria, surge un rayo de esperanza para que la enseñanza de la geometría en algunas escuelas de primaria sea una realidad y no sólo un deseo que está plasmado en las orientaciones curriculares.

REFERENCIAS

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar, *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 22 (2), pp. 241-250.

Climent, N. y Carrillo, J. 2003. El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, vol. 21, 3, pags. 387-404.

Elliot, J. (1986). "Action-Research": Normas para la autoevaluación en los colegios, en Elliot, J.; Barrett, G.; Hull, CH.; Sanger, J.; Wood, M.; Haynes, L. (1986). *Investigación/acción en el aula.* Valencia: Generalitat Valenciana. CCEC, pags. 21-48.

Guillén, G. (1997). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje. (Tesis doctoral). Valencia: Universitat de València (Publicada en 1999. Col·lecció: Tesis doctorals en Microfitxes. Valencia: Universitat de València).

Guillén, G. y Figueras, O. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta, en Castro, E.; De la Torre, E. (eds.) (2004). Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M). A Coruña: Universidade da Coruña, pags. 219-228.

Guillén, G.; Figueras, O.; Corberán, R.M. (2004). Algunos resultados sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Un estudio exploratorio. Se publicará en las Actas del XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática. Universitat Jaume I. Castellón, 15-15 de septiembre de 2004.

Llinares, S. (1996). Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria, en Jiménez, J.; Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.). *El Proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Mathema, pags. 13-36.

Ponte, J. (1994). Mathematics Teacher' Professional Knowledge, en Ponte, J. y Matos, J. eds. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Lisboa: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research, in Grouws, D.A. ed. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, Pp. 127-147.

Villoro, L. (1982). *Creer, saber, conocer.* México: Siglo XXI editores.

ANEXO: ACTIVIDADES

0.1 ¿Qué le viene a la cabeza cuando escucha la palabra geometría? ¿Qué indicaría cuando quiere explicar a otra persona lo que para usted es la geometría?

0.2 Considere las opiniones que presentamos a continuación sobre cómo ha de ser la iniciación al estudio de la geometría o sobre los contenidos por los que ha de iniciarse ésta. Indique con una E la/s opinión/es con la/s que no está de acuerdo, con una B aquella/s con la/s que está de acuerdo y utilice una A para aquella que refleja mejor su opinión.

1. Tiene que comenzar con el conocimiento empírico de figuras planas y sus elementos, conocimiento que se obtiene por observación y razonamiento y que permite sacar conclusiones de esta observación.
2. Tiene que haber un desarrollo informal de la geometría euclidiana, presentando sus elementos en un orden intuitivo.
3. Tiene que conectar con el espacio en el que el niño vive y se mueve; debe tratarse pues como una organización de las experiencias espaciales intuitivas del niño.
4. Se tiene que tratar relacionándola directamente con ejemplos prácticos; el énfasis se debe poner en la utilización de situaciones sacadas de la vida real.
5. El estudio de la geometría tiene que comenzar con el plano.
6. El primer contacto con el estudio de la geometría tiene que ser con la geometría del espacio.
7. La geometría del plano se ha de estudiar inmersa en la geometría del espacio.

Cuadro 1

A.1 ¿Qué conceptos relativos a los sólidos trabajan en el grado que imparten? ¿Cuáles eliminarían del currículo de los propuestos para su grado? ¿Cuáles añadirían?

A-2 Considere cada una de las siguientes familias de sólidos: cubos, prismas, pirámides, cilindros, conos, esferas, y responda a las siguientes cuestiones:

¿La trabajan en clase? ¿Cómo lo hacen? ¿Cómo se introduce en los textos de primaria?¿Cómo la introducen ustedes en sus clases? ¿Se han introducido en un grado anterior?

¿Qué características subrayaría de cada una de estas familias? Apunte todo lo que podría decir de cada una de ellas y las relaciones que conoce entre diferentes familias de sólidos o entre sus elementos. Indique también en qué grado impartiría las características y/o relaciones que señale o si considera que no son adecuadas para la primaria.

Cuadro II

Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas

Juan D. Godino, Angel M. Recio, Rafael Roa, Francisco Ruiz y Juan L. Pareja
Proyecto de Investigación "Edumat-Maestros". Universidad de Granada

Resumen

Mediante la aplicación de algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática se desarrollan criterios para diseñar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basados en el uso de recursos tecnológicos. Los criterios son aplicados al análisis de un recurso virtual orientado al estudio de nociones algebraicas elementales por estudiantes de magisterio en el marco de su formación matemática y didáctica.

Summary

Using some theoretical notions from the ontosemiotic approach to mathematic cognition and instruction we develop criteria to design and evaluate mathematics teaching and learning processes based on the use of technological tools. We apply these criteria to analyse an applet oriented to explore elementary algebraic notions by student teachers in the context of their mathematics and didactical training.

INTRODUCCIÓN

Los recursos didácticos, sean manipulativos o virtuales, pueden ser el soporte para el planteamiento de problemas y situaciones didácticas que promuevan la actividad y reflexión matemática. Como tales recursos, tienen unas potencialidades que deben ser hechas realidad por el profesor, lo cual no es inmediato, ya que no es suficiente con el enunciado de las tareas sino que es necesario identificar e implementar los conocimientos matemáticos y la trayectoria de estudio correspondiente. Es ingenuo pensar, como se supone en ciertas posiciones constructivistas sobre el aprendizaje, que el alumno aprende interactuando con los recursos y resolviendo problemas, sin tener en cuenta tanto el papel de las interacciones entre los estudiantes como el papel del profesor.

La disponibilidad de recursos tecnológicos (en la modalidad de "applets" y otros tipos de programas interactivos) destinados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es ya en la actualidad muy abundante. Instituciones oficiales en España (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa, MECD, "Proyecto Descartes") y profesionales a nivel internacional, como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), promueven el desarrollo y difusión de recursos para los distintos contenidos matemáticos y niveles educativos. Empresas comerciales han desarrollado también diversos programas informáticos que han sido objeto de numerosas investigaciones y experiencias de innovación, como las referidas a CABRI, LOGO y DERIVE.

Esta situación plantea un reto a los profesores, formadores de profesores e investigadores en educación matemática ya que la incorporación de estos recursos en el estudio de las matemáticas no es inmediata y transparente. En el "Research Forum" del PME 25, Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2001) presentaron los resultados de un meta-análisis de más de 600 publicaciones de los últimos diez años con informes de investigaciones y experiencias de innovación sobre el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y las Comunicaciones) en la educación matemática. Este trabajo y otros "surveys" similares (Ruthven y Hennessy, 2002) han constatado el bajo nivel de integración de las TIC en las clases de matemáticas y la diversidad de factores a tener en cuenta, tanto para la evaluación de sus efectos como de las condiciones de implementación. Se constata una tensión entre las altas expectativas del uso de las TIC para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la baja integración en las clases. Parece necesario abordar el tema desde nuevas perspectivas que ayuden a comprender este fenómeno.

En este trabajo vamos a aplicar algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002) para elaborar criterios de evaluación de recursos, situaciones y trayectorias didácticas. Según este marco teórico es necesario tener en cuenta las interacciones entre la trayectoria mediacional y las distintas dimensiones implicadas en el estudio de las matemáticas, esto es, las componentes o dimensiones epistémica, cognitiva, emocional, docente y discente (Godino, Contreras y Font, en prensa). Describiremos los criterios aplicándolos al análisis de un recurso propuesto para la introducción de nociones algebraicas elementales: la balanza de expresiones algebraicas (NCTM: http://illuminations.nctm.org).

Este recurso ha sido usado en un curso de formación inicial de maestros en el que se registraron algunas interacciones de los estudiantes con el mismo. Durante el análisis haremos referencia a algunos incidentes ilustrativos de dicha experiencia relacionados con las interacciones de los estudiantes con el recurso y el papel del formador en el proceso de estudio. La falta de espacio nos impide extendernos en esta dirección.

La pauta de análisis que vamos a describir en este trabajo, elaborada desde el marco teórico mencionado, puede ayudar a explicar el dilema altas expectativas/ baja integración de los recursos informáticos en las clases de matemáticas, al tener en cuenta la complejidad de las interacciones de las diversas dimensiones y factores implicados. Nuestro análisis puede orientar también en el diseño de recursos tecnológicos y de trayectorias didácticas basadas en los mismos, así como para prever conflictos semióticos potenciales.

Para la elaboración de la pauta de evaluación de los recursos didácticos tendremos en cuenta los conocimientos matemáticos que potencialmente se ponen en juego en el uso del recurso (en su doble faceta, institucional y personal). Dichos conocimientos son analizados teniendo en cuenta los tipos de entidades primarias emergentes de la actividad matemática (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos) y algunos aspectos de las dualidades cognitivas descritas en el marco teórico de referencia (Godino, 2002).

DESCRIPCIÓN DEL RECURSO

En la balanza con **expresiones algebraicas** (Figura 1) se escriben expresiones con una variable X en cada platillo de una balanza virtual, por ejemplo, X-7 y 7-X. En la celda designada como X = aparece un valor por defecto (X=-10) que se puede cambiar, bien desplazando horizontalmente el cursor situado a la izquierda, o escribiendo directamente un número en la celda. Automáticamente se calculan los valores de las expresiones escritas en los platillos y se representan en la ventana correspondiente las gráficas de las funciones Y =X-7; Y=7-X. Ambas rectas se cortan en el eje de abscisas para x = 7.

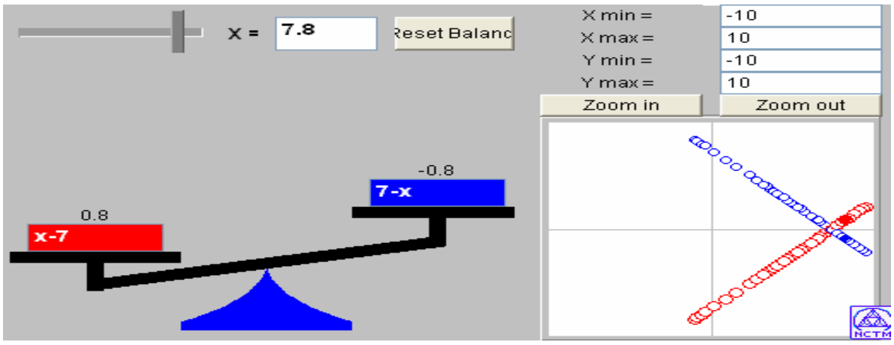


Figura 1: Balanza de expresiones algebraicas

Como posibles tareas sugeridas por los diseñadores del "applet" figuran las siguientes:

1. Introduce las expresiones x + x y 2*x en los platillos de la balanza. Cambia el valor de x desplazando el cursor deslizante o clicando en el gráfico y arrastrando el ratón. ¿Qué observas cuando cambia el valor de x?

2. ¿Qué observas en la balanza cuando pones las expresiones 7-x y x-7? ¿Cómo se corresponde el comportamiento de la balanza con el gráfico?

3. ¿Qué expresión nunca se iguala con 7-x? ¿Cómo puedes reconocer en el gráfico que estas dos expresiones nunca son iguales?

4. ¿Puedes encontrar otras dos expresiones de manera que cuando el valor de x aumenta la balanza se comporta del siguiente modo: (1) Se equilibra para algunos valores; (2) Siempre está en equilibrio; (2) Siempre está desequilibrada.

5. Encuentra expresiones equivalentes a las siguientes, comprobando la equivalencia con la balanza: x * (x + 1); (x + 1) / x ; x / (x + 1); (x + 1) / (x + 1)

La balanza de expresiones resalta el hecho de que una ecuación se puede interpretar como una relación entre dos expresiones simbólicas, que la igualdad puede cumplirse para cualquier valor de la variable, para ningún valor, o para un número finito de valores.

DESARROLLO Y APLICACIÓN DE UNA PAUTA DE ANÁLISIS

Clasificaremos las cuestiones de reflexión y análisis teniendo en cuenta las dimensiones epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales) e instruccional (funciones docentes y discentes; patrones de interacción). Para las dimensiones epistémica y cognitiva fijaremos la atención en los tipos de entidades primarias y las facetas cognitivas duales que se proponen en el enfoque ontosemiótico como objetos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas. Cada una de estas dimensiones *"interactúa con la tecnología de diferentes maneras"* (Kaput, 2004, p. 2).

Debido a la falta de espacio desarrollamos con algún detalle el análisis de la dimensión epistémica, siendo las demás parcialmente descritas. Esta opción permite no perder la visión global de la complejidad del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y las posibilidades del marco teórico para abordarla.

Dimensión epistémica (conocimientos institucionales pretendidos)

Situaciones

S1) ¿Qué tipo de situaciones-problemas (tareas) específicas permite plantear el recurso?

Los tipos de cuestiones que se pueden plantear son:

- ¿Qué valor de x resuelve la ecuación, E1(x) = E2(x)?
- ¿Para qué valores de x las expresiones E1(x) < E2(x) (respectivamente >)?

Dando valores numéricos a la variable x el "applet" permite resolver ecuaciones en las cuales intervienen expresiones racionales (no sólo lineales y cuadráticas).

Se quiere introducir el uso de la igualdad como equivalencia de expresiones algebraicas y como punto de intersección de las gráficas de dos funciones. Simultáneamente se tiene una situación matemática de comparación (numérica y gráfica) de dos expresiones algebraicas evaluadas para valores de la variable x. Cada miembro de la igualdad se interpretan como funciones, Y = 7-x; Y = x-7, que son representadas en un gráfico cartesiano.

S2) ¿Sobre qué tipo de situaciones previas se apoyan las nuevas situaciones?

La figura de la balanza y su comportamiento virtual como consecuencia de la "colocación de pesos en cada platillo" refiere metafóricamente a las experiencias de pesar objetos tangibles. Se suponen conocidas la situación de la medida con la balanza, la representación cartesiana de las funciones y la interpretación de cada miembro de una ecuación como el criterio de una función.

S3) ¿Qué variables de tarea permiten generalizar la actividad matemática y en qué dirección?

Las expresiones que se pueden introducir en los platillos de la balanza pueden ser no sólo polinómicas, sino algebraicas racionales y trascendentes, por lo que las ecuaciones, inecuaciones y funciones cuyos valores numéricos se pueden comparar son muy generales. Por ejemplo, se pueden plantear cuestiones como: ¿Para qué valores de x se hace cero la expresión (sen(x)+cos(x))/x.

El rango de valores de x e y que se representan se puede cambiar actuando en los botones señalados como zoom (in y out). La igualdad de las dos expresiones, que corresponde a la solución de la ecuación, se interpreta como intersección de las gráficas de las dos funciones.

Lenguaje

L1) ¿Se introduce un lenguaje específico en la descripción y uso del recurso? ¿Qué nuevos términos, expresiones, símbolos y gráficos se introducen?

Se usa la expresión de una ecuación (inecuación) como equilibrio (desequilibrio) de una balanza. El desequilibrio de la balanza se puede expresar mediante el lenguaje de las inecuaciones. El signo = se usa de manera ostensiva en la asignación de un valor específico a las variables X e Y, (X = 7.8, X min = -10, ...). Pero también hay usos no ostensivos de la igualdad,

- Para indicar el valor de cada expresión, colocando el resultado encima del platillo.
- Asignación funcional mediante las gráficas (y = x-7; y = 7-x).
- Equivalencia de expresiones cuando la balanza está en equilibrio.

L2) ¿Se utiliza más de un registro semiótico, traducciones y tratamientos entre los mismos?

Se pretende relacionar el punto de corte de las gráficas con la situación de equilibrio de la balanza y la igualdad de los valores calculados para las dos expresiones colocadas en cada lado de la balanza.

L3) ¿Qué conocimientos lingüísticos previos requiere el uso del recurso?

Se suponen conocidos los lenguajes de la balanza, las gráficas cartesianas, y las expresiones algebraicas (* para la multiplicación, ^ para la potenciación). La atribución de valores a la variable mediante el desplazamiento de un cursor, y la interpretación de los valores máximo y mínimo para la

X y la Y.

L4) ¿Es útil en la progresión del aprendizaje matemático el lenguaje específico introducido?

Dado el uso cada vez más extendido de recursos informáticos, los convenios lingüísticos utilizados pueden aparecer en otros similares (cursores, pulsadores, etc.).

Técnicas (acciones)

T1) ¿Qué técnicas específicas se requieren para la solución de las tareas?

- Se evoca la manipulación imaginaria de la balanza; cambiando los pesos se puede lograr el equilibrio.

- Manipulación del "applet" (escritura de expresiones, asignación de valores a x; elección de extremos para los intervalos).

La técnica de solución de las ecuaciones consiste en dar valores a la variable y observar el comportamiento de la balanza y las gráficas; puede ser útil en los casos en que no se disponga de un método algebraico de solución (reducción, sustitución, etc.)

T2) ¿Qué técnicas previas es necesario dominar para aplicar las nuevas técnicas?

- Manipulación y ejecución de programas informáticos y del hardware necesario.

T3) ¿Es posible generalizar las técnicas y en qué dirección?

Aunque la manipulación del "applet" implica el aprendizaje de algunos convenios específicos (escritura en los platillos, asignación de valores a x desplazando un cursor), estos convenios suelen tener un alcance general en este tipo de recursos informáticos. Su aprendizaje puede ser de utilidad para operar esos otros recursos.

Conceptos (reglas conceptuales)

C1) ¿Qué conceptos específicos se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?

Solución de una ecuación como valor numérico que iguala ambos miembros y como punto de intersección de dos gráficas.

C2) ¿Qué conceptos previos se usan de manera explícita o implícita y se suponen conocidos?

La metáfora de la balanza supone familiaridad con la magnitud peso, cantidades, unidades y medidas. Números y operaciones aritméticas; reglas de uso de paréntesis. Funciones reales de variable real; gráficas cartesianas de funciones.

C3) ¿En qué dirección se pueden generalizar los conceptos emergentes?

El recurso está construido como soporte específico y restringido a los conceptos descritos.

Propiedades

P1) ¿Qué propiedades se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?

Si a una equivalencia de expresiones algebraicas se les aplican las mismas transformaciones a ambos miembros, la equivalencia se mantiene.

P2) ¿Qué propiedades previas se usarán de manera explícita o implícita y se suponen conocidas?

Si a los dos platillos de una balanza se añaden o quitan los mismos pesos, se mantiene el equilibrio.

P3) ¿En qué dirección se pueden generalizar las propiedades emergentes?

No se pretende generalizar la propiedad emergente mencionada.

Argumentos(justificaciones)

A1) ¿Qué tipo de justificaciones de las técnicas y propiedades proporciona el recurso?

La justificación de las técnicas y propiedades es de tipo empírico y ostensivo. La solución de la ecuación se logra asignando valores a x de manera continua; el dispositivo calcula y muestra los resultados de manera numérica y gráfica. No hay argumentación deductiva.

A2) ¿Las argumentaciones específicas propiciadas por el recurso se apoyan en otras previas?

No consideramos aplicable en este caso.

A3) ¿En qué dirección se pueden generalizar las argumentaciones propiciadas por el recurso?

No se pretende en este caso.

Dimensión cognitiva (significados personales)

El análisis a priori de los conocimientos institucionales que potencialmente se ponen en juego en la implementación del recurso proporciona elementos para la elaboración de instrumentos de evaluación de los significados personales de los estudiantes, respecto de los conocimientos previos requeridos, y de los nuevos conocimientos logrados tras el proceso de estudio. Cada uno de los seis tipos de elementos descritos en la sección 3.1. nos pueden servir de guía para elaborar ítems de evaluación de los significados personales de los estudiantes. La falta de espacio nos impide incluir el cuestionario elaborado para evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes que participaron en nuestra experiencia.

Dimensión instruccional (funciones docentes, discentes y patrones de interacción)

El análisis epistémico a priori realizado nos proporciona un marco de referencia para elaborar posibles *trayectorias didácticas* de los contenidos puestos en juego por el recurso. Tales trayectorias se implementarán de acuerdo a unas *guías de estudio*, o "proyectos de enseñanza-aprendizaje", en los cuales se hará una selección de los distintos tipos de conocimientos y su secuenciación temporal. En esta fase, la cuestión será la búsqueda de criterios que permitan optimizar la *idoneidad epistémica* (Godino, Contreras y Font, en prensa) del proceso de estudio, entendida como representatividad de los significados pretendidos respecto de los significados de referencia.

Las guías de estudio deben incluir también indicaciones sobre el desempeño de las funciones docentes y discentes, así como una previsión de los tipos de configuraciones didácticas que optimicen la idoneidad didáctica del proceso. Algunas cuestiones relacionadas con las funciones docentes:

¿En qué nivel educativo se puede usar el recurso?

¿En qué medida facilita el recurso que los estudiantes se impliquen personalmente en la realización de las tareas?

¿Cuánto tiempo se puede dedicar a los distintos tipos de tareas que se pueden proponer?

¿Cómo interesa secuenciar las tareas y las técnicas?

¿Qué conocimientos se deberán institucionalizar (regular) y en qué momento?

¿Facilita el recurso la evaluación de los conocimientos de los estudiantes?

El recurso no es transparente en diversos aspectos. El docente deberá plantear cuestiones problemáticas que inciten a la exploración, informar de los convenios lingüísticos, institucionalizar los nuevos conocimientos pretendidos. En particular, los usos no ostensivos (implícitos) del signo = y del lenguaje de las ecuaciones e inecuaciones requieren intervenciones del docente si se desea sistematizar los conocimientos pretendidos.

En la experiencia de enseñanza que hemos realizado con estudiantes de magisterio hemos podido observar que el profesor ha debido comenzar explicando el funcionamiento del "applet", la escritura de las expresiones, uso del cursor para asignar valores a la variable x de manera continua, interpretar las dos expresiones que se escriben en los platillos como una ecuación y la relación entre cada miembro y los gráficos cartesianos

Algunas cuestiones que ayudan a evaluar el recurso desde el punto de vista de las funciones del estudiante son:

¿Pueden los estudiantes usar el recurso de manera autónoma para actividades de exploración?

¿Están disponibles los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes?

¿Aporta el recurso elementos para la autoevaluación de los aprendizajes pretendidos?

¿Ayuda el recurso a identificar conflictos semióticos y resolverlos?

¿En qué medida facilita el recurso la implementación de configuraciones didácticas de tipo adidáctico, dialógico, magistral o personal?

Otras cuestiones que debemos plantearnos para evaluar globalmente la pertinencia o eficacia de un recurso pueden ser:

¿Existe un recurso alternativo que permita implementar los conocimientos pretendidos de una manera más eficaz?

¿Cómo se puede complementar el recurso con otros para optimizar la progresión del aprendizaje matemático? ¿Para qué tipo de conocimientos?

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

La gran cantidad de investigaciones e innovaciones sobre el uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas muestra el interés que el tema despierta, así como su extraordinaria complejidad. El estudio cualitativo y cuantitativo realizado por Lagrange y cols (2001) muestra que las ideas y resultados publicados están débilmente apoyados por la reflexión y la experimentación y no se ha abordado toda la complejidad de las situaciones educativas. La dificultad de la integración (uso e implementación efectiva en las clases) se puede ver a través de esa perspectiva: las innovaciones presentan una amplitud de ideas y proposiciones cuya difusión es problemática; la investigación se esfuerza por afrontar la complejidad del uso de las TIC.

Nuestro objetivo ha sido construir una pauta que sirva como herramienta para mirar las condiciones de implementación de algunas herramientas TIC y las dimensiones a tener en cuenta, tanto de tipo epistémico (conocimientos institucionales), cognitivo (significados personales) como instruccionales (funciones docentes, discentes y patrones de interacción). En la práctica el marco teórico y la pauta de análisis elaborada puede ayudar a los investigadores e innovadores a diseñar, implementar y evaluar proyectos de integración de las TIC en las clases de matemáticas y comprender mejor la problemática multidimensional implicada.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco de los Proyectos de Investigación BS2002-02452, y MCYT SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Ambos proyectos son cofinanciados con Fondos FEDER (UE).

REFERENCIAS

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237-284.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).

Kaput, J. (2004). Technology becoming infrastructural in mathematics education. ICME-10 TSG-15: *The role and use of technology in the teaching and learning mathematics*. http://www.ICME-10.dk

Lagrange, J.B, Artigue, M., Laborde, C. y Trouche. L. (2001). A meta study on IC Technology in education. Towards a muldimensional framework to tackle their integration. *Proceedings of the 25 PME Conference*. Freudenthal Institute, Utrecht.

MEC. *Proyecto Descartes*, http://descartes.cnice.mecd.es/

NCTM. Illuminations, http://illuminations.nctm.org/tools/index.aspx

Ruthven, K. y Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 49: 47-88.

El álgebra aritmética de George Peacock: un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica[1]

Aurora Gallardo y Oralia Torres
CINVESTAV, México

Resumen

Describimos brevemente las aportaciones de Peacock al álgebra escolar. Su Álgebra Aritmética contiene: cantidades positivas, términos positivos y términos negativos y la exclusión de cantidades negativas. Su Álgebra Simbólica aborda: la existencia independiente de los signos más y menos; símbolos positivos y negativos y la extensión de la operación de sustracción. El Álgebra Simbólica incluye al Álgebra Aritmética como aquella ciencia cuyas leyes sugirieron las del Álgebra Simbólica.

Abstract

We described briefly Peacock´s important contributions to school algebra. His Arithmetical Algebra exhibits: positive quantities; positive and negative terms and the exclusion of negative quantities. His Symbolical Algebra shows: the independent existence of the signs + and - , positive and negative symbols and the extension of the subtraction operation. Symbolical Algebra must include Arithmetical Algebra as that science the laws of which suggested those of the Symbolical Algebra.

ESBOZO HISTÓRICO

Si bien es cierto que George Peacock impulsó el nacimiento del Álgebra Moderna actual, es diferente una lectura de su obra desde la historia o desde las matemáticas que desde la educación matemática. Desde esta última, se mira distinto porque se busca otra cosa. La intencionalidad no es la misma. Nuestro George Peacock, el de este artículo, es el autor del siglo XIX preocupado por enseñar álgebra a estudiantes.

En este artículo discutiremos algunas de las ideas fundamentales descritas en *A Treatise of Algebra* de George Peacock en sus dos versiones, la de 1830 y la de 1845. Esta obra dio lugar a controversias con respecto a las cantidades negativas en la Inglaterra de principios del siglo XIX. En el siglo XVIII las matemáticas se definieron como la *ciencia de la cantidad*[2] y las entidades negativas fueron consideradas *cantidades menores que nada* y *cantidades obtenidas al sustraer una cantidad mayor de*

[1] Estudio teórico financiado por CONACYT. Proyecto de investigación: 44 632. “Procesos de Abstracción y Patrones de comunicación en aulas de matemáticas y ciencias en entornos tecnológicos de aprendizaje: estudio teórico experimental en alumnos de 10 a 16 años de edad.”

[2] *Lo que es capaz de incrementarse o disminuirse es denominado magnitud, o cantidad.* Euler (1828)

una menor. Ninguna definición resultaba lógicamente correcta. Más aún, lo mencionado anteriormente originaba otro problema, el de la definición de la operación de sustracción (Pycior, 1981). Un momento decisivo para la matemática inglesa tuvo lugar en 1815 cuando se constituyó la Sociedad Analítica en el Trinity College en Cambridge. Con el objeto de solucionar esta problemática Maseres (1758) y Frend (1796) ambos graduados de Cambridge, sugirieron el abandono de las cantidades negativas y restringir la sustracción a los casos en que el minuendo sea mayor o igual al sustraendo. Maseres renunció a la teoría de ecuaciones que había florecido durante los siglos XVII y XVIII y, en particular al Teorema Fundamental del Álgebra. Argumentaba por ejemplo, que la ecuación $x^2 + p\,x = r$ sólo tiene una raíz. Consideró el caso: $x^2 + 2\,x = 15$ y estableció que $x = 3$, raíz positiva era aceptable, pero trató de demostrar lo absurdo de admitir la raíz $x = -5$. Sustituía $x = -5$ en la ecuación y, con de la ley de signos que también criticaba, llegaba a $25 - 10 = 15$. Esta expresión afirmaba, es una ecuación de la forma $x^2 - 2x = 15$. En su opinión, admitir la raíz negativa, $x = -5$, resultaba de confundir dos ecuaciones distintas.

Con el objeto de establecer el álgebra como ciencia, Maseres y Frend negaron las entidades algebraicas cuestionables y redujeron el álgebra a *la aritmética universal,* es decir, al álgebra que aceptaba los signos más y menos como signos de operación únicamente.

En su reporte de 1833, Peacock explicaba que la aritmética universal no podría aceptarse en lugar del álgebra porque:

> *"Han existido una multitud de proposiciones y de resultados algebraicos de incuestionable valor y consistencia entre sí, pero irreconciliables con dicho sistema, o, a todas luces no deducibles de éste, y entre ellas la teoría de la composición de ecuaciones, que Harriot había logrado en forma acabada y que hacía necesario considerar las cantidades negativas en álgebra aunque, vano sería el intento de atribuirles significado alguno".*

Peacock proclamó los primeros principios del álgebra y el establecimiento de las que denominó *Álgebra Aritmética (*AA*) y Álgebra Simbólica (*AS*)*. La concepción de Peacock era la siguiente: pasamos de la aritmética de los números positivos a AA reemplazando simplemente los numerales por letras. Sin embargo el resultado sólo puede presentarse por números digitales[3], de tal forma que la expresión de $a - b$, donde b es mayor que a, no posee referente. Aquí, los símbolos son generales en forma pero específicos en valor. En AA consideró Peacock, que todos los resultados incluyendo las cantidades negativas no deducibles estrictamente de conclusiones legítimas provenientes de las definiciones de las operaciones aritméticas[4], deben rechazarse como imposibles. A continuación, afirma, *que "pasamos de AA a AS, permitiendo que las letras adquieran todo el rango de valores numéricos".*

La existencia de dos cuerpos de álgebra diferenciados, constituyó un tema extremadamente polémico entre los matemáticos británicos de las décadas de 1830 y 1840. Este acercamiento peculiar del álgebra proveniente de la escuela de Cambridge, su intencionado formalismo, le resultó repugnante a Hamilton (1837) entre otros. Hamilton deseaba asociar algún significado a *los imposibles* de la aritmética, a las cantidades negativas e imaginarias, vía la intuición Kantiana del tiempo puro. Visualizaba el álgebra como *la ciencia pura del número*, donde este concepto debía generarse por intuición mental, de forma que los elementos del álgebra no estuvieran sin referente.

En la segunda versión de su *Treatise on Algebra* (1845), Peacock separó el AA de AS y dedicó un primer volumen a la exposición de la primera ciencia y a AS le asignó un segundo volumen. Estaba convencido de esta separación *"porque es extremadamente difícil cuando las dos ciencias se tratan*

[3] Para Peacock la idea de cantidad es más amplia que la de número porque para él este concepto se restringe a los números positivos formados por los 9 dígitos y el cero (números digitales).

[4] "Como sean expresadas o comprendidas, ya que nunca han sido formalmente enunciadas" afirmó Peacock.

*simultáneamente, el mantener sus principios y resultados diferenciados y obviar la confusión, la oscuridad y falsedad del razonamiento que esta unión ocasion*a".

El autor consideró su segunda versión como un tratado nuevo, un libro de texto donde el estudiante familiarizado con los resultados de AA y con las limitaciones de ésta, se encontraría en condiciones de comprender las conclusiones legítimas de esta ciencia y estaría preparado para el estudio de AS. Aclara que, aunque en AA el contenido sobre las operaciones algebraicas es elemental; los otros temas no lo son, como sucede con la teoría de operaciones, las fracciones continuas, la extracción de raíces simples y compuestas, la teoría de razones y proporciones, tópicos sobre aritmética comercial, solución de problemas indeterminados de primer grado y proposiciones sobre teoría de números. Dado que el orden de los temas es secuencial en cuanto a dificultad, el material debe ser conocido completo por los estudiantes. En este artículo sólo retomaremos ejemplos de conceptos fundamentales de los capítulos I (*Principios de AA*) y V (*Sobre resolución de ecuaciones*) con el objeto de mostrar la minuciosidad y profundidad del escrito.

ÁLGEBRA ARITMÉTICA

El capítulo I comienza construyendo el AA aclarando que los signos de operación[5] no se requieren en Aritmética. Así la suma de 271, 164 y 1 023 se representa como:

$$\begin{array}{rl} 271 & \\ 164 & \\ \underline{1023} & \\ 1458 & \text{resultado final} \end{array}$$

Si se describe la suma anterior en forma horizontal, será necesario introducir los signos de operación y estos reemplazarán la proposición verbal: *la suma de ... resultado final* y obtendremos:

$$271 + 164 + 1\ 023 = 1458$$

Si avanzamos un paso más y sustituimos los números por letras *a, b, c*, ... nos encontramos en AA y llegamos a adiciones de la forma: a + b, a + b + c. Establece así, reglas fundamentales de operaciones cuando los símbolos son empleados para representar números; por ejemplo:

$$a + b = b + a$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a$$

Nos advierte que la sustracción no es conmutativa y que en a – b, *a* debe ser mayor que *b*. En caso contrario, a - b representa una cantidad imposible en AA. Es precisamente esta distinción surgida en la operación de sustracción lo que obliga a la separación entre AA y AS.

Peacock enfatiza que nos encontramos siempre ejemplos de operaciones en AA que no podemos realizar o resultados que no podemos reconocer. Es muy difícil en innumerables casos, descubrir la imposibilidad de operaciones o la inadmisibilidad de un resultado antes de que la operación se realice. Por ejemplo al sustraer de:

$$7a + 5b,$$

los términos de a + 3b, 3a -2b y 3a + 7b

obtenemos: 7b – 10b. Este resultado es imposible en AA.

[5] En este artículo sólo consideramos las operaciones de adición y sustracción.

Surgimiento de Términos Positivos y Negativos

Peacock consideró que sería conveniente denominar a los términos que no están precedidos por signo alguno, o lo están por el signo más, términos positivos y aquellos precedidos por el signo menos, términos negativos. Señaló que los estudiantes deben advertir que no se adhiere significado a los adjetivos positivo y negativo en AA. Peacock desvía así el énfasis de atribuir significado a los símbolos y signos a priorizar las leyes de las operaciones.

De hecho, no necesitaba términos negativos para sustraer. Afirmaba: "Si sustraemos b de a, el resultado está representado por a-b, que expresa el exceso del número a sobre b." Lo que fuerza a definir términos negativos es que estos aparecen en multiplicaciones y divisiones. Por ejemplo, dividir $2ab + b^2 + a^2$ entre a + b. El cociente es

$[2b - \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} - \ldots]$. El segundo término del cociente $-\frac{b^2}{a}$ es la cantidad que al multiplicarla por *a*, produce: $-b^2$ porque $a \cdot \frac{-b^2}{a} = \frac{-ab^2}{a} = -\frac{ab^2}{a}$ = $-b^2$, siempre y cuando admitamos la existencia del término negativo $\frac{-b^2}{a}$.

Emergencia de Formas Equivalentes

Este autor advirtió que cuando los números son sumados, sustraídos, multiplicados o divididos, generalmente omitimos al concluir la operación, toda traza de los números originales y hacemos uso únicamente del resultado final expresado por los nueve dígitos y el cero. Sin embargo, si empleamos símbolos para denotar números generalmente no podemos, al menos que se trate de operaciones inversas, omitir en los resultados los símbolos involucrados en las operaciones, ni tampoco las operaciones mismas. Este hecho dio nacimiento a las formas equivalentes. Mostró que al encontrar las formas equivalentes, arribamos a restricciones en AA, Por ejemplo:

$$c - 10 + d + 8 - 14 - d + 9 + e = c + e - 7.$$

Sin embargo no puede igualarse a: -7 + c + e, expresión imposible en AA.

En el capítulo V encuentra formas equivalentes en ecuaciones cuadráticas que nos conducen a soluciones ambiguas. Así en $19x - 39 - 2x^2 = 6x - 33$, existen dos valores de x que son: $\frac{1}{2}$ y 6. Al completar cuadrados obtenemos:

$\frac{169}{16} - \frac{13x}{2} + x^2 = \frac{121}{16}$. Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, se llega a: $\frac{13}{4} - x = \frac{11}{4}$; $x = \frac{1}{2}$. Pero si invertimos el orden de los términos de la ecuación anterior, construiremos una forma equivalente a ésta y obtendremos:

x = 6. Existen dos valores de x. Por consiguiente, la solución es ambigua. Afirmaba también que, las ecuaciones pueden ser posibles o imposibles. La ecuación

$8x^2 + 33x = 44 - 48$ involucra una operación imposible. Las dos raíces de esta ecuación en *AS* serían –4 y $-\frac{1}{8}$ pero ninguna de las dos puede interpretarse en AA. Esto muestra que la solución de ecuaciones requerirá en general, de la ayuda de los propios principios de AS.

ÁLGEBRA SIMBÓLICA

Peacock se trasladó de AA a AS *bajo* las siguientes consideraciones:

> *"La suposición de la existencia independiente de los signos + y – conduce a la operación denotada por – igualmente posible en todos los casos: y es esta suposición la que impone la separación de AA y AS y la que vuelve necesario el establecimiento de los principios de esta última bajo un uso independiente de signos sugerido como un medio para evadir una dificultad resultante de la aplicación de operaciones aritméticas a símbolos generales."* (Peacock 1830).

Alternativamente, más adelante en la misma obra, Peacock escribió:

> *"Si, generalizamos la operación denotada por -, de manera que pueda aplicarse en todos los casos, habremos encontrado la existencia independiente de este signo como una consecuencia necesaria y por lo tanto habremos introducido una clase de cantidades, cuya existencia nunca fue contemplada en la Aritmética o en el Álgebra-Aritmética."* (Peacock1830)

La restricción esencial de que AS debe incluir a AA cuyos principios sugirieron los de AS, la denominó, el Principio de Permanencia de Formas Equivalentes y lo enuncia como sigue:

> *"Cualquiera que sea la forma equivalente en Álgebra Aritmética considerada como la ciencia de la sugestión, donde los símbolos son generales en su forma, aunque específicos en sus valores, continuará siendo una forma equivalente donde los símbolos son generales tanto en su naturaleza como en su forma".*

Añadió Peacock, *"bajo este principio seremos capaces de dar una interpretación consistente a formas simbólicas como +a y –a refiriéndolas la una a la otra".*

Asimismo este autor afirma que solamente en AS formamos y reconocemos los resultados cualesquiera que sean, sin ninguna referencia a su consistencia con las definiciones o reglas del AA. Esto nos lleva a las equivalencias siguientes:

$$a - (a + b) = a - a - b = -b;$$

$$a - (a - b) = a - a + b = +b.$$

El principio de formas equivalentes asegura la identidad de las dos ciencias en cuanto a los resultados en común y evita que el AS degenere en una ciencia totalmente arbitraria. Así los resultados de AS que no son comunes a los de AA son generalizaciones de forma, y no necesariamente consecuencia de las definiciones.

Enfatiza Peacock que es en el paso de AA a AS, cuando los símbolos cesan de ser aritméticos, que puede determinarse el significado de las operaciones y de las cantidades no por definición sino vía interpretación. Por ejemplo, la adición de un símbolo precedido por un signo negativo es equivalente a la sustracción del mismo símbolo precedida por el signo positivo e inversamente. Así:

$$a + (-b) = a - b = a - (+b)$$

$$a - (-b) = a + b = a + (+b)$$

En el caso de símbolos negativos, la operación de adición no puede continuar asociándose con la idea fundamental de crecer, ni la sustracción con la de decrecer. Numerosos son los casos en que las cantidades negativas admiten una interpretación consistente. Un ejemplo de la existencia de cualidades de magnitudes fue expresarlas como direcciones opuestas de rectas en geometría, una de las aplicaciones más importantes de AS. Otro ejemplo es la simbolización de los conceptos opuestos de posesión y deuda. Peacock agregó: "los ejemplos anteriores sobre la interpretación del significado de cantidades negativas y de las operaciones a que están sujetas, serán suficientes para mostrar al estudiante que el AS no es irreal ni imaginaria." (1845)

Es importante señalar que para Peacok hacen sentido los términos negativos en AA. Estos se convierten en símbolos negativos en *AS*, pero nunca nombra a estos símbolos números negativos.

ESBOZO DIDÁCTICO

¿Por qué es necesario considerar el AA de Peacock en la enseñanza del álgebra escolar?

En la Inglaterra de este autor, no se había dilucidado aún una posible extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros. Sin embargo, Peacock mostró la necesidad de rescatar las cantidades negativas y se enfrentó a tratar de justificar su existencia a fin de validar muchos resultados ya clásicos de teoría de números y álgebra. Además, con el propósito de exhibir a los estudiantes lo necesario de las cantidades negativas, Peacock construyó el AA donde la negatividad no tenía cabida creando así la urgencia de su aceptación. Recurrió al uso independiente de los signos más y menos, artificio teórico introducido por él, para poder justificar las cantidades negativas y la validez de la operación de sustracción en todos los casos, arribando así al AS. Dentro de la Educación Matemática y específicamente en el curso introductorio del álgebra elemental, hemos encontrado que muchos estudiantes de 12 a 13 años de edad, al resolver sus ejercicios, consideran sólo signos y no números positivos y negativos. Esta situación los ha conducido frecuentemente a un uso arbitrario del lenguaje matemático y a la pérdida de significado y sentido en las tareas escolares.

Dado que *el uso independiente de los signos más y menos* apareció tanto en la historia como también en estudiantes actuales, se recurrió en esta investigación, al método histórico-crítico caracterizado por movimientos recurrentes entre el análisis de textos clásicos de la historia de las matemáticas y el trabajo empírico realizado en el aula. El análisis histórico facilita por ejemplo, la construcción de secuencias de enseñanza que reflejan el progreso obtenido de la investigación teórica que puede ponerse a prueba en situaciones actuales donde conviven estudiantes y profesores. Acto seguido se vuelve a la historia de las ideas una vez que la búsqueda se ha enriquecido con los resultados del análisis empírico. Este movimiento de ida y vuelta es lo que sitúa estos estudios en el campo de la educación matemática y no en la epistemología o la historia de las matemáticas. (Filloy & Rojano, 1985; Gallardo, 2002)

El reto al que nos enfrentamos ahora es:

¿Cómo incorporar el legado de Peacock a los avances conceptuales y tecnológicos existentes actualmente en el álgebra escolar?

Pensamos que podría lograrse la incorporación del AA al álgebra escolar actual, si en nuestro trabajo empírico a iniciar, no perdemos de vista la importancia de advertir a los estudiantes que los naturales no son los únicos números y que los signos más y menos, además de corresponder a las operaciones familiares de adición y sustracción, forman parte de unos *números nuevos*, los enteros, que adquirieron este estatus en la historia después de muchos siglos de evitamiento y escasos reconocimientos. Ello explica en parte la dificultad de aceptarlos por los estudiantes situados en la transición de la aritmética al álgebra, donde la supuesta arbitrariedad de las literales agrega otro conflicto más.

Finalmente, estos estudios históricos pueden inducir a una reconceptualización de los números negativos en el currículum de las matemáticas escolares.

REFERENCIAS

Euler, L. (1828). *Elements of algebra.* 5nd ed. London: Longman, Orme and Co.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12–13 year olds with high proficiency in pre- algebra), in S. K. Damarin and M. Shelton (eds.): *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.* Columbus, Ohio.

Frend, W. (1796). *The principles of algebra*. London.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192. Kluwer Academic Publishes. Printed in the Netherlands.

Hamilton, W. R. (1837). Theory of conjugate function, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. *Transactions of the Royal Irish Academy* 17, 293-422. (In the mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton, H. Halberstam and R. E. Ingra, eds., 3, 3-96 New York/London: Cambridge Univ. Press. 1967).

Maseres, F. (1758). A dissertation on the use of the negative sign in algebra. London.

Peacock, G. (1830). *A treatise on algebra*. London.

Peacock, G. (1833). Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis. *In Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 185-352.

Peacock, G. (1842). *A treatise on algebra*. 2nd ed. (Reprinted New York. Scripta Matemática *1940*).

Pycior, H. (1981). George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra. *Historia Matemática*, 8, 23-45.

La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario

Tomás Pardo Salcedo
IES Tirant lo Blanc

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Did. Mat. Universidad de Valencia

Resumen

Presentamos algunos de los resultados más relevantes de un estudio sobre la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los números complejos. El estudio se ha dirigido recabar información para sustentar sugerencias de intervención en las pautas educativas en relación con esta temática.

Marco de referencia

Esta investigación se enmarca en la línea seguida por los miembros del grupo de Pensamiento numérico y algebraico (PNA) del Departamento de Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Valencia que toma como modelo de referencia el marco teórico de investigación en Matemática Educativa de Filloy (1999) denominado Modelos Teóricos Locales (MTL). Este marco fundamenta la investigación desde el punto de vista teórico y aporta, desde el punto de vista metodológico, una manera de organizar la investigación en matemática educativa orientada a la observación experimental de fenómenos de enseñanza y aprendizaje. En definitiva, los MTL nos ayudan a explicar de manera coherente los fenómenos observados. Los MTL se caracterizan por ser un modelo recurrente y contemplar cuatro componentes interrelacionadas: 1) Componente de enseñanza del MTL. 2) Componente de cognición del MTL. 3) Componente de competencia formal del MTL. 4) Componente de comunicación del MTL.

El objeto de estudio, el diseño y el desarrollo de la investigación

El objeto de estudio ha sido la problemática de la enseñanza/aprendizaje de los números complejos. El análisis previo de la problemática ha delimitado el marco teórico para la observación experimental situándolo en la componente formal, y dentro de ella en el análisis histórico y epistemológico.

Establecido el marco teórico se ha procedido al desarrollo de un programa de observación experimental donde ha entrado en juego la componente cognitiva mediante el procedimiento denominado *análisis de tareas*.

La hipótesis teórica a contrastar con la observación experimental fue la siguiente:

Es posible que algunas dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas en relación con los complejos, a las que se han enfrentado los matemáticos a lo largo de la historia, guarden paralelismo con las que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en esta materia.

Para centrar el estudio se ha tratado de rebuscar en el desarrollo histórico de los números complejos algunas de las dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas que han tenido que sortear los matemáticos y que la enseñanza actual no está teniendo en cuenta.

Una revisión histórica preliminar, permitió identificar cuatro grandes etapas caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos:

- *Algebraica*. Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, consideradas cómo raíces inútiles, aunque coherentes con los métodos algebraicos.
- *Analítica*. Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, consideradas como cantidades que por su naturaleza son imposibles, ya que no se pueden ubicar entre los números posibles: positivos, negativos, o nulos. Por eso, se las llama cantidades imaginarias porque sólo existen en la imaginación.
- *Geométrica*. Introducción de un eje de imaginarios que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1 y consideración de los imaginarios como vectores del plano. Así, en el plano de ejes real e imaginario un vector queda representado por $a+bi$; y $\sqrt{-1}$ actúa como rotación de 90º alrededor de O, es decir como un signo o índice de perpendicularidad.
- *Formal*. Formalización de los números complejos y consideración de los mismos como pares ordenados de números reales.

Estas etapas se tomaron como referencia para organizar la búsqueda y selección de cuestiones relevantes para contrastar la hipótesis, contextualizándolas en una concepción epistemológica. Con estas cuestiones se procedió a la elaboración y al pilotaje de un cuestionario para su posterior aplicación a 19 estudiantes de primer curso de la licenciatura de matemáticas en la Universidad de Valencia, en su ambiente habitual de clase el último mes del curso académico.

La selección de cuestiones para la observación experimental

El cuestionario sometido a los estudiantes constó de cinco tareas, una por cada una de las etapas señaladas antes, excepto en el caso de la etapa analítica de la cual se extraen dos tareas.

Para el estudio de las respuestas, se ha aplicado la metodología del "análisis de tareas", lo que ha permitido realizar una primera descripción y categorización de las actuaciones de los estudiantes mediante un modelo de interpretación, puesto a punto en otros trabajos precedentes de miembros de nuestro grupo de P.N.A. (Fernández, A. Figueras, O, Gómez B. y Margarit J.,1997; Fernández, A. Gómez B.; y Margarit J., 1997). Este análisis permite aventurar que se confirma la hipótesis de partida en el sentido de que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades identificadas que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes las reproducen, y en algunos casos agravadas.

Las cuatro primeras tareas fueron las siguientes (prescindimos de la quinta porque no ha cumplido con las expectativas):

Tarea 1: *la partición*

Esta tarea, la elegimos de la etapa que hemos llamado algebraica. Está tomada literalmente de Cardano (Ars Magna, 1545, p. 287) y consiste en un problema cuya solución viene de la mano de una ecuación de segundo grado. Su propósito es hacer aflorar las posibles dificultades e inconsistencias de los estudiantes para resolver un problema planteado con números enteros pero cuya solución no es real sino compleja. La respuesta adecuada implica aceptar que las raíces complejas de la ecuación de segundo grado que permite resolver el problema son soluciones matemáticamente válidas, aunque en el enunciado no se mencione el campo numérico en el que debe darse la solución.

Tarea 2: *el logaritmo*

Esta tarea, corresponde a la etapa que hemos denominado analítica. Está basada en una conocida controversia sobre la existencia de los logaritmos de los números negativos entre Bernouilli y Leibniz, recogida por Euler (1749). Esta controversia surgió ante las contradicciones a las que llevaba el uso poco exigente de las reglas de cálculo.

Su propósito es hacer aflorar las posibles dificultades e inconsistencias de los estudiantes cuando tienen que interpretar una secuencia de operaciones lógicas con logaritmos de números negativos.

La respuesta adecuada, implica el reconocimiento de la existencia de estos últimos en el campo complejo. Además, hay que saber cuando se pueden extender las reglas generales de la operatoria con logaritmos de los reales positivos a los negativos y por qué (hay infinitos logaritmos para cada número: los números reales positivos tienen un sólo valor del logaritmo que es real, siendo todos los otros imaginarios; los números negativos y los números complejos tienen todos los valores del logaritmo imaginarios).

2

Cuestión 1. La partición

Divide el número 10 en otros dos números cuyo producto sea 40

Explica como lo haces

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Cuestión 2. El logaritmo

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$\log(-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2\log(-x) = 2\log x \Rightarrow \log(-x) = \log x$,

por lo que

$\log(-x)$ existe y es un número real.

En particular para $x=1$, $\ln(-1) = \ln(1)$ que, como sabemos, es cero.

¿Es cierto?

……………………………………………………………

……………………………………………………………

¿Es correcto el razonamiento?

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Explica tu respuesta

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Tarea 3: *las operaciones*

Esta tarea, la ubicamos en la etapa analítica y está basada en anotaciones de Euler (1984, p.42-44) y Vallejo (1841, p.242), sobre el cuidado que hay que tener al multiplicar expresiones imaginarias. El objetivo de la tarea es hacer aflorar las dificultades e inconsistencias de los estudiantes ante la multiplicación de raíces con radicando negativo, dado que si se aplica la regla general de la multiplicación*: la raíz del producto es el producto de las raíces*; se obtiene un resultado contradictorio con la regla para multiplicar los números imaginarios. La respuesta adecuada implica el reconocimiento de que las reglas generales de la multiplicación no funcionan en el producto de raíces con radicando negativo.

Tarea 4: *el orden*

Esta tarea, la hemos diseñado basándonos en un comentario de Hamilton (1837; cit. Ferreirós, 1998, p. 11) donde se pone de manifiesto la dificultad de situar bajo la definición clásica de número a los imaginarios, dado que éstos no pueden satisfacer el requisito de ser un cuerpo ordenado, como ocurre con los números reales. El objetivo de esta tarea es hacer aflorar las dificultades e inconsistencias de los estudiantes cuando se les pide que ordenen números complejos presentados de varias formas. La respuesta adecuada implica reconocer que los complejos no tienen un orden compatible con su estructura de cuerpo.

4

Cuestión 3. Las operaciones

Calcula

a) $\sqrt{-5}\sqrt{-5}=$.

Explica tu respuesta

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1}=$

Explica tu respuesta

5

Cuestión 4. El orden

Usando los signos <, >, = ordena los números;

a) $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-1}$, 0, $\sqrt{1}$

Explica tu respuesta

b) 1+i, 1+2i, 2+2i, 2+i

Explica tu respuesta

c) i, $\sqrt{i}$,

Explica tu respuesta

LOS RESULTADOS

A continuación se presenta una muestra de las respuestas más relevantes de los estudiantes al resolver las cuatro primeras tareas del cuestionario para ilustrar el tipo de análisis que hemos hecho de las mismas.

Tarea 1: *la partición*

Ejemplo: Alumno 1

Cuestión 1. La partición

Divide el número 10 en otros dos números cuyo producto sea 40 $40=2^3\cdot 5 \wedge 10=5\cdot 2$

$10\,\underline{|5}$ $\quad$ $10\,\underline{|8}$
$\;0\;\;2$ $\qquad\;\;2\;\;1$

Explica como lo haces

$40=2^3\cdot 5=8\cdot 5$ i $10=5\cdot 2$ (sols
els podem dividir per potències de 2
fins 3 i 5.

Transcripción: “sólo los podemos dividir por potencias de 2 hasta 3 $\wedge$ 5 ” (hasta 2^3 y 5)

Explicación: El estudiante calcula los factores de 40 y de 10. Divide el 10 por dos números naturales menores que 10 y cuyo producto es 40.

Interpretación: De lo que manifiesta en el apartado “explica como lo haces”, interpretamos que el estudiante entiende que éste es un problema aritmético, y que en consecuencia sólo intenta resolverlo mediante operaciones aritméticas con números naturales. Tal vez hace una interpretación demasiado estricta de la palabra *divide* del enunciado. Es decir, lo entiende como la orden de hacer uso del algoritmo de la división, por eso divide por los números naturales cuyo producto es 40.

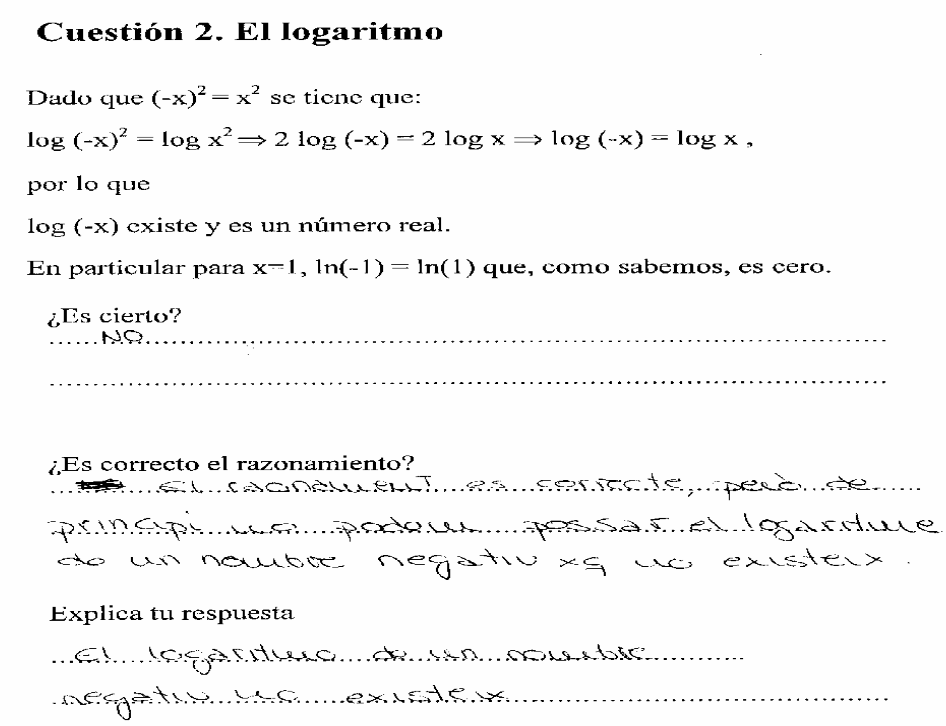
Predicción y sugerencias: Creemos que el estudiante repetirá este tipo de procedimiento con problemas análogos mientras no se le haga ver que éste es un problema que admite una lectura y una resolución algebraica, y que la palabra del enunciado *divide* se refiere aquí a *descomponer* en dos sumandos y no necesariamente a dividir en sentido estricto.

Utilizan el álgebra y dan la solución compleja	5/19
Utilizan el álgebra y dejan solución indicada sin expresión imaginaria	1/19
Utilizan la aritmética y se centran en factores del 40	5/19
Utilizan la aritmética e interpretan que hay que dividir el 10 en sentido estricto	2/19
No contesta o lo hace sin sentido aparente	6/19

Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea

Tarea: *el logaritmo*

Ejemplo: Alumno 2



Cuestión 2. El logaritmo

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$\log (-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2 \log (-x) = 2 \log x \Rightarrow \log (-x) = \log x$,

por lo que

$\log (-x)$ existe y es un número real.

En particular para $x=1$, $\ln(-1) = \ln(1)$ que, como sabemos, es cero.

¿Es cierto?

......NO......

¿Es correcto el razonamiento?

...El raonament es correcte, però de principi no podem posar el logaritme de un nombre negativ xq no existeix.

Explica tu respuesta

...El logaritme de un nombre negativ no existeix...

Transcipción: “No”. “El razonamiento es correcto, pero en principio no podemos poner el logaritmo de un número negativo xq no existe”. “El logaritmo de un número negativo no existe”

Explicación: Por un lado dice que el razonamiento es correcto y por otro que el logaritmo de un número negativo no existe.

Interpretación: Su respuesta es incoherente, ya que si cree que no existen los logaritmos de los números negativos, no debería decir que el razonamiento es correcto.

Predicción: El estudiante está anclado en una idea de los logaritmos que es propia de los números reales. Esto le induce a creer que las reglas aprendidas con los reales son válidas siempre. Si no se le advierte de que esto no es así y el por qué, difícilmente podrá salir de esta creencia por sí sólo.

Ejemplo: Alumno 17

Cuestión 2. El logaritmo

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$\log(-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2\log(-x) = 2\log x \Rightarrow \log(-x) = \log x$,

por lo que

$\log(-x)$ existe y es un número real.

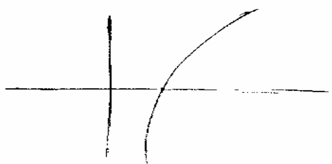
En particular para $x=1$, $\ln(-1) = \ln(1)$ que, como sabemos, es cero.

¿Es cierto?
No, $\nexists \ln(-x)$

¿Es correcto el razonamiento?
No.

Explica tu respuesta
$(-x)^2 = x^2 \Rightarrow -x \neq x$
$\log(-x)^2 = \log x^2 \not\Rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x)$ xq $-x \neq x$

$0 < x < 1 \to \log x < 0$
$x > 1 \to \log x > 0$.



Transcripción: " No, $\exists$ ln(-x) ". " No ". "$\log(-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2\log(-x) = 2\log x$ xq $-x \neq x$

$0 < x < 1 \rightarrow \log x < 0$

$x > 1 \rightarrow \log x > 0$

Explicación: El estudiante niega el razonamiento del enunciado porque dice que a números diferentes le corresponden logaritmos diferentes. Usa la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dice que el razonamiento no es correcto. Pero no explica satisfactoriamente el por qué.

Interpretación: Usa un argumento lógico para explicar que algo está mal, detecta la contradicción y la usa para negar uno de los pasos; pero su explicación es insuficiente como respuesta a la pregunta ya que no se basa en la cadena de razonamientos del enunciado. No explica por qué la regla que es válida con los reales aquí no lo es.

Predicción: Como el anterior, el estudiante está anclado en una idea de los logaritmos que es propia de los números reales. Si no se le advierte de con los complejos hay que reconceptualizar la noción de logaritmo y revisar sus reglas de cálculo, podemos esperar que incurra en contradicciones.

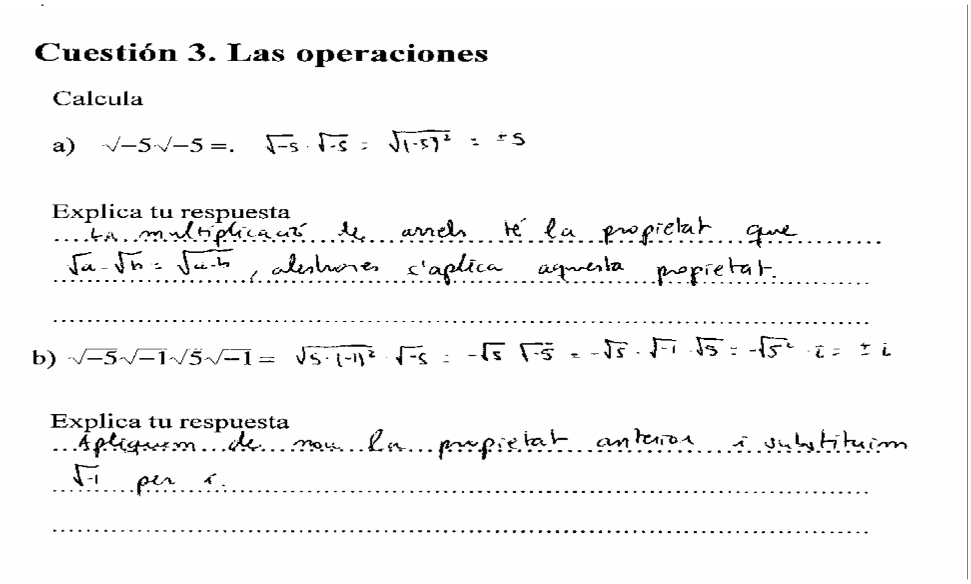
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dicen que el razonamiento no es correcto. Pero no explican por qué	8/19
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dicen que el razonamiento sí que es correcto. Son inconsistentes	3/19
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen pero no contestan a la pregunta si el razonamiento es correcto	3/19

Señalan uno de los pasos como incorrecto, pero su razonamiento no está bien argumentado	3/19
Manifiestan dificultades de tipo algebraico. Inconsistencias con los paréntesis	2/19

Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea

La tarea *las operaciones*

Ejemplo: Alumno 5


Cuestión 3. Las operaciones

Calcula

a) $\sqrt{-5}\sqrt{-5} =$. $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{(-5)^2} = \pm 5$

Explica tu respuesta

La multiplicació de arrels té la propietat que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$, aleshores s'aplica aquesta propietat.

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} =$ $\sqrt{5\cdot(-1)^2}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{5} = -\sqrt{5^2}\cdot i = \pm i$

Explica tu respuesta

Apliquem de nou la propietat anterior i substituïm $\sqrt{-1}$ per i.

Transcripción

a)"$\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{(-5)^2} = \pm 5$. La multiplicación de raíces tiene la propiedad que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$, entonces se aplica esta propiedad".

b)"$\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5\cdot(-1)^2}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{5} = -\sqrt{5^2}\cdot i = \pm i$ Aplicamos de nuevo la propiedad anterior y sustituimos $\sqrt{-1}$ per *i.* "

Explicación: El estudiante, en el apartado a), aplica la regla general para multiplicar radicales, calcula el cuadrado de dentro del radical, calcula la raíz cuadrada del resultado y acompaña la respuesta con el doble signo ±.

En el apartado b) aplica la misma regla general que antes, aunque lo que escribe bajo el radical no se corresponde con el signo menos que extrae y que cabe suponer que procede de considerar que $\sqrt{(-1)^2}$ = -1 y no 1. Esto queda corroborado por su actuación posterior, donde extrae la forma imaginaria $\sqrt{-1}$ que escribe después como *i*. Finalmente, aplica otra vez la regla general a √5√5 y calcula la raíz cuadrada con el doble signo ± , aunque olvida escribir el 5.

Interpretación: En la respuesta del alumno se evidencian dificultades e inconsistencias de naturaleza diferente. En el apartado a) no tiene en cuenta que se trata de expresiones imaginarias, lo que le hubiera llevado a extraer √-1, a diferencia de lo que hace en el apartado b) donde si que lo hace. Otro aspecto llamativo es que parece interpretar el signo radical como la orden de calcular la doble raíz cuadrada de un número, lo que es una interpretación aritmética inconsistente porque produce respuestas contradictorias cuando se opera con radicales.

Predicción y : Entendemos que el estudiante conoce y puede manejar las reglas para operar radicales, raíces cuadradas y la expresión imaginaria implicadas en la tarea, pero encuentra dificultades para decidir cuando estas reglas están permitidas y cuando no. En concreto ignora que la regla para multiplicar radicales no funciona con los radicandos negativos. Por otra parte el estudiante utiliza una concepción aritmética del signo radical que le lleva a confundirlo con la orden de calcular la raíz cuadrada. Ignora que $\sqrt{(a)^2} = |a|$ y no $\pm a$ como él manifiesta.

En consecuencia, podemos esperar que el estudiante repetirá este tipo de comportamiento con problemas análogos y entendemos que son un producto de la enseñanza, que no advierte de estas restricciones adecuadamente. Creemos que es necesario revisar la distinción entre radical y raíz cuadrada, redefinir la noción de raíz cuadrada para incorporar el caso de radicandos negativos y justificar por qué $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}$ no es 1 ni ±1, sino que es –1.

Utilizan correctamente la regla para operar imaginarios	9/19
Utilizan la regla para operar imaginarios con errores de descuido	4/19
Usan las dos reglas: la general para multiplicar radicales y la regla para multiplicar raíces imagnarias.	4/19
Aplican exclusivamente la regla general de multiplicar radicales	2/19

Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea

Tarea: *el orden*

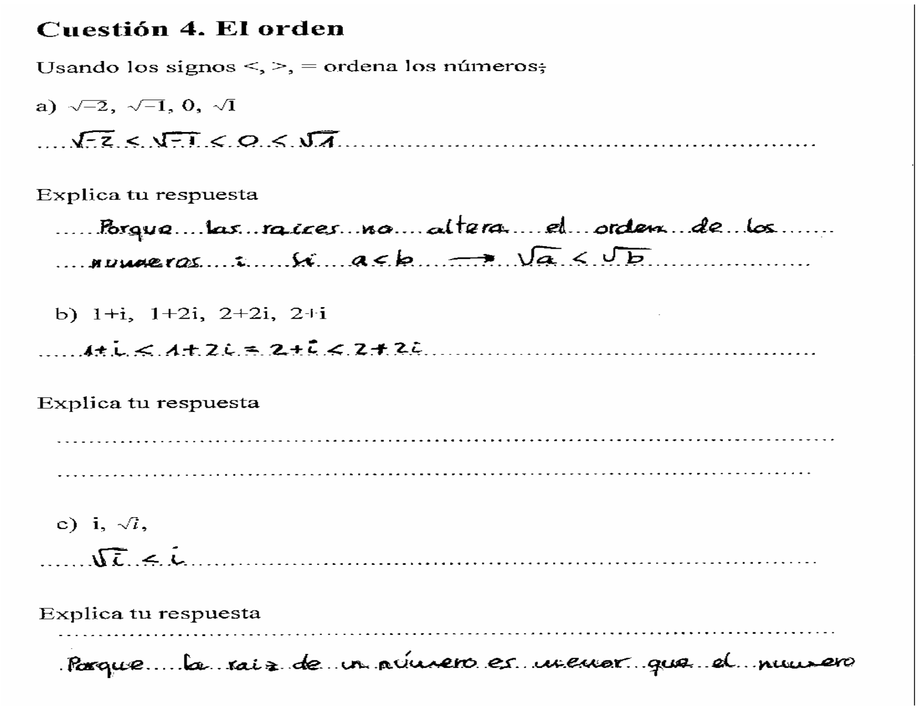
Ejemplo: Alumno 3

Transcripción

a) $\sqrt{-2} < \sqrt{-1} < 0 < \sqrt{1}$. Porque las raíces no alteran el orden de los números: si $a < b \rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

b) $1 + i < 1 + 2i = 2 + i < 2 + 2i$

c) $\sqrt{i} < i$. Porque la raíz de un número es menor que el número.



Cuestión 4. El orden

Usando los signos $<$, $>$, $=$ ordena los números;

a) $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-1}$, 0, $\sqrt{1}$

$\sqrt{-2} < \sqrt{-1} < 0 < \sqrt{1}$

Explica tu respuesta

Porque las raices no altera el orden de los numeros i si $a < b \rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

b) 1+i, 1+2i, 2+2i, 2+i

$1+i < 1+2i = 2+i < 2+2i$

Explica tu respuesta

c) i, $\sqrt{i}$,

$\sqrt{i} < i$

Explica tu respuesta

Porque la raiz de un número es menor que el numero

Explicación: El estudiante ordena todos los números en los tres apartados, pero sólo explica el criterio que usa en a) y c). En estos apartados, extiende reglas no enseñadas propias de los reales a los complejos: *si un número es menor que otro su raíz también lo es*, *la raíz de un número es menor que el número.*

Interpretación: De la respuesta del alumno se evidencian dificultades e inconsistencias de naturaleza diferente. En el apartado a) y c) no tiene en cuenta que se trata de expresiones imaginarias y que las reglas de los reales no tienen por qué funcionar. En el apartado b) dado que los números están expresados en forma binómica utiliza un criterio idiosincrásico que creemos que se basa en el orden de los módulos.

En ningún caso se plantea que pueda ser imposible ordenar los números dados y tampoco tiene en cuenta que las raíces de los números negativos no existen en el campo real.

Predicción y sugerencia para la enseñanza. El alumno conoce reglas para ordenar números reales pero no percibe que éstas no son ciertas cuando los números son imaginarios y ordena de modo *sui generis* números complejos por lo que creemos que se debe actuar en los métodos de enseñanza para evitar la creencia de que las propiedades de un campo numérico se cumplen en otro campo que lo contenga.

Extienden propiedades de los números reales	12/19
Utilizan las componentes de los números complejos	10/19
Usan el módulo de los números complejos	5/19
Tropiezan con dificultades de naturaleza diferente	9/19

Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea

CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE TAREAS

Nuestro modelo es una herramienta válida para llevar a cabo la investigación planteada. En ésta se pone de manifiesto que los alumnos presentan dificultades e inconsistencias al responder a las tareas del cuestionario las cuales permiten aventurar que se confirma la hipótesis teórica inicial de modo que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades e inconsistencias que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes las reproducen, en algunos casos agravadas.

REFERENCIAS

Cardano (1545). *Ars Magna*.

Euler (1749). *De la controverse entre MM. Leibniz et –bernouilli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*. Mémories de l'Académie de Berlin. Opera 17 p 195-232. (Bulletin Irem 68. www-irem.univ–fcomte.fr/bulletins/068/bull068.pdf).

Euler, L. (1770). *Elements of Algebra.* Tranlated by Rev. John Hewlett, B. D. F.A.S. &c with an Introduction by C. Truesdell. Springer-Verlag New York. Reimpresión de1984 de la edición inglesa traducida del francés de 1840. London. Longman.

Fernández, A., Figueras, O, Gómez B. y Margarit J. (1997). Algunas aportaciones a un modelo de interpretación de respuestas de alumnos de primaria a un cuestionario de tareas relacionadas con razón y proporción. *VIII JAEM (Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas).* Salamanca. Septiembre, pp. 429-433.

Fernández, A., Gómez B.; y Margarit J. (1997). Comportamientos relevantes observados en las respuestas incorrectas de estudiantes de primaria en tareas de razón y proporción. *III Jornades* *d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana,* Valencia.

Fernández, A., Gómez, B., Figueras, O., Margarit, J., Puig, L., Monzó O., y Ruiz, E. (1998). Estudio en la escuela primaria sobre competencias vinculadas a la razón y proporción. Documento interno. Departament de Didáctica de la Matemática. Universitat de Valencia.

Ferrirós, J. (1998). El problema de la aritmética en perspectiva histórica. En José Ferreirós (Ed.) *Richard Dedekind. ¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. Alianza Editorial

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gómez, B., Ferrandis, D., Valero, R., Pardo, T., Díez, P., Delgado, M., De la Rosa, P., y Pastor, C. (2002). Estudio histórico epistemológico de los números complejos**.** *VI Seminario de investigación en pensamiento numérico y algebraico.* Santiago 23 a 25 de Mayo.

Gómez, H. (1996). *Indicios del pensamiento proporcional.* Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio. Tesis de Maestría. México, D. F.

Jiménez de la Rosa, E. (1996): *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México.

Margarit, J.; Figueras, O.y Gómez, B. (2001). Ratio Comparison: Performance on Ratio in Similarity Tesk. *Proceedings of the 25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education).* Vol. I, 340 Utrech The Netherland.

Muñoz, E. (1996): *Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. Méjico.

Puig, E., Gómez, B. y otros, (15/12/1997-15/12/2000). *Razón y proporción: Precursores de los conceptos, tendencias cognitivas de los alumnos, resolución de problemas. Un estudio con alumnos de enseñanza obligatoria*, Programa sectorial de promoción del conocimiento, que desarrolla los planes nacionales de investigación científica y desarrollo tecnológico, de la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT), correspondiente a la Secretaría de Estado de Universidades, Investigación y Desarrollo y de la Dirección General de Enseñanza Superior.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* .escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. (1ª ed. 1813).

La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema

Mª Ángeles Lonjedo
IES Montserrat

M. Pedro Huerta
Universitat de València

Resumen

En la resolución de los problemas verbales de probabilidad condicional, los estudiantes están implicados en un proceso en el que podemos distinguir varias etapas o fases. Una de ellas es la traducción del texto del problema, generalmente escrito en la lengua vernácula, al lenguaje matemático. En las frases traducidas los estudiantes deben reconocer sucesos y probabilidades. Pero, en la mayoría de estos problemas los datos no están explícitamente mencionados en términos de probabilidad. En este caso, los estudiantes pueden resolver estos problemas recurriendo al pensamiento numérico y no necesariamente al probabilístico. En este trabajo investigamos, a través de un estudio con 51 estudiantes de diferentes niveles escolares, hasta qué punto la naturaleza de los datos presentes en un problema verbal de probabilidad condicional influye en la manera en la que los estudiantes los resuelven.

Abstract

In order to solve verbal conditional probability problems, students are involved in a process in which we can identify several steps or phases. One of them is that of the translation from the text of the problem, generally written in a vernacular language, to that of mathematics. In translating sentences, students should recognize events and probabilities. But, in much of those problems data are not explicitly mentioned in terms of probability. In this case, students can solve these problems with the help of arithmetical thinking and not necessarily with the help of probabilistic reasoning. In this work we investigate, through a study of 51students from different school levels, the extent to which the nature of quantities in conditional probability influences the way in which students solve these problems.

INTRODUCCIÓN

Existen diferentes factores que influyen a la hora de resolver un problema, y en particular un problema de probabilidad condicional. Uno de estos factores no es necesariamente el conocimiento de las relaciones entre probabilidades, sino, por ejemplo, el de la identificación correcta de los sucesos y de sus probabilidades. Previo a esto último, existen factores semióticos y semánticos que influyen en los estudiantes a la hora de establecer una correcta correlación entre los datos y los sucesos. En este trabajo no vamos a ocuparnos básicamente de estos factores sino que mostramos como el formato de presentación de los datos en los problemas de probabilidad condicional tienen su influencia en el proceso de resolución del problema.

Cuando los datos de un problema de probabilidad condicional están expresados en frecuencias absolutas, porcentajes, o en términos de razón, los estudiantes no interpretan ni usan los datos como probabilidades. En consecuencia, no necesitan las relaciones entre probabilidades que una enseñanza formal exigiría para obtener la solución del problema, al menos de una forma explícita. Sin embargo, esto no significa que los estudiantes no puedan resolver dichos problemas. En efecto, existen estudiantes que los resuelven, pero en ese caso usando el razonamiento aritmético y no el probabilístico. Es solamente al final de proceso y porque la pregunta del problema así lo exige, cuando los estudiantes responde en términos de probabilidad, usando para ello métodos de asignación de probabilidades. En este trabajo queremos aportar nuevos resultados al estudio exploratorio presentado en el CERME4, (Lonjedo, Huerta 2005), en el que ya mostramos los resultados de un estudio con 166 estudiantes de diferentes niveles escolares resolviendo problemas de probabilidad condicional en los que las cantidades no estaban explícitamente mencionadas en términos de probabilidad.

LA NATURALEZA DE LAS CANTIDADES PRESENTES EN EL PROBLEMA.

Explorando en los libros de texto los problemas escolares verbales de probabilidad condicional, observamos que las cantidades presentes en la mayor parte de estos problemas, no están expresadas en términos de probabilidad sino que presentan naturaleza diversa.

Gigerenzer (1994) sugiere que los problemas de probabilidad bayesianos, en los que la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias, son más fáciles de resolver. Otros estudios (Ojeda 1995; Huerta, Lonjedo 2003; Lonjedo, 2003) muestran esto mismo y que dependiendo de la presentación y la expresión de los datos en el texto de los problemas de probabilidad condicional, su resolución puede hacerse utilizando el razonamiento numérico. En muchos casos observamos como la resolución de dichos problemas implica al pensamiento aritmético y no al probabilístico, ya que los datos no son interpretados conscientemente como probabilidades y por tanto los estudiantes no necesitan utilizar las relaciones entre probabilidades para resolver el problema. Es sólo al final del proceso de resolución del problema cuando los estudiantes responden a la pregunta del problema en términos de probabilidad. Esta diferencia en la forma de abordar un problema por un estudiante cuando resuelve problemas de probabilidad condicional, utilizando el razonamiento numérico o el razonamiento probabilístico, hace que clasifiquemos así los problemas de probabilidad en problemas de asignación de probabilidades y problemas de cálculo de probabilidades (Huerta, Lonjedo, 2003). Así pues, al ser los problemas de probabilidad condicional problemas de probabilidad, esta clasificación también nos sirve.

Desde este punto de vista, los problemas escolares de probabilidad condicional que encontramos en los libros de texto podemos clasificarlos como problemas de asignación o problemas de cálculo de probabilidades De este modo, un problema de probabilidad condicional será clasificado como problema de cálculo de probabilidades si los datos del problema son interpretados como probabilidades y consecuentemente son necesarios para responder a la pregunta del problema las relaciones entre probabilidades..

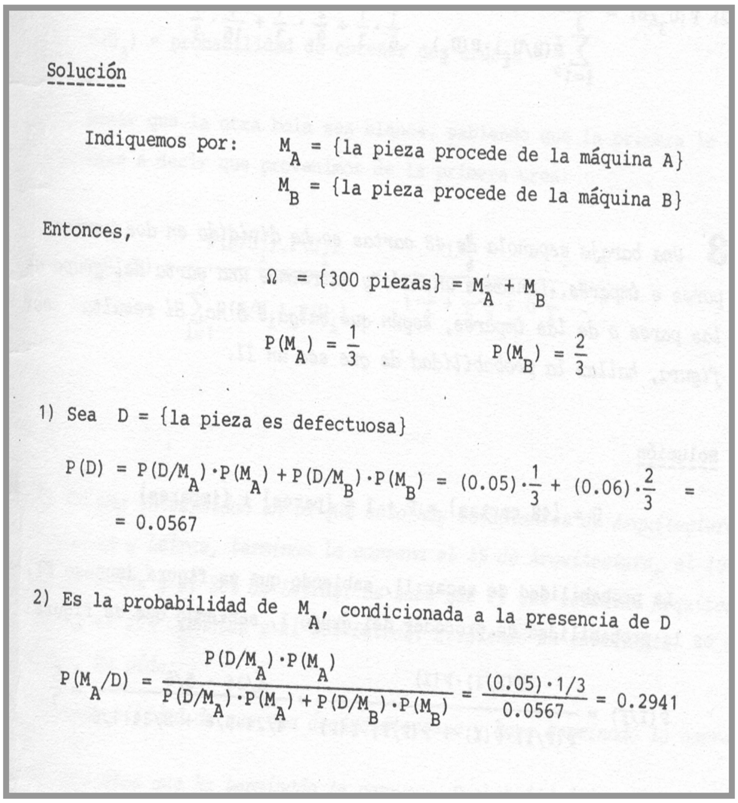
Ahora bien, la tradición en la enseñanza de las probabilidades nos muestra lo contrario. Los profesores y los libros de texto no suelen partir de este hecho empírico para llegar al pensamiento probabilístico, sino que se suelen plantear problemas en los que se exige este pensamiento sin que la resolución lo exija.

Mostramos un ejemplo de un problema de probabilidad condicional en donde los datos son frecuencias absolutas y tantos por cien, se pregunta por dos probabilidades, una marginal y una condicional.

(Cuadras C.M, (1983) Problemas de Probabilidades y Estadística, Vol 1: Probabilidades p.55) Dos máquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 piezas. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Se toma una pieza y se pide:

Probabilidad de que sea defectuosa.

Sabiendo que es defectuosa, probabilidad de que proceda de la primera máquina



Solución

Indiquemos por: M_A = {la pieza procede de la máquina A}

M_B = {la pieza procede de la máquina B}

Entonces,

$$\Omega = \{300 \text{ piezas}\} = M_A + M_B$$

$$P(M_A) = \frac{1}{3} \qquad P(M_B) = \frac{2}{3}$$

1) Sea D = {la pieza es defectuosa}

$$P(D) = P(D/M_A)\cdot P(M_A) + P(D/M_B)\cdot P(M_B) = (0.05)\cdot\frac{1}{3} + (0.06)\cdot\frac{2}{3} = 0.0567$$

2) Es la probabilidad de M_A, condicionada a la presencia de D

$$P(M_A/D) = \frac{P(D/M_A)\cdot P(M_A)}{P(D/M_A)\cdot P(M_A) + P(D/M_B)\cdot P(M_B)} = \frac{(0.05)\cdot 1/3}{0.0567} = 0.2941$$

1. *Resolución del libro de texto*

En la figura 1 puede verse la resolución que presenta el libro. El texto considera este problema como un problema de cálculo de probabilidades en concordancia con la ubicación del problema en la unidad de “Teorema de las probabilidades totales y teorema de Bayes”. Sin embargo, algunos estudiantes (Lonjedo, 2003) resuelven problemas similares a éste, tanto en la estructura de los datos como en la naturaleza de los mismos, como mostramos a continuación, es decir, mediante métodos de asignación de probabilidades:

Si tenemos 100 piezas de la máquina A y el 5% son defectuosas: tenemos 5 piezas defectuosas de las 100 de A.

Si tenemos 200 piezas de la máquina B y el 6% son defectuosas: tenemos 12 piezas defectuosas de las 200 de B.

En total, de 300 piezas de las dos máquinas, 5+12=17 son defectuosas.

Luego la probabilidad de ser defectuosa es: $\frac{17}{300} = 0.05\widehat{6}$

Para la segunda cuestión, tenemos 17 piezas defectuosas, de donde 5 vienen de la máquina primera, luego la probabilidad pedida es de: $\frac{5}{17}$ *=0.2941*

NATURALEZA DIFERENTE DE LOS DATOS EN LOS PROBLEMAS ESCOLARES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

El análisis de una serie de libros de texto escolares nos permite clasificar los problemas atendiendo a la naturaleza de los datos en el texto del problema, considerada aquí como una de las variables de tarea sintácticas[1]. Así, distinguimos:

Datos presentados en términos de probabilidad. Si las cantidades se presentan en términos de probabilidad, entonces cuantifican la probabilidad de que un suceso A se realice mediante p(A) $\in$ [0, 1]. Mostramos un ejemplo:

	A	*noA*	*Total*
B	*0'4*	*0'2*	
noB	*0'25*		
Total			*1*

(Matemáticas 4t ESO, Opción B, Editorial Ecir, página 240, problema 43). Completa la següent taula de contingència:

A partir de la taula, confecciona un diagrama d'arbre i determina P(B/A), P(noB/A), P(B/noA) i P(noB/noA).

En este problema, p(A|B) puede ser calculado por: $p(A\mid B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, esto es, utilizando el razonamiento probabilístico – relaciones entre probabilidades.

Datos presentados en frecuencias absolutas. Cuando en un problema se presentan las cantidades en términos de frecuencias absolutas, éstas expresan la frecuencia con la que se produce una determinada característica. Matemáticamente es posible interpretar la frecuencia como el cardinal asociado a un conjunto que representa a los objetos que poseen dicha característica. Por tanto, los datos expresados en términos de frecuencia pueden usarse como un cardinal. En consecuencia, p(A|B) puede ser obtenido comparando dos números cardinales y expresarla, por ejemplo, por: $p(A\mid B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$, es decir, utilizando ahora un razonamiento aritmético y relaciones entre probabilidades.

Por otro lado, como A|B no es un suceso, no podemos considerar un conjunto que lo represente. Por tanto, en los problemas de probabilidad condicional los datos que se refieren a la probabilidad condicional nunca podrán ser expresados en términos de frecuencias absolutas. Si, por el contrario, hiciésemos esto, entonces el único significado que podemos asociar ala frecuencia sería el del cardinal de un suceso intersección.

Veamos un ejemplo:

(Editorial Santillana, Matemátias Cou opciones C y D, Daniel Santos Serrano, problema 9)En un grupo de 500 individuos se pasó un test de inteligencia y se midió su rendimiento académico. Los resultados fueron como sigue:

	Rendimiento académico	
	Alto	*Bajo*
Superior	*200*	*80*
Inferior	*100*	*120*

Considerando que A es "ser superior en inteligencia» y B es «tener rendimiento alto», averiguar:

Si A Y B son independientes. Si se selecciona al azar un alumno con rendimiento alto, ¿cuál es la probabilidad de que sea superior en inteligencia? (p.248, problema 9)

[1] Como variable sintáctica *se entiende cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema* (Cerdán y Puig, 1988, p.34)

Datos presentados en términos de razón. Cuando las cantidades se expresan en términos de razón, indirectamente nos presentan los datos en términos de probabilidad, y es el resolutor quien decide transformar las razones a probabilidades o no. Veamos dos ejemplos, en el primero los datos son dos razones y en el segundo los datos son tantos por cien:

Engel, L'enseignement des probabilités et de la statistique, volumen 1(1975) (France; CEDIC) *En Sikinie, un homme sur 12 et une femme sur 2888 sont daltoniens. Les fréquences des deux sexes sont égales. On choisit une personne au hasard et on découvre qu'elle est daltonienne. Quelle est la probabilité pour que ce sois un homme?*

Grupo Cero, Borrás, Carrillo, D'Opazo, Morata, Puig, …, Matemáticas de Bachillerato curso 1, (1982), Barcelona: Teide.

> *En el proceso de fabricación de circuitos impresos para radio transistores se obtiene, según demuestra la experiencia de cierto fabricante, un 5% de circuitos defectuosos. Un dispositivo para comprobar los defectuosos detecta el 90% de ellos, pero también califica como defectuosos al 2% de los correctos. ¿Cuál es la probabilidad de que sea correcto un circuito al que el dispositivo califica como defectuoso?¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso un circuito calificado de correcto? (problema 26, p. 170.)*

Datos expresados en combinación. Existen problemas de probabilidad condicional en los libros de texto en los que los datos no están expresados en un único formato, como en los ejemplos que mostramos a continuación, sino que se combinan más de uno de ellos. Así, en estos problemas aparecen datos expresados en porcentajes y mediante signos formales propios de la probabilidad; en términos de probabilidad y razón; en razón y frecuencias. En el siguiente problema, por ejemplo, los datos son porcentajes y probabilidades:

Santos, D., (1988), Matemáticas COU, Opciones C y D, Madrid: Santillana. p.248, problema 10, *En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 0.7, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?*

Observamos en los ejemplos anteriores, como los datos en los problemas de probabilidad condicional no siempre se expresan de manera explícita en términos de probabilidades. Cuando esto ocurre, el resolutor tiene la capacidad de interpretarlos según que dichos datos tengan algún sentido para los sucesos a los que los asigna. En función de esto, despliega un proceso de resolución que puede implicar al pensamiento numérico o al probabilístico, dependiendo del sentido dado a los datos del problema.

EL ESTUDIO EMPÍRICO

Uno de los objetivos de nuestro estudio es explorar como los estudiantes resuelven problemas de probabilidad condicional cuando las cantidades de estos problemas satisfacen ciertas condiciones en su estructura y naturaleza. Principalmente, nuestro interés está en explorar qué razonamiento –aritmético o probabilístico –utilizan los estudiantes al resolver los problemas, en relación con la estructura de los datos y su naturaleza.

LA PRUEBA

La prueba consiste en 6 problemas de probabilidad condicional de nivel 2 (Lonjedo, Huerta 2004) en el que la estructura de datos no varía, pero sí su naturaleza y el contexto. Esta prueba está basada en un estudio exploratorio anterior (Lonjedo, Huerta 2005), en el que ya mostramos como los estudiantes que no habían recibido enseñanza formal en probabilidad condicional no resolvían los problemas en los que los datos se expresaban en términos de probabilidad. Por esta razón, como muchos de los participantes en la investigación estaban en estas condiciones, decidimos que en la prueba no hubiera ningún problema en el que los datos se expresaran en términos de probabilidad. Así, todos los problemas de la prueba tienen tres datos explícitamente mencionados en el texto del problema, pero expresados en términos de razón y/o en términos de frecuencias absolutas. Además, respecto de la anterior prueba, en esta hemos tenido en cuenta aspectos semánticos para evitar un lenguaje ambiguo al referirnos a los sucesos, a los datos y a las preguntas. En tres de los 6 problemas preguntamos por un porcentaje y en los otros tres por una probabilidad, teniendo todos ellos una solución aritmética[2]. Además, el problema 1 y el problema 5 son isomorfos en cuanto a la estructura de los datos y la pregunta pero cambian la naturaleza de los datos y de la pregunta.

En la tabla siguiente presentamos los seis problemas que componen la prueba, así como su clasificación según nivel, característica y tipo $N_iC_jT_h$[3], la naturaleza de sus cantidades y la forma de plantear la pregunta del problema.

PROBLEMA	$\mathbf{N_2C_iT_j}$	**Naturaleza datos**	**pregunta**
PROBLEMA 1: En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?	$N_2C_3T_1$	Frecuencias y %	porcentaje
PROBLEMA 2: En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.	$N_2C_2T_3$	%	probabilidad
PROBLEMA 3: El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y el 70% habla inglés. De los que no hablan francés un 35% habla inglés. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas.	$N_2C_3T_3$	%	Probabilidad
PROBLEMA 4: De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?	$N_2C_2T_1$	Frecuencia y %	Porcentaje
PROBLEMA 5: El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?	$N_2C_3T_1$	Una razón y %	Probabilidad
PROBLEMA 6: De todos los estudiantes del instituto un 30% practica baloncesto y fútbol y un 30% practica baloncesto y no practica fútbol. De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?	$N_2C_1T_2$	%	Porcentaje

LOS ESTUDIANTES

Los 56 estudiantes que resolvieron la prueba se distribuyen de la siguiente manera:

10 EFM: estudiantes de la asignatura de Cálculo de Probabilidades y Estadística de la Facultad de Matemáticas.

[2] Esto es, un dato extra no requiere una cantidad desconocida para resolver el problema.
[3] $N_iC_jT_h$ Clasificación de los problemas de probabilidad condicional (Lonjedo, Huerta, 2004)

15 2BCS: estudiantes de 2º de bachiller Ciencias Sociales-Humanidades (17-18 años)

31 4ESO: estudiantes de 4º Educación Secundaria Obligatoria (15-16 años)

Esto es, tenemos 10 estudiantes de la facultad de matemáticas que tienen un conocimiento formal de la teoría de la probabilidad, 15 estudiantes de 2º de bachiller de ciencias sociales y humanidades que han recibido parcialmente enseñanza acerca de la probabilidad y 31 estudiantes del final de la educación secundaria obligatoria que no han estudiado nunca probabilidad.

La prueba se administró durante una hora lectiva de los estudiantes en cada uno de sus centros.

ALGUNOS RESULTADOS.

Las respuestas de los estudiantes a los problemas están siendo analizadas en la actualidad, por lo que aquí mostraremos algunos avances que hemos logrado a partir de los resultados que vamos a mostrar.

Los resultados que se muestran en la siguiente tabla, se han organizado atendiendo a las siguientes variables: naturaleza de los datos, naturaleza de la pregunta, número de estudiantes que han realizado el problema con éxito, su nivel de competencia, número de los que lo han dejado en blanco o no es posible un análisis, y el razonamiento utilizado por los estudiantes que han resuelto bien, clasificando el problema de probabilidad condicional como problema de asignación de probabilidades o problema de cálculo de probabilidades.

La tabla 1 organiza la información acerca de los estudiantes que resuelven con éxito los problemas y también informa acerca de los estudiantes que no abordan el problema (lo dejan en blanco, o sólo muestran las cantidades).

Problema	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
Naturaleza datos	Frecuen. y %	%	%	Frecuen. y %	Una razón y %	%
Naturaleza de pregunta	%	Probab.	Probab.	%	Probab.	%
Éxito	24	10	6	26	7	7
EFM **2BCS** **4ESO**	8 4 12	4 4 2	3 2 1	7 6 13	5 0 2	2 2 3
Blanco…	2	11	18	10	23	15
Asignación	21	6	4	26	6	6
Cálculo de probab.	3 (EFM)	4 (2 BCS 2EFM)	2 (1BCS 1EFM)	0	1 (EFM)	1 (EFM)

Tabla 1: *Número de estudiantes que resuelven con éxito o dejan en blanco y de los que resuelven con éxito, número de estudiantes que han utilizado un tipo de razonamiento.*

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

El éxito en la resolución de los problemas que hemos presentado no depende del uso correcto de unas determinadas fórmulas. Estudiantes capacitados para ello, de la licenciatura de matemáticas, no siempre las usan por lo que los datos no siempre se han interpretado como probabilidades. Por otra parte, estudiantes que no conocen dichas fórmulas resuelven los problemas, por lo que el éxito no depende de ellas sino del uso correcto del razonamiento aritmético aplicado a unos datos no interpretados como probabilidades, sino como razones o proporciones. Esto puede verse en los problemas 1 y 4 en el que el porcentaje de estudiantes que resuelven los problemas por asignación es muy elevado en relación con los otros. Estos problemas tienen los datos expresados en términos de frecuencias y el dato que tiene que ver con la condicionalidad está expresado en porcentaje.

Es de destacar que ningún estudiante de 2º de bachiller de ciencias sociales resuelve el problema 5 y, sin embargo, 2 estudiantes de 4º ESO lo resuelven. Llama la atención, por otra parte, los resultados de este problema en cuanto a la resolución con éxito y en cuanto al problema en blanco. Comparados los resultados con los del problema 1, su isomorfo, podemos reforzar la conclusión de Gingerenzer (1994) acerca del éxito al resolver problemas de probabilidad condicional bayesianos cuando sus datos son frecuencias. El problema 1 tiene los datos en frecuencias y porcentajes y el 5 en porcentajes y en términos de razón de la forma "la mitad de". El problema 1 tiene un éxito del 47.1% y el 3.92% lo deja en blanco. El problema 5, por el contrario, tiene un éxito del 13.73% y el 45.1% de los estudiantes lo deja en blanco. Es razonable pensar que esta diferencia entre los éxitos y los fracasos dependa de la forma de presentación de los datos.

Además, en otra comparación posible, el problema 1 con el problema 7 de la prueba piloto[4], que mostramos en la tabla siguiente:

Problema	**Naturaleza datos**	**Éxito**	**Blanco**	**Asignación**	**Cálculo**
P7 Pilotaje	%	6	18	25	75
P1 Prueba	Frecuencia y %	47.1	3.92	87.5	12.5

Ppermite afirmar que si los datos están en términos de frecuencias absolutas y la condicionalidad en porcentaje, el porcentaje de éxito en la resolución del problema aumenta y si observamos los enunciados de ambos problemas vemos que no sólo hemos cambiado la naturaleza de los datos y de la pregunta sino que también hemos mejorado la redacción intentando que el enunciado del problema no produjera dificultades a la hora de interpretar tanto los datos como la pregunta, por lo que también los aspectos semánticos tienen influencia en el éxito de la resolución del problema.

CONCLUSIONES

Sabemos que, además de la naturaleza de los datos, hay otros factores que afectan al éxito en la resolución del problema. Estos factores no necesariamente son el conocimiento de las relaciones entre probabilidades. La naturaleza de los datos de los problemas de probabilidad escolar influye en la clasificación de los problemas en problemas de asignación de probabilidades o en problemas de cálculo de probabilidades. Los problemas resueltos por los estudiantes que participaron en esta investigación se podrían clasificar como problemas de asignación de probabilidades. La mayoría de estos estudiantes ni interpretaron los datos como probabilidades ni, consecuentemente, usaron las

[4] *PROBLEMA 7: (Grupo Erema: M.A. Martín, J.M. Rey, M. Reyes, Estadística y Probabilidad, Bachillerato, Cuaderno 4, Grupo Editorial Bruño, Madrid 2002, página 26, problema 1, cambiado y preparado para la prueba) Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?*

relaciones entre probabilidades para calcular las probabilidades pedidas por los problemas. Los datos de estos problemas se presentan en porcentajes, razones y en frecuencias absolutas y la mayoría de los estudiantes los resuelven utilizando el razonamiento numérico.

Los datos numéricos presentes en los problemas de probabilidad que hemos considerado adquieren significado para los estudiantes cuando están expresados en porcentajes y sobre todo en frecuencias absolutas. Así, cuando las cantidades tienen cierto significado para los estudiantes, pueden producir nuevas cantidades que sean relevantes para la resolución del problema y facilitan el proceso de resolución. En consecuencia, no decimos nada nuevo (Gigerenzer, 1994, Ojeda, 1996) si seguimos apostando por la resolución de problemas de probabilidad en los que los datos sugieran un enfoque frecuencial de la probabilidad, antes de que ésta se muestre de una manera formal.

Estos problemas de probabilidad condicional podrían ser incluidos en lecciones de aritmética o del uso de la razón y de la proporción, como etapa previa al aprendizaje de reglas y fórmulas de la probabilidad

REFERENCIAS

Cerdán, Puig, (1988). *Problemas aritméticos escolares*. (Síntesis: Madrid)

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa), *Subjective probability*, En G. Wright y P.Ayton (Eds.) pp. 129-161, Wiley

Huerta, M. Pedro (2003). Curs de doctorat en Didáctica de la probabilitat. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València (documento interno).

Huerta, M. Pedro, Lonjedo, Mª Ángeles (2003). La resolución de problemas de probabilidad condicional. En Castro, Flores at alli… (eds), 2003, *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada.

Lonjedo, Mª Ángeles, (2003). *La resolución de problemas de probabilidad condicional. Un estudio exploratorio con estudiantes de bachiller*. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València (Memoria de tercer ciclo no publicada)

Lonjedo, Mª Ángeles, Huerta, M. Pedro, (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos. In Castro, E., & De la Torre, E. (eds.), 2004, *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp 229-238. A Coruña: Universidade da Coruña.

Lonjedo, Mª Ángeles, Huerta, M. Pedro, (2005). The nature of the quantities in a condicional probability problem. Its influence in the problem resolution. http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/wg5litofpapers.htm

Ojeda, A.M. (1996). Contextos, Representaciones y la idea de Probabilidad Condicional, *Investigaciones en Matemática Educativa*, pp. 291-310. México: Grupo Editorial Iberoamérica,

Aplicación del programa *Mathematica* a las prácticas de cálculo en el primer año universitario[1]

Ángel Contreras de la Fuente
Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Jaén

Vicenç Font Moll
Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Barcelona

Manuel García Armenteros
Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Jaén

Lorenzo Luque Cañada
IES (Jaén)

Marta Marcolini Bernardi
Matemática Aplicada. Universidad de Jaén

Lourdes Ordóñez Cañada
IES (Mengíbar, Jaén)

Manuela Ortega Carpio y Carmen Sánchez Gómez
Matemática Aplicada. Universidad de Jaén

Resumen

En este trabajo se describe una investigación acerca de las prácticas de Cálculo realizadas por estudiantes universitarios de primer curso en entornos informáticos en los que se utiliza el programa MATHEMATICA. Se analizan los errores y dificultades que aparecen en las contestaciones a las cuestiones planteadas en una prueba de evaluación. Todo esto dentro del marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002). Los análisis indican que el uso de dicho entorno informático no garantiza unos resultados satisfactorios, en cuanto a la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función.

Abstract

In this paper we describe a research about practices of calculus made by first year university students at informatics environments using the MATHEMATICA programme. We analyze mistakes and difficulties which appear into the answers of an assessment instrument. All using the ontological and semiotic model for mathematical knowledge (Godino, 2002). Analysis shows that using this informatic environment doesn't guarantee satisfactory results, for teaching and learning the concept of limit, continuity and derivate.

[1] Este trabajo se ha elaborado en el marco del proyecto I+D: MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC: "Uso de la tecnología informática en la formación matemática de estudiantes universitarios", concedido a los autores por la Dirección General de Investigación (2004-2007).

Introducción

En esta comunicación, se presenta una investigación que actualmente se desarrolla en el Departamento de Didáctica de las Ciencias de la Universidad de Jaén, la cual está relacionada con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que se imparten en el primer curso de la licenciatura de LADE y que se desarrolla utilizando el programa informático MATHEMATICA. Un primer trabajo de investigación fue presentado en el XIX Congreso del Seminario Inter-Universitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM), celebrado en Córdoba en 2003 (www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/acontrerasdoc.doc). Un segundo trabajo, Contreras y Ortega (2004), se presentó en el I Congreso sobre la teoría de las funciones semióticas.

Como primer paso de la investigación, se ha buscado caracterizar las prácticas que constituyen el significado institucional de los objetos límite, continuidad y derivada, correspondiente a la asignatura de Matemáticas I de la licenciatura LADE, impartida utilizando el programa informático MATHEMATICA. Se hace la hipótesis de que el uso del ordenador, simplemente como amplificador cognitivo, aporta muy pocos elementos de transformación a la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario; en cambio, una utilización de la informática de tipo cualitativo, que incida mucho más en los procesos de modelización y construcción de las matemáticas, representa para el estudiante un poderoso medio de transformación en su modo de entenderlas y desarrollarlas.

Un segundo paso de la investigación se centra en la caracterización de las prácticas que constituyen ~~a~~ los significados personales del alumnado. Para ello, se efectúa primero un análisis ontosemiótico a priori de las tareas propuestas en los módulos de trabajo que desarrollan en los cursos de matemáticas de la licenciatura de LADE.

Posteriormente, se diseñarán nuevos módulos de prácticas matemáticas en los que se utilizará el programa informático citado. Por último, la experimentación en el aula y la evaluación posterior de dichos módulos permitirá terminar de diseñar las propuestas didácticas sobre prácticas significativas con ordenador.

En este trabajo, por razones de limitaciones de espacio, sólo se analizan las prácticas matemáticas que forman parte de los significados personales de los estudiantes del primer curso de la licenciatura de LADE de la Universidad de Jaén presentes en las respuestas a una prueba de evaluación desarrollada con el programa MATHEMATICA, respecto a los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función.

La comunicación se ha organizado en cinco apartados: en el primero se hace una introducción, en el segundo se revisan las principales investigaciones sobre el uso de los ordenadores en la formación matemática de alumnos universitarios y se comenta el marco teórico utilizado. En el tercero se presenta la metodología y los objetivos de la investigación. En el apartado 4, se expone el análisis de los datos y, por último se termina en el apartado 5 con algunas consideraciones finales.

Marco teórico

En los últimos años se han desarrollado tres grandes líneas de investigación en informática y Análisis; por una parte, la seguida por los miembros que participan en diversos proyectos RUMEC sobre distintas ramas de las matemáticas, los cuales utilizan la teoría APOS (Dubinsky, 1996) como marco conceptual. Entre ellos destacamos el proyecto titulado “The development of students’ graphical understanding of the derivate” (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997), cuyo antecedente es el trabajo de Asiala y als. (1996) sobre el aprendizaje de la derivación. También son relevantes en esta línea de investigación los trabajos de Bishop (1996) y Clark (1997).

La segunda línea de investigación está relacionada con los trabajos de investigadores franceses sobre la informática en la enseñanza de las matemáticas, la cual viene reflejada en Guin y Trouche (2002), donde los autores destacan los aspectos de los cambios cualitativos que la informática debe representar para la enseñanza de las matemáticas. En esta línea de investigación hay que resaltar los trabajos de Artigue (2002) y Kendal, Stracey y Pierce (2002).

Una tercera línea de investigación esta relacionada con la visualización matemática de los conceptos del Análisis matemático, su representación y las nuevas tecnologías (Gutiérrez, 1997; Hitt, 1998; Queralt, 2000; Camacho y González, 2001 y Afonso, 2003), la cual pone de manifiesto la importancia de la articulación entre las distintas representaciones semióticas de los conceptos matemáticos.

Sin embargo, se reconoce la necesidad de realizar investigaciones didácticas sobre el uso del ordenador. Así, en el libro de Guin y Trouche, se señala: "Los cambios producidos por la nueva tecnología originan una evolución notable de la práctica matemática en el dominio profesional; una evolución que, hasta ahora, no ha provocado una adaptación correspondiente en la enseñanza de la matemática." Es necesario, por tanto, realizar un análisis crítico de las principales aportaciones existentes y hacer una selección de las experiencias innovadoras que se efectúan en investigaciones reconocidas, concretando en *módulos de prácticas* los contenidos Análisis Matemático.

Dicho análisis crítico lo realizamos en esta investigación en el marco del enfoque ontosemiótico (Godino, 2002). Esta línea de trabajo ha sido asumida por otros investigadores y recientemente se ha aplicado a la didáctica del análisis matemático (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

De los diferentes constructos elaborados por el enfoque ontosemiótico en esta comunicación nos centraremos fundamentalmente en las entidades primarias (lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones).

Objetivos y metodología de la Investigación

Objetivos

El objetivo general de la investigación es experimentar y evaluar estrategias metodológicas para la formación inicial en matemáticas de los estudiantes de primer año de la licenciatura LADE, haciendo uso de las posibilidades ofrecidas por los entornos informáticos. De manera más específica nos proponemos:

- Estudiar y analizar los módulos de trabajo de los bloques temáticos del currículo de matemáticas que actualmente se desarrollan dentro de la asignatura de Matemáticas I de la licenciatura de LADE de la Universidad de Jaén, a fin de detectar posibles errores y dificultades potenciales de los alumnos en el uso del programa informático MATHEMATICA, en cuanto al aprendizaje de los conceptos matemáticos implicados y a las interrelaciones con el currículo matemático que no utiliza el ordenador como recurso de estudio.

- Detectar, utilizando en enfoque ontosemiótico, fenómenos asociados a las situaciones didácticas informáticas planteadas.

En este trabajo se desarrolla únicamente este segundo objetivo de la investigación. En el enfoque ontosemiótico se utiliza la metáfora vectorial para sintetizar un fenómeno didáctico (Wilhelmí, Godino y Font en prensa). Todo fenómeno queda descrito como una n-tupla, donde cada componente representa una característica del mismo. Las *características* o *variables* pueden considerarse en la investigación desde dos puntos de vista diferentes: uno, como *variables explicadas* ($v_1, \ldots, v_r$), que son problematizadas por la perspectiva teórica utilizada para analizar el proceso de estudio; otro, como *variables explicativas* ($w_1, \ldots, w_s$), que se usan para describir las explicadas en dicha perspectiva y predecir su comportamiento en situaciones "controladas" (generalmente de forma parcial). De esta manera un fenómeno es:

Fenómeno $\equiv (w_1, \ldots, w_s; \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r})$; donde donde las $\boldsymbol{v_i}$ quedan explicadas por las w_{j}, j = 1, …, r

Metodología

Población y muestras

La población objeto de estudio son los estudiantes de la licenciatura LADE. La muestra la constituyen los estudiantes de la licenciatura LADE de la Universidad de Jaén.

Variables consideradas

Las variables *explicativas* consideradas en el análisis, diseño y evaluación de los módulos de prácticas las hemos agrupado en dos grupos:

Primer grupo:

- Bloque temático: Análisis Matemático (límites, continuidad y derivada);
- Centro geográfico de procedencia (estudiantes de LADE en la Universidad de Jaén).
- Método de enseñanza: presencial.

Segundo grupo:

- La no consideración de la complejidad semiótica asociada a los objetos límite, continuidad y derivada en el proceso de estudio realizado utilizando el programa MATHEMATICA.

La variable *explicada* considerada en el análisis, diseño y evaluación de los módulos de prácticas es:

- Errores en el uso de lenguaje, acciones, conceptos, proposiciones y argumentaciones utilizados en las tareas matemáticas de los módulos de prácticas (límites, continuidad y derivadas). Se tendrá en cuenta básicamente la metodología cualitativa (qué conceptos y técnicas usan y tipos de errores)

El fenómeno didáctico considerado se puede sintetizar de la siguiente manera:

> Fenómeno EOS = (estudiantes de LADE en la Universidad de Jaén, límite, continuidad, derivada, complejidad semiótica asociada a los objetos límite, continuidad y derivada; errores relacionados con: lenguaje, acciones, conceptos, proposiciones y argumentaciones)

Diseño

Puesto que las muestras son intencionales, la posibilidad de generalización a otras muestras quedará limitada por esta opción, que asumimos debido a las dificultades de índole prácticas y económicas que tendría un muestreo de tipo aleatorio. Se trata de un diseño cuasi-experimental apoyado por la descripción detallada del estudio de algunos casos.

Métodos de recogida de datos

- Protocolos producidos por los alumnos con sus soluciones a tareas matemáticas propuestas en cada sesión y en la evaluación final (producidas en la interacción con el ordenador, o bien tareas de papel y lápiz propuestas en las sesiones en clase ordinaria).

Análisis de datos

Para el análisis de las respuestas de los protocolos producidos por los alumnos en las tareas matemáticas se efectuó un análisis cualitativo de los tipos de errores cometidos según las entidades primarias presentes en la actividad matemática.

La experiencia, que corresponde al objetivo segundo descrito anteriormente, se efectuó con estudiantes del primer cuatrimestre del primer curso de la licenciatura de LADE y consistió en la realización de un análisis de las respuestas a las cuestiones planteadas en una prueba de evaluación realizada a 32 estudiantes que habían realizado prácticas con el programa MATHEMATICA. Antes de la prueba de evaluación, se desarrollaron prácticas con dicho programa, las cuales fueron analizadas en Contreras y Ortega (2004).

La asignatura de Matemáticas I es troncal y consta de seis créditos, de los cuales tres son prácticos y tres teóricos. Los temas de Análisis corresponden a los objetos matemáticos de función, límite, continuidad, derivada e integral, de una variable; constituyen el 50% del currículum de matemáticas. La distribución horaria de los temas de Análisis es la siguiente: 15 horas de prácticas con ordenador, 15 horas de prácticas sin ordenador y 30 horas de teoría.

Matemáticas I es una de las seis asignaturas de la carrera que se imparten en el primer cuatrimestre. Los estudiantes que ingresan provienen del Bachillerato de Ciencias Sociales por lo que su formación en matemáticas es incompleta.

La prueba de evaluación consistió en 2 ejercicios, sobre el teorema de Bolzano, derivabilidad, derivación y límites, y aparece en el Anexo 1.

Los estudiantes dispusieron de 40 minutos para contestar cada uno de los ejercicios propuestos. La tabla 1 muestra una síntesis de las 32 tablas construidas para analizar semióticamente los resultados correspondientes a las contestaciones de dichos estudiantes.

Tabla 1. Resultados de las contestaciones

	ERRORES EN LENGUAJE	ERRORES EN ACCIONES	ERRORES EN CONCEPTOS	ERRORES EN PROPOSICIONES	ERRORES EN ARGUMENTACIONES
EJE. 1.a B= 16% PB= 28% M= 56%	- Transcribe mal la función (9%) - La gráfica da los límites laterales (3,1%) - Considera mal la dirección de la derivada lateral (3%)	- No realiza el límite lateral (12,5%) - No estudia la continuidad (12,5%) - No calcula el valor de la función en el punto (22%) - Realiza acciones sin sentido (3%)	- Redundancia de órdenes en el cálculo de los límites laterales (3%) - Confunde los límites laterales con el límite (41%)	- Sólo se estudia una de las hipótesis del teorema de Bolzano (19%) - No aplica las hipótesis del teorema de Bolzano (6%) - Confunde las hipótesis del teorema de Bolzano (3%) - No considera que la función es a trozos (6%) - Confunde las hipótesis de la continuidad (3%)	- Mezclar las hipótesis del teorema de Bolzano en sus argumentaciones (3%) - No detectar que hay que calcular límites laterales (6%) - No detectar el intervalo en que hay que hacer el estudio (3%) - No detectar que f(4).f(-4)<0 (3%) - No detectar que hay que aplicar la continuidad (3%) - Confundir la condición necesaria con la suficiente (3%)

EJE. 1.b B= 22% PB= 9% M= 69%	- Error en la escritura informática de la función (19%) - Considera mal las direcciones de los límites laterales (9%)	- Uso de una orden errónea para la función definida a trozos (3%) - No realizar la derivada lateral (6%) - No calcula la derivada (6%) - No calcula las derivadas laterales (6%) - Cálculo de valores sin sentido (3%)	- Error en la definición de derivada (16%) - Hacer el estudio sólo en uno de los trozos (3%) - Redundancia de órdenes al realizar la derivada lateral (25%) - Error al sustituir en la definición de derivada (6%) - Afirmar la derivabilidad, a pesar de tener las laterales distintas (9%) - Error al hacer las derivadas laterales (3%) - Error al hacer la derivada en un punto con el programa (3%) - Confundir límite con derivada (3%) - Confundir límite con límites laterales (6%)		- No detectar que hay que calcular las derivadas laterales (3%) - Creer que la continuidad implica la derivabilidad (3%) - No detectar que se está analizando sólo una parte de la función (3%) - La función en el punto no tiene por qué coincidir con los valores de las derivadas laterales (3%)
EJE. 2.a-f	- Error en la escritura informática (9%)				
EJE. 2.a-g B= 38% PB= 53% M= 9%	- Error en la escritura informática (53%)				
EJE 2.a-h	- Error en la escritura informática (28%)				

EJE 2.b B= 44% PB= 6% M= 50%	Error en el uso de las variables "x" y "X" (3%) - Error al transcribir la función (3%) - Mal uso del paquete <<Calculus Limit (6%)	- No cargar el paquete de límites (13%)	- Considerar la lateralidad en el límite en el infinito (41%)		- No detectar el problema de aparecer "X" en la solución (3%)

Puede observarse que en el ejercicio 1a, sobre el teorema de Bolzano, de la prueba de evaluación un 56% de los estudiantes lo contestan erróneamente. Los errores más destacables, que superan el 10% de porcentaje de error, corresponden a: *no calcular el valor de la función en el punto al estudiar la continuidad*, un 22%; *confundir los límites laterales con el límite de la función*, en un porcentaje muy estimable del 41%; *estudiar sólo una hipótesis del teorema de Bolzano*, en un 19%; *no realizar el límite lateral*, en un 12,5%; por último, *no estudiar la continuidad*, en un 12,5%.

A pesar de ser un ejercicio realizado en las prácticas con el MATHEMATICA, además de estudiado en las clases de teoría, los estudiantes muestran grandes dificultades en realizar correctamente la tarea, cometiendo errores relacionados en la argumentación en un 21%, en los conceptos en un 44% y en las acciones en un 47%.

En el ejercicio 1b, sobre la derivabilidad, el 69% de los estudiantes lo contestan erróneamente. Los errores más frecuentes, que superan el 10% de porcentaje de error, corresponden a: *errores en la escritura informática*, en un 19%; *error al definir la derivada*, en un 16%; por último, *redundancia de órdenes al efectuar la derivada lateral*, en un 25%;

Sorprende el alto porcentaje de error en este ejercicio, el 69%, cuando se trata de un ejercicio realizado en las clases con el MATHEMATICA. Los estudiantes cometen errores de lenguaje en un 28%, en las acciones un 24%, en los conceptos un 74% y, por último en las argumentaciones, en un 12%.

En el caso del ejercicio 2a, con tres funciones a derivar, los errores disminuyen, sólo un 9%, aunque aumenta espectacularmente los casos que se han denominado "parcialmente bien" (que muestran errores no graves, propios de una escritura algo imperfecta), en un 53%. El único error, que corresponde a un error en la escritura, tanto en la función f, como en las otras dos, tiene un porcentaje de error del 90%, lo que muestra la importancia del interface en las prácticas con el ordenador, capaz de evitar la perfección en ejercicios aparentemente tan simples como el que se comenta.

Por último, en el ejercicio 2b, el porcentaje de estudiantes que contestan erróneamente es del 50%, donde aparentemente sólo han de seguir las instrucciones precisas del lenguaje del MATHEMATICA. En este caso, los errores más frecuentes están relacionados con los conceptos, con un 41% de error al *considerar la lateralidad en el infinito*; los otros errores *–no cargar el paquete de límites* y *error en la escritura–* tiene porcentajes de error del 13% y 12%, respectivamente.

Para dar una evidencia empírica de los resultados obtenidos, en el Anexo 2 se describen las respuestas de uno de los estudiantes a las dos cuestiones planteadas en el examen, así como la corrección dada por el profesor.

Consideraciones finales

Los resultados parciales que se presentan muestran que estudiantes universitarios de primer curso que han realizado el proceso de estudio en entornos informáticos en los que se utiliza el programa MATHEMATICA cometen errores importantes en sus respuestas a las cuestiones planteadas en una prueba de evaluación sobre límites, continuidad y derivadas. Este hecho, nos lleva a afirmar que uso de dicho entorno informático no garantiza unos resultados satisfactorios, en cuanto a la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función. La variable explicativa que se utiliza en el enfoque ontosemiótico es que, a pesar del uso del programa MATHEMATICA, el proceso de instrucción que han seguido estos alumnos no ha tomado en consideración la complejidad semiótica asociada a los objetos límite, continuidad y derivada. Por otra parte, estos resultados apoyan la conjetura de que determinados usos del ordenador aportan muy pocos elementos de transformación a la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario.

Referencias bibliográfícas

Afonso, R. M. (2003). Problemas de convergencia en un contexto de software educativo, *Números*, 56, 3-40.

Artigue, M. (2002). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques, en Guin y Trouche (Coords.), *Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, Grenoble : La Pensée Sauvage, Éditions, (277-349).

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. Y Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative, *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 399-431.

ASIALA Et Als. (1996). A Framework for research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. II*, Conference Board of the Mathematical Sciencies (CBMS), Issues in Mathematics Education, Volume 6, (1-32).

Bishop, A. Et Als. (Eds.) (1996). *International handbook of mathematicas education*. Dordrecht: Kluwer (Cap. 29, 30, 31, 32 y 33), incluyen surveys sobre el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas).

Camacho, M. Y González, S. (2001). Una aproximación geométrica al cálculo de primitivas utilizando la TI-92, *Números*, 45, 61-68.

Clark, J.M. Y Als. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule, *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.

Contreras, A.; Font, V. ; Luque, L. ; Ordöñez, L. (en prensa). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*

Contreras, A. y Ortega, M. (2003). El objeto tecnológico MATHEMATICA en la enseñanza del Análisis, ¿es sólo un amplificador cognitivo?, *XIX Congreso del Seminario Inter-universitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM)*, Córdoba.

Contreras, A. y Ortega, M. (2004). Los estudiantes, las instituciones y el programa MATHEMÁTICA, *I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*, pp. 1-10.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria, *Educación Matemática*, 8, 3, pp. 25-41.

Godino, J.D. (2003). Un enfoque semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactiques* *en Mathematiques*, 22 (22), 237-284.

Guin, D. y Trouche, L. (2002). Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique, Grenoble : La Pensée Sauvage, Éditions.

Gutiérrez, A. (1997). Fronteras en el uso de las calculadoras gráficas, *Números*, 32, 54-66.

Hit, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y ºcurrículum, *Educación Matemática*, 10 (2), 23-45.

Kendal, M.; Stacey, K. Y Pierce, R. (2002). L'influence des environnements de calcul formal sur les modes de travail des enseignants, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, (117-146).

Queralt, T. (2000). Las matemáticas con tecnología entran, *Números*, 14, 23-36.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique, en Guin y Trouche (Coords.), Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique, Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions, (187-213).

Wilhelmi, M. R. ; Godino, J.D.; Font, V. (en prensa). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. Actas del *Colloque International* « *Didactiques : quelles references epistemologiques ?*, Bordeaux, France.

Anexo 1

Ejercicio 1.- Sea $f: R \to R$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & si \quad x \leq 0, \\ (x-2)^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

(a) ¿Satisface f las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [-4,4]?

(b) ¿Es f derivable en el punto x=0?

Ejercicio 2.-

(a) Sean $f, g, h: R \to R$ las funciones definidas, respectivamente, por:

$$f(x) = e^{5x^2}, \quad g(x) = sen(3x+1)^3 \quad y \quad h(x) = \ln\sqrt{x^2+1},$$

siendo ln $\sqrt{x^2+1}$ el logaritmo neperiano de $\sqrt{x^2+1}$. Halla las funciones derivadas de f, g y h.

(b) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^{2x+1}+4^{x^2}}{5^{x+2}}$.

Anexo 2

Ejercicio 1

Alumno:

1.

f [x_] := Wich [x≤0, 2x+4, x>0, (x-2)^2]

a)

f [4]

4

f [-4]

-4

Se cumple el teorema de Bolzano ya que un elemento f(a) dentro del intervalo [a,b] que tiene distinto signo de f[b], por lo tanto existe un f(c).

Profesora Correctora:

Sólo estudia una de las hipótesis del teorema.

Alumno:

1.

b)

f [x_] := Wich [x≤0, 2x+4, x>0, (x-2)^2]

D [f[x], x]

Wich [x≤0, 2, x>0, 2(x-2)]

Limit [((2h+4)-1) / h, h→ 0, Direction → 1]

- ∞

Limit [(h-2)^2) / h, h→ 0, Direction → -1]

La Función f (x) no es derivable en el punto x = 0

Profesora correctora:

Utiliza una orden errónea para el cálculo de la derivada de una función definida a trozos.

Error en la definición de derivada.

Redundancia de órdenes en el cálculo de derivadas laterales.

Ejercicio 2

Alumno:

a) Correcto
b) Limit [(3^2 x+1+4^x2) / (5^x+2), x → Infinity]

0

Profesora correctora:

Error al transcribir la función.

INDICE

PRESENTACIÓN……………………………………………………………………………...I

Seminario I: INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN (TIC) EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
José Mª Fortuny (Coordinador)……………………………………………………….3

Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación.
Olimpia Figueras…………………………………………..……………….............5

Replica a la ponencia "Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación".
Ángel Martínez Recio……………………………………………………….…………17

Aspectos de investigación sobre aprendizaje mediante exploración con tecnología.
Ángel Gutiérrez Rodríguez……………………………………………………………..27

Replica a la ponencia "Aspectos de investigación sobre aprendizaje mediante exploración con tecnología".
Jesús Murillo Ramón…………………………………………………………………..45

La autorización humana y artificial en la resolución de problemas de matemáticas.
Pedro Cobo Lozano y José Mª Fortuny..…………………………………………...55

Replica a la ponencia "La autorización humana y artificial en la resolución de problemas de matemáticas".
María José González López…………………………………………………………...71

Seminario II: INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS.
Carmen Azcarate Giménez (Coordinadora)…………………………………………....79

El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros.
Mª Teresa González Astudillo………………………………………………………….81

Enseñanza y aprendizaje del Análisis matemático haciendo uso del CAS.
Matías Camacho Machín……………………………………………………………..97

Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada.
Vicenç Font Moll…………………………………………………………………...111

Comunicaciones……………………..……………………………………………………..129

Proyecto “mete” (mathematics education traditions of europe): El foco matemático.
Paul Andrews, José Carrillo Yañez, y Nuria Climent Rodríguez……………………..……131

Proyecto “mete” (mathematics education traditions of europe): Polígonos en primaria.
Nuria Climent Rodríguez y José Carrillo Yañez………………………………………139

Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración.
Vicente Vicario y José Carrillo Yañez ………………...……………………………..145

Análisis de las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo.
David Arnau y Luis Puig Espinosa……………………………………..……….153

Análisis diacrónico de la producción española de tesis doctorales en Educación Matemática mediante la metodología ARIMA en datos de diseños longitudinales.
Mónica Vallejo Ruiz, Manuel Torralbo Rodríguez y Antonio Fernández Cano……..…163

Reconstrucción del concepto de límite: estudio de un caso.
Rosa Elvira Páez Murillo…………………………………………………………..175

Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos: investigación sobre una práctica educativa.
Mercè Edo y Jordi Deulofeu…………………………………………………………187

Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático.
Jesús Gallardo Romero y José Luis González Marí. …………………………………...197

Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional.
Marta Molina González y Encarnación Castro Martínez…………………………..…..205

Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo.
Jesús Murillo y Guillermina Marcos……………………………………..………….215

Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Curso-taller como técnica para la obtención de datos.
Gregoria Guillén y Olimpia Figueras Mourut de Montpellier……………………………......227

Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas.
Juan D. Godino, Angel M. Recio, Rafael Roa, Francisco Ruiz y Juan Pareja...............235

El álgebra aritmética de George Peacock: un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica.
Aurora Gallardo y Oralia Torres……………………………………………………...243

La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario.
Tomás Pardo Salcedo y Bernardo Gómez Alfonso……………………..………..……..251

La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema.
Mª Ángeles Lonjedo y M. Pedro Huerta………………………………………………...261

Aplicación del programa *Mathematica* a las prácticas de cálculo en el primer año universitario.
Ángel Contreras de la Fuente, Vicenç Font Moll, Manuel García Armenteros, Lorenzo Luque Cañada, Marta Marcolini Bernardi, Lourdes Ordóñez Cañada, Manuela Ortega Carpio y Carmen Sánchez Gómez………………………..…………………………..…271

INDICE……………………………………………………………………………….283