investigación en educación matemática

octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática

cursos _congresos _simposios

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ENCARNACIÓN CASTRO
ENRIQUE DE LA TORRE
(EDS.)

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)

A Coruña, 9 – 11, septiembre, 2004

Editores:

Encarnación Castro

Enrique de la Torre

ISBN: 84-9749-120-3

El Comité Organizador del *VIII Simposio de la SEIEM* agradece a los siguientes organismos su apoyo y financiación para la celebración de este evento:

Consellería de Innovación, Industria e Comercio

Consellería de Educación e Ordenación Universitaria

Xunta de Galicia

Excmo. Ayuntamiento de A Coruña

Sociedade Anónima de Xestión do Plan Xacobeo

Universidade da Coruña

Facultade de Ciencias da Educación

Departamento de Pedagoxía e
Didáctica das Ciencias Experimentáis

Banco de Santander Central Hispano.

ÍNDICE

Presentación

El octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática llega a la ciudad de A Coruña después de haber recorrido, en estos ocho años de existencia de nuestra Sociedad, un periplo de capitales del Centro-Norte y del Sur de España. Es la primera vez que se celebra en estas tierras gallegas, en esta esquina Noroeste tantas veces olvidada por unas y otras Administraciones e infortunadamente visitada por hidrocarburos y otros tipos similares.

Este año que nos separa del anterior Simposio celebrado en Granada, ha sido un año singular, como lo son todos, pero creo que merecería la pena señalar algunas circunstancias especiales.

El 14 de abril muere Miguel de Guzmán. Llorado desde la Matemática como desde la Didáctica de la Matemática, su ausencia es especialmente sentida por nosotros por su participación en la fundación de la SEIEM y por sus trabajos en el campo de la Didáctica de la Matemática, que han sido en un momento u otro, ayuda inestimable para nuestro trabajo. En este Simposio, a propuesta de la Junta Directiva de la Sociedad, la Asamblea General le va a nombrar Socio de Honor, a título póstumo.

Este año se cumple el veinte aniversario de la consideración de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento, hecho singular para la consolidación de nuestro campo de investigación como ciencia. Sin embargo, la presencia de profesores e investigadores de esta área de conocimiento es aún muy escasa en las comisiones nacionales de evaluación y en los organismos competentes sobre planes de estudios y currículum de los diferentes niveles educativos. No obstante es un momento importante la participación de representantes nuestra Sociedad en el Seminario sobre "Itinerario educativo de la Licenciatura de Matemáticas", celebrado en enero de este año en Granada, y en el que investigadores en Didáctica de la Matemática son escuchados por un auditorio que va a perfilar las bases para uno de los itinerarios de la Licenciatura de Matemáticas.

El reto de la integración en el Espacio Europeo de Educación Superior es otro asunto que hace singular este momento. La necesidad de homogeneizar la estructura universitaria europea para facilitar la movilidad de la comunidad universitaria genera un contexto de cambio en el que la investigación tiene que demostrar su implicación en la práctica y en la formación. La consideración del trabajo del alumno y su cómputo en el programa de las materias, la autorización y la atención a las tecnologías de la información y la comunicación, y la consideración de las 'competencias' para la elaboración de los currículum va a suponer un fortalecimiento de la investigación sobre formación de profesores, no solamente en lo que respecta a la Educación Primaria y Secundaria, sino también en la Educación Universitaria.

Bajo estas circunstancias, este octavo Simposio se abre con una mirada optimista hacia los años venideros y centra los dos Seminarios de Investigación en dos de las cuestiones mencionadas más arriba: la Formación de Profesores y la Evaluación del Conocimiento Matemático.

El primer Seminario, coordinado por el Dr. Salvador Llinares, de la Universidad de Alicante, se centra en las agendas de investigación referidas al aprendizaje y desarrollo profesional del profesor de matemáticas y su vinculación con el diseño de procesos formativos. Se desarrolla a lo largo de tres ponencias que reflejan dos características centrales en este línea de investigación, como son el papel que desempeñan el diseño de determinados procesos formativos en lo que aprende el profesor y en la caracterización de la forma en que se aprende, y la explicitación de la relación entre la actividad práctica de formar profesores y la actividad de investigar, manifestándose en la conjunción formador/investigador.

Los ponentes son los doctores Pablo Flores, de la Universidad de Granada, Pilar Azcárate, de la Universidad de Cádiz y Joao Pedro da Ponte, de la Universidad de Lisboa. En este panel queda también resaltada la relación entre grupos de investigación españoles y portugueses, centrados en las cuestiones relativas a la formación de profesores, lo que permite un conocimiento mayor de la manera en que se abordan las distintas cuestiones de investigación por los distintos grupos.

El segundo Seminario sigue una estructura similar, con tres ponencias, coordinado por el Dr. Francisco Gil, de la Universidad de Almería, y aborda la Evaluación del Conocimiento Matemático. Las ponencias pretenden mostrar el estado de los estudios internacionales de evaluación, de las investigaciones sobre evaluación y abrir nuevas líneas de investigación.

Los ponentes son los doctores Luis Rico, de la Universidad de Granada, Joaquim Giménez, Nuria Rosich, Rosa Mª Latorre y Sergi Muria, de la Universidad de Barcelona, y Leonor Santos, de la Universidad de Lisboa. También en este segundo Seminario se hace patente la similitud de planteamientos y circunstancias entre los dos países ibéricos, evidenciando la falta de atención que se presta a la evaluación desde ambas Administraciones.

Además de estos dos Seminarios, en el VIII Simposio tendrá lugar, como viene siendo habitual desde los tres últimos, la presentación de comunicaciones. Todas ellas fueron sometidas a un doble proceso de revisión anónimo realizado por dos especialistas en las distintas líneas de investigación, habiéndose aceptado catorce.

Estas comunicaciones son trabajos originales, presentando resultados avanzados sobre un tema de investigación. Son una muestra del trabajo de jóvenes o consagrados investigadores, no sólo españoles, sino también de Portugal, de Brasil, de Venezuela y de México.

Un tercer apartado en las sesiones de este VIII Simposio, se dedica a las reuniones de los Grupos de Investigación. Estos grupos de trabajo en torno a campos de investigación prioritarios en Educación Matemática, se van a reunir en dos sesiones, no coincidentes en el tiempo, con objeto de facilitar que los miembros puedan asistir a las reuniones de más de uno de los grupos.

Se han agrupado en dos bloques, el bloque I está formado por los Grupos de Investigación de Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica, Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor e Investigación en Historia de la Matemática y de la Educación Matemática. El bloque II está formado por los Grupos de Investigación de Aprendizaje de la Geometría; Didáctica del Análisis; Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria y Pensamiento Numérico y Algebraico.

Finalmente, también hay lugar durante la celebración de este VIII Simposio, para las reuniones informales y el intercambio de experiencias e información entre los *asistentes, algo que no se puede desdeñar como objetivo y resultado de toda reunión científica.*

Las actividades sociales tienen también su momento a lo largo de estas jornadas. El primer día el Ayuntamiento de A Coruña recibe a los asistentes y les ofrece esta ciudad como meta y origen de nuevos caminos de investigación, así como ella es inicio del Camino Inglés, en este Año Santo Jacobeo.

El segundo día una visita a la Casa de las Ciencias nos muestra de nuevo lo estrechamente unida que está la matemática a las demás ciencias, culminando la visita con un paseo por los cielos virtuales del Planetario.

Universidade da Coruña, julio de 2004.

ENRIQUE DE LA TORRE

Aprendizaje del profesor y estrategias de formación. Características de una agenda de investigación

SALVADOR LLINARES (COORDINADOR)

(sllinares@ua.es)

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Muchos de los investigadores que en la actualidad centramos parte de nuestro interés investigativo en cuestiones sobre el profesor de matemáticas iniciamos nuestra actividad profesional en la Universidad formando maestros en las Escuelas de Formación del Profesorado de EGB. Realizar una práctica profesional en una misma institución marca unas referencias que pueden explicar algunas de las características de las investigaciones y la manera en la que se plantean las cuestiones de investigación que se realizan en estos momentos. A lo largo de las dos últimas décadas el contexto institucional en el que desarrollamos nuestra práctica profesional de formar maestros puede haber cambiado, existen Departamentos universitarios, el status institucional de las Escuelas Universitarias ha cambiado en muchas Universidades transformándose en facultades o en Institutos superiores (Llinares, 2003). Sin embargo, hay un aspecto que se mantiene y que permite caracterizar a los formadores de profesores que centran parte de su interés investigativo en el profesor: la necesidad de vincular los procesos formativos al desarrollo de la investigación. Esta característica se mantiene en estos momentos tanto en lo relativo a la formación de maestros y a las actuaciones dirigidas a formar a profesores de matemáticas de enseñanza secundaria como en aquellos perfiles profesionales en los que las reflexiones desde la Didáctica de la Matemática aportan información y referencias. Esta característica es común al colectivo de formadores / investigadores a nivel internacional.

En estos momentos el desarrollo de la investigación centrada en el profesor realizada en diferentes grupos de trabajo está empezando a definir las características de lo que podríamos denominar agendas de investigación centrada en el aprendizaje y desarrollo profesional del profesor de matemáticas y su vinculación con el diseño de procesos formativos (Llinares, 1998). En el primer simposio de la SEIEM celebrado en Zamora en 1997 uno de los seminarios de investigación realizados también tenía como contenido la reflexión sobre las características de las investigaciones centradas en el profesor. El contenido de las presentaciones mostró el interés que existía en aquel momento en caracterizar la idea de "conocimiento de contenido matemático" desde la perspectiva de la enseñanza y su relación con la noción de conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas o conocimiento de contenido didáctico. Las líneas de trabajo que se expusieron mostraban la preocupación por intentar clarificar aquello sobre lo que se estaba investigando (el objeto de estudio) marcando el énfasis en el necesario reconocimiento de lo específico del hecho de "conocer matemáticas" cuando la actividad práctica que había que realizar era la de enseñar matemáticas. El tema del debate "*Profesor de Matemáticas y contextos de investigación ¿cómo abordar la investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido en los profesores de matemáticas? Opciones y líneas*" y el título de las presentaciones realizadas en el I Simposio muestran el contenido de dichas reflexiones (Rico & Sierra, 1998):

LLinares, S. & Sánchez, V. *Aprender a enseñar, modos de representación y número racional*;

Azcarate, P., *Sobre el conocimiento didáctico del contenido. Dilemas y alternativas*;

Blanco, L., *Tipos de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido*

Siete años después la evolución en el foco de las investigaciones que se presentan se ha trasladado hacia dos ámbitos relacionados

- el papel que desempeñan el diseño de determinadas procesos formativos en lo que aprende el profesor y en caracterizar la forma en la que se aprende, y
- la explicitación de la relación entre la actividad práctica de formar profesores y la actividad de investigar centrada en aspectos relativos al profesor puesta de manifiesto en la tensión de la conjunción formador/investigador.

Otra característica a resaltar es la relación establecida entre grupos de investigación españoles y portugueses centrados en las cuestiones relativas a la formación de profesores que ha permitido un conocimiento mayor de la manera en la que son abordados las cuestiones de investigación y formación y un intercambio de experiencias.

Los tres trabajos presentados en este seminario muestran, en mayor o menor medida, estas dos características. Así, los tres ponentes presentan las características de sus trabajos de investigación integrados en esa reflexión conjunta de lo que significa innovar en la práctica de formar profesores y intentar generar nuevo conocimiento desde la investigación que repercuta en la misma práctica. En estos momentos se definen dos puntos de interés que vale la pena explicitar en función de lo que es el "foco de atención" en cada momentos. Cuando un formador de profesores centra su actividad investigadora en cómo aprenden sus alumnos y en qué decisiones hay que tomar para diseñar las propuestas de acción formativas, el objeto de atención es el aprendizaje del profesor o estudiante para profesor y las condiciones que lo favorecen. Pero esta misma actividad investigadora/formativa genera otro foco de atención que empieza a ser explicito en estos momentos de desarrollo de la agenda de investigación: "el desarrollo profesional del formador de profesores". Estos momentos puede ser necesario clarificar cuando se centra la atención en cómo aprenden los estudiantes para profesor / profesor y, por otra parte, cuando el foco de atención es el aprendizaje de uno mismo (como formador e investigador) y la relación que se establece entre estos focos anteriores.

Esta característica de esta agenda de investigación en educación matemática la ejemplifica P. Flores cuando señala *"en toda mi actuación se percibe la dificultad de separar el aspecto formativo del investigador y, si se consigue, es en momentos puntuales ... por lo tanto me veo en la necesidad de acompañar el relato de los trabajos (de investigación) con la etapa de desarrollo profesional como formador de profesores y como investigador"*, y P. Azcarate al indicar "*(el objetivo inicial de nuestro trabajo se centró en el ámbito metodológico y la búsqueda de claves de intervención en las aulas que favorecieran la evolución de nuestros alumnos, futuros profesores de primaria). Esta finalidad inicialmente estaba vinculada a la mejora de nuestra propia práctica como formadores de profesores, finalidad que progresivamente se fue transformando en investigación sobre nuestra propia práctica ..."*

Esta relación entre la actividad de investigar en la formación de profesores y la actividad de formar profesores es enmarcada por el trabajo de J.P. da Ponte, desde una perspectiva más general, que integra toda un movimiento centrado en *“Investigar la nossa propia práctica”*. Ponte subraya en su ponencia que esta característica de la investigación / formación de profesores es común a muchos profesionales de la educación que se enfrentan en su práctica a muchos problemas complejos y deciden investigar directamente estos problemas. Desde este punto de vista, la idea de la “investigación sobre la propia práctica” como una estrategia de formación es considerada por Ponte como un elemento de la cultura profesional del profesor. La tensión existente entre lo que significa realizar una actividad práctica y la investigación sobre esa actividad realizada por los mismos sujetos y su implicación con el desarrollo profesional de estos actores puede ser comprendido desde esta perspectiva. Sin embargo Ponte centra su atención no en los dos actores de la tensión definida en Flores y Azcarte (el formador y el estudiante para profesor/profesor) sino solamente en el profesor/estudiante para profesor. De esta manera Ponte analizando “los actores” y “los procesos” en las estrategias de formación de profesores articuladas alrededor de la idea de “investigar la propia práctica” se centra en la evolución y cambio de los profesores/estudiantes para profesor. Considerar conjuntamente a las variables anteriores lo que puede ser el “objeto de la investigación”, es decir, “sobre qué estoy colocando mi atención” puede ayudar a determinar la naturaleza de la relación entre

- las cuestiones relativas al aprendizaje del estudiante para profesor/ profesor,
- el desarrollo profesional de los formadores de profesores, y
- el diseño de las intervenciones de formación y analizar cómo evolucionan los estudiantes para profesor / profesores.

A partir de la explicitación de la tensión entre formador e investigador como una característica común como *contexto* en la ponencia de P. Azcarate, como *contexto y organizador* en la de P. Flores y como *aspecto particular de una perspectiva* en J.P. da Ponte, las tres ponencias presentadas en este seminario centran su atención en ideas particulares que permiten definir diferentes líneas de investigación.

La idea de “reflexión” y “profesor como profesional crítico y reflexivo” articula el trabajo presentado por P. Flores en el que se intenta caracterizar estos constructos apoyándose en Dewey, Schön, Perrenoud y Smith. La hipótesis que se asume es que el aprendizaje del estudiante para profesor está vinculado al desarrollo de una actitud reflexiva ante la resolución de problemas relacionados a la práctica de enseñar matemáticas, por tanto la concreción de planes de formación deben diseñarse teniéndolo en cuenta. La clarificación de la idea de “reflexión” lleva a determinar dimensiones, tipos y niveles lo que permite tener un armazón conceptual potente para “entender si un profesor evoluciona en su reflexión” como una característica del aprendizaje generado. De esta manera se vincula la idea de reflexión como fundamento (ideal formativo) a la metodología de actuación. El análisis de los procesos reflexivos de los estudiantes para profesor permite identificar tanto las características de las cuestiones profesionales que se ponían en juego como la manera en la que los estudiantes toman conciencia del mismo proceso de reflexión. Para P. Flores la necesidad de que los estudiantes generen vínculos significativos con el conocimiento profesional ha hecho que se diseñen propuestas concretas de formación apoyándose en el uso de metáforas sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la indagación sobre conceptos de matemática elemental y el "humor". El potencial de esta línea de investigación radica en identificar perfiles de evolución de los estudiantes para profesor y por tanto aportar conocimiento relativo al aprendizaje del profesor y a la influencia de los entornos de aprendizaje diseñados.

En el trabajo de P. Azcarate también se asume al profesor como profesional reflexivo, pero el foco específico de atención es la idea de "(evolución del) conocimiento profesional". Para ello se caracterizan las dimensiones y fuentes del conocimiento profesional para asumir que es una "red de conocimiento organizada en torno a los problemas profesionales relevantes" lo que permite identificar desde un análisis a priori "ámbitos de investigación profesional". La caracterización de estos ámbitos de investigación profesional se realiza atendiendo al "nivel de organización del conocimiento profesional" vinculado a la práctica docente. Este foco explícito sobre el "conocimiento" como objeto de estudio conlleva que la línea de investigación desarrollada se centre en determinar "niveles de formulación del conocimiento" de los profesores, "tipo de conocimiento" que se promueve desde los libros de textos y "fuentes de información" (entendidas como conocimiento) utilizadas por los profesores al seleccionar y organizar contenidos matemáticos. De la misma manera que en la línea de investigación caracterizada por P. Flores, los supuestos y focos de atención de la investigación fundamentan estrategias formativas determinadas que se convierten en sí mismas en objeto de investigación. Con una dinámica similar a la propuesta por J.P. da Ponte el análisis de la estrategia de formación se realiza desde la perspectiva de "investigando la propia práctica" lo que determina como unidad de análisis a los "actores" (profesores y formadores) y el proceso (la estrategia). Desde esta perspectiva se identifican factores que facilitan el cambio de los profesores y obstáculos que lo inhiben y cuales han sido los elementos claves del proceso formativo (estrategias, recursos y el papel de los formadores). El análisis del proceso de formación ha identificado un nuevo objeto de atención: los recursos para la formación (estudios de casos, uso de portafolios, mapas conceptuales) y su influencia en la evolución del conocimiento profesional del profesor. Desde esta perspectiva se vuelve a poner de manifiesto el ciclo característico de esta línea de trabajo con la producción de nuevo cocimiento sobre los procesos de cambio de los profesores , el desarrollo de estrategias de formación, el análisis, la identificación de nuevo foco de atención cuyo análisis debe producir nuevo conocimiento sobre el fenómeno estudiado (los procesos de cambio del profesor).

Ponte centra su atención en la "investigación sobre la propia práctica" como una estrategia de formación. La caracterización de esta noción se realiza asumiendo que no se pretende transformar al profesor en investigador profesional, sino en reforzar su competencia profesional al usar la investigación como una forma de gestionar los problemas de la práctica. Esto le lleva a tener que caracterizar la estrategia de formación para que refleje aquellos aspectos por los cuales la "*actividad del profesor en el proceso formativo*" pueda ser considerada como investigación. En relación a esto, Ponte señala que cuando una estrategia de formación se articula alrededor de la "investigación sobre la propia práctica" debe permitir que:

- se produzcan nuevos conocimientos,
- siga una metodología rigurosa, y

- sea pública.

Ponte particulariza estas condiciones a través de tres ejemplos para mostrar como se puede desarrollar una cultura de la investigación y discusión de la investigación sobre la propia práctica (con profesores en ejercicio, como eje para articular la colaboración entre los profesores de una escuela, y en la formación inicial de profesores de matemáticas). El análisis de las estrategias de formación estructuradas a través de la idea de investigación sobre la propia práctica (o de iniciación a la observación y reflexión sobre el inicio de la práctica profesional) está permitiendo mostrar como una característica importante el ambiente de colaboración alrededor de la investigación sobre cuestiones relacionadas con la práctica profesional. La identificación y observación de situaciones de la práctica, la reflexión –personal y colectiva - y el cuestionamiento forman la base de esta propuesta formativa.

Aspectos de esta aproximación en lo relativo a la formación inicial coinciden con la propuesta desarrollada por P. Flores y P. Azcarate en la que la identificación de cuestiones profesionales, y las discusiones (reflexiones) sobre ellas no desligan la realidad del conocimiento teórico. De ahí que el foco de atención considerado, "el cambio del estudiante para profesor", sea visto globalmente cuando Ponte habla de "desarrollo de la identidad profesional", Flores indica "fases de reflexión" y Azcarate "claves y obstáculos para el desarrollo profesional". Posiblemente, aunque las tres propuestas centran su atención en cómo una determinada estrategia de formación puede determinar de alguna manera la evolución del estudiante para profesor, y la investigación se centra en producir nuevo conocimiento relativo al proceso de aprendizaje generado, no sea lo mismo hablar de "identidad profesional", "fases de reflexión", o "cambios en el pensamiento y quehacer profesional". Sin embargo lo que si se puede identificar es que, desde referencias teóricas diferentes (ya que las tres ponencias escasamente comparte las mismas referencias bibliográficas) existe una preocupación común al vincular el diseño de los procesos formativos considerados como entornos de aprendizaje con el aprendizaje producido. Este vínculo entre diseño de propuestas de formación y el aprendizaje del profesor es por tanto lo que puede caracterizar esta agenda de investigación. Los diferentes significados que se le den a la idea de cambio del profesor (aprendizaje) entendidas como una evolución de la identidad profesional, una modificación en el nivel de reflexión o un cambio en el conocimiento o cualquier otro determina líneas de investigación caracterizadas por los supuestos teóricos desde los que se derivan los significados manejados.

En este proceso de caracterización de líneas de investigación dentro de esta agenda centrada en el aprendizaje del profesor es importante empezar a explicitar que es lo que se esta considerando como evidencia de qué. En el proceso investigativo, por tanto, es necesario generar nuevo conocimiento (comprensión) del fenómeno que se está investigando y por tanto es necesario determinar lo que se va a considerar la evidencia empírica sobre la que se realizan las inferencias y por tanto las interpretaciones del investigador. No es lo mismo mirar las producciones escritas (o las trascripciones del trabajo en grupo) de un grupo de profesores al analizar una situación práctica, que mirar la entrevista a un profesor preguntándole sus opiniones sobre su participación en una determinada estrategia de formación. Posiblemente el camino abierto por las tres ponencias de este seminario nos lleven a tener que seguir planteándonos cuestiones que nos ayuden a clarificar desde las investigaciones lo cómo estamos entendiendo como aprendizaje del profesor y qué es lo que consideramos como evidencia de dicho aprendizaje.

Referencias

LLINARES, S. (1998) La investigación “sobre” el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *AULA. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa,* 10, 153-179.

LLINARES, S. (2003) Contesto e pratica nella formazione degli insegnanti di matemática. Uno sguardo al caso de della Spagna. En M.I. Fandiño (ed.) *Riflessioni sulla formazioni iniziale degli insegnanti di matemática : a ressegna internazionale* (pp. 115-139). Bologna ; Pitagora.

RICO, L. & SIERRA, M. (eds.) (1998) *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Edita SEIEM: Universidad de Granada

Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación[1]

PABLO FLORES MARTÍNEZ
Universidad de Granada

Resumen:

La actual caracterización cognitiva de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas nos lleva a concebir al profesor como un sujeto único, cambiante, que desarrolla su papel práctico profesional con una intención principalmente ética. Para ello tiene que generar una práctica versátil, regida por una actitud reflexiva. El término profesor reflexivo se ha convertido en un referente constante, pero vago, en proyectos docentes e investigadores. Para poder concretar planes de formación profesional del profesor de matemáticas reflexivo, y para analizar el desarrollo de estos profesores y su relación con el conocimiento profesional, se hace preciso caracterizar este término: profesor de matemáticas reflexivo. En esta ponencia describiremos algunas variables que se utilizan en las investigaciones sobre la caracterización y formación de profesores de matemáticas reflexivos. Para ello adoptaremos algunos referentes teóricos, y presentaremos las investigaciones que estamos llevando en esta línea, en la que se pretende caracterizar el proceso de reflexión de estudiantes de la asignatura Prácticas de Enseñanza de Matemáticas, en la Licenciatura de Matemáticas.

Introducción

En la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) nos ocupamos de problemas de investigación y de los que tenemos como investigadores, pero no podemos evitar el pensar en los problemas docentes de los educadores matemáticos, y, especialmente, en aquellos que nos ocupan en nuestro trabajo docente, relacionados con cómo formar profesores de matemáticas o maestros que atiendan la formación matemática de los niños de primaria. No es fácil articular nuestras actuaciones como profesores y como investigadores, ya que la inercia lleva, a menudo, a mezclar criterios de racionalidad. Esta situación es especialmente conflictiva en la investigación sobre *desarrollo y conocimiento profesional de profesores de matemáticas*, ya que los objetos de atención somos nosotros o nuestra práctica docente. Esto hace que se despiertan expectativas en nuestra comunidad de prácticas, pues se esperan aportes significativos para poder utilizarlos en el aula. A veces se utilizan y no siempre de manera coherente en los proyectos docentes para la promoción profesional.

En esta sesión de seminario, que pretende presentar agendas de investigación que se están llevando a cabo sobre formación de profesores de matemáticas, voy a hacer una modesta aportación presentando los trabajos que estamos llevando a cabo en la Universidad de Granada, tratando de analizar cómo aprenden los estudiantes para

[1] El presente trabajo ha sido realizado en el marco del Grupo de Investigación FQM-0126 del Plan Andaluz de Investigación, "Teoría y Métodos de investigación en Educación Matemática", del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

profesor, alumnos de la asignatura Prácticas de Enseñanza, que hasta este año se ha estado impartiendo en quinto curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada.

Mi carrera profesional como formador de profesores se inicia después de una amplia experiencia como profesor de matemáticas de secundaria. La formación investigadora y el desarrollo profesional como formador de profesores de matemáticas se han visto influidos por la visión del profesor de matemáticas que acarreaba de mi historia profesional previa. A partir de caracterizar al profesor de matemáticas de secundaria como un profesional práctico reflexivo, he dirigido la atención, tanto formativa como investigadora, a idear estrategias formadoras y a analizar cómo reaccionan ante ellas los estudiantes para profesor de matemáticas durante su formación inicial. En este proceso se han visto implicados mi actitud reflexiva ante la enseñanza como mi desarrollo como investigador. Esto ha propiciado que no siempre haya distinguido con claridad mis aportes innovadores en formación de profesores de matemáticas, de los investigadores.

En los trabajos que presento están imbricados el desarrollo profesional como formador de profesores, la innovación en este campo, y la investigación sobre el tema. Trataré de justificar esta circunstancia al describir la posición educativa en la que me sitúo. Para ello el texto comienza por describir al profesor de matemáticas como un profesional práctico reflexivo, indicando qué se entiende en la literatura por estos términos. A continuación presentaré mis aportaciones a la línea de investigación, mostrando que el paradigma interpretativo en el que me sitúo, hace que se vea implicado en el proceso investigador, el desarrollo profesional del formador. Esto da lugar a que la investigación se pueda caracterizar como una *investigación sobre la práctica formativa* (Ponte 2002). Con la inclusión de observadores externos pretendemos llegar a analizar la reflexión que llevan a cabo los estudiantes para profesor durante momentos determinados del curso.

1. CARACTERÍSTICAS DEL PROFESOR Y LA FORMACIÓN: EL PROFESOR COMO PROFESIONAL CRÍTICO Y REFLEXIVO

En la actualidad la tarea del profesor de matemáticas de secundaria va dirigida a colaborar en el desarrollo de los alumnos, partiendo de que cada uno de ellos es un sujeto único, distinto y cambiante, tanto por su individualidad, como por las condiciones socioculturales en las que se ubica. Para poder realizar esta tarea el docente tiene que disponer de principios de actuación versátiles, que le permitan adaptarse a las distintas etapas que atraviesa en su desarrollo profesional, pero que a la vez le permitan adoptar soluciones bien pensadas.

Si partimos de esta concepción de la docencia tenemos que dejar de lado la profesionalización artesanal, basada en la generación de hábitos sólo por medio de la práctica. La formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria tiene que considerarse como promotora y favorecedora de desarrollo profesional del profesor. En la formación inicial, el estudiante tiene que ejercitarse en identificar y resolver situaciones conflictivas, poniendo en juego estrategias racionales, para afrontar la práctica docente, en la que la mayoría de las veces hay que actuar con premura. Este planteamiento lleva a proponer que los profesores generen actitudes reflexivas (Schön, 1992) con las que puedan contemplar la situaciones habituales docentes, y afrontar las cuestiones profesionales que se van planteando (Stenhouse, 1984; Elliot, 1993).

Por desgracia el término *profesor profesional reflexivo* ha pasado a ser un lugar común, que a veces se ha empleado sin significado claro. Para poder utilizarlo como definidor de perfil o de competencia profesional del profesor es necesario examinar qué (y por qué) se entiende por profesional práctico reflexivo.

María Moliner (1997) nos dice que *reflexionar* es *Examinar un sujeto sus propios estados íntimos y pensamientos. (“en y sobre”) Pensar sobre algo que se va a hacer o la conducta que se va a seguir*. (p. 969). Ferrater Mora (1979) nos muestra la importancia que ha tenido en la filosofía el término *reflexión*. Para caracterizarlo recuerda que las ideas psicológica y metafísica de *reflexión* provienen de la “*reflexión* de una sustancia material”, con lo que se trata de una “vuelta hacia si misma de la realidad espiritual”. *En el caso del sujeto humano, la reflexión es el cambio de dirección de un acto mental, y específicamente de un acto intelectual, por medio del cual el acto invierte la dirección que lo lleva hacia el objeto y lo vuelve hacia sí mismo* (Ferrater, 1979, p. 2807). En su estudio de la idea de reflexión a través de diferentes escuelas filosóficas, destaca que se considera como una “operación de segundo grado”, ya que no se ocupa de las impresiones directas (datos), sino de elaboraciones a partir de ellos. Además la actuación reflexiva exige tener conciencia del acto reflexivo.

En educación se considera a Dewey (1989, original de 1933) como el precursor en el uso del término para referirse a una cualidad del profesor. En los escritos de Dewey (1989) se relaciona la reflexión con el pensamiento, ya que para él la reflexión comienza cuando la experiencia se torna difícil al surgir algún acontecimiento problemático que no puede ser resuelto inmediatamente. Para Dewey la reflexión es un proceso de resolución de conflictos, de dudas, a la vez que una actitud de disposición a revisar la actuación. Se ha señalado que el primer sentido coincide con caracterización que hace Descartes del pensamiento sistemático, pero además añade la implicación de la conciencia en el proceso reflexivo. Consideramos que en nuestro ámbito[2] ha sido citada la idea de reflexión de Dewey como el origen de los trabajos actuales sobre reflexión, por la relación directa que tiene con la actuación del profesor, y por compartir los ideales humanísticos del autor norteamericano. Para Dewey el principal propósito de los cursos de formación de profesores debe ser ayudarlos a reflexionar sobre su práctica profesional (Mewborn, 1999). Pero la corriente del profesor reflexivo que ha cobrado realce en la actualidad une a la concepción humanística de la educación el énfasis en la epistemología de la práctica, tal como ha aportado Schön (1992).

Schön (1983, 1992) ha remarcado las diferencias que existen entre la racionalidad teórica y la racionalidad práctica que utilizan los profesionales. Para Schön, el profesional reflexivo (que, como el profesor, se enfrenta a situaciones que son inciertas, inestables, singulares, y en las que a veces aparecen conflictos de valor) reflexiona *para*, pero también *en* y *sobre* su acción, para la resolución de las situaciones prácticas. Pero esta reflexión es la que colabora en su desarrollo, permitiéndole aprender desde su desempeño práctico. Por tanto el conocimiento del profesional reflexivo no precede a la acción, sino que está implicado con el conocimiento práctico, que deriva y está en la acción misma. Para remarcar la importancia de estas ideas tenemos que destacar algunas consideraciones importantes. Desde la perspectiva de Schön el profesional está en condiciones de valorar lo que ha sido significativo en el contexto de su acción, por lo que para ampliar su conocimiento práctico (concebido como conjunto de casos), tiene que llevar a cabo un análisis crítico de su tarea, de sus teorías en la acción y de las medidas de control, pero siempre desde los criterios valorativos que genera en su acción. Con esta perspectiva se enfatiza la separación entre la investigación que genera conocimiento teórico, de la que va encaminada a generar conocimiento práctico

[2] En el ámbito norteamericano la influencia de Dewey tiene otras implicaciones.

profesional. A menos que, como dice Schön, se considere que la práctica es un modo de investigar. Se refuerza esta idea si como Schön, se acepta que el profesional reflexivo tiene una actuación artística, no una actuación técnica, ya que su actuación realiza valores, a la vez que busca logros. Con ello se vuelve a realzar la racionalidad práctica educativa en el sentido aristotélico Contreras (1997), lo que aleja al profesor reflexivo del profesional tecnológico. De este argumento destacamos que el conocimiento práctico profesional no es conocimiento tecnológico, por lo que no puede provenir de una investigación de corte positivista.

Contreras relaciona la postura de Schön sobre los profesionales prácticos, con la propuesta educativa de Stenhouse (1984) referida al profesor investigador de su práctica, pese a hacer propuestas con algunas diferencias.

Perrenoud (2004, original de 2001) recuerda que Schön introduce la idea de profesional reflexivo para oponerse a la llamada "preparación científica", de aquellos profesionales en los que ha predominado un paradigma tecnológico de formación. Pero, tal como indica Perrenoud, el paradigma tecnológico no ha calado suficientemente en el profesor profesional, y sólo algo en la formación de profesores. Contraponer la racionalidad práctica con la teórica tal como apoya Schön sólo puede tener sentido en aquellas profesiones en las que el colectivo haya aceptado esta racionalidad. Por tanto la propuesta de Perrenoud es: *extender las bases científicas de la práctica, allí donde existan,* [pero además] (..) *no mitificarla, desarrollando formaciones que articulen racionalidad científica y práctica reflexiva como caras de la misma moneda* (Perrenoud, 2004, p. 16).

Nosotros consideramos la raíz del concepto actual del profesor como profesional práctico reflexivo[3] en los trabajos de Schön (1983), quien remarca la importancia de tomar en consideración la epistemología de la práctica (la racionalidad práctica), para estudiar la formación de estos profesionales. La idea de Stenhouse (1984) nos ayuda a concretarla a la función docente, sin perder de vista la visión críticas sobre la educación que utiliza este autor (Stenhouse 1984, Elliot, 1993).

Aceptado que al profesor como un profesional práctico reflexivo, necesitamos caracterizar estos elementos para describir tanto las acciones formativas como los análisis investigadores. La idea de profesor profesional ha quedado ampliamente estudiada en educación matemática (Nodding 1992, Romberg, 1988). El término *práctico* alude a las descripciones que ha establecido Schön, tanto por la racionalidad de la práctica, como por la concepción aristotélica del término (Contreras, 1997). La idea de reflexión ha necesitado caracterizaciones más precisas. Hatton y Smith (1995) indican algunos interrogantes importantes sobre la idea de reflexión que nos permiten establecer dimensiones de la misma: a) ¿Se limita la reflexión al pensamiento sobre la acción, o va más allá?, b) ¿En qué marcos temporales tiene lugar la reflexión?, c) ¿La reflexión tiene que centrarse en problemas? y d) ¿En qué grado tiene que ser consciente, el profesor reflexivo, de los aspectos históricos, culturales y políticos, o de las creencias sobre el marco en el que se construye el problema? En relación al marco temporal, Van Manen (1998), que utiliza el término reflexión para profundizar en la formación de lo que él llama *tacto educativo*, y que tiene una intención de hábito intuitivo, distingue tipos de reflexión, según el momento en que se realiza y la intención de la misma: *Reflexión anticipativa* (para la acción), que puede tener dos formas, "reflexión sobre las

[3] Ver un interesante análisis sobre el profesor reflexivo en Fendler (2003). Teacher reflection in hall of mirrors: historical influences and Political Reverberations. *Educationar Researcher,* Vol. 32, nº 3, pp. 16-25.

situaciones pedagógicas", antes de afrontarlas, y "reflexión en la planificación de las clases", más sistemática; *Reflexión activa o interactiva*, que permite al profesor afrontar problemas que aparecen *en la acción*; *La conciencia de la actuación* constituye otro tipo de reflexión, que exige una separación entre los dos tipos de egos: Yo y mí; *La reflexión sobre los recuerdos* (sobre la acción) le ayuda a dar sentido a las experiencias pasadas, y de esta forma, conseguir perspectivas sobre el significado de esas experiencias. Por tanto hay diversos momentos de reflexión que podemos identificar en la actuación de los profesores, y que hay que planificar, ejercitar y promover en la formación inicial de profesores de matemáticas.

También analiza Van Manen (1977) algunos aspectos de la reflexión que tienen que ver con la cuestión d) de Hatton y Smith (1995), estableciendo niveles de reflexión, inspirados en la visión de Habermas (Contreras 1997), y fijando su atención en las expectativas que tienen los profesionales al afrontar los problemas así como en sobre qué reflexionan: i) *Racionalidad técnica* (Nivel empírico-analítico), en el que la reflexión se basa en la aplicación eficaz de las habilidades y conocimientos técnicos, así como en la selección y el uso adecuado de estrategias didácticas; ii) *Acción práctica* (Nivel hermenéutico-fenomenológico) en el que la reflexión pretende comprender la interacción entre los individuos, en nuestro caso, el profesor hace explícitas las suposiciones en las que descansan sus acciones profesionales; iii) *Reflexión crítica* (Nivel crítico-teórico), en la que llega a cuestionar los criterios morales, éticos y normativos relacionados directa o indirectamente con el aula y atañe a los supuestos que limitan o modelan la práctica, empleando una teoría emancipatoria de la verdad.

Los niveles de reflexión de Van Manen (1977) se distinguen por los focos de reflexión y por la naturaleza del conocimiento demandado, y nos permiten entender si un profesor evoluciona en su reflexión. Un profesor ampliará su ámbito de reflexión en cuanto llegue a realizar una reflexión de un nivel más avanzado, pero siendo capaz de diferenciar cuál es la racionalidad que prima en el problema concreto que se afronta. Así por ejemplo, supongamos un estudiante que afronta la enseñanza de los *números enteros* en ESO, y observa las dificultades que tienen los alumnos para "aprender" (en el sentido amplio del término) las "reglas de los signos". En un nivel de reflexión técnica podría pasar de considerar que los alumnos "no estudian lo suficiente" a buscar investigaciones experimentales que analicen cuál de las reglas mnemotécnicas es más adecuada para que los alumnos aprendan estas reglas, buscando mayor eficacia positivista. Desde una reflexión práctica puede analizar los aspectos fenomenológicos sobre los enteros y sus operaciones, las limitaciones de cada modelo, y realizar un dialogo investigador con su propia puesta en práctica. Por último, la reflexión crítica le puede hacer plantearse la significación de la inclusión de los enteros en el currículo de la ESO, y el significado del fracaso escolar de los alumnos en relación a los fines educativos. Una reflexión crítica sin apoyo en una acción práctica puede quedar en el terreno de la justificación ingenua de las acciones educativas. En Peñas (2003) se puede apreciar el proceso de reflexión llevado a cabo por la autora, profesor particular de un alumno de ESO, concerniente a la enseñanza y el aprendizaje de los enteros.

En Educación Matemática han proliferado las investigaciones y procesos formativos, que parten de considerar que el profesor de matemáticas es un *profesional práctico reflexivo*, y que promueven y analizan la reflexión de los profesores. Algunos de estos trabajos, especialmente los dirigidos por Cooney, en la Universidad de Atheens, Georgia, van acompañados de propuestas de formación. (Cooney, 1999, 2001; Cooney, Shealy y Arvold, 1998; Mewborn, 1999) y establecen variables para analizar la reflexión. Suelen destacar para ello los sistemas de creencias[4], las dimensiones que caracterizan los estadios de los esquemas de Perry[5] (lugar en qué sitúan la autoridad y argumentos que la sustentan; organización de los argumentos, implicación con la práctica y con el contexto, etc.), u otros esquemas de desarrollo adulto. Para ello asumen la definición de reflexión de Von Glaserfeld (1991): *actuación de un individuo que se distancia de los hechos de la experiencia directa y se representa un fragmento de esta experiencia y lo contempla como tal, mientras es consciente de qué cosas son hechos y cuáles no*. Como Cooney (2001) destaca, el proceso de reflexión *parte de detectar una situación de duda e implica un distanciamiento de la realidad* (Von Glaserfeld, 1991) *que permite poner en evidencia las propias creencias sobre la cuestión para poder confrontarlas con la evidencia empírica*.

Inspirados en estos autores la línea de investigación sobre la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como prácticos reflexivos ha continuado con otras investigaciones y revisiones teóricas (Melvin y Goldenberg, 1998, Artz, 1999, Artz, Armour & Thomas, 1999, Mewborn, 1999, Ponte, 2002, y Bjuland, 2004, entre otros)[6]. Tzur (2001) describe una reflexión sobre su desarrollo profesional como profesor y como formador de profesores de matemáticas. Climent (2002) analiza el desarrollo profesional de una maestra que participa en un grupo de innovación que dirige la investigadora, utilizando la reflexión como una de las dimensiones para caracterizar el desarrollo.

En nuestros trabajos, el profesor profesional práctico reflexivo, reúne las siguientes disposiciones y hábitos (Perrenoud, 2004) profesionales:

- A ***percibir situaciones*** del entorno que requieren una actuación racional de su parte.
- A ***distanciarse*** de ellas para poder analizar sus elementos
- A ***explicitar y examinar*** los elementos que condicionan esas situaciones, incluidos los derivados de sus creencias o esquemas ***implícitos***.
- A ***recurrir a otras fuentes*** (a compartir con iguales, a aportes externos, a fuentes profesionales, etc.) para buscar otras formas de interpretar las situaciones y de responder a las mismas

Cuando nos referimos a la formación inicial de profesores, no podemos hablar aún de disposiciones profesionales ante los problemas profesionales, sino de "disposiciones" que muestran "cuando se relacionan con los problemas de la futura profesión", ya que los problemas profesionales no les han surgido a los estudiantes a través de una verdadera situación profesional (no son responsables de las consecuencias ni de los alumnos, no sienten la actuación como su razón de actuar, etc.). Si bien esta es una limitación importante, no podemos olvidar que la formación inicial tiene que afrontar la formación de hábitos de reflexión, y que estos habrá que situarlos en las situaciones problemáticas tal como las percibe el estudiante para profesor, si queremos que en algún momento adquiera esta competencia (Perrenoud, 2004).

[4] Green, T.F. (1971), *The activities of teaching*, New York, M Graw Hill.
[5] Perry, W.G. (1970), *Forms of intellectual and ethical development in the collage years*, New York, Holt, Rinehart & Winston.
[6] Una referencia más amplia de muchas de estas investigaciones puede verse en Peñas (2002)

2.: PROCESO DE FORMACIÓN E INVESTIGACIÓN: DE INVESTIGACIÓN SOBRE LAS CREENCIAS A INVESTIGACIÓN SOBRE LA REFLEXIÓN

Desde que llegué al Departamento de Didáctica de la Matemática me he interesado por la formación de profesores en la Licenciatura de Matemáticas, especialidad de Metodología, especialmente en la faceta que tiene más relación con la actuación del profesor, que se concreta en la asignatura Prácticas de Enseñanza de Matemáticas[7]. En ella los estudiantes tienen un referente práctico inminente, el período de prácticas en los institutos durante un mes. Por tanto permite interactuar con los estudiantes antes, durante y después de su contacto con la práctica. Se ha realzado en varios artículos las características de los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas (gran cantidad de créditos de Matemática formal, expectativas técnicas, etc. Sánchez y Llinares, 2003, Flores, 1998a).

Para presentar mis trabajos en la agenda de investigación *Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas*, quiero destacar áreas de trabajo, apoyos teóricos de referencia y algunos resultados. Pero, tal como he señalado al principio, siento que, en toda mi actuación, se percibe la dificultad de separar el aspecto formativo del investigador, y, si se consigue, es en momentos puntuales. Al asumir como problema investigador *cómo aprende el estudiante a reflexionar*, hay que crear un marco en el que se promueva la reflexión, lo que obliga al formador a "reflexionar sobre su práctica formativa", lo que lleva a una actuación como "formador de profesores investigador". Por tanto me veo en la necesidad de acompañar el relato de los trabajos con la etapa de desarrollo profesional como *formador de profesores* y como *investigador*. Voy a distinguir para simplificar, tres etapas:

Etapa 1: Formación investigadora

Al principio de mi trabajo en el Departamento de Didáctica de la Matemática coinciden e interfieren la tarea profesional formativa con la intención de formarme como investigador. La experiencia docente práctica previa me hace centrarme en los futuros profesores de secundaria, a los que contemplo desde la perspectiva de quien puede compartir con ellos la tarea práctica docente en los institutos en un futuro mediato. El contraste con la práctica profesional que acarreo, la educación matemática de adolescentes que no se plantean su futuro profesional ni la utilidad de lo que aprenden, me hace percibir, a los estudiantes de la Licenciatura, como adultos que saben lo que necesitan para su tarea profesional. Por ello mis intenciones investigadoras se dirigen a detectar las intenciones profesionales y discentes de los estudiantes: "qué tienen que saber para enseñar Matemáticas". Los análisis sobre las necesidades y expectativas formativas de los estudiantes, me introducen en la idea de *desarrollo profesional docente*, al comprender que los estudiantes hacen sus demandas a partir de las representaciones que se hacen de la tarea del profesor de matemáticas, representaciones que son muy difíciles de alterar al estar sustentadas sobre las creencias que han generado sobre la docencia y sobre las matemáticas en su vida discente. Paso entonces a examinar las creencias y concepciones de los estudiantes, culminando con mi tesis doctoral sobre este asunto (Flores, 1998, original de 1995). En ella trato de *describir las concepciones y creencias que tienen los estudiantes sobre las matemáticas, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre cómo aprenden los alumnos* y analizar *si*

[7] Se caracteriza esta asignatura en Flores, 2000 y Rico y Flores, 1997.

cambian en un curso en que tienen contactos con la práctica docente. Para estudiar estos constructos (*concepciones y creencias*) utilizo una metodología cualitativa, basada en análisis de contenido de las producciones.

Etapa 2: Formación de profesores reflexivos

Mi evolución investigadora me muestra la dificultad de cambiar las creencias de los estudiantes, que corresponden a su estado de desarrollo profesional. Surgen así dos líneas de profundización paralelas, una que pretende *caracterizar al profesor en su desarrollo profesional* y otra que *estudia el proceso de "cambio"*. La primera terminará por conceptualizar al profesor como un *profesional práctico reflexivo*, mientras que la segunda será el inicio de una línea de trabajo que se sitúa a medio camino entre la divulgación matemática y la búsqueda de elementos evocadores relacionados con las matemáticas.

En esta etapa el problema profesional que intento abordar como formador es: *Cómo hacer que los estudiantes se relacionen de manera significativa con el conocimiento profesional*. Para ello emprendo un proceso de *investigación sobre la práctica formativa*[8].

Distingo dos subetapas en esta investigación sobre la práctica formativa. Lo más destacable de la primera subetapa es la planificación de una parte de la asignatura Prácticas de Enseñanza de Matemáticas, en la que los estudiantes tienen que reflexionar sobre una cuestión profesional, que hayan detectado durante las prácticas, e impartir una clase a sus compañeros sobre dicha cuestión[9]. Para realzar en los estudiantes la conciencia del proceso que han vivido consigo que escriban algunos artículos sobre el mismo[10]. El trabajo de uno de los grupos adquiere forma de artículo compartido entre el formador y los estudiantes, cada uno contando su punto de vista sobre la experiencia (Flores, Mercado y Vázquez, 1996).

La segunda parte de esta etapa se dedica a aclarar el concepto de reflexión. En ella tiene un papel importante la introducción del Ciclo de Smyth (Smyth, 1991)[11]. Para Smyth (1991) reflexionar consiste en llevar a cabo un proceso cíclico, que arranca de la fase de *descripción* de un problema, se continúa con la explicitación de los presupuestos en que se basa (fase de *información*), para poder ponerlo en común con otros en un proceso dialéctico (fase de *confrontación*), después de lo cual se puede formular de otra manera (fase de *reformulación*). Esta idea de reflexión cíclica y con etapas bien definidas permitieron concretar lo que entendíamos por profesor reflexivo, no sólo como ideal formativo, sino como metodología de actuación. El análisis de la actuación con el ciclo de Smyth permite aclarar el proceso y las cuestiones que se han tratado en el mismo.

---

[8] Para Ponte (2002, p. 16) en una investigación sobre la práctica hay que distinguir cuatro momentos o etapas: Definición de un problema de investigación; Recogida de elementos que permitan responder al problema; Interpretación de la información con vista a sacar conclusiones y Divulgación de los resultados. Puede verse el proceso seguido en Flores (2004)

[9] En Flores, 1998b, Rico y Flores, 1997 aparece descrito el proceso que he llamado: Reflexión sobre un problema práctico profesional, con las referencias teóricas y formativas que lo sustentan

[10] Vázquez, M. y Mercado, I. (1995). La formación de profesores: Una experiencia de aula. En Berenguer, L., y otros (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES. Acosta, F. y otros (1998). Hábitos de la formación matemática para la resolución de problemas. En Muñoz, F.J., y otros (Eds.), *VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales"*, (23-27). Jaén, SAEM Thales y Universidad de Jaén.

[11] El papel del Ciclo de Smyth (1991) en el proceso formativo puede verse en Flores (2000).

Un estudio de caso que describe el proceso formativo y de "investigación en la práctica", aparece en Flores (2000). En este trabajo describo el proceso de reflexión que han llevado a cabo un grupo de estudiantes que eligieron un problema ligado a la enseñanza del álgebra en la enseñanza obligatoria. Durante sus prácticas propusieron a los alumnos que, al resolver las ecuaciones de primer grado, justificaran los pasos (*obtengo una ecuación equivalente ya que he sumado, restado, multiplicado o dividido por la misma cantidad los dos miembros de la ecuación anterior*). Sin embargo los alumnos, que ya habían oído y practicado los algoritmos clásicos (*si está sumando pasa restando*, etc.) los aplicaban y luego algunos explicitaban lo que ellos le pedían. Su problema de partida consistía en buscar formas para que les hicieran caso. La revisión de su problema dio lugar a que los estudiantes pusieran de manifiesto sus dudas conceptuales sobre el concepto matemático de ecuación, o sobre los criterios de equivalencia de ecuaciones, aunque no siempre eran conscientes de sus carencias. El proceso formativo les llevó a cambiar la formulación de su cuestión y a proponer a sus compañeros actividades en las que las incógnitas y las equivalencias tenían mayor significado. Desde el punto de vista de investigación sobre la práctica formadora del formador de profesores, el mayor logro fue la sistematización del proceso formativo, así como la percepción de las cuestiones profesionales que se ponían en juego en el mismo.

En Flores y Peñas (2003) se describe el caso de un grupo de estudiantes del curso 2002-2003, que se interesaron por la cuestión *¿Por qué los alumnos tienen dificultades para traducir un enunciado al lenguaje algebraico?*[12] Tras describir las creencias de los estudiantes que se pusieron de manifiesto durante el proceso, se analizan sus concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas. Durante el curso habíamos empleado la metáfora del profesor actor, para enfatizar los aspectos comunicacionales de la enseñanza (expresividad, cualidades fónicas y escénicas, etc.). Los estudiantes de este grupo iniciaron la clase que impartieron a sus compañeros representando un guión propio, para dar realce a un argumento que afecta a la tarea práctica del profesor: "aunque los alumnos tengan dificultades para traducir problemas a ecuaciones, el profesor no puede eliminar esta destreza de su enseñanza, ya que está sujeto a las directrices del currículo y a las autoridades que lo promueven y controlan". El contraste entre la forma en que se transmiten los mensajes y las interpretaciones que les dan los estudiantes colaboró a plantearnos de qué manera toman los estudiantes conciencia del proceso de reflexión en que se introducen, por lo que cuestionamos a partir de entonces la necesidad de explicitar el ciclo de reflexión.

Dentro de esta parte del proceso, se abrió una nueva línea de trabajo que buscaba estrategias formadoras que favorecieran que los estudiantes explicitaran sus creencias. Inspirándonos en los trabajos de Watzlawick (Watzlawick y otros, 1976), quien desde una perspectiva constructivista radical, con finalidad terapéutica, utiliza estrategias evocadoras que facilitan el cambio, ya que las defensas, que lo impedirían, no se ven en necesidad de actuar. Comenzamos a buscar elementos evocadores para promover la confrontación de concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas, llegando a emplear metáforas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Flores 1999a), el humor gráfico en matemáticas (Flores 1997, 2003, entre otros artículos), y paradojas matemáticas (Flores, 1999b). Al trabajar con estudiantes de matemáticas, supusimos que serían propensos a profundizar en problemas matemáticos elementales, así como en tareas matemáticas de secundaria que no fueran triviales. Ello nos llevó a

[12] Cuestión que, con formulaciones diferentes, ha aparecido varios cursos.

profundizar en el significado de conceptos matemáticos elementales, especialmente los geométricos (González-López y Flores 2002, Castro, Flores y Segovia, 1998, Segovia, Castro y Flores, 1996).

En el trabajo sobre las metáforas (Flores 1999a)[13] hacemos una propuesta formativa para la formación inicial de profesores[14]. Se trata de pedir a los estudiantes que seleccionen metáforas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y que examinen las coincidencias y las discrepancias entre las metáforas elegidas (concepto imagen) y su forma de considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (concepto origen). Con metáforas habituales (profesor jefe de personal; profesor de matemáticas vendedor ambulante, etc.) examinamos las coincidencias y discrepancias entre el concepto origen y el imagen, con la pretensión de clarificar las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que estarían implícitas en los estudiantes que se identificaran con ellas.

Las raíces psiconalíticas de Watzlawick, la amplísima bibliografía en la que se propone el humor como elemento terapéutico, junto con el contacto con viñetas humorísticas relacionadas con las matemáticas, pero sobre todo con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y con el conocimiento didáctico, ha dado lugar a una serie de trabajos encaminados a utilizar el humor con fines didácticos. En Flores (2003) se emplean el humor para mostrar el interés y suministrar tareas para la enseñanza de las matemáticas basadas en el análisis curricular que se realiza a partir de los “organizadores curriculares” (Rico, 1997). En Flores (1997) se analiza el papel que desempeña el humor para facilitar la comunicación entre los educadores matemáticos. Las viñetas humorísticas han ganado progresivamente protagonismo en el proceso formativo encaminado a la reflexión, y se ha empleado como herramienta en las investigaciones posteriores llevadas a cabo por los observadores externos (Peñas, 2004).

En Flores (1999b) desarrollamos una propuesta de enseñanza[15] para estudiantes para profesor, en la que se busca ponerlos en duda ante paradojas matemáticas que necesiten clarificar los conceptos para resolverla. En este artículo se propone una secuencia de enseñanza para que los estudiantes se sorprendan con la paradoja aparente de que la raíz cuadrada de un segmento no es única, sino que depende de la unidad que se tome[16]. Se trata con ello de realzar la diferencia que existe entre lo que es la *magnitud longitud* (en la que la operación externa multiplicación por un número es unívoca, y no necesita definir el segmento unidad), y *la medida*, que aparece en cuanto se habla de

[13] Inspirado en los trabajos de Dormolen, J. (1991) [Metaphors mediating the teaching and understanding of mathematics. En Bishop et al. (Eds.) *Mathematical knowledge: Its growts through teaching*, 89-106] y Bullough y Stokes (1994) [BULLOUGH, R.V. y STOKES, D.K. (1994). Analyzing personal teaching metaphors in preservice teacher education as a mean for encouraging professional developement. *American Educational Rsearch Journal*. Vol 31, 1; 197-224], en educación matemática, y Lakoff, G. y Johnson, M. (1991) *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra, teorema, sobre la importancia de las metáforas para la comprensión.

[14] Basada en la llevada a cabo por López-Real, F. (1990) [Metaphor and related concepts in mathematics: Part 2. *Mathematics Teaching, 130,* 34-36.] y [López-Real, F. (1989). Metaphors and related concepts in mathematics: Part 1. *Mathematics Teaching, 127,* 50-52], en la enseñanza de las matemáticas

[15] Inspirados en la propuesta de Movshovitz-Hadar y Hadass (1990) [Movshovitz-Hadar, N. y Hadass, R., (1990). Preservice education of math teacher using paradoxes, *Educational Studies in Mathematics* 21, 3, pp. 265-287], y en los numerosos libros sobre falsas demostraciones en geometría o de matemática recreativa [Gardner, M. (1983). *Paradojas*. Barcelona, Labor].

[16] Formulado con precisión sería: el segmento que mide la raíz cuadrada de lo que mide otro segmento no es único, sino que depende del segmento que se tome como unidad de medida de longitud.

multiplicación (y de raíz cuadrada), ya que la multiplicación aritmética también exige la existencia de una relación a la unidad.

La propuesta de analizar los conceptos de la matemática elemental a partir de sus significados es una estrategia muy utilizada en la formación inicial de profesores. Dada la dificultad que para nuestros estudiantes de matemáticas comporta la geometría de formas, hemos emprendido una serie de indagaciones sobre el significado de *área y superficie*, que ha generado dos artículos que analizan dicho significado y proponen secuencias formativas para que los estudiantes comprendan lo que significan las fórmulas del cálculo indirecto del área a partir de operaciones con medidas de longitud (Castro, Flores y Segovia, 1998, Segovia, Castro y Flores, 1996). Un análisis similar de la *medida de volumen* nos ha mostrado la idiosincrasia de esta magnitud (González-López y Flores 2002)[17].

Etapa 3: Análisis de la reflexión de los estudiantes

En los trabajos anteriores (Flores 2000, Flores y Peñas 2003) hemos podido clarificar el marco formativo, creando condiciones para que se lleven a cabo investigaciones interpretativas sobre la reflexión de los estudiantes, valiéndose de observadores externos, que, a su vez, son investigadores en formación (Morcote, 2001; Peñas, 2002). Afrontamos entonces como problema analizar cómo y en qué consiste la reflexión de los estudiantes durante el desempeño del módulo. Para ello diseñamos en equipo el proceso formativo, y planteamos una revisión sistemática de las reacciones de los estudiantes durante el curso, para poder llegar a examinar la reflexión de nuestros estudiantes. Durante los cursos 2001-2002 y 2002-2003 han tenido lugar los trabajos de campo y en estos momentos se está llevando a cabo los análisis de las producciones de los estudiantes, habiéndose presentado algunos trabajos sobre el tema.

En Peñas y Flores (en prensa) se analiza con intención descriptiva la reflexión que han llevado a cabo un grupo de estudiantes del curso 2001/2002, de la asignatura Prácticas de Enseñanza, dentro del módulo de reflexión sobre cuestiones profesionales surgidas durante las prácticas. Para ello se han considerado como dimensiones de estudio, las ideas de los estudiantes (entendidas en el sentido de Ortega y Gasset), sus creencias, en quién y con qué argumentos aceptan la autoridad para las afirmaciones, y qué situaciones han considerado problemáticas. Por medio de análisis de contenido de las producciones de los estudiantes y de las grabaciones en audio de los seminarios, y de la clase impartida por ellos, se describe el caso de uno grupo de 5 estudiantes que se plantearon la cuestión *¿Qué matemáticas se pueden enseñar en la ESO con el TANGRAM?* En el curso del trabajo se pone de manifiesto las creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, pues los estudiantes se inclinan por una idea de la enseñanza basada en la exposición formal, con lo que parecen estar demandando respuesta sobre *qué aspectos pueden motivarse con el Tangram*, más que *cuáles se pueden enseñar*. También se observa la dificultad que tienen los estudiantes para relacionar la medición empírica con la medición formal, cuando se trata de determinar la medida de la hipotenusa de una pieza triangular del Tangram utilizando como unidad el cateto. Esta observación nos ha llevado a revisar algunas de las tareas elaboradas para que los estudiantes profundizaran sobre conceptos de matemática elemental, ya que para que tuvieran efecto debieran desarrollarse por estudiantes que manejen los conceptos con soltura. La inseguridad que les plantea el sentir sus deficiencias conceptuales les

[17] En esta línea se encuentran otros trabajos en los que se analizan juegos didácticos, como Flores, (2002), [El puzzle de la pajarita. *Números*. vol. 51, pp. 3-18], entre otros.

crea nuevos mecanismos de defensa que rompen las pretensiones de cambio (los hace más dependientes de sus creencias consolidadas). Las dimensiones de análisis empleadas aparecen organizadas en perfiles que se relacionan con las tipologías de profesor utilizadas por Cooney (2001) en sus trabajos: *Aislacionista, Idealista ingenuo, Conexionista Ingenuo y Conexionista reflexivo*.

En Peñas y Flores (2004), la autora lleva a cabo un estudio parcial de lo que será su trabajo de tesis. Tras caracterizar las variables que hasta el momento ha considerado más importantes, describe el caso de un grupo de estudiantes que, en el módulo de reflexión, en el curso 2002-2003, afrontaron como cuestión *¿Cómo calificar un ejercicio?* Emplea la misma metodología investigadora (análisis de contenido de producciones y grabaciones). Como dimensiones atiende a las “ideas y creencias”, “el tipo de cuestiones profesionales que se plantean”, “con qué amplitud describen y coman en consideración el contexto en su reflexión”, “de qué manera emplean el conocimiento profesional” (que han consultado en documentos y que ha aparecido durante las interacciones), y “a quién y por qué conceden autoridad en sus juicios”. El perfil de los estudiantes y del grupo los hace a partir de la tabla que relaciona las variables estudiadas con las tipologías de Cooney (2001). En este trabajo se inicia la búsqueda de indicadores para adscribir las unidades de contenido a las dimensiones estudiadas.

4. REFLEXIONES FINALES Y EXPECTATIVAS

Como conclusiones de la presentación realizada quiero incidir sobre dos cuestiones que ha intentado mostrar complejas, y que sugiero como cuestiones para el debate.

1) ¿*Cómo articular la teoría y la práctica en nuestra tarea profesional de formadores de profesores de matemáticas*?

Si, como dice Schön, la universidad *seduce y abandona*, ya que crea unos parámetros de racionalidad teórica que no corresponden con los que se pueden aplicar en la práctica, las intenciones investigadoras alejadas de la práctica pueden paralizar nuestra actuación práctica, cuando simultaneamos los papeles formador práctico e investigador. Se hace preciso que la comunidad de prácticas, que constituimos los formadores de profesores de matemáticas, describamos nuestro contexto de actuación con la mayor precisión (Llinares, 2003), que clarifiquemos las lógicas que empleamos y produzcamos una actuación reflexiva práctica (tal como señala el mismo Llinares 2003).

También este temor podría atenazar la investigación: si la producción de teoría no va acompañada de su conversión en propuestas de actuación su interés afecta a unos pocos iniciados en su dominio. Se han realizado algunos intentos en los que el grupo de desarrollo profesional del profesor de matemáticas de la SEIEM ha generado propuestas didácticas precisas, presentadas en relación a las premisas formativas que se asumen (qué es para mí el profesor de matemáticas, cómo se forman profesores de matemáticas, cómo aprende el profesor de matemáticas), como las recogidas en dos textos compendios (Blanco y Contreras, 2002, Giménez y otros, 1996), así como los trabajos de algunos de los grupos representados por estos investigadores[18], y algunas colaboraciones en los simposios de formación inicial de profesores desde la Didáctica de la Matemática[19]. Se nos presenta el reto de darle generalidad a nuestras apreciaciones

[18] GIEM, en Sevilla y Alicante, Investigación en la escuela, en Cadiz, Granada y Huelva, entre otros.

[19] Ver Blanco y Cruz (Eds.) (1997), *Aportaciones al currículum en la formación inicial de los profesores de primaria en el área de matemáticas,* León, ICE de la U. de León; Abraira y Francisco (Eds.) (1998), *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las*

y abrir el debate para compartir elementos de referencia entre los investigadores (que además somos formadores) y los formadores prácticos.

2) *¿Cómo distinguir, y hasta qué punto hace falta hacerlo, la investigación cualitativa, interpretativa, de la práctica formativa que pretende formar profesores de matemáticas prácticos reflexivos?*

Tal como hemos comentado, para caracterizar la reflexión tenemos que aclarar suficientemente el contexto en el que ocurren los fenómenos formativos, incluyendo el proceso formativo que tiene lugar. El formador contempla el proceso en un proceso progresivo de clarificación, en el que los elementos a analizar conciernen tanto al mismo proceso como a las dimensiones referentes a los estudiantes. Incluso los investigadores se encuentran en momentos determinados de su desarrollo investigador, lo que influye en la forma en que contemplan los procesos. En resumen, el paradigma del formador de profesores como investigador, que tanto contacto tiene con la formación de profesores reflexivos, incluye en su seno un proceso de investigación cualitativa, interpretativa, en la que se encuentra implicado tanto los sujetos observados como los participantes en la misma (como podemos observar en Tzur, 2001, y Climent ,2002).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTZT, A. (1999). A stucture to enable preservice teachers of mathematics to reflect on their teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 143-166.

ARTZ, A. & ARMOUR-THOMAS, E. (1999). A cognitive model for examining teachers' instructional practice in Mathematics: A guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Masthematics*, 40, 211-235.

BJULAND, R. (2004). Student teacher's reflections on their learning process through collaborative problem solving in Geometry. *Educational Studies in Mathematics* 55, 199-225.

CARR, W. y KEMMIS, S. (1998). *Teoría crítica de la enseñanza*. Barcelona: Martínez Roca.

CASTRO, E., FLORES, P. y SEGOVIA, I. (1999). Relatividad en las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas. *SUMA* 26, 23-32.

CLIMENT, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto a la enseñanza de las matemáticas. Un estudio de caso*. Tesis doctoral, Universidad de Huelva.

CONTRERAS, J. (1997). *La autonomía del profesorado*. Madrid: Morata.

CONTRERAS, L.C. y BLANCO, L. (Coord.) (2002). *Aportaciones a la formación inicial de Maestros en el Área de Matemáticas. Una mirada a la práctica docente*. Cáceres, Servicio de publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Matemáticas, Universidad de León; Corral y Zurbano (Coord.) (1999), *Propuestas metodológicas y de evaluación en la formación inicial de profesores del área de didáctica de la matemática*, Servicio de publicaciones de la Universidad de Oviedo; Penalva y otros (Eds.) (2002), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales*, Alicante, Servicio de publicaciones de la Universidad.

COONEY, T. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, No. 38. pp. 163-187.
COONEY, T.J. (2001) Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. En F-L Lin & T.J. Cooney (Eds.) *Making sense of mathematics teacher education,* pp. 9-31 Holanda: Kluwer Academic
COONEY, T.J. (1999) Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 38: 163-187.
COONEY,T.J.; SHEALY, B.E.; ARVOLD, B. (1998) Conceptualizing Belief Structures of Preservice Secondary Mathematics Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 29, pp. 306-333
DEWEY, J. (1989). *Cómo pensamos*. Barcelona: Paidós.
ELLIOT, T. S. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.
FERRATER, (1979). *Diccionario de términos filosóficos*. Barcelona, Ariel.
FLORES, P. (1997). La utilización del humor para facilitar la comunicación entre educadores matemáticos. *Educación Matemática*. Vol. 9, No. 3. pp. 52-63.
FLORES, P. (1998a). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Granada, Comares. (Tesis doctoral defendida en 1995)
FLORES, P. (1998b). Formación inicial de profesores de Matemáticas como profesionales reflexivos. *UNO* 17, 37-48.
FLORES, P. (1999a). Empleo de metáforas en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, Vol. 11, nº 1, 84-102.
FLORES, P. (1999b). Paradojas matemáticas para la formación de profesores. *SUMA*, 31, pp. 27-35.
FLORES, P. (2000) Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA*, Vol. 5, nº 2, pp. 113-138.
FLORES, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Granada, Arial.
FLORES, P. (2004). Relación con el conocimiento profesional en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: reflexión sobre cuestiones profesionales. En Borralho, A. y otros (Eds.). *A matemática na Formaçao do Profesor*, 5-29, Évora, Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educaçao.
FLORES, P., MERCADO, I., y VÁZQUEZ, M. (1996). Formación de profesores de Matemáticas de secundaria basada en la reflexión sobre el período de prácticas de enseñanza. *Revista de Enseñanza Universidad de Salamanca*.
FLORES, P. y PEÑAS, M. (2003) *Formación inicial de profesores de matemáticas reflexivos.* Revista Educación y Pedagogía. Colombia: Universidad de Antioquia. Vol. 15, 35, 93-116.
GIMÉNEZ, J., LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M.V. (Eds.) (1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Granada, Comares.

GONZÁLEZ-LÓPEZ, M.J. y FLORES, P. (2002). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: el caso del volumen. *Educación Matemática*.

HATTON, N. & SMITH, D. (1995). Reflection in teacher education: Towards definition and implementation. *Teaching and teaching education* 11 (1), 33-49.
LLINARES, S. (2003). Contexto y práctica de formar profesores de matemáticas. Una mirada al caso de españa. En Fandiño, M. (ed.), *Riflessioni sulla formazioni iniziale degli insegnanti di matematica: a ressegna internazionale*. Bologna, Pitágora,

MELVIN, W. & GOLDENBERG, M.P. (1998) some conceptions are difficult to change: one middle school mathematics Teacher's Struggle. *Journal of Mathematics Teacher Education, Vol 1, 269-293.*
MEWBORN, D. S. (1999) Reflective thinking among preservice elementary mathematics teacher. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 30, pp. 316-341.
MOLINER, M (1997). *Diccionario del uso del español*. Madrid, Gredos.
MORCOTE, O. (2001). *El conocimiento profesional de estudiantes para profesor, en una programación sobre fracciones*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
NODDINGS, N. (1992). Proffesionalization and mathematics teaching. In: GROUWS, D. A. (eds.). *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York, MacMillan. pp. 197-208.
PEÑAS, M. (2002). *Un estudio sobre el proceso de reflexión de estudiantes en la formación inicial de profesores de matemáticas*. Trabajo de Investigación Tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
PEÑAS, M. (2003). Los números enteros y la calculadora. Una experiencia de reflexión sobre la práctica. *UNO* 32, pp. 109-118.
PEÑAS, M. (2004). Procesos de reflexión sobre cuestiones profesionales en futuros profesores de matemáticas. Comunicación en II Seminario Luso-Espanhol, Setúbal 2- 3 febrero.
PEÑAS, M. y FLORES, P. (2002). Experiencia en formación inicial basada en cuestiones profesionales del profesor de matemáticas. Comunicación presentada en las Jornadas sobre Formación inicial del Profesorado. Análisis de la situación actual y nuevos retos sobre políticas de formación. Granada, noviembre de 2002.
PEÑAS, M. Y FLORES, P. (En prensa). Procesos de reflexión en estudiantes para profesor de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*.
PERRENOUD, J. P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Barcelona, Grao.
PONTE, J.P. (2002). Investigar a nossa própria prática. En Associaçao de Professores de Matemática, (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa, Quinta Dimensao. (5-27).
RICO, L. Y FLORES, P. (1997). Didáctica de la Matemática y formación del profesorado. En Fernández, M., y Moral, C. (Eds.). *Formación y desarrollo de los profesores de Educación Secundaria en el marco curricular de la reforma. Los retos profesionales de la nueva etapa*. (63-75). Granada, FORCE y Grupo Editorial Universitario.
ROMBERG, T. (1988). Can teachers be professionals? In: GROWS, D. A. y COONEY, T. (eds.). *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan. pp. 197-208.
SÁNCHEZ, M.V. y LLINARES, S. (2003) Four Students Teachers' Pedagogical Reasoning on Functions. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 6, 5-25.
SCHÖN, D. A. (1983) *The reflective practitioner*. Londres: Temple Smith.
SCHÖN, D. A. (1992). *Formación de profesionales reflexivos*. Barcelona: Paidós.
SEGOVIA, I., CASTRO, E. y FLORES, P. (1996). El área del rectángulo. *UNO*, 10, 63-78.
SMYTH, J. (1991) Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación*, nº 294, 275-300.
STENHOUSE, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículo*. Madrid: Morata.

TZUR, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 259-283.

VAN MANEN, M. (1977). Linking ways of knowing with ways of being practical. *Curriculum Inquiry*. Vol. 6, No. 3, 205-228.

VAN MANEN, M. (1998). *El tacto pedagógico*. Barcelona, Morata.

VON GLASERFELD (1991). Abstraction, re-presentation and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In: STEFFE, L. P. (ed.). *Epistemological foundations of mathematical experience*. New York: Springer-Verlag. 45-67.

WATZLAWICK, P. WEAKLAND, J.H. & FISCH, R. (1976) *Cambio*. Barcelona: Herder.

Los procesos de formación:
En busca de estrategias y recursos

PILAR AZCÁRATE GODED

(pilar.azcarate@uca.es)
Grupo de Investigación: *Desarrollo Profesional del Docente*
Departamento de Didáctica. Área de Didáctica de la Matemática
Universidad de Cádiz

Resumen:

La formación del profesor es hoy uno de los temas de especial actualidad, dado el tiempo cambiante y de continua reforma a la que nos enfrentamos. En relación con ello, el diseño y desarrollo de procesos de formación en los diferentes momentos de su vida profesional, es un objeto de investigación significativo. En esta ponencia presentaremos algunas claves, resultado de la reflexión y análisis de la puesta en marcha de una estrategia de formación en los primeros momentos de desarrollo profesional del profesor de matemáticas. Nuestro objetivo es caracterizar las estrategias más idóneas para promover el aprendizaje del profesor, desde procesos de resolución de problemas profesionales, que faciliten el contraste y la reflexión sobre su práctica. En este sentido actualmente estamos orientando nuestro trabajo hacia el diseño de recursos potentes para promover el debate y la reflexión sobre los diferentes problemas del ámbito profesional.

Presentación

La actividad profesional de nuestro grupo se ha centrado desde el año 1984 en el estudio del desarrollo profesional del profesor, más concretamente en el diseño, desarrollo, análisis y evaluación de procesos formativos con grupos de profesores y futuros profesores de diferentes niveles educativos.

Una de las características fundamentales de nuestro grupo es su naturaleza interdisciplinar, al estar formado por profesores de diferentes áreas de conocimiento, quizás por ello, el punto inicial de unión del grupo fue nuestra actuación en el aula, aquello que años después denominamos “el cómo”; es decir, el objetivo inicial de nuestro trabajo se centró en el ámbito metodológico y la búsqueda de claves de intervención en las aulas que favorecieran la evolución de nuestros alumnos, futuros profesores de primaria.

Esta finalidad inicialmente estaba vinculada a la mejora de nuestra práctica como formadores de profesores, finalidad que progresivamente se fue transformando en investigación sobre nuestra práctica, para comprenderla y mejorarla desde presupuesto más rigurosos y organizados. Desde entonces nuestra actividad profesional conforma y configura tanto una labor formativa, como de investigación. A lo largo de las primeros casi diez años, el estudio de las diferentes fuentes teóricas y de investigación, junto con la información aportada desde las experiencias de los trabajos de grupos cercanos en ideas y desde nuestras propias experiencias y trabajos, nos fue aproximando a una caracterización del conocimiento profesional y su dinámica de elaboración, lo cual nos permitió ir configurando un referente teórico que será la base de nuestro trabajo en ambos campos de actuación (Porlán y Rivero, 1998; Azcárate, 1999; Azcárate, 2001; Cardeñoso y Azcárate, 2002).

Desarrollo Profesional: Procesos de formación

Aunque somos conscientes de que no hay, ni sería bueno que lo hubiera, un único referente teórico en relación con el proceso de desarrollo profesional, hoy, en nuestra práctica como formadores e investigadores, asumimos la perspectiva del profesor como profesional reflexivo, crítico e investigador como principal referente. Desde esta idea, concebimos la formación y la investigación como procesos ligados a nuestra propia acción y a la práctica docente (Elliott,1990), orientados desde un objetivo genérico: facilitar que los profesores sean autónomos profesionalmente. Es decir, el desarrollo profesional lo vinculamos, en cierta manera, a la evolución de su capacidad de reflexionar en y sobre la práctica, diagnosticarla y comprenderla, para descubrir, criticar y modificar los referentes, esquemas y creencias que subyacen a la misma. Capaces, por tanto, de diseñar, gestionar su puesta en práctica y evaluar propuestas curriculares, sin olvidar el contexto de complejidad moral de la práctica educativa y, admitiendo posiciones divergentes respecto de la educación y sus metas; es decir, desde posiciones flexibles de actuación e interpretación.

Desde esta posición, abogaremos por una visión compleja, constructivista y crítica de la formación y una concepción integradora del saber práctico profesional. El conocimiento docente es un conocimiento *práctico*, dirigido a la intervención en el ámbito educativo; es *complejo e integrador*, no es un conjunto de técnicas didácticas estandarizadas ni un conjunto de rutinas y principios elaborados a partir de la experiencia, sino que requiere de la interacción e integración rigurosa de saberes de distinto tipo (Figura 1); es *crítico,* porque orienta la actuación de los profesores en una determinada dirección y eso implica también una opción ideológica; y es *profesionalizado sobre la enseñanza de los contenidos*, ya que debe abordar específicamente las situaciones y problemas relacionados con la práctica de su enseñanza.

Para cualquier ámbito profesional, la investigación en un poderoso medio de construcción del conocimiento, en el caso del docente pensamos que la investigación sobre su actividad profesional, las tareas que la conforman y los problemas implicados en su práctica es el eje y motor fundamental de su desarrollo. En esta idea de investigación hay tres aspectos que están sustancialmente relacionados, las ideas, la practica y la reflexión. Aspectos que cobran sentido en procesos compartidos de contraste y discusión sobre las diferentes informaciones puestas en juego. Como nos indica Rozada (1996), toda formación, bajo una perspectiva dialéctico-crítica requiere del estudio, la reflexión y la acción, combinadas en un equilibrio adecuado.

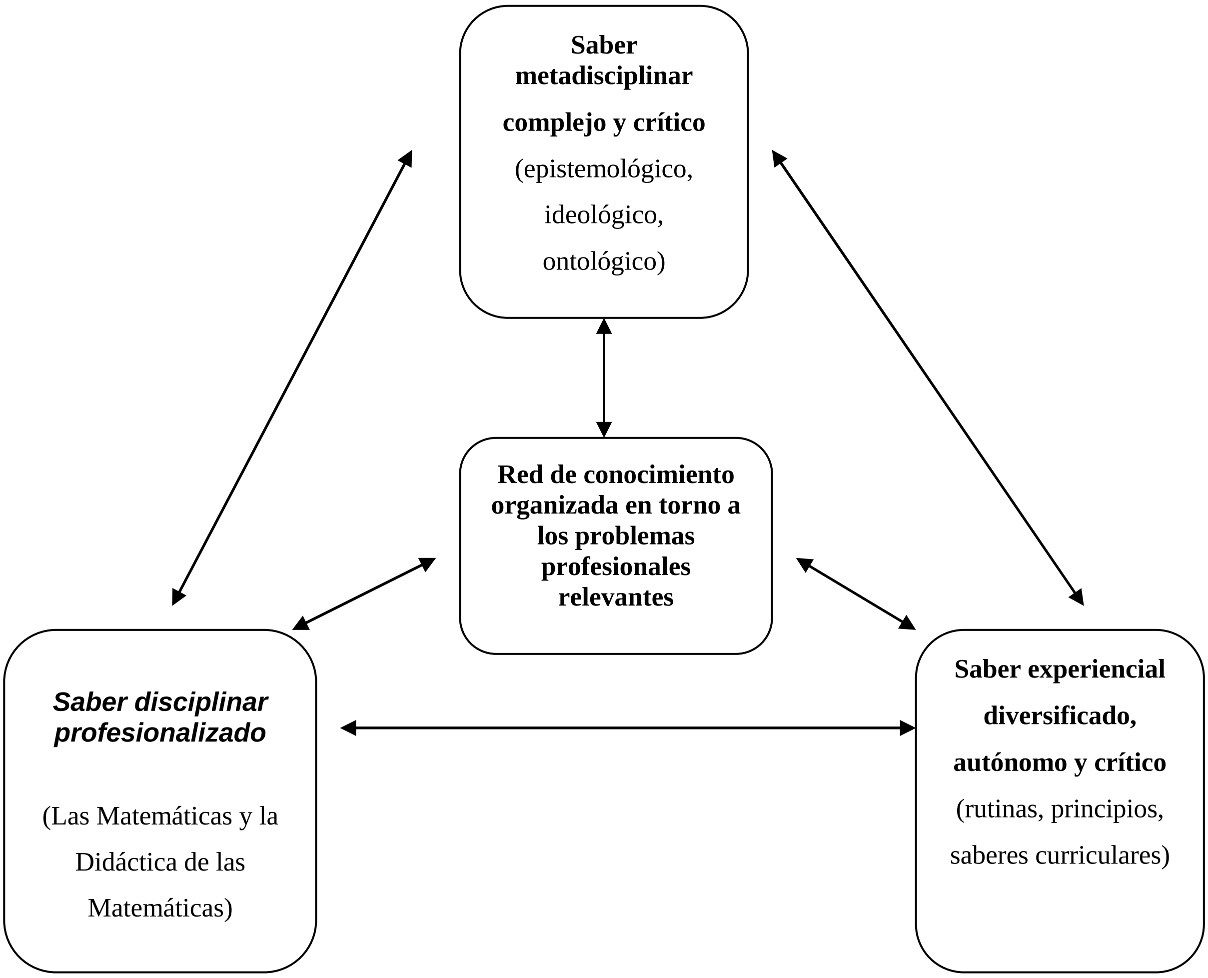


Figura 1: Dimensiones y Fuentes del conocimiento profesional

Desde nuestra perspectiva la evolución del conocimiento profesional debería tener una orientación deseable que configuramos a través de la hipótesis de progresión de referencia. La hipótesis de progresión, considerada en sí misma, es un referente teórico que nos permite, como formadores, nuestra intervención en los procesos de formación, en la línea de promover la evolución deseable; y, como investigadores, organizar nuestro análisis e interpretación de la realidad que observamos. Si bien, entendemos que el desarrollo profesional no es unidireccional y la experiencia en procesos de investigación sobre la práctica nos indica que el desarrollo profesional puede evolucionar hacia direcciones muy diferentes.

En dicha hipótesis, consideramos una gradación general deseable en la elaboración del conocimiento profesional, desde perspectivas más simplificadoras, reduccionistas, estáticas y acríticas, que se corresponderían con visones más tradicionales de la educación, hacia otras más coherentes con ideas alternativas de carácter más interactivo, dialéctico e investigativo. Esta propuesta global es la que nos permite elaborar las diferentes hipótesis de progresión que orientan nuestras investigaciones, pero, como tal hipótesis, no constituye un itinerario ineludible para el desarrollo profesional, sino un referente para el formador e investigador.

Una vez expuesto nuestro planteamiento del desarrollo profesional - en el que la formación inicial es realmente una primera fase de ese desarrollo -, parece conveniente caracterizar, brevemente, cómo elaboran los profesores y futuros profesores ese conocimiento que llamamos práctico profesional y, en consecuencia, cómo pensamos que se puede promover su evolución.

Como indicábamos, es la reflexión sobre la práctica y los problemas que en ella acontecen, la que posibilita que el profesor evolucione en su visión educativa y en sus formas de hacer y entender, la realidad del aula. Estos problemas han de ser de carácter práctico y facilitar la conexión con los intereses y vivencias del profesorado. A la vez, requieren, para su resolución, de la participación de otros saberes distintos a los que provienen de la experiencia; y, además han de ser potentes, desde el punto de vista del conocimiento profesional deseable, para favorecer aproximaciones parciales a nuevos marcos de referencia.

Todo ello apunta hacia la necesidad de que las acciones de formación inicial y continua, y la investigación sobre ellas, deben tener un fuerte vínculo con la práctica docente actual o futura, estando preferentemente centradas en procesos de investigación relacionado con algunos de los aspectos específicos implicados con la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

El análisis de la actividad profesional, las tareas que lo conforman y los problemas a los que se enfrenta, nos ha permitido una primera caracterización y organización de, lo que denominamos, los *"ámbitos de investigación profesional"* (AIP). Estos ámbitos constituyen el conjunto de problemas e ideas relacionadas con algún aspecto de la función docente y de la práctica educativa, susceptible de ser objeto de estudio en procesos formativos y que, a su vez, se establecen como núcleos organizadores del currículo del profesor. Caracterización que es uno de los objetos de investigación actual de nuestro grupo.

Los ámbitos de investigación profesional es el nivel de organización del conocimiento profesional más vinculado a los intereses inmediatos y funcionales del profesorado, ligados a problemáticas específicas, como planificar, gestionar, intervenir o regular el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, bajo las condiciones que determina el contexto de actuación. La selección de ámbitos de investigación, por tanto, no es arbitraria y se corresponde con aquellos problemas y tareas profesionales que nuestra experiencia como formadores nos ha señalado como más relevantes para los profesores y cuyo abordaje permite la organización y elaboración del saber práctico del docente. Deben ser problemas que conectan con los intereses del profesorado pero, que a la vez, necesiten de nuevos saberes que los que provienen de la experiencia y es, en este punto, donde radica su potencial formativo, pues es necesario acudir a nuevas fuentes de información para su resolución y a la articulación de respuestas alternativas. Promoviendo así el desarrollo profesional ya que facilitan la evolución del conocimiento profesional hacia elaboraciones más complejas, favorecen aproximaciones parciales a nuevos marcos de referencia (Azcárate, 1999a; Martín del Pozo y Rivero, 2001). Los ámbitos sobre los que trabajamos actualmente, constituyen grandes redes de dilemas y decisiones profesionales y pensamos que es *la investigación de los mismos* la que puede ayudar a la elaboración de un conocimiento profesional más complejo y dinámico (Lijnse, 1995).

Nuestro objetivo, como fin último de nuestra labor como investigadores, es ayudar a transformar la realidad y la escuela en particular, para ello es necesario que los profesores, parte vital de la escuela, evoluciones en sus formas de entender y actuar en ella. Esta cambio solo es posible cuando el profesor cambia el marco explicativo que da sentido lo que hace; es decir cuando modifica o reorganiza sus ideas, por eso consideramos vital el conocimiento de dichas ideas y quizás por ello nuestras primeras investigaciones estuvieron centradas en ese campo.

Las ideas de los profesores como objeto de investigación

Si consideramos que el desarrollo profesional está vinculado a procesos de estudio y reflexión que surgen al investigar sobre los problemas de la práctica en contextos que faciliten y permitan la comunicación; es decir, en contextos donde el compartir ideas y el debate sean las estrategias fundamentales. Entonces, desde la perspectiva del formador, dinamizador o asesor, un aspecto clave a conocer es las ideas desde la que los profesores miran la realidad; cuales son sus concepciones sobre el problema o situación a abordar y cuales son sus niveles de comprensión de los diferentes aspectos implicados en dicho problema. Esta percepción permite que en el proceso se puedan introducir nuevas informaciones que faciliten el contraste, análisis y la reflexión de las ideas previas y posibiliten nuevas reformulaciones.

Por ello, en un primer nivel de aproximación al problema nuestro objeto de investigación se centró en la caracterización de las ideas de los profesores sobre el saber disciplinar que han de enseñar; en ese sentido, hemos desarrollado diferentes trabajos de investigación que han dado origen a las siguiente tesis doctorales desarrolladas en el grupo:

- Azcárate (1996) y Cardeñoso (2001), ambos centrados en la caracterización de las ideas y perfiles de los profesores de primaria con relación a su compresión del conocimiento probabilístico que ha de enseñar en las aulas. Para ello, desde un enfoque interpretativo, tomamos como referentes, para el diseño de los instrumentos de recogida de datos y de análisis, la elaboración de un sistema de categorías e indicadores de los diferentes niveles de formulación del conocimiento, elaborado desde las perspectivas y principios presentados en el marco general, pero adaptadas al conocimiento probabilístico.
- Serradó (2003), cuyo foco de investigación se orienta en dos direcciones, la caracterización del tipo de conocimiento probabilístico que se promueve desde los libros de textos, ya que en muchos casos la practica de la enseñanza viene determinada por los manuales que se usan en el aula. Y, en segundo lugar, el interés de estudio se centra en conocer y analizar qué fuentes de información utilizan los profesores de secundaria y cómo las utilizan, para seleccionar y organizar los contenidos matemáticos en general y, en particular, el conocimiento probabilístico, objeto de estudio en este caso. Para ello tomamos como referentes los sistemas de categorías sobre los diferentes perfiles educativos, ya elaborados en estudios previos, adaptados al campo de estudio y desde ellos, elaboramos los instrumentos de recogida de información y de análisis (indicadores), que nos han permitido aproximarnos al perfil de los profesores de la muestra sobre el tema en cuestión.
- Navarrete (2004), en este trabajo la investigación trata sobre las concepciones de un grupo de futuros maestros en el área de las ciencias, y que constituye también la tesis doctoral de otro miembro del grupo. Este estudio, desde perspectiva teóricas similares, nos ha permitido detectar y caracterizar las ideas de un grupo de futuros profesores y su posible evolución, en torno a un tópico clásico del conocimiento escolar como son las estaciones. El análisis realizado ha permitido detectar los obstáculos y dificultades en su evolución. Son de especial interés los obstáculos relacionados con la débil comprensión de la gran cantidad de ideas, representaciones y nociones matemáticas implicadas en la comprensión de las relaciones que permiten caracterizar el fenómeno de las estaciones del año.

El estudio de una estrategia formativa

Ya en el ámbito de la formación permanente del profesorado de secundaria, una de las experiencia vivida por el grupo, que ha sido objeto de un proceso de investigación riguroso, ha estado centrada en la formación del profesorado novel de ciencias y matemáticas (Cuesta, 2004).

El propósito global de esta investigación consiste en conocer y comprender los procesos formativos y los procesos de desarrollo profesional que promueve una actividad de formación permanente desarrollada con tres grupos de profesores noveles de educación secundaria de las especialidades de Física y Química, Biología y Geología y Matemáticas. Son tres contextos diferentes que comparten el mismo diseño con los mismos recursos y estrategias formativas, elaborado y desarrollado por un equipo de formadores que se coordinan compartiendo perspectivas y realizando un análisis conjunto. Inicialmente la propuesta formativa fue pensada y consensuada desde unos determinados principios, coherentes con lo expuesto en el primer apartado. Estos principios formativos se pueden sintetizar en tres ideas:

- La coherencia entre el medio y el mensaje
- El trabajo con problemas prácticos profesionales
- La colaboración y la reflexión, herramientas necesarias

El objeto de estudio de la investigación realizada fue, por tanto, una estrategia formativa planificada por un equipo de formadores y gestionada junto con tres grupos de profesores noveles de secundaria, de las áreas de Ciencias y Matemáticas. En dicha investigación se pretende profundizar en el conocimiento y la comprensión de esa realidad concreta, entrever sus fortalezas y sus debilidades. El objetivo general de la investigación consideraba dos vertientes o direcciones:

- Caracterizar la propia actividad formativa en acción, el enfoque de formación que subyace al diseño y a los recursos formativos puestos en juego a lo largo de todo el proceso.
- Describir y analizar las características docentes del profesorado participante, de Ciencias y de Matemáticas, que se encuentra en sus primeros años de experiencia en la docencia, a lo largo de todo el proceso formativo.

Un estudio con estas finalidades, que giran en torno a la problemática del desarrollo profesional, requiere realizarse desde planteamientos cualitativos e interpretativos, porque se estudia una realidad en su contexto natural y se orienta al proceso, a su desarrollo. En relación con su diseño, se opto por el estudio de casos, pues creemos que se ajusta a las características y los propósitos de la investigación. El estudio de casos es un planteamiento de investigación que se caracteriza por su interés en la comprensión de un escenario concreto (una situación, suceso, programa o fenómeno concreto); permite acceder a información valiosa, difícil de conseguir con otras metodologías porque focaliza el estudio en aspectos prácticos y situacionales, en las acciones de los participantes, no se preocupa por la generalización de los resultados porque su cometido real es la particularización, la comprensión del caso (Shulmann, 1992; Stake, 1998).

En relación con el papel de la investigadora en el proceso, en nuestro estudio se optó por la **observación participante,** puesto que el acceso y la estancia en el contexto concreto en el que tienen lugar los fenómenos objeto de investigación así lo exigen y tanto los propósitos planteados como la metodología empleada requieren la integración de la investigadora en la situación estudiada (Hammersley y Atkinson, 1994).

En el contexto de un estudio de casos, un aspecto importante es el proceso de recogida de datos: *“los datos no existen con independencia del procedimiento y/o el sujeto que los recoge y, por supuesto, de la finalidad que se persiga al recogerlos”* (Rodríguez, Gil y García, 1999:142); es decir, el proceso de recogida de datos no es independiente de las cuestiones que orientan el estudio. En nuestro caso se han utilizado diferentes instrumentos de recogida de información:

La observación	Registros tecnológicos y Sistemas narrativos
Métodos de encuesta	Entrevistas y Cuestionarios
Análisis de documentos	Diseños, Actas y Diarios

La integración e interrelación de todos ellos nos han permitido configurar una imagen del proceso (Goetz y LeCompte, 1988).

En relación con el proceso de análisis de la información obtenida, intentamos dar sentido a las observaciones del caso, mediante el estudio atento y la reflexión de los datos obtenidos y a través de su interpretación desde los esquemas conceptuales asumidos, teniendo siempre en cuenta tanto los instrumentos o técnicas empleados para recoger la información, como el momento en que se ha hecho y las fuentes de las que procede. Para ello hemos procedido a la identificación de categorías que reflejaran las temáticas de interés en que se focaliza nuestro estudio y que permitieran la identificación y clasificación de las unidades de información que, con relación a dichas temáticas, reconocemos en los datos (Porlán y otros, 2001).

Aunque la investigación versa acerca de todos los elementos y dimensiones de la actividad, de las perspectivas de los participantes, tanto formadores como profesorado, y de la dinámica evolutiva del proceso; las consideradas en este escrito están centradas muy brevemente en la caracterización de algunos de los elementos claves y obstáculos del desarrollo profesional que hemos detectado en el proceso.

Claves y obstáculos para el desarrollo profesional

Las conclusiones del análisis las organizamos en torno a los tres centros de interés en los que descansa el desarrollo de la actividad**: El proceso formativo** llevado a cabo, y los protagonistas de su desarrollo: **los formadores** y **el profesorado**.

En relación con **el profesorado**, hemos intentado identificar los factores que, a nuestro entender, constituyen aspectos importantes a tener en cuenta para explicar la evolución que la actividad formativa ha favorecido en el pensamiento y el quehacer profesional del profesorado participante (Cuesta y Azcárate, 2004). En el mismo sentido, consideramos una información importante los obstáculos que dificultan su desarrollo como docentes, las resistencias y dificultades que el proceso formativo hizo visibles y explícitas (Figura 2).

Las investigaciones sobre los cambios en las prácticas docentes y los procesos de formación indican que el cambio en el profesorado es un cambio lento. Este cambio supone un proceso de reorganización continua y de evolución, un proceso abierto e irreversible, en el que lo nuevo se elabora a partir de lo viejo, bien mediante pequeños ajustes del sistema de ideas del profesor, bien por una reorganización más amplia del mismo (García Díaz, 1995).

En nuestro estudio, somos conscientes que las posibles evoluciones detectadas son en realidad tentativas de cambio, pero su análisis sí nos permite detectar cuales han sido los factores que han permitido la aparición de dichas tentativas y que obstáculos dificultan su integración en el sistema de ideas de los profesores.

Para ello los elementos analizados han sido sus propias afirmaciones y argumentaciones con relación a como han evolucionado sus inquietudes y necesidades, a las tentativas de cambio que se han planteado y a la interpretación que hacen de las mismas y de las dificultades que perciben en su propia evolución o en la puesta en práctica de determinadas propuestas de innovación en el aula. El desarrollo de la actividad ha conseguido activar y conducir un complejo proceso de interacciones entre problemas, saberes y experiencias que han estado activado en cada momento y cada una de las actividades realizadas que ha provocado en el profesorado una cierta reorganización de sus ideas iniciales y la formulación de nuevos interrogantes en relación con su práctica.

PROFESORADO

FACTORES QUE FACILITAN EL CAMBIO

- La posibilidad de los noveles de reconocer y sentir como problemas las situaciones de su práctica
- Considerar como eje del proceso formativo sus problemas prácticos
- La actitud de apertura y el interés por buscar soluciones, demostrado por el profesorado
- El clima de confianza, intercambio y colaboración que se generó

OBSTÁCULOS QUE INTERFIEREN EN EL CAMBIO

- La inseguridad e inestabilidad que conllevan los cambios
- La dificultad para reconocer las relaciones en el análisis de las situaciones problemas
- La esperanza en respuestas automáticas y cambios perdurables
- La concepción absolutista del conocimiento
- La concepción y práctica de la evaluación
- La provisionalidad e inestabilidad de su situación en los centros

Figura 2: Factores y obstáculos

Con respecto **al proceso,** nos centramos en indicar los aspectos más significativos para el profesorado cuando valoran el proceso, y las coincidencias con los aspectos que los formadores consideran claves a la hora de desarrollar un proceso formativo con el propósito de incidir en su desarrollo profesional. Destacando el papel del análisis de los estudios de casos presentados, como estrategia formativa, el diario como un recurso valioso en el proceso formativo, los procesos reflexivos que se generaron y el valor del grupo como cauce para su desarrollo (Figura 3).

La reflexión es de esta forma una herramienta fundamental para el progreso personal y profesional del profesor, ya que permite hacer un análisis crítico de sus ideas y sus actos. En la línea de Jaworski, (1998), consideramos que la práctica reflexiva y crítica es una de las estrategias fundamentales del desarrollo profesional, y ésta adquiere sentido dentro de procesos de colaboración, fundamentalmente entre iguales, en los que los investigadores, o agentes externos al proceso tiene un papel de facilitadores de información y de regulación

Figura 3: Elementos claves del proceso

En nuestro caso, como veremos a continuación el papel de los formadores tanto en las sesiones formativas, como en el proceso de seguimiento fueron una de las piezas claves en el desarrollo de la estrategia.

En cuanto a **los formadores**, el análisis se centró fundamentalmente en su papel durante las sesiones, y también en el seguimiento y análisis que realizaron de forma paralela al propio desarrollo de la actividad. Destacamos la interacción de los formadores con el profesorado: las claves de esa interacción desvelan el papel realmente desarrollado durante el proceso y son una muestra clara de cómo pueden materializarse los principios de procedimiento que sustentan el papel atribuido al formador (Figura 4).

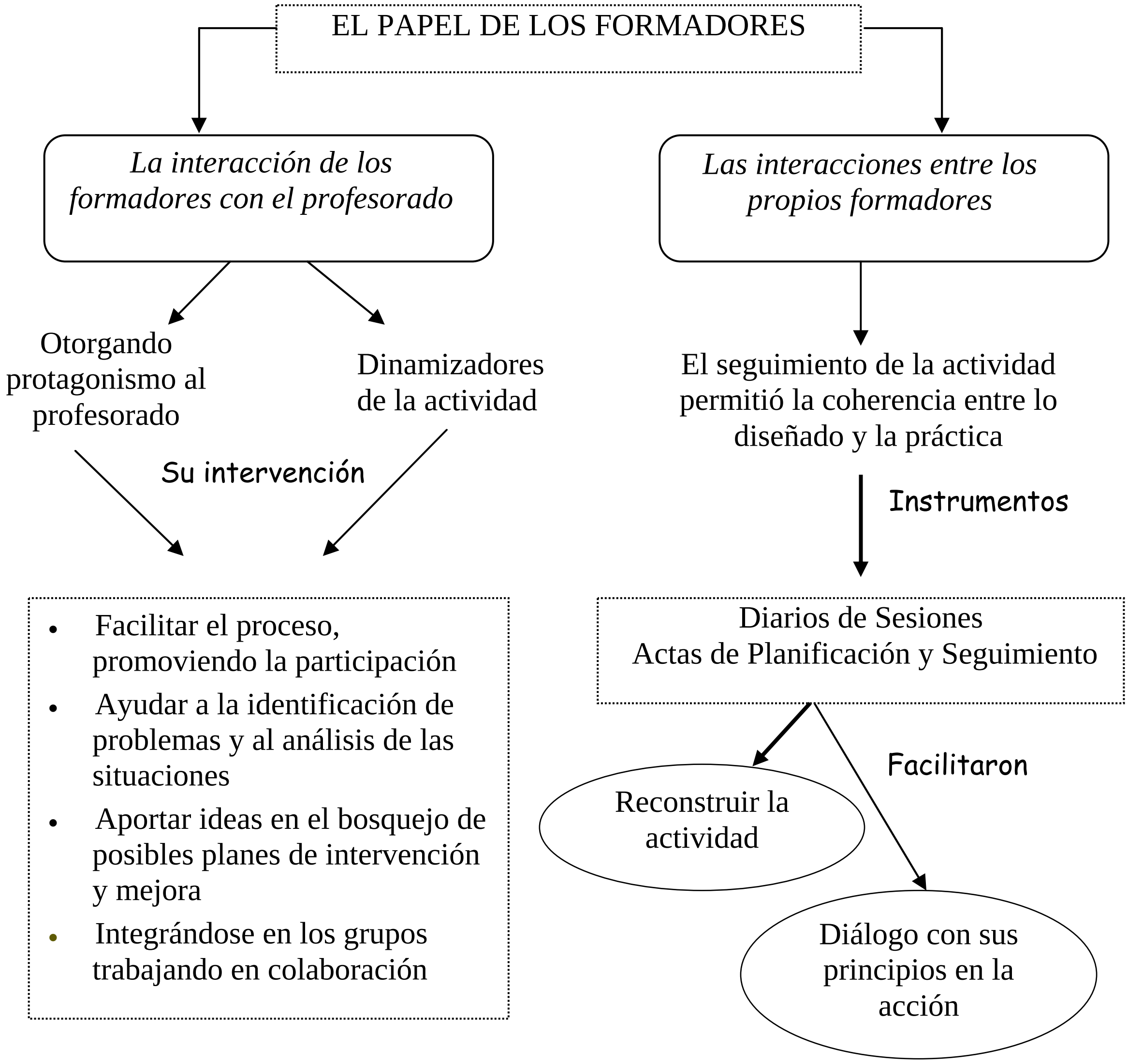


Figura 4: Los formadores ante la actividad formativa

Los formadores se integran en los grupos, donde participan en la construcción de significados compartidos y juegan un papel de dinamizadores de la actividad al abrir nuevos interrogantes y aportar nuevas informaciones. Los profesores, sus problemas, sus propuestas y sus intereses son los protagonistas del proceso. Sin embargo, en el análisis de los datos ha quedado patente el importante papel que ha jugado el seguimiento riguroso, crítico y compartido que realizó el equipo de formadores. Dicho seguimiento permitía detectar las dificultades, seleccionar recursos, informaciones, casos, propuestas, que podían dinamizar el proceso.

Otro aspecto destacado de dicho seguimiento está en el dialogo que ellos mantienen con sus propios planteamientos y principios formativos, provocado por su participación en la actividad, dialogo que permite la reconstrucción de sus significados a la luz de la experiencia y de su análisis.

Una de las conclusiones más significativas de la investigación, desde la perspectiva del equipo de formadores, es la necesidad de disponer de recursos, entendidos en su acepción más amplia, como herramientas que faciliten los procesos formativos. Idea que incide directamente en la línea del nuevo proyecto de investigación que, como grupo, hemos iniciado.

Nuevas líneas de actuación: Los recursos para la formación

Es evidente, que el avance en el itinerario formativo y la progresiva complejización del saber práctico profesional no ocurre de forma espontánea. En la mayoría de los casos es necesario el diseño específico de actividades formativas que favorezcan el proceso y también el uso de determinados recursos o instrumentos que permitan la puesta en cuestión y el contraste entre las ideas de los profesores.

En nuestra experiencia en el diseño, desarrollo, análisis y evaluación de procesos formativos se ha puesto de manifiesto la importancia del uso de **recursos**, ”herramientas”, o instrumentos, como denomina Llinares (1999), que posibilitan estos procesos formativos. Recursos que deben ser potentes para incidir en el desarrollo profesional del docente y promuevan la elaboración de las competencias profesionales adecuadas Sin embargo, hemos podido constatar, en nuestro contexto, una carencia significativa de recursos elaborados con esta finalidad, con independencia del nivel educativo: inicial, primaria, secundaria o universitario. Existen pocos referentes de recursos elaborados específicamente pensando en procesos de formación de los docentes de las diferentes áreas y niveles educativos (Gonzalo y Fajardo, 1994; Llinares y Sánchez, 1998). Por ello, nuestra perspectiva de investigación en los próximos años va dirigida a la selección, caracterización, elaboración y evaluación de recursos adecuados a los procesos formativos del profesorado en diferentes niveles y áreas, fundamentalmente de ciencias y vinculados a los ámbitos de investigación profesional.

Se trataría, por tanto, de caracterizar y elaborar recursos didácticos valiosos para la formación, que faciliten la relaboración de las ideas de los profesores, que constituyan herramientas encaminadas a potenciar el control autónomo de los profesores sobre su propio proceso de aprendizaje profesional y que faciliten, al mismo tiempo, el análisis y el cambio de las prácticas educativas, generando procesos de innovación.

Nuestra concepción de recurso, se aleja, por tanto, de la idea de “control técnico” para su uso, donde el profesor es un reproductor y ejecutor de las orientaciones que le llegan diseñadas. Pretendemos, por el contrario, una forma de uso que promueva su utilización como elementos de análisis, reflexión, crítica y transformación de las prácticas de enseñanza. Para ello, han de proporcionar elementos para ese análisis sobre la práctica, con el fin de comprenderla y mejorarla. En consecuencia, para su integración en los proceso formativos deben contener orientaciones y tareas abiertas, comprensivas y expresivas que obliguen y ayuden a representar problemas, a avanzar posibles soluciones y a la adquisición de competencias y destrezas específicas.

En nuestro caso, inicialmente centraremos el estudio en procesos formativos diseñados desde problemas relacionados con el **ámbito metodológico**; es decir, los problemas relacionados con el “cómo trabajar en las aulas” (Azcarate, 1999b; Cuesta, 2004). Su propio carácter interactivo nos permite trabajar todos los elementos que intervienen en el diseño y ejecución del trabajo de aula. Estos recursos se organizarán en torno al ámbito seleccionado y se diversificarán en función de los diferentes momentos del proceso metodológico y en función de su diversa finalidad dentro del proceso formativo.

En el ámbito de investigación seleccionado para nuestro estudio, el estudio de casos, elaborados y presentados en diferentes soportes tecnológicos y documentales, se convierte en el recurso fundamental para incidir en momentos metodológicos diferentes, desde los propósitos y presupuestos que venimos declarando.

Merseth, K.K. (1996: 741) indica que *"el estudio y estudios de casos para la formación ofrece una oportunidad prometedora en la formación de profesores para explorar nuevos métodos, contenidos y pedagogías para los programas de formación del profesorado. El creciente interés en el estudio de casos, los primeros resultados de las investigaciones empíricas sobre los materiales y los métodos, y las oportunidades para realizar otras investigaciones sugieren que este tópico ofrece grandes oportunidades a aquellos que quieren usarlo para continuar profundizando en la comprensión del proceso de aprender a enseñar".*

En este sentido Durcharme y Durcharme (1996: 1039) introducen como uno de los interrogantes a investigar en la formación del profesorado el siguiente*: "¿Cuáles son los efectos discernibles de los usos de los estudios de casos en la formación del profesorado?".* Estos autores comentan que desde finales de los ochenta algunos formadores han considerado oportuno introducir el estudio de casos en la formación inicial y permanente del profesorado.

Sykes y Bird (1992) abordan ampliamente la relación del estudio de casos con la formación del profesorado. Estos autores reconocen los "casos de enseñanza" como narraciones y/o descripciones de procesos de enseñanza que son elaborados específicamente para su uso en la formación de profesores. Consideran que éstos pueden ser diseñados como tales o bien se pueden utilizar otros que provienen de las investigaciones de estudios de casos con la perceptiva adaptación. Están focalizados más sobre situaciones particulares, problemas o roles concretos que sobre principios generales. Dadas sus características permiten una clara y directa conexión con los procesos de enseñanza/aprendizaje que se desarrollan en al realidad de las aulas. La idea de caso implica siempre un fuerte énfasis en la relación teoría-práctica.

Los elementos que se pueden considerar en la descripción de los casos varían sustancialmente según las características de la situación-problema, los actores, los hechos, los pensamientos y los sentimientos relacionados en el caso descrito, que se reflejan en:

- La organización del caso concreto,
- El medio a través del cual es presentado,
- Las actividades que en él se utilizan,
- La participación del profesor y del formador,
- Los propósitos del caso y los argumentos que se utilizan en su análisis.

La tarea central de la investigación, en el contexto de los estudios de casos integrados en proceso formativos, es crear y usar un conjunto rico e interesante de casos situados en una variedad de situaciones con una variedad de propósitos que pueden ser simultáneamente estudiados. De ahí la necesidad de analizar las posibilidades de cada recurso ante diverso tipo de situaciones, como paso previo a la toma de decisiones sobre qué recursos pueden y deben adoptarse al planificar cada tarea de formación.

El proyecto que nos proponemos, supone una continuación y una profundización del trabajo realizado hasta la fecha por nuestro grupo de investigación.

Dos ejemplos a modo de propuestas

Como ya hemos indicado, en los últimos años y desde los diferentes ámbitos de formación en los que estamos implicados (primaria, secundaria y universidad), este equipo de investigación ha centrado sus esfuerzos en la elaboración de un conjunto de recursos y materiales para la formación del profesorado en las área de ciencias y matemáticas.

En el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, durante los últimos años hemos organizado y puesto en marcha dos nuevos instrumentos o recursos en los procesos de formación desarrollados. Nos referimos al estudio de la utilización del portafolio, como instrumento de evaluación y seguimiento del aprendizaje del alumno y, al uso de los mapas conceptuales, como medio de acceso a la consideración y compresión del conocimiento de los alumnos sobre un determinado aspecto o tópico matemático. Ambos recursos han sido puestos en juego en diferentes procesos de formación como instrumentos para que los futuros profesores se cuestionen diferentes aspectos relacionados con las ideas o conocimientos de los alumnos y con el papel de la evaluación en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El uso del portafolio como recurso para el desarrollo profesional

Pocas tareas nos plantean tantas dudas y pueden llegar a crear tantas contradicciones a los profesores como las relacionadas con la evaluación y las actuaciones o decisiones docentes asociadas a ella.

Quizás por ello, tanto en el ámbito de la innovación, como en el de la investigación, las cuestiones sobre evaluación han ido progresivamente adquiriendo un cierto protagonismo y cada vez más podemos considerarlas como uno de los focos prioritarios de atención en los análisis, reflexiones y debates que realiza la comunidad de educadores matemáticos (Kelly y Lesh, 2000). Desde nuestra perspectiva, la evaluación es una parte importante de los procesos de enseñanza y aprendizaje ya que, en la mayoría de los casos, determina todas las demás acciones asociadas a la intervención.

En esta línea, pensamos en la elaboración de un recurso formativo que incidiera sobre las ideas sobre evaluación de los futuros profesores de matemáticas y pusiera en cuestión su idea, más o menos común, de evaluación como sinónimo de calificación. Con está intención se seleccionó y organizó la información y la documentación necesaria para caracterizar una situación de enseñanza en torno a una estrategia de evaluación alternativa, puesta en marcha en un aula de secundaria cuyo eje era la elaboración y valoración de una carpeta de enseñanza (Teaching Portfolio).

Un portafolio o carpeta, es una colección de trabajos de los estudiantes que va reflejando los esfuerzos individuales y grupales, que permite mostrar evidencias de la reflexión que ellos realizan acerca de su propio trabajo, así como su evolución (Marina y cols. 2000). Para que el portafolio adquiera su significado estas carpetas de trabajo no han de ser una recopilación de material, sino un conjunto de material trabajado. En nuestro caso, dicha carpeta incorpora también las indicaciones y cuestiones que el profesor va planteando al alumno desde la presentación de las diferentes actividades y las reformulaciones de los alumnos.

Bastidas (1996), en relación con su integración en los procesos formativos, enfoca la caracterización del portafolio hacía los procesos de reflexión que surgen de estas colecciones de materiales. La mayoría de programas de formación que usan los portafolios, programas de formación inicial (Serradó y Azcárate, 2000). El principal beneficio del uso de la carpetea de enseñaza (TP), es su capacidad de contextualizar el proceso educativo y la consideración de las historias personales de los implicados (Tellez, 1996). Autores como Forgette-Giroux y Simon (2000), enfatizan el valor del portafolio porque permite incluir diferentes tipos de contenidos relacionados con las diferentes dimensiones de aprendizaje.

El caso presentado gira en torno a la resolución de problemas en el aula de secundaria. El material lo configura un conjunto de problemas propuesto, resueltos y comentados por la profesora de un grupo de alumnos de 3º de ESO, acompañados con documentación sobre las posibles cuestiones que pueden surgir en el proceso de análisis. Para su estudio, se presenta un conjunto de cuestiones que inciden en el desarrollando de un proceso de discusión y reflexión sobre, las finalidades de su utilización en el aula, de su influencia en el proceso de aprendizaje de los alumnos y, sobre las posibles modificaciones, en relación con el papel de la evaluación y la calificación, que conlleva su integración en el aula (Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2003).

El estudio de la aplicación de estrategias de regulación del proceso de aprendizaje como representa el uso de un portafolio, incide significativamente en la concepción que, sobre el término de formación y evaluación, aún sigue estando presente en las mentes de los futuros profesores. Abre nuevas perspectivas de la evaluación no vinculadas necesariamente a la calificación.

Actualmente disponemos de datos recogidos en tres contextos formativos diferentes y estamos en proceso de análisis de dicha información y caracterizar la posible incidencia en las ideas de los participantes en el estudio.

El uso de los mapas conceptuales como recurso para le desarrollo profesional

En este caso el recurso seleccionado está dirigido a otro de los aspectos relacionados con la actividad en el aula, la caracterización de las ideas de los alumnos en relación con un determinado conocimiento matemático. Se configura mediante una colección de mapas conceptuales elaborados, por un grupo de niños de 4º ESO, en el transcurso de un proceso de aprendizaje de conocimiento geométrico, acompañado de una documentación y propuesta de tareas que promueve su análisis y su posterior contraste.

Los mapas conceptuales son un instrumento que facilita la evaluación diagnóstica del conocimiento matemático elaborado y de los obstáculos surgidos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho conocimiento. En el mismo sentido es un instrumento válido para caracterizar el conocimiento previo de los alumnos.

Por ejemplo, el análisis de los enlaces y la estructura jerárquica de un mapa conceptual completo o de un extracto del mismo, permite analizar y reflexionar sobre las nociones que están presentes y cuáles ausentes, sobre las relaciones que establece y su naturaleza y sobre los obstáculos que puede presentar el alumno. Al profesor, como mediador en el proceso de elaboración y reconstrucción del conocimiento, la percepción de estos obstáculos presentes en las concepciones de los alumnos le puede ayudar a promover estrategias que faciliten un aprendizaje significativo a los alumnos. Desde esta perspectiva investigativa, los profesores deberán planificar actividades que permitan aflorar los obstáculos de los alumnos; y, a su vez, permitan diagnosticarlos. En esta línea, los mapas conceptuales se constituyen como un instrumento o herramienta que favorece ambas finalidades (Costamagna, 2001).

En el recurso planificado, centramos la propuesta de análisis del caso presentado, en el estudio de los posibles obstáculos que reflejan los mapas elaborados por los niños, obstáculos que se caracterizan por ser conocimientos satisfactorios durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, fijándose en la mente de los alumnos, pero que posteriormente resultan inadecuados; dada su eficacia previa son difíciles de detectar para poder reorientarlos cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas, los mapas pueden ser un instrumento idóneo para ello. Los obstáculos se clasifican en epistemológicos, relacionados con el propio concepto; ontogénicos, debidos a las características de los alumnos, y didácticos resultado de las elecciones que guían la intervención. El análisis de los obstáculos patentes en los mapas conceptuales favorecen la idea de la necesidad de regulación del proceso de enseñanza y aprendizaje; siendo una fuente de información que fomenta el desarrollo profesional del docente, al poner en cuestión lo aparente (Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2004a).

Como indicábamos, la presentación de este caso de estudio se hace a través de un conjunto de mapas conceptuales, todos en relación con el mismo contenido y como resultado del mismo proceso. Su análisis y contraste a través de una serie de cuestiones y apoyado en la documentación necesaria hace aflorar las diferentes formas en las que el conocimiento matemático ha sido asimilado por los alumnos.

La presentación de cómo los mapas conceptuales facilitan el análisis de los obstáculos en la construcción del conocimiento se realiza desde tres perspectivas diferenciadas. En primer lugar, la reflexión teórica del análisis de los obstáculos epistemológicos, ontogénicos y didácticos a los que se enfrenta un alumno al elaborar un mapa conceptual. En segundo lugar, la ejemplificación de los obstáculos mediante la presentación de mapas conceptuales elaborados por los alumnos. En tercer lugar, el contraste de la información teórica desarrollada a través del análisis de los mapas conceptuales y su incidencia en el campo del desarrollo profesional del docente.

Este recurso ha sido puesto en marcha en dos contextos formativos y estamos en proceso de estudio para su caracterización y valoración.

Referencias

AZCÁRATE, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en trono a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Comares.

AZCÁRATE, P. (1999). El conocimiento profesional: naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, V 8; 111-138.

AZCÁRATE, P. (1999a). Los ámbitos de investigación profesional (AIP) como organizadores del currículum del profesor. Conferencia, *Actas del ProfMat 99;* 121-134.

AZCÁRATE, P. (2001). *El conocimiento profesional didáctico-matemático en la formación de maestros*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

BASTIDAS, J.A. (1996): The teaching Portfolio: A tool to Become a Reflective Teacher. En *Forum*, vol. 34, nº 3, pág. 24. http://e.usia.gov/forum/vols/vol34/no3/p24.htm.

CARDEÑOSO, JM (2001): *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatorieda y probabilidad.* Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

CARDEÑOSO, JM y AZCÁRATE, P. (2002). Una estrategia de formación de maestros de matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional (AIP). En Contreras y Blanco (Coords.) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el ärea de Matemáticas*. Cáceres:Servicio de publicaciones de la Universidad de Extremadura.

COSTAMAGNA, A. M. (2001). Mapas conceptuales como expresión de procesos de interrelación para evaluar la evolución del conocimiento de alumnos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(2), 309-318.

CUESTA, J. (2004). *La formación del profesorado novel de Secundaria de Ciencias y Matemáticas. Estudio de un caso*. ProQuest España, nº publicación UMI: 3107334, disponible en: wwwlib.umi.com/cr/uca/main.

CUESTA, J. Y AZCÁRATE, P. (2004): La evolución de un grupo de profesores noveles de Secundaria ante los problemas de su práctica. Comunicación presentada en el *XI Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas*. Huelva: Sociedad de Profesores de Matemáticas Thales.

DURCHARME, E.R y DURCHARME, M.K.,(1996). Needed Research in Teacher Education. En Sikula (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education,* New York: Macmillan.

ELLIOTT, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.

FORGETTE-GIROUX, RENÉE & MARIELLE SIMON (2000): Organizational issues related to portfolio assessment implementation in the classrom. *Practical Assessment. Research & Evaluation, 7(4).*

GONZÁLEZ, F. M.; MORÓN, C. y NOVAK, J.D. (2001). *Errores conceptuales. Diagnosis, tratamiento y reflexiones.* Pamplona: Ediciones Eunate.

GONZALO, I. y FAJARDO, S. (1994). *Los recursos didácticos: educación primaria: formación del Profesorado*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Centro de Publicaciones; SM.

KELLY, A.E. y LESH, R. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

LINJSE, P. (1995). "Developmental research" as a way to an empirically based "didactical structure" of science. *Science Education* 79, 189-199.

LLINARES, S. (1999). Preservice elementary teachers and learning to teach mathematics. Relationship among context, task and cognitive activitiy. En N. Ellerton (Eds.) *Mathematics Teacher Development: International perspectives*. West Perth, Australia: Meridian Press.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, MV. (1998), Aprender a enseñar matemáticas. Los videos como instrumento metodológico en la formación inicial de profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria,* vol. 3, 29-44.

MARINA, L.; MARTINELLO Y GILLIAN, E. y COOK, H. (2000*): Indagación interdisciplinaria en la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Gedisa.

MARTÍN DEL POZO, R. y RIVERO, A. (2001). Construyendo un conocimiento profesionalizado para enseñar ciencias en la Educación Secundaria: los ámbitos de investigación profesional en la formación inicial del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* 40, 63-79.

MERSETH, K.K. (1996). Case and case methods in teacher education. En Sikula (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education,* New York: Macmillan Publishing Company.

NAVARRETE, A. (2004). *Obstáculos y dificultades en la evolución de las estructuras conceptuales y epistemológicas de los futuros maestros: Un estudio de casos sobre el fenómeno de las estaciones.* Tesis doctoral, publicada por ProQuest ISBN: 84-7786—285-0, UMI, nº 3107335.

PORLÁN, R. y RIVERO, A., (1998). *El conocimiento de los profesores,* Sevilla: Diada.

PORLÁN, R. Y Otros (2001). *La relación teoría-práctica en la formación permanente del profesorado*. Sevilla: Diada.

RODRÍGUEZ GÓMEZ, G.; GIL FLORES, J. y GARCÍA JIMÉNEZ, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe

ROZADA, J.M. (1996). Los tres pilares de la formación: estudiar, reflexionar y actuar. Notas sobre la situación en España. *Investigación en la Escuela* 29, 7-22.

SERRADÓ, A. (2003). *El Tratamiento del Azar en Educación Secundaria Obligatoria*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.

SERRADÓ, A. y AZCÁRATE, P. (2000): El Portafolio como instrumento para la evaluación en la formación inicial del profesorado de Secundaria. En Gámez, Macías y Suarez (Eds.): *Matemáticos y Matemáticas para el tercer milenio: de la abstracción a la realidad*. Cádiz: Servicio de publicaciones de la Universidad de Cádiz.

SERRADÓ, A. CARDEÑOSO, J.M. y AZCÁRATE, P. (2003): La evaluación de capacidades en educación matemática: el portafolio. En Cardeñoso y otros (Eds): *Investigación en el aula de matemáticas: la evaluación*. Granada: Saem Thales y Dpto. de Didáctica de las Matemáticas.

SERRADÓ, A.; CARDEÑOSO, J.M. y AZCÁRATE, P. (2004). Los mapas conceptuales: un recurso para la formación inicial del profesorado en Educación Secundaria. Comunicación presentada en el *XI CEAM*, Huelva. Abril

SERRADÓ, A.; CARDEÑOSO, J.M. y AZCÁRATE, P. (2004a). Los mapas conceptuales y el desarrollo profesional del docente. Comunicación aceptada en el *I Congreso Internacional sobre mapas conceptuales*. Pamplona, Septiembre

SHULMAN, J. H. (1992). *Case methods in teacher education*. New York: Teachers College Press.

STAKE, R.E. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

SYKES, G. y BIRD, T. (1992). Teacher Education and Case Idea. En Grant, G. (Ed.): *Review of Research in Education,* Washington: American Educational Research Association.

TELLEZ, K. (1996): "Autentic Assessment". En Sikula (Ed.): *Handbook of Research on Teacher Education.* New York: Macmillan. (705-720).

A investigação em educação matemática em Portugal
Realizações e perspectivas [1]

João Pedro da Ponte
jponte@fc.ul.pt
Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal

Introdução

Este artigo faz uma reflexão sobre o percurso, a situação e as perspectivas da investigação em educação matemática em Portugal tendo em atenção a sua relação com as práticas sociais de ensino-aprendizagem e com a formação de professores e investigadores. Devo começar por notar que o significado da expressão "educação matemática" varia com o contexto onde é usada. Por um lado, a educação matemática constitui um campo de práticas sociais, cujo núcleo são as práticas de ensino e de aprendizagem de professores e alunos mas que inclui igualmente outras vertentes como as práticas de apoio à aprendizagem extra-escolar e a produção de materiais didácticos. Por outro lado, a educação matemática constitui um campo de investigação académica, onde se produz novo conhecimento sobre o que se passa no campo anterior. E, por outro lado ainda, é um campo de formação, onde se transmite esse conhecimento a novas gerações de professores e de investigadores e também aos professores em serviço (Figura 1).

Os três campos não só se sobrepõem parcialmente como se influenciam uns aos outros. Essa sobreposição acontece porque muitos actores actuam em vários campos e porque os objectos de cada um deles tendem a ser partilhados por todos, embora muitas vezes perspectivados de forma diferente. Estas influências e relações múltiplas entre os três campos não são um simples "ruído" que é preciso eliminar para compreender melhor o que se passa em cada um deles. Pelo contrário, são um elemento constitutivo

---

[1] Conferência realizada no XII Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática / XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática / XVIII Encontro de Investigação em Educasção Matemática, realizado em Badajoz, Espanha, 4-6 de Setembro de 2008.

da própria educação matemática, pois nenhum dos campos se pode entender sem perceber a sua relação com os outros.

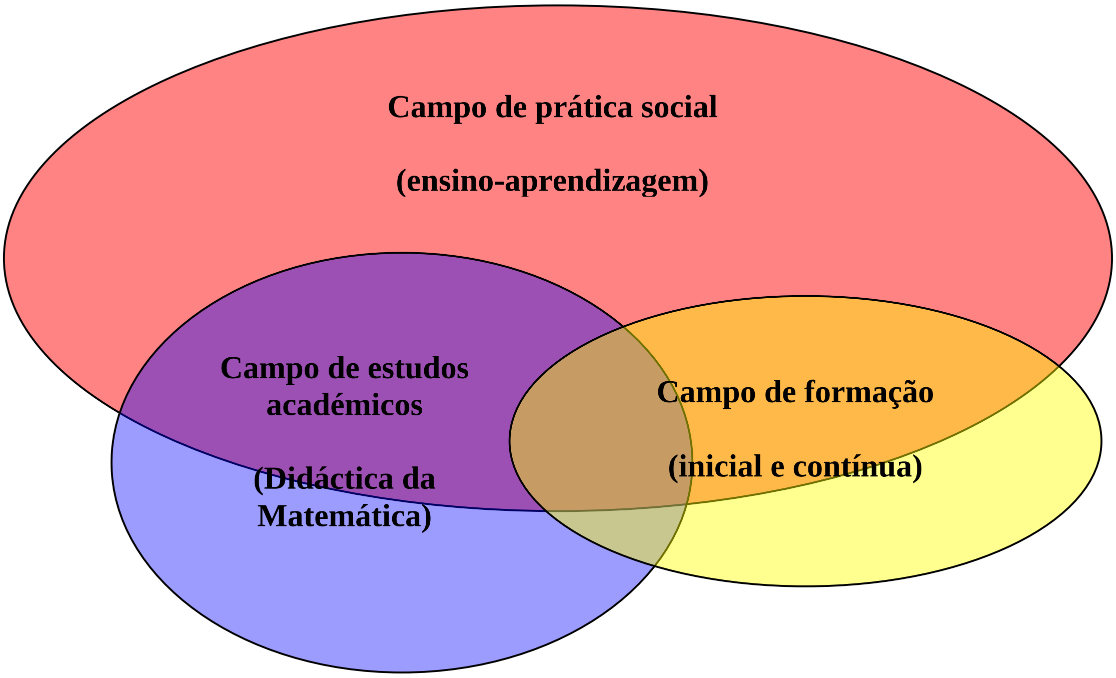


Figura 1 – Campos da educação matemática em Portugal

Dos três campos, o mais antigo é o das práticas sociais de ensino-aprendizagem da Matemática, que existe em Portugal desde há vários séculos. De seguida, com o surgimento de cursos de formação de professores, foi-se constituindo a pouco e pouco, principalmente a partir da década de 1980, a educação matemática como campo de formação. Finalmente, na esteira do anterior, constituiu-se o campo académico da investigação em educação matemática, que procura afirmar-se como um domínio científico de pleno direito, nomeadamente na área da Educação. Por vezes, este campo tende a gerar um discurso autosuficiente, centrado sobre si próprio ou, na melhor das hipóteses, nas suas relações com outras áreas científicas. Ao fazer isso, a educação matemática académica desvirtua-se a si própria e perde relevância social. Contrariando essa tendência, procurarei olhar a educação matemática em Portugal não só como campo de investigação mas também como campo de práticas sociais e como campo de formação.

A educação matemática como campo de práticas sociais e como campo de formação

Como prática social a educação matemática tem lugar, antes mais, nas escolas e nas salas de aula e é protagonizada por professores e alunos. No entanto, a educação matemática – ou, como igualmente se diz, o "ensino da Matemática" – também ocorre em muitos outros locais da escola (salas de estudo, clubes e noutros espaços), bem como fora da escola. Um relevo muito importante assume em Portugal a actividade dos "explicadores", que não são mais do que tutores privados contratados pelos encarregados de educação para dar um apoio directo (individual ou em pequenos grupos) aos seus educandos. Estes explicadores, que hoje em dia trabalham não só individualmente como enquadrados por "empresas de explicações", desenvolvem a sua actividade sobretudo tendo em vista a obtenção de bons resultados por parte dos alunos nos testes escritos e nos exames. Em particular, é de registar a sua influência sobre as concepções dos alunos, nomeadamente, sobre o que significa "aprender Matemática".

A produção de materiais didácticos para o ensino da Matemática, em especial de manuais escolares, representa um outro subcampo importante das práticas sociais da educação matemática/ensino da Matemática em Portugal. Isso acontece em especial pelo grande poder que as editoras assumiram no nosso país na regulamentação do processo de produção de manuais e até na própria dinâmica de mudança curricular. Basta recordar que, por via da legislação negociada com as editoras, o Governo só pode programar mudanças nos programas escolares com larguíssimos meses de antecedência.

Um dado muito importante em Portugal é a existência neste campo de uma Associação de Professores de Matemática (APM) forte e dinâmica. Esta associação promove iniciativas regulares como um encontro anual de professores e encontros regionais em vários pontos do país, dinamiza um centro de formação acreditado e publica uma revista para professores, diversos outros materiais de índole profissional e também a revista de investigação *Quadrante*. Além disso, promove diversos grupos de trabalho sendo os mais activos os de Geometria, do 1.º ciclo, do 3.º ciclo e o de Investigação (GTI) – é precisamente este último grupo que organiza anualmente o SIEM, de que este encontro representa a 19.ª edição.

É importante notar que são vários os discursos que existem sobre a educação matemática como campo de prática social. A educação matemática académica tem um discurso. No entanto, os principais actores deste campo – os professores e os alunos –

têm outro discurso. Além disso, há outros actores sociais (encarregados de educação, autarcas, matemáticos…) que também têm o seu discurso sobre a educação matemática, como de resto se torna bem patente na comunicação social. Estes discursos têm, frequentemente, um sentido conservador, defendendo o regresso a conceitos e práticas do passado. É tarefa dos investigadores em educação matemática compreender a origem de todos estes discursos e descobrir como potenciá-los como factor de transformação positiva do ensino da Matemática.

A formação inicial e contínua de professores constitui um outro campo importante da educação matemática. Nas antigas escolas do magistério primário, onde se formavam professores para os primeiros anos, ocasionalmente existiram professores de Didáctica que davam atenção às questões específicas do ensino-aprendizagem da Matemática, mas sempre de forma esporádica e dispersa. Deste modo, foi já depois do 25 de Abril de 1974 que surgiram, primeiro nas universidades e pouco depois nas escolas superiores de educação, pessoas com a missão de ensinar Didáctica da Matemática aos futuros professores dos diferentes níveis de ensino e, por vezes, acompanhá-los na prática profissional supervisionada. Essas disciplinas têm tido uma variedade de designações, incluindo a de Educação Matemática, e o seu conteúdo varia significativamente de instituição para instituição. É entre os docentes destas instituições de formação de professores que se encontra a grande maioria dos que fazem investigação em educação matemática em Portugal. Muitos deles estão igualmente envolvidos em actividades de formação contínua de professores e não são poucos os que têm ocupado lugar de relevo nas respectivas instituições[2].

A educação matemática como campo académico em Portugal

A educação matemática como campo académico pode ser vista de uma variedade de perspectivas que dão maior ou menor expressão aos seus "produtos" – artigos científicos publicados em revistas e livros, comunicações em encontros e teses académicas (de mestrado e doutoramento) – ou aos seus "processos" de trabalho – actividades dos projectos, vivências dos grupos de investigação, actividades específicas como comunidade de investigação (debates em revistas e encontros), inserção institucional e articulação com os outros campos da educação matemática. Neste artigo,

---

[2] Por exemplo, como presidentes e vice-presidentes de órgãos de direcção de Comissões, Departamentos, Escolas, Institutos e Faculdades.

procuro ter em atenção tanto os produtos como os processos da educação matemática académica.

1. Grupos de investigação. Em Portugal, a educação matemática como campo de investigação é uma realidade extremamente recente. Os seus primeiros passos foram dados nos anos 80, com criação dos primeiros mestrados e grupos de investigação (ver Ponte, 1993). De então para cá, assistiu-se à renovação e consolidação dos grupos e à diversificação de instituições onde se fazem mestrados e doutoramentos em educação matemática.

Tendo por referência o que se tem passado nos últimos dez anos, verificamos que há presentemente quatro grupos principais activos na educação matemática em Portugal, os quais foram responsáveis pela realização de treze projectos de investigação financiados por agências nacionais ou internacionais:

a) Grupo DIFMAT-Didáctica e Formação de Professores de Matemática, coordenado por mim próprio, baseado na FCUL, e reunindo investigadores[3] das Universidades de Évora e Beira Interior e das escolas superiores de educação (ESE) de Lisboa, Setúbal e Bragança (responsável 7 projectos financiados neste período);
b) Um segundo grupo coordenado por José Manuel Matos, baseado na FCT-UNL, e reunindo também investigadores externos, nomeadamente da ESE de Coimbra (3 projectos);
c) Grupo ATMS-Aprendizagem, Tecnologia, Matemática e Sociedade, coordenado por João Filipe Matos, baseado na FCUL, e reunindo investigadores das Universidades do Algarve e da Madeira (2 projectos);
d) Um quarto grupo, coordenado por Isabel Vale e Pedro Palhares, reunindo investigadores da ESE de Viana e das Universidades do Minho, Aveiro e Évora (1 projecto).

Os estudos realizados por estes grupos e também, em alguns casos, por outros investigadores, dizem respeito a uma variedade de temas, incluindo estudos que se debruçam sobre o conhecimento profissional do professor e sobre a sua formação e desenvolvimento profissional, estudos focados na aprendizagem da Matemática pelos alunos, em geral e também de conceitos e temas específicos, e trabalhos de desenvolvimento curricular, avaliação e diagnóstico da situação bem como de natureza histórica. Em vez de seguir a via da enumeração exaustiva – procurando referenciar tudo o que existe, independentemente da sua importância – procuro neste artigo

[3] Seguindo o critério da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia de Portugal, tanto neste grupo como nos seguintes, consideram-se como “investigadores” os investigadores doutorados.

apresentar a minha visão – necessariamente subjectiva – sobre quais são os traços mais marcantes desta investigação e as suas perspectivas futuras.

Num trabalho anterior sobre a investigação em educação matemática em Portugal (Ponte, Matos & Abrantes, 1998), foram considerados os estudos realizados até 1997. O número dos estudos realizados desde então é certamente muito maior. Por isso, em vez de seguir a mesma estratégia, tomo aqui por base os artigos publicados na revista *Quadrante* num período de dez anos – entre 1998 e a actualidade – bem como os artigos publicados no mesmo período em revistas internacionais sujeitas a processos de revisão científica que me foi possível localizar. Ocasionalmente, farei referência a um ou outro trabalho adicional, publicado como relatório de investigação ou em livros de qualidade científica reconhecida. Este procedimento deixa de fora a investigação mais dispersa (como aquela que é relatada em teses académicas e actas de encontros) e também a investigação em estado ainda nascente. Ao mesmo tempo, pretendo sinalizar que é na publicação de artigos nas revistas científicas sujeitas a revisão pelos pares que se encontra o cerne do processo de divulgação e validação dos resultados da investigação e esse é o caminho a seguir pelos investigadores para verem o seu trabalho reconhecido pela comunidade científica.

2. Estudos centrados no professor. O domínio de investigação mais fecundo e onde possivelmente se produziram os trabalhos mais interessantes e originais na educação matemática em Portugal diz respeito ao conhecimento profissional do professor e à sua formação e desenvolvimento profissional. Dos 37 artigos de autores portugueses identificados na *Quadrante*, entre 1998 e 2006, são 21 (57%) os que dizem respeito a este tema.

A investigação sobre o professor de Matemática centrou-se, no seu início, no professor em serviço, procurando identificar e compreender o seu conhecimento profissional. Muito deste trabalho tem por base as ideias de Schön (1983), Elbaz (1983), e Shulman (1986), e desenvolveu-se ao longo dos anos 90. Um artigo que representa muito bem esta perspectiva, valorizando em especial o conhecimento didáctico, ou seja, o conhecimento do professor sobre a sua prática lectiva de ensino da Matemática, é o de Guimarães (1999). Neste estudo, e em muitos outros realizados em Portugal, conceptualiza-se o conhecimento didáctico como algo próximo, mas qualitativamente distinto do *pedagogical content knowledge* de Shulman. Num outro artigo, Santos e Ponte (2002) descrevem o conhecimento de um grupo de professoras do ensino secundário como estreitamente ligado à resolução de problemas de natureza profissional

– sendo alguns desses problemas ligados directamente à Matemática, outros de cunho didáctico e outros remetendo para aspectos de natureza institucional. Nos estudos portugueses o conhecimento didáctico assume um carácter indissociavelmente ligado à prática profissional e daí a recusa em encará-lo como conhecimento declarativo ou formal, como por vezes acontece nas investigações de outros países. Além disso, o conhecimento didáctico é associado ao exercício profissional e não visto como um conhecimento produzido por especialistas exteriores à profissão (sejam eles educadores matemáticos ou não). Daí o nosso interesse em trabalhar em estreita ligação com profissionais experientes. Assume-se que o conhecimento didáctico já existe associado às práticas desses professores, evolui com as condições sociais e as orientações curriculares e pode ser desenvolvido em projectos de colaboração envolvendo investigadores e professores.

O interesse pelo conhecimento profissional levou naturalmente a considerar os processos de formação e desenvolvimento profissional do professor. Por exemplo, Santos (2000) documenta os problemas com que o professor se depara ao procurar introduzir tecnologias de informação em comunicação (TIC) nas suas práticas. A autora concluiu que o professor necessita de mudar a sua perspectiva sobre o seu trabalho, no sentido de ser sobretudo um dinamizador da actividade dos alunos e desenvolver a sua capacidade de lidar com o imprevisto. Noutro estudo, Ribeiro e Ponte (2000) mostram a reduzida eficácia dos modelos usuais de formação, assentes sobretudo numa perspectiva "escolar" de aprendizagem desligada das práticas e do funcionamento da instituição escolar. E, finalmente, Guimarães (2006) discute em profundidade o conceito de desenvolvimento do professor, articulando as suas vertentes pessoal e profissional num todo integrado. Do conjunto destes trabalhos, emerge uma perspectiva segundo a qual o professor é o agente essencial do seu próprio desenvolvimento profissional. No entanto, este desenvolvimento pode ser significativamente facilitado por um contexto institucional escolar onde esta formação é valorizada e onde se materializam oportunidades de formação ajustadas aos seus interesses e necessidades.

Esta concepção do conhecimento profissional – em particular o conhecimento didáctico – como um conhecimento orientado para a prática levou a investigação a dar uma importância cada vez maior às práticas profissionais. Vários estudos realizados neste domínio procuram conhecer como são as práticas profissionais dos professores no nosso país. Por exemplo, Ponte e Santos (1998) analisam as práticas lectivas de professoras de Matemática do 3.º ciclo e do ensino secundário, num contexto de reforma curricular, mostrando que existem professores que se identificam com as novas orientações curriculares (neste caso, dos programas de 1991) mas prosseguem uma prática muito semelhante à anterior. Na mesma linha, Canavarro (2005) analisa as práticas curriculares de uma professora de Matemática de 2.º ciclo, focando tanto o processo de desenvolvimento curricular no seio do seu grupo disciplinar como o respectivo conteúdo. Identifica diversos obstáculos sentidos pelo grupo à concretização da inovação curricular que afirmavam desejar, nomeadamente, em lidar com o conceito de "competência matemática". Noutro estudo, Graça (2003) estuda a relação entre as concepções e as práticas de três professores de Matemática na avaliação da resolução de problemas e sublinha que este processo se reveste de grande complexidade, mesmo para professores com reconhecida experiência. O estudo de diagnóstico da situação portuguesa, *Matemática 2001* (APM, 1998), realizado por iniciativa da Associação de Professores de Matemática e que envolveu uma vasta equipa de professores e investigadores, dá importantes indicações sobre as concepções, as práticas profissionais e as condições de trabalho dos professores. Finalmente, num outro artigo, Ponte e Serrazina (2004) passam em revista e integram o conhecimento resultante de diversos estudos sobre práticas profissionais dos professores de Matemática em Portugal. Os autores concluem que as práticas actuais dos professores são ainda marcadas por um estilo de ensino predominantemente expositivo, baseado na resolução de exercícios e que pouco recorre a materiais para além do quadro, giz e manual escolar. Indicam também que prevalece uma comunicação unidireccional, uma preocupação essencialmente sumativa na avaliação, um estilo de trabalho individualista e uma formação desligada das práticas lectivas. No entanto, referem também que existem sinais de novas práticas, incluindo a diversificação de tarefas, uma comunicação mais partilhada, uma maior saliência dos aspectos formativos da avaliação e um reconhecimento do valor da colaboração profissional.

Alguns estudos realizados com professores assumem um cunho colaborativo, com a intenção de conhecer não só as práticas existentes mas também as actividades e dispositivos que podem contribuir para a sua transformação numa perspectiva curricular inovadora. Assim, Serrazina (1999) mostra como um trabalho continuado de reflexão com professoras do 1.º ciclo, num contexto de reforma curricular, pode levar a uma evolução muito significativa no seu conhecimento matemático e didáctico e nas suas práticas lectivas. O mesmo ressalta de um estudo de Menezes e Ponte (2006), que evidencia as potencialidades formativas de um trabalho colaborativo envolvendo um investigador e vários professores do 1.º ciclo, orientado para promover a reflexão e a investigação dos professores sobre a sua própria prática profissional, com ênfase neste caso no processo de comunicação na sala de aula. Saraiva e Ponte (2003) mostram como o trabalho colaborativo envolvendo um investigador e um pequeno grupo de professores de Matemática do ensino secundário, desenvolvido também num contexto de inovação curricular e valorizando a observação e reflexão sobre as aulas, se constitui num factor de desenvolvimento profissional. E, finalmente, um outro trabalho de índole colaborativa realizado por Boavida (2006) com duas professoras do 3.º ciclo, tendo como foco a argumentação na aula de Matemática, mostra o surgimento de novas perspectivas sobre este processo e sobre o modo de promover as capacidades de argumentação e comunicação dos alunos. Segundo a autora, este trabalho evidencia também o desenvolvimento da capacidade de reflexão crítica das professoras sobre a sua própria prática e o aprofundamento do seu conhecimento teórico, didáctico e de si mesmas.

Dentro das diversas perspectivas curriculares inovadoras, assume particular destaque em Portugal a proposta de tarefas desafiantes, como as investigações e explorações matemáticas. Trata-se de tarefas que propõem a exploração de uma situação onde alguns elementos estão já definidos, mas onde os alunos podem formular as suas próprias questões e seguir as suas estratégias de raciocínio. Os alunos são aqui chamados a formular conjecturas, testá-las e reformulá-las, argumentá-las e mesmo demonstrá-las. Num estudo, Oliveira (1998) mostra como duas professoras valorizam as actividades de investigação pela sua proximidade com a actividade matemática autêntica. No entanto, devido a vários constrangimentos, vêem dificuldade na sua integração curricular e confrontam-se com tensões na sua realização no que se refere ao apoio a conceder ao aluno, ao lugar da justificação e da prova matemáticas e também na condução de discussões na sala de aula. Noutro trabalho, Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998) discutem as implicações da realização de investigações matemáticas no trabalho do professor numa sala de aula, evidenciando como este é muito mais sofisticado que a condução de actividade rotineira (como apresentação de exemplos e a resolução de exercícios) e como envolve tanto aspectos matemáticos relacionados com as tarefas como aspectos didácticos relacionados com o desafio, o apoio e a avaliação do progresso dos alunos. Um balanço aprofundado do trabalho realizado em Portugal neste campo, e da sua relação com o currículo e as práticas profissionais dos professores encontra-se em Ponte (2007).

Também com uma preocupação de renovação das práticas de ensino, mas numa perspectiva um tanto diferente, Ferreira e Rich (2001), com base numa ampla revisão de literatura, indicam possíveis benefícios da integração da História da Matemática no ensino desta disciplina e referem objecções e possíveis barreiras. Discutem também diversas formas de fazer essa integração e apresentam recursos e referências para os professores que pretendem realizar esse trabalho.

Um outro conjunto de estudos diz respeito à formação inicial dos professores e aos primeiros anos de exercício profissional. Alguns desses estudos têm por foco o conhecimento e as dificuldades dos futuros professores. Assim, por exemplo, Gomes e Ralha (2005) focam-se no conhecimento do conceito de ângulo por parte de futuros professores do 1.º ciclo e, perante as dificuldades evidenciadas, questionam o significado que eles construíram desse conceito. Noutro estudo, Sousa e Fernandes (2004), analisam as dificuldades sentidas na sua prática por professores estagiários de Matemática do 3.º ciclo e secundário, sugerindo que estes têm uma imagem negativa relativamente à sua formação académica anterior, que consideram muito teórica, insuficiente e desajustada da realidade. Os artigos de Delgado e Ponte (2004) e Fidalgo e Ponte (2004) analisam a reflexão sobre as práticas de ensino da Matemática de futuras professoras do 1º ciclo do ensino básico, durante a fase de iniciação à prática profissional. Delgado e Ponte (2004) indicam que as experiências anteriores das futuras professoras com a Matemática influenciam o trabalho que realizam com os seus alunos. As dificuldades que revelam em colocar em prática algumas das suas intenções parecem resultar em grande parte do seu fraco conhecimento matemático, como sobressai nas situações imprevistas que surgem na sala de aula e nos momentos de reflexão sobre a prática. Pelo seu lado, Fidalgo e Ponte (2004) mostram dois casos de formandos que propõem aos alunos tarefas matemáticas não rotineiras, desafiantes e orientadas para a exploração e descoberta. No entanto, os futuros professores não mostram concretizar na prática o que mais valorizam em termos das interacções comunicativas e do uso de novas tecnologias e de materiais manipuláveis, sugerindo que, para além da adesão racional a certas orientações, é necessário que estes cursos se preocupem em dotar os futuros professores da capacidade efectiva de as pôr em prática.

Outros estudos exploram formas de melhorar as práticas de formação inicial. Por exemplo, Ponte e Brunheira (2001) analisam o trabalho realizado numa disciplina frequentada por futuros professores do 3.º ciclo e ensino secundário no ano anterior ao estágio pedagógico, que os levam a identificar aspectos da realidade escolar a observar e questionar, recolher dados, apresentar conjecturas e tirar conclusões. Os autores consideram que isto ajuda os formandos a desenvolverem um discurso profissional e a assumirem uma identidade profissional. Consideram ainda que essas experiências pessoais, vividas na escola favorecem a análise por parte dos futuros professores dos fenómenos relacionados com a prática profissional do ensino da Matemática. Por sua vez, Martins (2004) analisa as potencialidades e limitações do uso de portefólios como instrumentos de suporte à reflexão na formação inicial de professores de Matemática, mostrando que o uso deste recurso pode ajudar ao desenvolvimento da capacidade de reflexão e favorecer a comunicação entre o estagiário e o supervisor.

Outros estudos, ainda, analisam a fase inicial de inserção dos novos professores. Por exemplo, Serrazina e Oliveira (2002) analisam o modo como os novos professores do 1.º ciclo vivem os primeiros anos de profissão. Consideram que, dada a grande diversidade social dos alunos, é urgente introduzir na formação inicial a análise e discussão de diferentes casos, bem como aspectos referentes às relações escola/família e salientam a importância de que seja dado um apoio efectivo aos novos professores quando entram no sistema. Por sua vez, Ponte, Guerreiro, Cunha, Duarte, Martinho, Martins, Menezes, Menino, Pinto, Santos, Varandas, Veia e Viseu (2007) indicam que jovens professores, de diversos níveis de ensino, recém diplomados por instituições de formação inicial tendem a ver a comunicação como um suporte de um ambiente geral que pode favorecer a aprendizagem. No entanto, indicam ser poucos aqueles que identificam a comunicação como um objectivo curricular importante da Matemática e que apontam estratégias consistentes para a promover, tanto na sua vertente oral como na sua vertente escrita e ainda menos são os que apontam a comunicação como um processo fundamental para o desenvolvimento de significados matemáticos por parte dos alunos. Num outro artigo com origem no mesmo projecto, Santos et al. (in press) analisam o conhecimento profissional sobre os alunos de jovens professores e indicam que estes tendem a ter elevadas expectativas sobre o desempenho dos seus alunos. No entanto apontam dificuldades de aprendizagem sobretudo em aspectos de natureza transversal, como a linguagem matemática, o raciocínio e a resolução de problemas. Referenciam a diversidade entre os alunos, que tendem a ver como uma dificuldade para o processo de ensino-aprendizagem. Por outro lado, Oliveira (2004) debruça-se sobre os percursos de identidade do professor de Matemática do 3.º ciclo mostrando que este se vai constituindo através de um processo idiossincrático, complexo e multidimensional, no qual a biografia tem um papel importante. Apresenta os casos de duas professoras com a mesma formação inicial, que ambas valorizam, mas acabam por desenvolver identidades profissionais distintas, em consequência dessa formação ser compreendida e vivida de formas diferentes. A autora indica que a formação inicial pode interpelar significativamente alguns jovens, de formas diversas. Mostra, assim, que o contributo da formação inicial, embora importante, acaba por ser relativizado por numerosos outros factores.

É ainda de referir que as possibilidades e implicações das tecnologias de informação e comunicação na formação de professores de Matemática têm sido objecto de atenção, tanto em termos gerais (Ponte, 2000a), como no que se refere à formação inicial (Ponte, Oliveira & Varandas, 2002) e a programas de formação contínua (Ponte & Santos, 2005). Estes estudos sugerem que tais tecnologias têm de facto grandes potencialidades para a formação de professores, mas são recebidas e apropriadas de forma muito diversa pelos formandos, o que torna particularmente importante o papel do formador.

O percurso das ideias e dos estudos realizados em Portugal sobre formação de professores de Matemática é analisado por Ponte (2005b). Vários artigos de revisão sobre o "estado da arte" em *handbooks* e artigos em livros de referência, sobre o conhecimento e práticas profissionais do professor (Ponte & Chapman, 2006), sobre instrumentos e contextos de desenvolvimento profissional (Ponte, Zaslavsky, Silver, Borba, van den Heuvel-Panhuizen, Gal, Fiorentini, Miskulin, Passos, de La Rocque Palis, Huang & Chapman, in press) e sobre a formação inicial dos professores de Matemática (Ponte & Chapman, in press) ilustram, de algum modo, a dimensão internacional alcançada pelo trabalho realizado neste campo no nosso país.

3. Estudos centrados nas aprendizagens dos alunos. O estudo *Matemática 2001* (APM, 1998) incluía uma vertente sobre o rendimento escolar dos alunos, mostrando uma elevada taxa de insucesso no 3.º ciclo, situação que se viria a revelar ainda mais negativa a partir de 2005 quando se começaram a realizar os exames nacionais de Matemática do 9.º ano. Também no estudo internacional PISA (OCDE, 2004), os resultados dos alunos portugueses (média de 466 pontos) se revelaram bastante insatisfatórios, inferiores à média dos países da OCDE (500), e à média de países como a Espanha (485), os EUA (483), ou a Federação Russa (468). As razões que estão na origem destes resultados colocam um sério desafio aos investigadores em educação matemática portugueses.

Nos estudos realizados em Portugal com foco nas aprendizagens dos alunos podemos reconhecer três grandes tendências. Num primeiro grupo temos estudos de inspiração cognitivista, sociocultural ou antropológica. Assim, por exemplo, Carreira (1998) elaborou modelo teórico semiótico, baseado no triângulo semiótico de Peirce, que se mostrou útil na compreensão dos processos de metaforização envolvidos na resolução de problemas aplicados por alunos do 1.º ano do ensino superior. A autora mostra como tais processos de metaforização podem ser vistos como determinantes na produção de significado para modelos e conceitos matemáticos. Núñez, Edwards e Matos (1999) discutem a aprendizagem e a cognição como fenómenos situados e dependentes do contexto na perspectiva da cognição incorporada (*embodied cognition*). Na sua perspectiva, o facto da cognição ser dependente do corpo sugere uma reconceptualização da cognição e da Matemática, tese que ilustram com uma discussão sobre a noção de função contínua. Usando metáforas conceptuais os autores mostram como a cognição incorporada fornece uma base para o carácter situado do conhecimento e é útil na análise das dificuldades conceptuais envolvendo a compreensão da continuidade. Num outro artigo de índole teórica, Matos (2000), discute igualmente uma perspectiva situada da aprendizagem, com base na noção de comunidade de prática, tendo em vista a análise da prática escolar em Matemática. Pelo seu lado, Rodrigues (2000) analisa a importância das interacções sociais na aprendizagem da Matemática por alunos do 2.º ciclo e Fernandes (2000) mostra a importância da apropriação de artefactos na Matemática escolar, nomeadamente para a compreensão matemática de alunos do 3.º ciclo. Centrando a sua atenção no exterior da escola, Moreira (2003) analisa a Matemática na educação familiar em grupos domésticos de baixa escolaridade e conclui que a instituição escolar deverá assumir formas de interacção com os grupos sociais que permitam dialogar sobre novas práticas e mudanças pedagógicas bem como sobre os novos tópicos do conhecimento matemático.

Um segundo grupo de estudos foca-se na aprendizagem da Matemática de temas específicos. Destes, alguns dizem respeito à aprendizagem dos Números. É o caso do estudo de Valério (2005), que mostra que os alunos do 3.º ano de escolaridade utilizam representações próprias, nomeadamente elementos icónicos e esquemas, na resolução de situações problemáticas, indicando igualmente que a construção de representações e a sua formalização com compreensão evidencia as influências do professor, dos restantes alunos e de aprendizagens anteriores. Por outro lado, Monteiro e Pinto (2006) utilizam elementos teóricos e empíricos para analisar a aprendizagem dos números racionais, nomeadamente as dificuldades com que os alunos se deparam na sua compreensão das fracções, os diferentes tipos de unidades, e a sua passagem de estratégias informais para estratégias formais na resolução de problemas.

Ainda centrado na aprendizagem da Matemática de conceitos específicos, encontramos também diversos trabalhos dedicados às Probabilidades e à Estatística. É o caso do artigo de Brocardo e Mendes (2000) que analisa os processos usados por um aluno de 7.° ano na resolução de tarefas estatísticas. As autoras concluem que várias das estratégias do aluno correspondem ao uso de um conjunto de procedimentos que prevalecem após o trabalho em torno do tema Estatística. Identificam, ainda, a tendência para compreender instrumentalmente vários conceitos estatísticos e a dificuldade em analisar, interpretar e comunicar informação. Pelo seu lado, Fernandes (2001) estuda as intuições probabilísticas em alunos dos 8.º e 11.º anos. Os resultados revelaram que os alunos de ambos os anos possuem intuições correctas na classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis. Além disso, possuem intuições mais limitadas e primitivas sobre probabilidades em experiências compostas do que em experiências simples. Os alunos do 8.º ano indicaram as suas respostas com maior confiança do que os do 11.º ano. Os alunos de ambos os anos depositaram maior confiança nas respostas correctas do que nas erradas e a confiança nas respostas correctas é maior nos alunos com melhor desempenho em Matemática. Finalmente, Carvalho e Fernandes (2005), tendo por base uma revisão das teorias psicológicas, analisam o modo como o conceito de probabilidade evolui nos alunos, procurando retirar daí implicações para a sala de aula.

Mais recentemente, começaram a surgir estudos centrados na aprendizagem da Álgebra que mostram como uma abordagem exploratória, incluindo tarefas que promovem o estudo de padrões e regularidades numéricas ou pictóricas, pode constituir uma via importante para o desenvolvimento do pensamento proporcional e a compreensão da noção de variável e da linguagem algébrica por parte dos alunos (Branco & Ponte, in press; Matos & Ponte, in press; Silvestre & Ponte, in press). Outros estudos ilustram a grande evolução tem existido no ensino deste tópico no último século (Ponte, 2004b).

Num terceiro grupo, temos diversos estudos que se preocupam sobretudo com a aprendizagem quando o ensino é realizado numa perspectiva inovadora. Por exemplo, Segurado e Ponte (1998) apresentam o caso de um aluno do 6.º ano cujas concepções sobre a Matemática e cujos modos de trabalho são fortemente influenciados pelas suas experiências de trabalho investigativo. Rocha e Ponte (2006) apresentam os casos de dois alunos do 3.º ciclo que também mostram um envolvimento muito significativo em tarefas de investigação realizadas na sala de aula, com reflexos positivos na sua aprendizagem e na sua visão da Matemática. Noutro estudo, Jesus e Serrazina (2005) analisam o modo como actividades de natureza investigativa podem ser inseridas nas práticas escolares nos primeiros anos de escolaridade, promovendo o desenvolvimento nos alunos de capacidades como o raciocínio e a comunicação, e permitindo-lhes aprofundar conhecimentos anteriormente estudados e apropriarem-se de novos conceitos. Pereira e Saraiva (2005), pelo seu lado, mostram como estas tarefas de investigação podem desempenhar um papel importante no ensino secundário, no ensino-aprendizagem das sucessões, promovendo nos alunos a compreensão que existem diversas estratégias para resolver uma dada questão e levando-os a estabelecerem conexões matemáticas.

Félix (2005) estuda o papel da expressão plástica na aprendizagem da Matemática de alunos do 1.º ano, evidenciando a diversidade de conceitos matemáticos identificados pelos próprios alunos, sendo as figuras geométricas e as linhas rectas e curvas elementos predominantes nas suas composições. César (2000) descreve os resultados de um projecto, concretizado do 5.º ao 12.º ano, cujo objectivo era promover as interacções entre pares na sala de aula de Matemática para desenvolver a autoestima dos alunos, promover uma atitude mais positiva face à Matemática, facilitar o seu desenvolvimento sociocognitivo e atingir sucesso escolar nesta disciplina. Os resultados mostram que é possível concretizar esta abordagem na sala de aula desde que se efectuem diversas mudanças no contrato didáctico. Numa investigação realizada nesta perspectiva, Carvalho e César (2001) analisam o modo como os alunos resolvem problemas envolvendo os conceitos de média e mediana. A análise das respostas de 136 díades a uma tarefa de Estatística revela que a maioria dos alunos não apresenta dificuldades no cálculo da média e da mediana. Contudo, uma análise de tipo qualitativo mostra que os argumentos que os alunos utilizam situam-se em níveis diferentes de compreensão destes dois conceitos, estando a média mais frequentemente associada a um conhecimento relacional do que a mediana. Pelo seu lado, Rocha (2003) analisa a utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. Os resultados sugerem que os alunos possuem um conhecimento superficial sobre a calculadora que, de resto, não valorizam. Usam-na essencialmente para traçar gráficos e resolver equações e inequações, com reduzido aproveitamento das potencialidades da tecnologia. A sua grande dificuldade é a interpretação da informação veiculada pela máquina.

4. Outros estudos. Alguns estudos e trabalhos não se enquadram facilmente nas categorias anteriores, mas merecem aqui referência. Alguns deles constituem reflexões teóricas no campo do desenvolvimento curricular, como Guimarães (2005) que passa em revista alguns dos marcos que, na sua perspectiva, a orientação curricular da resolução de problemas percorreu em Portugal, Matos (2005) que discute os pressupostos do currículo de Matemática numa perspectiva crítica, e Serrazina e Oliveira (2005) que analisam diversas perspectivas sobre a literacia matemática e discutem a sua relação com a noção de competência matemática. Mais focados sobre o papel do professor no desenvolvimento curricular, são igualmente de referir os artigos de Canavarro e Ponte (2005) e Ponte (2005c). Ainda sobre desenvolvimento curricular, outros artigos compararam currículos de vários países, como Ponte e Fonseca (2001) no que se refere ao ensino da Estatística, concluindo que o programa português é dos mais fracos neste domínio, e Ponte, Boavida, Canavarro, Guimarães, Oliveira, Guimarães, Brocardo, Santos, Serrazina e Saraiva (2006), que analisam os programas de Matemática de diversos países europeus, terminando com um conjunto de recomendações para a mudança curricular em Portugal. Evocando o trabalho de Paulo Abrantes, Carreira (2005) analisa o papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar, em relação com o ambiente de trabalho na sala de aula e os processos de aprendizagem. Outros estudos debruçam-se sobre a avaliação das aprendizagens dos alunos, como é o caso dos trabalhos de Santos (2003, 2005), que analisam como a avaliação surge em diversos documentos orientadores em Portugal e nas práticas profissionais. Esta análise evidencia diferentes conceitos de avaliação, acompanhando as grandes tendências nesta área, muito embora a evolução das suas formas e dos instrumentos seja marcada pela diversidade. Finalmente, é ainda de referir que recentemente tem vindo a assistir-se a um interesse crescente pelos estudos sobre a história do ensino da Matemática, que se espera que assuma expressão visível muito em breve em nas revistas científicas de educação matemática.

Balanço e perspectivas

Não se deve perder de vista que a educação matemática em Portugal constitui uma pequena comunidade de investigação, com cerca de 30 investigadores doutorados e outros tantos doutorandos que se organiza sobretudo em torno de três elementos: os grupos de investigação indicados no início deste artigo, a revista de investigação *Quadrante* e os encontros anuais de investigação SIEM e EIEM. Dos grupos investigação já falei no início deste artigo e da *Quadrante* vieram a maior parte das referências feitas na secção anterior. Resta assim falar dos encontros e dos grupos que os organizam.

O GTI inclui professores e investigadores interessados na relação entre a investigação e a prática. Esta organização tem um grupo de estudos envolvendo professores e investigadores, que deu origem a dois livros (GTI, 2002, 2005) e está presentemente a ultimar o terceiro (GTI, in press). É o GTI que organiza o SIEM (no Outono), com cerca de 100-150 participantes. Trata-se de um encontro com carácter generalista, habitualmente com um ou mais conferencistas internacionais. Por sua vez, a Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação tem uma secção de Educação Matemática (SEM-SPCE) e organiza um encontro anual temático (na Primavera), usualmente com cerca de 100-120 participantes. Temas recentes incluem: Avaliação em Matemática (2007); Currículo e Desenvolvimento Curricular em Matemática (2006); Números e Álgebra no Currículo Escolar (2005); História do Ensino da Matemática (2004); A Formação Matemática do Professor (2003).[4] Este grupo convidou a APM e a SPM (a Sociedade Portuguesa de Matemática) para produzir um estudo conjunto sobre a formação matemática do professor, cuja versão final viria a ser apenas subscrita pela SEM-SPCE e APM (Albuquerque, Veloso, Rocha, Santos, Serrazina & Nápoles, 2006). Existe também uma Rede Intercentros de Didáctica da Matemática com cerca de 40 investigadores e doutorandos de todo o país e que realiza encontros informais para discutir investigações em curso.

Procurando caracterizar a investigação em educação matemática em Portugal, podemos dizer que ela se distingue sobretudo por três ideias fortes, a primeira das quais diz respeito à perspectiva curricular, a segunda ao foco ou objecto de estudo e a última aos aspectos teóricos e às metodologias de investigação.

1. *Assumir uma perspectiva curricular inovadora.* Desde o seu início que a educação matemática em Portugal colocou no primeiro plano as questões de ordem curricular. O nascimento da investigação em educação matemática em Portugal (em

---

[4] Oradores convidados para este encontro incluem: Kenneth Ruthven, Martin Socas, Christine Keitel, Candia Morgan, Teresa Assude, José Carrillo, Abraham Arcavi, Bernardo Gómez, Gerd Schubring, Pablo Flores, Ole Skovsmose, John Olive, Mike Askew, Jeremy Kilpatrick, Koeno Gravemeijer, Joaquin Giménez, Collete Laborde, Mariolina Bartolini Bussi, Konrad Krainer, Frank Lester e Margaret Brown.

simultâneo com a criação da APM e o desenvolvimento do movimento profissional dos professores) incluiu a crítica aos programas e práticas de ensino herdados do passado, na nossa peculiar combinação de Matemática moderna e Matemática tradicional, e na afirmação de uma perspectiva curricular inovadora, fortemente inspirada nas propostas do NCTM (1980, 1989), na perspectiva da resolução de problemas de Pólya (1945), na ideia de "experiência matemática" de Davis e Hersh (1980/1995) e na aprendizagem realística de Freudenthal (1973), e vigorosamente sintetizada no documento APM (1988). Ideias como o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, o uso da Matemática em situações contextualizadas, a valorização do espírito crítico e da autonomia dos alunos têm estado sempre presentes no trabalho realizado no nosso país levando a enfatizar tarefas como as actividades de investigação e exploração, o uso da tecnologia, o trabalho de grupo, a comunicação escrita e a discussão colectiva na sala de aula.

2. *Prioridade a temas de grande relevância prática mas também de grande alcance social, profissional e político*. Os estudos sobre o professor, envolvendo aspectos como o conhecimento profissional, a formação, o desenvolvimento e a identidade profissional do professor de Matemática ajudaram a perspectivar de uma forma muito clara a complexidade do seu papel profissional e dos seus processos de formação. Na educação matemática portuguesa o professor é visto como um actor educativo autónomo com um conhecimento e uma identidade próprias, com o qual há que trabalhar e aprender. Muito do que já se sabe neste domínio tem sido reintroduzido com êxito na formação inicial e contínua dos professores. Os estudos sobre a aprendizagem dos alunos em domínios específicos, com ênfase para os Números, a Estatística e as Probabilidades e, mais recentemente, a Álgebra, deram já origem à produção de importantes materiais para o professor (sobretudo no caso dos Números) e permitiram a incorporação de muitas ideias importantes no novo *Programa de Matemática* de 2007 (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Martins, Menezes, Oliveira & Sousa, 2007) e nas práticas de formação inicial (Ponte, Guerreiro et al., 2007) e contínua (Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha, Portela, & Saramago, 2005).

3. *Atenção aos aspectos teóricos e metodológicos*. A investigação em educação matemática em Portugal tem por base sobretudo a tradição de investigação anglo-saxónica, em que se formaram a maior parte dos seus elementos fundadores. Esta tradição de investigação assume a importância da conceptualização teórica dos estudos

e da atenção aos aspectos metodológicos, procurando equilibrar rigor e relevância (Guimarães, 2000; Ponte, 2000b). Partindo de uma forte crítica ao positivismo, assumido ou encapotado, esta investigação tem-se desenvolvido sobretudo através de metodologias qualitativas, numa vertente interpretativa, usando *designs* de investigação variados como os estudos de caso (Matos & Carreira, 1994; Ponte, 2006), os estudos colaborativos, as experiências de ensino e de formação e as investigações dos actores educativos sobre a própria prática profissional (Ponte, 2002, 2004a, 2005a; Ponte & Serrazina, 2003).

As características marcantes da investigação em educação matemática como campo académico têm muito a ver com a sua relação com os campos das práticas sociais (em especial na sua vertente profissional) e da formação de professores. Na verdade, o desenvolvimento da educação matemática como campo académico em Portugal esteve muito dependente da constituição da educação matemática como campo de formação. Foi a partir da constituição deste último, na década de 80, com a estabilização do corpo docente nas universidades (que fazem formação de professores de Matemática para o 3. º ciclo e ensino secundário) e a criação das escolas superiores de educação (responsáveis pela formação de professores de Matemática para os 1. º e 2.º ciclos do ensino básico), e com a criação do primeiro mestrado em educação na FCUL, em 1985, que se criaram os primeiros grupos de investigação. Ainda hoje, os investigadores são igualmente formadores de professores ou mesmo professores. Não existe em Portugal, presentemente, o perfil de investigador *full-time* no campo da educação matemática (a não ser um ou outro raro bolseiro de doutoramento) e isso marca de forma muito forte toda a investigação que se faz no nosso país.

É também importante referir que a maior parte (para não dizer a totalidade) dos investigadores em educação matemática portugueses começaram por ser professores no ensino básico e secundário, alguns por um período de tempo considerável. Isso explica, pelo menos em parte, a grande simbiose que existe entre investigadores e professores, e que se traduz pela forte presença de professores nos encontros de investigação e pela existência de frequentes projectos colaborativos envolvendo investigadores e professores. Esta proximidade ajudou certamente a investigação em educação matemática portuguesa a perspectivar o estudo do conhecimento profissional do professor a partir das práticas profissionais e não a partir de teorias externas, que (inevitavelmente) se revelam desadequadas das situações de prática.

Os investigadores em educação matemática portugueses têm tido, igualmente, uma interacção muito intensa com outras áreas científicas dentro da Educação/Ciências da Educação, chegando a ocupar lugares de responsabilidade na respectiva sociedade científica.[5] Deste modo, o trabalho realizado na educação matemática em Portugal é amplamente reconhecido pela comunidade mais alargada de investigação em educação. Além disso, os investigadores portugueses têm sabido criar oportunidades de interacção e colaboração com as autoridades educativas. Alguns deles desempenharam mesmo cargos de grande responsabilidade política.[6] Outros têm desenvolvido estudos e projectos em alguns casos de grande alcance para o ensino da Matemática, de que merece particular referência a elaboração de um novo programa de Matemática para o ensino básico (Ponte, Serrazina et al., 2007) bem como a concepção e condução de um programa nacional de formação contínua de professores dos 1.º e 2.º ciclos no campo da Matemática (Serrazina, 2005; Serrazina et al., 2005).

Este quadro de realizações e sucessos não significa que não existam diversos problemas na educação matemática em Portugal, tanto de ordem externa como de ordem interna. O principal problema de ordem externa é a oposição do movimento do tipo *back to basics*, que pretende voltar atrás no ensino da Matemática, defendendo abertamente a aprendizagem por memorização e sem compreensão e colocando a ênfase no treino de algoritmos e de técnicas repetitivas. Este movimento, que tem conseguido ter eco na comunicação social e influencia alguns meios intelectuais e políticos, elegeu os investigadores em educação matemática como o seu principal alvo, afirmando que os problemas nas aprendizagens dos alunos resultam sobretudo das teorias “românticas” e desajustadas que os investigadores/formadores transmitem aos professores tanto na formação inicial, como na contínua. Entre os problemas de ordem interna é de referir alguma fragilidade organizativa da comunidade de investigação. Tendo duas organizações que promovem encontros e outras iniciativas, o GTI da APM e a SEM da SPCE, e ainda uma Rede Intercentros, a verdade é que nenhuma destas organizações é verdadeiramente representativa da comunidade de investigação da educação matemática portuguesa, que acaba assim por ter algum défice organizativo.

[5] João Pedro da Ponte, na Direcção, José Manuel Matos na Mesa da Assembleia Geral.
[6] Domingos Fernandes foi Secretário de Estado da Educação, Paulo Abrantes foi Director-Geral da Educação Básica, Joana Brocardo é actualmente Subdirectora-Geral da Educação Básica.

Enfim, mais do que enumerar problemas, importa aqui apontar algumas perspectivas fundamentais no caminho da investigação em educação matemática em Portugal. É com isso que termino este artigo.

1. *Renovação*, que passa pela formação de novos investigadores e possivelmente pela promoção de um novo perfil de investigador, o professor-investigador. Perante a rigidez dos quadros das instituições de ensino superior, poderá estar aqui um importante campo de desenvolvimento de uma nova geração de investigadores da educação matemática portuguesa.

2. *Internacionalização*, que passa pelo estímulo não só à participação em encontros, mas também ao estabelecimento de redes e à participação em projectos comuns com investigadores de outros países trabalhando em áreas afins. Têm existido colaborações importantes de investigadores portugueses com investigadores brasileiros, americanos, canadianos e de vários outros países europeus. Em particular, existe já alguma tradição de colaboração entre grupos portugueses e espanhóis (particularmente das Universidades de Lisboa e Granada, Lisboa e Barcelona e também Nova de Lisboa e Salamanca) que seria desejável ver aprofundada.

3. *Valorização da revista Quadrante e dos encontros científicos*. A investigação em educação matemática em Portugal necessita, a meu ver, de reforçar as suas práticas de debate científico. Nos encontros de investigação, é talvez a altura de pôr em prática critérios de selecção mais exigentes relativamente às comunicações (distinguindo, por exemplo entre comunicações e *posters*). Por outro lado, a revista de investigação *Quadrante* deveria ter muito mais visibilidade, quer internamente, quer entre os investigadores internacionais de língua portuguesa e castelhana.

4. *Melhor organização*, com a constituição de uma organização verdadeiramente representativa dos investigadores portugueses, capaz de assumir publicamente a defesa da comunidade e de aprofundar o diálogo com os diversos actores sociais e institucionais interessados no ensino da Matemática, mantendo, naturalmente, uma relação privilegiada com os professores desta disciplina.

A investigação em educação matemática em Portugal, em pouco mais de vinte anos, fez certamente um percurso notável. Começando praticamente do zero, foi capaz de transformar conhecimento produzido internacionalmente em conhecimento útil para o nosso país e de produzir novo conhecimento de grande relevância tendo em vista as nossas realidades e problemas. Assume-se como uma força social com efectivo poder transformador. No entanto, embora as realizações sejam já muito importantes, a verdade é que há ainda muito por fazer. Desafio que, com toda a certeza, honraremos com a nossa determinação de sempre.

Agradecimento

Agradeço os comentários e sugestões feitos por diversos colegas, nomeadamente Ana Matos, Ana Paula Canavarro, Cláudia Nunes, Leonor Santos, Márcia Cyrino e Neusa Branco.

Referências

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Boavida, A. (2006). Colaborando a propósito da argumentação na aula de Matemática. *Quadrante, 15*(1-2), 65-94.

Branco, N., & Ponte, J. P. (In press). Das regularidades às equações: Uma proposta pedagógica para a aprendizagem da Álgebra. *Teoria e Prática da Educação*.

Brocardo, J., & Mendes, F. (2002). Processos usados na resolução de tarefas estatísticas. *Quadrante, 10*(1), 33-58.

Canavarro, A. P. (2005). O currículo do ensino básico em Matemática em Portugal: Caminhos e encruzilhadas. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 43-68). Lisboa: APM.

Canavarro, A. P., & Ponte, J. P. (2005). O papel do professor no currículo de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 63-89). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1998). Do triângulo ao trapézio semiótico: Uma análise do pensamento metafórico em problemas de aplicação da matemática. *Quadrante, 7*(1), 44-54.

Carreira, S. (2005). Ecos de Amsterdão: O ambiente de aprendizagem e o potencial da relação entre a Matemática e as situações do mundo real. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 121-138). Lisboa: APM.

Carvalho, C., & César, M. (2001). Interacções entre pares e Estatística: Contributos para o estudo do conhecimento instrumental e relacional. *Quadrante, 10*(1), 3-32.

Carvalho, C., & Fernandes, J. A. (2005). Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da psicologia. *Quadrante, 14*(2), 71-88.

César, M. (2000). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 5-46). Lisboa: SEM-SPCE.

Davis, P., & Hersh, R. (1980/1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Delgado, C., & Ponte, J. P. (2004). A reflexão sobre as práticas de ensino da Matemática de três futuras professoras do 1º ciclo do ensino básico. *Quadrante, 13*(1), 31-61.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London: Croom Helm.

Félix, S. (2005). A Matemática na expressão plástica. *Quadrante, 14*(1), 67-88.

Fernandes, E. (2000). Fazer Matemática compreendendo e compreender Matemática fazendo: A apropriação de artefactos na Matemática escolar. *Quadrante, 9*(1), 59-86.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante, 10*(2), 3-32.

Ferreira, R. A. T., & Rich, B. S. (2001). Integrating history of mathematics into the mathematics classroom *Quadrante, 10*(2), 67-96.

Fidalgo, A., & Ponte, J. P. (2004). Concepções, práticas e reflexão de futuros professores do 1º ciclo do ensino básico sobre o ensino da Matemática. *Quadrante, 13*(1), 5-29.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrech: Reidel.

Gomes, A., & Ralha, E. (2005). O conceito de ângulo: Experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. *Quadrante, 14*(1), 109-132.

Graça, M. (2003). Avaliação da resolução de problemas: Que relação entre as concepções e as práticas lectivas dos professores? *Quadrante, 12*(1), 53-73.

GTI (Ed.). (2002). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM.

GTI (Ed.). (2005). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM.

Guimarães, F. (1999). O conteúdo do conhecimento profissional de duas professoras de Matemática. *Quadrante, 8*(1-2), 5-32.

Guimarães, F. (2006). Como se pensa hoje o desenvolvimento do professor? *Quadrante, 15*(1-2), 169-193.

Guimarães, H. M. (2000). Investigação em educação matemática: O que é, e que critérios para a sua apreciação. In J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 275-279). Lisboa: SEM-SPCE.

Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática: Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 275-279). Lisboa: APM.

Jesus, A. M., & Serrazina, L. (2005). Actividades de natureza investigativa nos primeiros anos de escolaridade. *Quadrante, 14*(1), 3-35.

Matos, A., & Ponte, J. P. (in press). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.º ano. *RELIME*.

Matos, J. F. (2000). Aprendizagem e prática social: Contributos para a construção de ferramentas de análise da aprendizagem Matemática escolar. In J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 65-94). Lisboa: SEM-SPCE.

Matos, J. F. (2005). Matemática, educação e desenvolvimento social: Questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em Matemática. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 69-81). Lisboa: APM.

Matos, J. F., & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante, 3*(1), 19-53.

Martins, C. (2004). O uso de *portfolios* na formação inicial de professores de Matemática. *Quadrante, 13*(1), 63-89.

Menezes, L., & Ponte, J. P. (2006). Da reflexão à investigação: Percursos de desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo na área de Matemática. *Quadrante, 15*(1-2), 3-32.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2006). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-108.

Moreira, D. (2003). A Matemática na educação familiar: Memórias escolares, ideias sobre a Matemática e relação educativa em grupos domésticos de baixa escolaridade. *Quadrante, 12*(2), 3-24.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: NCTM.

Núñez, R., Edwards, L. D., & Matos, J. F. (1999). Embodied cognition as a grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3).

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. Paris: OCDE.

Oliveira, H. (1998). Vivências de duas professoras com as actividades de investigação. *Quadrante, 7*(2), 71-98.

Oliveira, H. (2004). Percursos de identidade do professor de Matemática: O contributo da formação inicial. *Quadrante, 13*(1), 115-145.

Pereira, M., & Saraiva, M. J. (2005). A integração de tarefas de investigação no ensino e na aprendizagem das sucessões. *Quadrante, 14*(2), 43-69.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (1993). A educação matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. *Quadrante, 2*(2), 95-126.

Ponte, J. P. (2000a). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: Que desafios? *Revista Ibero-Americana de Educación, 24*, 63-90.

Ponte, J. P. (2000b). A investigação em Didáctica da Matemática pode ser (mais) relevante? In J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 327-336). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2004a). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. *Educar em Revista*, *24*, 37-66.

Ponte, J. P. (2004b). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *4*(8), 149-170.

Ponte, J. P. (2005a). O interaccionismo simbólico e a pesquisa sobre a nossa própria prática. *Revista Pesquisa Qualitativa, 1*, 107-134.

Ponte, J. P. (2005b). A formação do professor de Matemática: Passado, presente e futuro. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 267-284). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005c). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *BOLEMA, 25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*(5-6), 419-430.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Canavarro, A. P., Guimarães, F., Oliveira, H., Guimarães, H. M., Brocardo, J., Santos, L., Serrazina, L., & Saraiva, M. (2006). *Programas de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico: Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal*. Lisboa: Centro de Investigação em Educação.

Ponte, J. P., & Brunheira, L. (2001). Analysing practice in preservice mathematics teacher education. *Mathematics Teacher Education and Development, 3*, 16-27.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (in press). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). Mahwah; NJ: Lawrence Erlbaum.

Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da Estatística: Análise comparativa de três países. *Quadrante, 10*(1), 93-132.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, L. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20*(2), 39-74.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante, 7*(2), 41-70.

Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (2002). Development of pre-service mathematics teachers' professional knowledge and identity working with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 93-115.

Ponte, J. P., & Santos, L. (2005). A distance in-service teacher education setting focused on mathematics investigations: The role of reflection and collaboration. *Interactive Educational Multimedia, 11, 1-22*. (retirado de http://www.ub.es/multimedia/iem/ em 21.Fev.2006)

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-33.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2003). Professores e formadores investigam a sua própria prática. *Zetetiké*, *11*(20), 51-84.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). As práticas dos professores de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática, 80,* 8-12.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Martins, M. E. G., Menezes, L., Oliveira, P., Sousa, H. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. (Retirado da Internet).

Ponte, J. P., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M. C., van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., Fiorentini, D., Miskulin, R., Passos, C., de La Rocque Palis, G., Huang, R., Chapman, O. (in press). Tools and settings supporting mathematics teachers' learning in and from practice. In D. Ball & R. Even (Eds.), *ICMI 15 STUDY, STRAND II, Chapter 3*.

Ribeiro, M. J. B., & Ponte, J. P. (2000). A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de Matemática. *Quadrante, 9*(2), 3-26.

Rocha, A., & Ponte, J. P. (2006). Aprender Matemática investigando. *Zetetiké, 14*(26), 29-54.

Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante, 11*(2), 3-28.

Rodrigues, M. (2000). Interacções sociais na aprendizagem da Matemática. *Quadrante, 9*(1), 3-48.

Santos, E. (2000). O computador e o professor: Um contributo para o conhecimento das culturas profissionais dos professores. *Quadrante, 9*(2), 55-81.

Santos, L. (2003). A avaliação em documentos orientadores para o ensino da Matemática: Uma análise sucinta *Quadrante*, *12*(1), 7-20.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Santos, L., Moreira, D., Menezes, L., Oliveira, I., Ponte, J. P. d., Martins, C., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Pinto, H., Menino, H., Varandas, J. M., Veia, L., Viseu, F. (in press). Conhecimento profissional do jovem professor de Matemática sobre os alunos. *Revista de Educação*.

Santos, L., & Ponte, J. P. (2002). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante, 11*(2), 29-54.

Saraiva, M., & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante, 12*(2), 25-52.

Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, *7*(2), 5-40.

Serrazina, M. L. (1999). Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em Matemática num contexto de reforma curricular no 1º ciclo. *Quadrante, 8*(1-2), 139-168.

Serrazina, L. (2005). A formação para o ensino da Matemática nos primeiros anos: Que perspectivas? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 305-324). Lisboa: APM.

Serrazina, M. L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Saramago, M. J. (2005). *Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo*. Documento não publicado.

Serrazina, M. L., & Oliveira, I. (2002). Novos professores: Primeiros anos de profissão. *Quadrante, 11*(2), 55-73.

Serrazina, M. L., & Oliveira, I. (2005). O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 35-62). Lisboa: APM.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (in press). Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. *Educação e Cultura Contemporânea, 5*(9).

Sousa, M. V., & Fernandes, J. A. (2004). Dificuldades de professores estagiários de Matemática e sua relação com a formação inicial. *Quadrante, 13*(1), 91-144.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ano. *Quadrante, 14*(1), 37-66.

Seminario de investigación en evaluación del contenido matemático

FRANCISCO GIL (COORDINADOR)

(fgil@ual.es)
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Almería

Los objetivos del seminario son:

a) presentar las perspectivas hacia las que se encamina la evaluación y las investigaciones sobre evaluación,

b) abrir nuevas líneas de investigación.

A través de estos objetivos se pretende mostrar el estado de los estudios internacionales de evaluación, de las investigaciones sobre evaluación, de los nuevos planteamientos que se están desarrollando y abrir líneas de investigación. Esto nos proponemos alcanzarlo a través de tres ponencias y su posterior debate.

A continuación voy a realizar una breve introducción de los trabajos que se van a presentar en el seminario. Estos comentarios finalizan con algunas cuestiones sobre los trabajos, el ánimo con el que se plantean es el de favorecer la reflexión y el debate y, si es posible, que surjan nuevos problemas de investigación.

Una concepción, ya clásica, de la evaluación la define como “la consideración comprensiva del funcionamiento de un grupo o individuo en matemáticas o en alguna de sus aplicaciones” (Webb, 1992). Progresivamente se está extendiendo la idea de que para poder comprender el grado de aprendizaje de un individuo o grupo hemos de disponer de unos parámetros con los que compararlo, estos referentes pueden expresarse en forma de competencias o de etapas que nos marquen su nivel de progreso.

Así, estamos viviendo en Europa un proceso de convergencia en el campo educativo que, partiendo de este planteamiento, se está centrando en definir competencias para determinar el grado de preparación de estudiantes, en los niveles educativos obligatorios, o de profesionales, en el caso de las titulaciones universitarias.

Esta es la orientación del trabajo sobre la evaluación en matemáticas del proyecto PISA que nos presenta el profesor Rico.

El disponer de estos indicadores puede ser muy útil para comparar la efectividad de distintos sistemas educativos y, en el contexto de aula, para que el profesor disponga de unos referentes que le permitan situar el desarrollo de sus alumnos. Pero quiero alertar sobre los peligros que puede acarrear la generalización de estos planteamientos ya que podría suponer la vuelta a concepciones normativas de la evaluación y el abandono de planteamientos como el de evaluación individualizada, comprensiva ... que son una aportación actual de la evaluación educativa, y que aún no han terminado de arraigar en nuestro sistema educativo.

Un modelo de evaluación formativa debe apoyarse en un proceso de regulación. Así, la evaluación de la planificación de la enseñanza-aprendizaje debe cumplir una misión de ajuste a las necesidades de los estudiantes, y debe posibilitar definir el grado en que se han conseguido las propuestas de la planificación y qué medidas hay que adoptar para el futuro. Esta función reguladora de la evaluación se refiere los mecanismos por los cuales se trata de que los alumnos den sentido a anticipar y planificar lo que se va a hacer en una secuencia de actividades.

En este planteamiento, que es importante en general, se hace especialmente relevante cuando se trata de evaluar el aprendizaje de estudiantes con déficit. Este es el caso de la investigación que nos presenta el profesor Giménez y sus colaboradores, en el que se estudia un modelo de evaluación reguladora en alumnos con dificultades auditivas.

En este trabajo se conjuga el enfoque regulador de la evaluación con un apoyo telemático en el aprendizaje de conceptos geométricos. Sería interesante profundizar en estos trabajos para determinar si las mejoras apreciables son extensibles a otros campos matemáticos, a alumnos con otros de tipos déficit, y en qué medida son favorecidas por los planteamientos de evaluación, por las innovaciones informáticas o por la conjunción de ambos. Y me cuestiono, en niños sin deficiencias ¿estos planteamientos también producirían mejoras?

Finalmente, y para hacernos una idea más real de lo que está aconteciendo en los sistemas educativos de los países de nuestro entorno, la profesora Santos nos va a presentar un bosquejo de la situación de la evaluación en matemáticas en Portugal.

Comenzará con un resumen del tratamiento que recibe la evaluación en los documentos curriculares portugueses y de los resultados que obtienen los alumnos en diversas pruebas. Después nos presenta diversas experiencias innovadoras y de investigación que sobre evaluación en matemáticas se han realizado en los últimos años en Portugal.

De la comparación de la situación española con la portuguesa podemos concluir que no hay grandes diferencias, pues las propuestas más innovadoras que los documentos curriculares de los últimos tiempos han intentado introducir han tenido poco calado dentro del sistema educativo. La evaluación sigue siendo la asignatura pendiente de nuestros sistemas educativos. ¿El gobierno portugués tiene algún plan para afrontar esta situación?

Para poder contextualizar mejor los trabajos de investigación que nos referencia y captar el nivel de desarrollo de la investigación en evaluación en Portugal, sería útil conocer el calado de las “tese de mestrado”.

En este seminario hemos pretendido aproximarnos a la situación actual del campo de investigación de la evaluación en matemáticas. Nos gustaría pensar que pudiera servir para promover nuevos planteamientos y abrir nuevas líneas de trabajo. Nuestro agradecimiento a todos los autores que han colaborado con sus trabajos a la realización de este seminario.

Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003

LUIS RICO ROMERO

Universidad de Granada
lrico@ugr.es

Es un empeño de los países de la OCDE conocer en qué medida los jóvenes que finalizan la escolaridad obligatoria están preparados para la sociedad del siglo XXI y sus desafíos. El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA) se establece para llevar a cabo la organización e implementación de esta tarea.

El modo en que los sistemas educativos preparan a los estudiantes de 15 años para desempeñar un papel como ciudadanos activos es un dato importante del desarrollo de una sociedad. Finalidad principal de la evaluación PISA/OCDE consiste en establecer indicadores de calidad con los que expresar cómo los sistemas educativos alcanzan esa formación.

El proyecto PISA se concibe como una herramienta para contribuir al desarrollo del capital humano de los países miembros de la OCDE. Tal capital lo constituyen los conocimientos, destrezas, competencias y otros rasgos individuales, que son relevantes para el bienestar personal, social y económico.

Esta evaluación cubre los dominios de la lectura comprensiva y la alfabetización matemática y científica, no tanto en los términos establecidos por el currículum escolar cuanto sobre los conocimientos y destrezas necesarios para la vida adulta. La evaluación de competencias transversales se contempla con la inclusión de un nuevo dominio sobre resolución de problemas. Se destacan la maestría en los procesos, la comprensión de conceptos y la habilidad para actuar en distintas situaciones dentro de cada dominio.

Los conocimientos y destrezas evaluados no proceden, principalmente, del núcleo común de los currículos nacionales sino de aquello que se juzga esencial para la vida adulta. Se considera que esta es la principal característica del proyecto PISA/OCDE. El currículo tradicional se construye mediante piezas de información y técnicas que hay que dominar; este currículo enfatiza escasamente las destrezas que se desarrollan en cada dominio y su uso general en la vida adulta. Incluso destaca menos las competencias generales para resolver problemas y aplicar ideas para la comprensión de situaciones cotidianas. El proyecto PISA/OCDE no excluye el currículo basado en el conocimiento pero lo valora en términos de la adquisición de conceptos y destrezas amplios, que pueden aplicarse. Por tanto, el programa de PISA no queda reducido a aquello que se enseña específicamente en los centros y escuelas de los paises participantes.

Las competencias en matemáticas se consideran parte principal de la preparación educativa y, por ello, la evaluación en matemáticas es un componente esencial del programa PISA. El foco de evaluación en el programa se centra en cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido.

Las competencias que se estudian incluyen el compromiso del estudiante con el proceso de su aprendizaje, y contemplan el género y el entorno familiar. El programa también muestra una visión general de cómo determinadas características de las escuelas, tales como la organización de la enseñanza y la disponibilidad y administración de los recursos, están relacionadas con el éxito educativo.

Las evaluaciones se llevan a cabo cada tres años, y ofrecen a los responsables de la política educativa de los países participantes información relevante para dar continuidad a la interpretación de los resultados de los estudiantes a lo largo del tiempo, evaluar las fortalezas y debilidades de sus propios sistemas y conocer la relación con los resultados de otros países. El estudio anterior finalizó en el año 2000; el estudio recién concluido finalizó en 2003.

Por lo que se refiere a la evaluación en matemáticas, el Proyecto PISA 2003 ha supuesto un esfuerzo ambicioso por construir instrumentos de intervención en la enseñanza de las matemáticas, con los que vehicular una política educativa basada en desarrollos recientes de investigación en educación matemática, llevados a cabo en los países de la Unión Europea, Australia, Estados Unidos y Japón.

En el estudio PISA 2003 las matemáticas han sido el principal dominio de estudio. Han intervenido entre 5.000 y 10.000 estudiantes de 42 países, pertenecientes al menos a 150 centros diferentes en cada caso.

El Grupo de expertos en matemáticas (Mathematics Expert Group, MEG) en el Proyecto PISA 2003, responsable de estudiar las muestras de ítems, revisar sus enunciados, analizar los resultados de estudios piloto y proponer los ítems finales, ha estado coordinado por el Australian Council of Educational Research (ACER) y el Instituto Freudenthal; ha tenido como miembros a Jan de Lange (Chair), Ray Adams (ACER), Werner Blum, Vladimir Burjan, Sean Close, John Dossey, Mary Lindquist, Zbigniew Marciniak, Mogens Niss, Kyung-Mee Park, Luis Rico, Tom Romberg (Consultant), Hanako Senuma (NIER), Yoshinori Shimizu, Ross Turner (ACER) y Margaret Wu (ACER).

Las ideas que aquí se presentan son un resumen e interpretación de las publicadas en el capítulo *Mathematics Literacy*, incluido en el documento editado en 2003 por la OCDE *The PISA 2003 Assessment Framework* y aparecen en el documento *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*, que ha sido publicado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

Alfabetización Matemática

El dominio que se evalúa en el proyecto OECD/PISA se denomina *Alfabetización Matemática* (Mathematical Literacy). Dicha alfabetización se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando identifican, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Un buen nivel en el desempeño de estas capacidades muestra que un estudiante está matemáticamente alfabetizado o letrado. Reducir la noción de alfabetización a sus aspectos más funcionales resulta excesivamente elemental. En este estudio la noción de alfabetización tiene, por el contrario, una interpretación comprensiva: debe mostrar la capacidad de los estudiantes para enfrentarse con los problemas cotidianos más variados por medio de las matemáticas. Atreverse a pensar con ideas matemáticas es la descripción de un ciudadano matemáticamente ilustrado, versión actualizada del *sapere aude* establecido por Kant como signo distintivo del pensamiento ilustrado.

En sus relaciones con el mundo natural y social y en su vida cotidiana los ciudadanos se enfrentan regularmente a situaciones en las que hacen planes y organizan su tiempo, presupuestan y compran, viajan, hacen estimaciones, cocinan y se alimentan, optimizan sus recursos y gestionan sus finanzas personales, abordan problemas técnicos, juzgan cuestiones políticas, toman decisiones en las que usan el razonamiento cuantitativo o espacial u otras nociones matemáticas y ayudan a clarificar, formular y resolver múltiples problemas.

Los ciudadanos de todos los países se ven progresivamente implicados en multitud de tareas que incluyen conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos u otras nociones matemáticas. La Alfabetización Matemática del OECD/PISA se ocupa del modo en que los estudiantes de 15 años actúan como ciudadanos informados y reflexivos y como consumidores inteligentes. Se concentra en su capacidad para leer e interpretar formularios, evaluar y pagar costes, no ser engañados en tratos que impliquen dinero, determinar la compra más adecuada a las propias necesidades en el mercado, y muchas otras situaciones.

Podemos apreciar en la Alfabetización Matemática una versión básica de las competencias prácticas generales que se postulan para los profesionales de la matemática, según las nuevas directrices de los planes de estudios españoles. Las competencias prácticas para la nueva Titulación de Licenciado en Matemáticas, dentro del marco de la Convergencia Europea, son:

1. "Resolver problemas de Matemáticas, mediante habilidades de cálculo básico y otras técnicas,
2. Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan,
3. Planificar la resolución de un problema en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos" (Campillo, 2004; pp. 129-130).

Vemos pues que la Alfabetización Matemática es condición necesaria para la formación de los futuros especialistas en matemáticas y trabaja sobre las mismas competencias.

Para el estudio OCDE/PISA ***Alfabetización Matemática*** es "la capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos de la vida en que se le presenten necesidades y tenga que actuar como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo."

El término "alfabetización" está elegido para subrayar que el conocimiento matemático y las destrezas, tal como están definidos en el currículo tradicional de matemáticas, no constituyen el foco principal de atención. Por el contrario, el énfasis se pone en el conocimiento matemático puesto en funcionamiento en una multitud de contextos diferentes, por medios reflexivos, variados y basados en la intuición personal, es decir, en las capacidades personales.

Por supuesto, para que este uso sea posible y viable, son necesarios una buena cantidad de conocimientos matemáticos básicos y de destrezas; tales conocimientos y destrezas forman parte de esta definición de alfabetización.

El término "el mundo" significa, para los responsables del Proyecto PISA 2003, la posición natural, cultural y social en la que viven los individuos.

"Usar e implicarse con las matemáticas" significa no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también *comunicar*, *relacionarse con*, *valorar* e incluso, *apreciar* y *disfrutar* con las matemáticas. Las matemáticas no se reducen a sus aspectos técnicos sino que están inmersas en el mundo social, impregnadas de sentido práctico, comprometidas con los valores de equidad, objetividad y rigor, pero también con la creatividad, el ingenio y la belleza. Todas estas facetas se contemplan en el uso de las matemáticas y en la implicación que con ellas tienen las personas.

La frase: "su vida individual" se refiere a la vida privada, la vida profesional, la vida social con compañeros y familiares así como a la vida de los estudiantes como ciudadanos de una comunidad.

Bases teóricas para el Marco Matemático del Estudio PISA

El marco matemático del estudio OCDE/PISA se sostiene en la creencia de que aprender a ***matematizar*** debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes. La actividad de matematización se identifica en el proyecto, en términos generales, con la resolución de problemas.

Tradicionalmente se han distinguido distintas fases en el proceso de resolución de problemas. Así Dewey (1933), señala las siguientes:

1. "Se siente una dificultad: localización de un problema.
2. Se formula y define la dificultad: delimitación de problema en la mente del sujeto.
3. Se sugieren posibles soluciones: tentativas de solución.
4. Se obtienen consecuencias: desarrollo o ensayo de soluciones tentativas.
5. Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba."

Polya (1945), por su parte, establece cuatro fases de trabajo:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida."

En esta misma tradición, los responsables del estudio OCDE/PISA de matemáticas (2003) caracterizan por cinco fases la actividad de hacer matemáticas:

1. Comenzar con un problema situado en la realidad.
2. Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.
3. Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.
4. Resolver el problema.

5. Proporcionar sentido a la solución matemática, en términos de la situación real inicial.

Es la actuación secuenciada por medio de estos procesos lo que caracteriza, en sentido amplio, cómo los matemáticos hacen matemáticas, cómo las personas emplean las matemáticas en una variedad de profesiones y trabajos de manera completa y competente.

El programa OCDE/PISA se enfrenta a una cuestión operativa, que consiste en evaluar si los estudiantes de 15 años están debidamente alfabetizados y han desarrollado eficazmente su capacidad de matematizar. Los responsables del estudio reconocen la dificultad de llevar ésto a cabo mediante una simple prueba escrita de evaluación ya que el proceso completo de actuación desde la realidad a las matemáticas, y vuelta a la realidad, implica con frecuencia trabajo en colaboración y búsqueda de recursos; el proceso completo toma un tiempo considerable.

Debido a estas limitaciones el programa OCDE/PISA ha elegido preparar ítems que evalúen diferentes partes de este proceso. A continuación se describe la estrategia escogida para construir un banco de ítems que, de manera equilibrada, cubra las cinco fases antes señaladas en el proceso de matematización.

Organización del dominio

El marco matemático del estudio OECD/PISA se propone justificar y describir cómo evaluar la amplitud con que los estudiantes de 15 años pueden manejar las matemáticas de manera fundada cuando se enfrentan con problemas del mundo real.

Para mejor describir el dominio que se evalúa se distinguen tres componentes:

1. La *situación o contexto* en que se localiza el problema.
2. El *contenido matemático* que se debe utilizar para resolver el problema.
3. Las *competencias* que deben activarse para conectar el mundo real, donde surge el problema, con las matemáticas.

Situaciones y Contextos

Utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la Alfabetización Matemática. Se reconoce que trabajar con cuestiones que llevan por sí mismas a un tratamiento matemático, a la elección de métodos matemáticos y representaciones, depende frecuentemente de las situaciones en la cuales se presentan los problemas.

La situación es la parte del mundo del estudiante en la cual se sitúa la tarea.

El contexto de un ítem es su posición específica dentro de una situación.

Ejemplo: *Cuenta de ahorros. Se colocan 1000 euros en una cuenta de ahorros en un banco. Hay dos opciones: se puede conseguir el 4% de interés anual o bien se puede conseguir del banco una bonificación inmediata de 10 euros y una tasa anual del 3% de interés. ¿Cuál es la mejor opción para un año? ¿y para dos años?*

La situación de este ítem es "finanzas y bancos", que es una situación procedente de la sociedad y la comunidad local, denominada como "pública".

El contexto del ítem se refiere a dinero (euros), tasas de interés y cuentas bancarias.

Este tipo de problema proporciona autenticidad al uso de las matemáticas, ya que puede formar parte de la experiencia usual o de la práctica de los participantes en alguna situación real.

Los problemas, así como sus soluciones, pueden presentarse en una variedad de situaciones y contextos. En primer lugar los problemas surgen en situaciones amplias que tienen sentido y son relevantes para la vida del estudiante. Las situaciones forman parte del mundo real. En segundo término, dentro de estas situaciones, los problemas tienen un contexto más específico.

Contextos y situaciones permiten establecer la localización de un problema en términos de los fenómenos de los que surge y que condicionan la situación problemática planteada. Los responsables del proyecto no mencionan explícitamente la fenomenología como un organizador relevante en el diseño y selección de las tareas escogidas para la evaluación de los estudiantes por lo que se refiere a contextos y situaciones. Sin embargo, está claro que la consideración de situaciones y contextos como una de las componentes para organizar el dominio incorpora el análisis fenomenológico dentro del marco teórico que sustenta el proyecto OCDE/PISA.

Las situaciones y contextos de un problema se pueden también considerar en términos de la distancia entre el problema y las matemáticas implicadas. Si la tarea se refiere sólo a objetos matemáticos, estructuras o símbolos, el contexto de la tarea se considera como intra-matemático, y se podrá aceptar como una situación de tipo científico. Hay un número limitado de tales tareas que se incluyen en el banco de ítems del proyecto OCDE/PISA, en las que el vínculo entre el problema y las matemáticas involucradas se hace explícito en el contexto del problema. Sin embargo, problemas con contextos extra-matemáticos, que influyen en la solución y en su interpretación, son preferibles como instrumentos para evaluar la alfabetización matemática ya que resultan más fáciles de encontrar en la vida cotidiana y, además, movilizan distintos tipos de conocimientos para su tratamiento y resolución.

Contenidos Matemáticos

Las ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, social y mental.

Las escuelas organizan el currículo de matemáticas mediante contenidos temáticos: aritmética, geometría, álgebra, etc, y sus tópicos, que reflejan ramas bien establecidas del pensamiento matemático, facilitan el desarrollo estructurado de un programa.

No obstante, los fenómenos del mundo real que llevan a un tratamiento matemático no están organizados lógicamente.

La estrategia asumida en el proyecto PISA/OCDE consiste en definir el rango del contenido que puede evaluarse haciendo uso de una aproximación fenomenológica para describir ideas, estructuras y conceptos matemáticos. Esto significa describir el contenido en relación con los fenómenos y los tipos de problemas de los que surgieron.

Los responsables del proyecto hacen una revisión cuidadosa y completa de diferentes modos de organizar los contenidos matemáticos. Mencionan los textos de Steen (1990) y Devlin (1994). También consideran los bloques de contenidos establecidos por los Estándares Curriculares del NCTM del 2000 y por los estudios del NAEP.

Las ideas fundamentales, que satisfacen las condiciones de respetar el desarrollo histórico, cubrir el dominio y contribuir a la reflexión de las líneas principales del currículo escolar, son:

Cantidad

Espacio y forma

Cambios y relaciones

Incertidumbre

Conviene recordar que el Diseño Curricular Base (1989), que dio lugar al currículum de matemáticas de secundaria español en 1991, consideraba categorías similares pero no idénticas: Números y operaciones; Medida, estimación y cálculo de magnitudes; Representación y organización del espacio; Interpretación, representación y tratamiento de la información; Tratamiento del azar. La categorización del proyecto PISA/OCDE es una versión actualizada más general, comprensiva y mejorada que aquélla de los años 90.

Con las cuatro categorías mencionadas el contenido se organiza en un número de áreas suficiente, que aseguran una distribución de ítems a lo largo del currículum, pero al mismo tiempo en un número no muy amplio que evite una división excesiva.

A continuación se enumeran las ideas principales que estructuran cada una de las categorías anteriores.

Cantidad.

Esta categoría subraya la necesidad de cuantificar para proceder a organizar el mundo. Incluye todos aquellos conceptos involucrados en la comprensión de tamaños relativos, reconocimiento de patrones numéricos, uso de números para representar cantidades y atributos cuantificables de los objetos del mundo real. Mas aún, la cantidad se refiere al procesamiento y comprensión de números que se nos presentan de varios modos.

Un aspecto importante es el razonamiento cuantitativo, que incluye el sentido numérico, la representación de números de varios modos, los tamaños relativos, la comprensión del significado de las operaciones, cálculo, mental y estimación.

Espacio y forma

Las formas pueden considerarse como patrones. Casas, edificios, puentes, estrellas de mar, copos de nieve, planos de ciudades, cristales y sombras, son algunos ejemplos de formas del mundo real en la que se pueden localizar patrones. Los patrones geométricos sirven como modelos relativamente simples de muchos tipos de fenómenos y su estudio es posible y deseable a todos los niveles.

El estudio de las formas y construcciones requiere buscar similitudes y diferencias cuando se analizan los componentes de las formas y se reconocen según distintas representaciones y diferentes dimensiones.

El estudio de las formas está relacionado con el concepto de *espacio cercano*, lo cual requiere de la comprensión de las propiedades de los objetos y de sus posiciones relativas (Freudenthal, 1973). También significa entender las relaciones entre las formas y las imágenes o representaciones visuales. Debemos ser conscientes de cómo vemos las cosas y por qué las vemos así; los estudiantes tienen que aprender a desenvolverse a través del espacio, de las formas y de las construcciones. Igualmente hay que entender cómo los objetos tridimensionales pueden representarse en dos dimensiones, cómo se interpretan las sombras, cuáles son sus perspectivas y sus funciones.

Cambios y relaciones

Cada fenómeno natural es una manifestación del cambio; el mundo en nuestro entorno muestra una multitud de relaciones temporales y permanentes entre fenómenos. Algunos ejemplos los proporcionan los organismos y sus cambios cuando crecen, los ciclos de las estaciones, el flujo y reflujo de las mareas, los ciclos de empleo y desempleo, los cambios climáticos y los cambios en los índicadores económicos.

Algunos de los procesos de cambio se pueden describir y modelar directamente mediante funciones matemáticas: lineales, exponenciales, periódicas o logísticas, discretas o continuas. Las relaciones matemáticas tienen forma de ecuaciones o de desigualdades, usualmente, pero también se presentan relaciones de naturaleza más general.

El pensamiento funcional, es decir, pensar en términos de y acerca de relaciones, es una de las metas disciplinares fundamentales en la enseñanza de las matemáticas. Las relaciones pueden representarse mediante una diversidad de sistemas, incluyendo símbolos, gráficas, tablas y dibujos geométricos. Distintas representaciones pueden servir para propósitos diversos y tener propiedades diferentes.

Incertidumbre.

Por incertidumbre se entienden dos tópicos relacionados: tratamiento de datos y azar. Estos fenómenos son la materia de estudio de la estadística y de la probabilidad, respectivamente.

Los conceptos y actividades que son importantes en esta área son la recolección de datos, el análisis de datos y sus representaciones, la probabilidad y la inferencia.

En el currículum español de los 90 el estudio de las funciones y la estadística se contemplaban en un mismo bloque: *Interpretación, representación y tratamiento de la información*, de manera artificial, mientras que el estudio de la relaciones se consideraba en el bloque de *Números y operaciones*.

La clasificación de contenidos del PISA/OCDE 2003 se sustenta en el análisis fenomenológico y supone una mejora en aquellos aspectos que resultaban forzados en el currículum español.

Procesos Matemáticos

Matematización

El proceso de hacer matemáticas, que conocemos como matematización, implica en primer lugar traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Este primer proceso se conoce como *matematización horizontal*:

La matematización horizontal se sustenta sobre actividades como las siguientes:

* Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto a un problema.

* Representar el problema de modo diferente.

* Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.

* Encontrar regularidades, relaciones y patrones en la situación que se considera.

* Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.

* Traducir el problema a un modelo matemático.

* Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Una vez traducido el problema a una expresión matemática el proceso puede continuar. El estudiante puede plantearse a continuación cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticas. Esta parte del proceso se denomina *matematización vertical*.

La matematización vertical incluye:

* Utilizar diferentes representaciones.

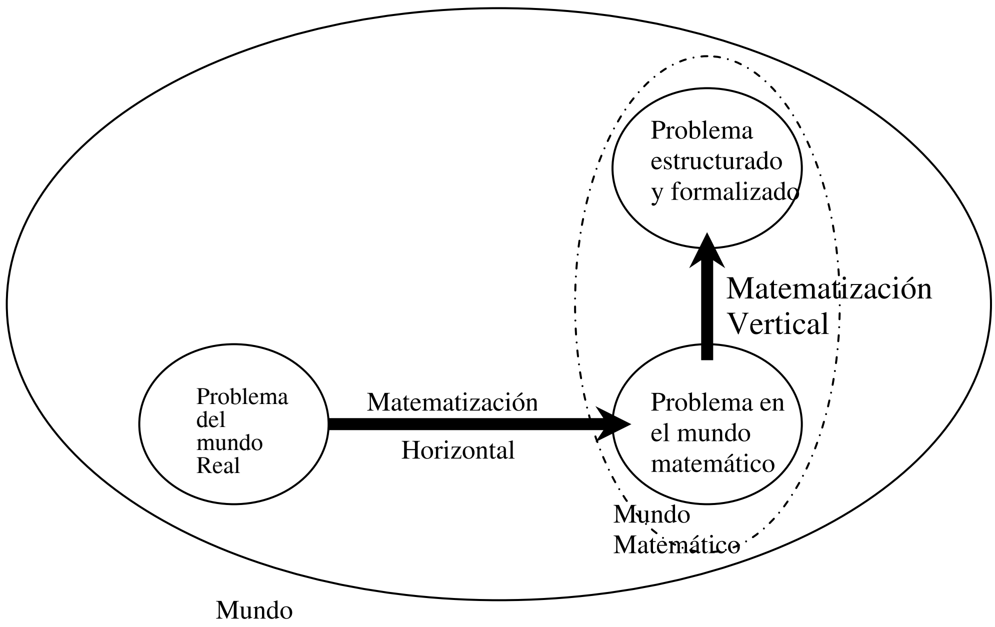
* Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.

* Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.

* Argumentar.

* Generalizar

La conexión entre ambos procesos se puede expresar gráficamente:



El paso posterior en la resolución de un problema implica reflexionar sobre el proceso completo de matematización y sus resultados.

Los estudiantes deberán interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo.

Algunos aspectos de este proceso de validación y reflexión son:

- Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
- Comunicar el proceso y la solución.
- Criticar el modelo y sus límites.

Contextos, contenidos y procesos proporcionan la dimensión conceptual para la evaluación del proyecto PISA/OCDE, muestran las claves que articulan el dominio desde la perspectiva predominante de la disciplina. La dimensión cognitiva, el papel relevante del sujeto que aprende, viene establecido en este estudio por las competencias que delimitan el dominio. Las competencias que aquí se postulan sostienen que es el sujeto quien moviliza los contenidos y articula procesos que dan respuesta a cuestiones planteadas desde el mundo real.

Las Competencias

Las competencias que establece un plan de formación se constituyen en elementos determinantes para establecer su calidad y permiten llevar a cabo su evaluación. La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran.

El proyecto PISA enfatiza que la educación debe centrarse en la adquisición de unas competencias determinadas por parte de los alumnos de 15 años al término del periodo de su educación obligatoria, competencias que tienen por finalidad formar ciudadanos alfabetizados matemáticamente. Las competencias muestran los modos en que los estudiantes actúan cuando hacen matemáticas.

El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso.

Las competencias elegidas por el proyecto PISA son:

1. Pensar y razonar.
2. Argumentar
3. Comunicar
4. Modelar
5. Plantear y resolver problemas
6. Representar
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
8. Uso de herramientas y recursos

El estudio no se propone elaborar ítems que evalúen individualizadamente cada una de las anteriores competencias. Hay una considerable vinculación entre ellas y, por lo general, es necesario trabajar simultáneamente con varias de ellas al hacer matemáticas. Por ello cualquier esfuerzo por evaluarlas individualmente puede resultar artificial y producir una compartimentación del dominio de alfabetización matemática innecesaria.

El proyecto PISA considera que los logros de los estudiantes en la resolución de problemas se puede expresar mediante este conjunto de competencias. Conviene observar que las tres primeras son competencias cognitivas de carácter general, mientras que las cuatro siguientes son competencias matemáticas específicas, relacionadas con algún tipo de análisis o reflexión conceptual.

A continuación se presentan algunos indicadores que ejemplifican cada una de las competencias.

Pensar y Razonar

Esto incluye la capacidad de:

* Plantear cuestiones propias de las matemáticas (Cuántos hay? Cómo encontrarlo? Si es así, …entonces? etc.);
* Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones;
* Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas);
* Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

Argumentar

Esto incluye las capacidades de:

* Conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático;
* Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos;
* Disponer de sentido para la heurística (Qué puede (o no) ocurrir y porqué?);
* Crear y expresar argumentos matemáticos.

Comunicar

Esto incluye las capacidades de:

* Expresarse en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita,
* Entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita.

Modelar

Incluye las capacidades de:

* Estructurar el campo o situación que va a modelarse;
* Traducir la realidad a una estructura matemática;
* Interpretar los modelos matemáticos en términos reales;
* Trabajar con un modelo matemático;
* Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados;
* Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones);
* Dirigir y controlar el proceso de modelización.

Plantear y resolver problemas

Incluye las capacidades de:

* Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados);
* Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

Representar

Incluye las capacidades de:

* Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones;

* Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

Incluye las capacidades de:

* Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural;

* Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal;

* Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas;

* Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Uso de herramientas y recursos

Lo cual implica utilizar los recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones que son distintos del uso con el que fueron presentados.

Niveles de Competencias

Las competencias enunciadas admiten diferentes niveles de profundidad. Los expertos del proyecto PISA/OCDE consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ítems con los que evaluar las competencias:

Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios.

Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.

Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

El informe mencionado proporciona ejemplos sencillos de ítems por cada uno de estos niveles:

Ejemplos de ítems de Reproducción:

Ejp. 1. Resolver la ecuación $7x-3 = 13x + 15$

Ejp. 2. Calcular la media de 7, 12, 8, 14, 15 y 9

Ejp. 3. Escribir 69% como fracción.

Ejp. 4. Si se colocan 1000 euros en una cartilla de ahorros con un interés del 4%, ¿Cuántos euros habrá en la cuenta después de un año?

Ejemplos de ítems de Conexión

Ejp. 1. María vive a 2 kilómetros del colegio, Martín a 5. ¿A qué distancia vive María de Martín?

Ejp. 2. Una Pizzería sirve dos tipos de pizza redonda, del mismo grosor y diferentes tamaños. La pequeña tiene un diámetro de 3 dm y cuesta 3 euros. La mayor tiene un diámetro de 4 dm y cuesta 4 euros. ¿Cuál es la pizza que tiene mejor precio? Explica tu razonamiento.

Ejemplo de ítem de Reflexión

> Ejp. 1. En un cierto país el presupuesto de defensa es de 30 millones de dólares para 1980. El presupuesto total para ese año es de 500 millones de dólares. Al año siguiente el presupuesto de defensa es de 35 millones de dólares, mientras que el presupuesto total es de 605 millones de dólares. La inflación durante el periodo que cubren los dos presupuestos es del 10%.
>
> A. Se le invita a hacer una exposición ante una sociedad pacifista. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha disminuido en este periodo. Explica cómo hacerlo.
>
> B. Se le invita a hacer una exposición ante una academia militar. Intentas explicar que el presupuesto de defensa se ha incrementado en este periodo. Explica cómo hacerlo.

Finalmente, el informe final del marco para el proyecto PISA/OCDE 2003 presenta una serie muy interesante de 17 ítems acompañados por un análisis clúster de los niveles en términos de las competencias que se destacan en cada uno de ellos. También se acompaña una serie de 13 unidades, junto con su análisis completo en términos del marco conceptual presentado. Esta parte del informe permite ejemplificar con detalle los tres componentes del marco teórico propuesto para estructurar el dominio de estudio –alfabetización matemática- así como los niveles de profundidad con el que dicho dominio puede evaluarse.

Referencias:

CAMPILLO, A. (coord.) (2004). *Título de Grado en Matemáticas.* Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

DEVLIN, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library

DEWEY, J. (1933). *How we think.* Lexington, MA: Heath & Company.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

Ministerio de Educación y Ciencia (1989). *Diseño Curricular Básico. Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* París: OCDE.

PAJARES, R.; SANZ, A. y RICO, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

POLYA, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

STEEN, L. (Ed.) (1990). *On the shoulders of Giants.* Washington DC: National Academy Press.

Evaluacion reguladora y apoyo geometrico al alumnado deficiente auditivo en aulas inclusivas en la eso. Un estudio de caso[1]

JOAQUIN GIMÉNEZ, NURIA ROSICH, ROSA M LATORRE, SERGI MURIA

Resumen:

En la investigación que estamos realizando en el grupo AUDIMAT desde 2001, queremos reconocer y evaluar las dificultades de alumnado con deficiencia auditiva incluido en clases regulares con la intención de conseguir un aprendizaje matemático (geométrico) que tenga los mismos objetivos que los que proponemos para sus pares oyentes . Evaluar el conocimiento matemático de personas con déficit auditivo ha sido objeto de diversas investigaciones (Wood et al 1983, 1984) centradas normalmente en los logros conseguidos por grupos amplios de alumnado. El objetivo en estas investigaciones ha sido analizar los resultados comparándolos con los de los pares oyentes y observar razonamientos realizados. Otros trabajos han relatado las dificultades lingüísticas especificas de este alumnado. En el trabajo de Rosich (1995) se evaluó los conocimientos con objetos básicos geométricos (bidimensionales y tridimensionales) siguiendo el modelo de Van Hiele para reconocer las influencias de lenguaje entre niveles y si eran comparables con los datos obtenidos de sus pares oyentes.

En nuestro trabajo, ahora, tratamos de establecer un proceso de evaluación reguladora, que parte del diagnóstico de la situación en que se encuentran, la realización de controles específicos, elementos autoreguladores y control del proceso. En la investigación pretendemos no sólo establecer y tipificar dificultades, sino reconocer el tipo de ayudas especificas que les podríamos brindar para enfrentar sus dificultades. Con ello, nos situamos en la investigación sobre evaluación en el aula en la linea de la "classroom research" (siguiendo ideas propuestas por Van der Heuvel 1998-2000, y otros miembros del Instituto Freudenthal y las de Giménez 1997), así como la visión de evaluación de competencias en la clase (Perrenoud 1997, Santos 2003) en la que pretendemos proponer como resultado un diseño de un modulo de aprendizaje a distancia. En concreto un módulo de apoyo externo al docente de aula sobre la visualización y medida de volumen. En la presentación, mostramos algunos ejemplos de los análisis de las tareas diagnósticas , de algunas actividades que hemos realizado y conclusiones a las que llegamos.

[1] Este trabajo no se hubiera podido realizar sin la colaboración del Centro de Investigación en Deficiencia Auditiva (CREDA) de Barcelona, y la colaboración de los docentes y Jefes de Estudios de las Escuelas Abat Oliba, Regina Carmeli, St Ot, Escola Guinardó, y el IES Consell de Cent. Agradecemos también los comentarios técnicos de la investigadora y logopeda, Dra Angels Mies, y los apoyos institucionales de la CICYT con el Proyecto PSO 000659 MEC-2000-2003 así como las ayudas recibidas de la Divisió V de Ciències de l'Educació de la Universitat de Barcelona.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación y reflexión sobre evaluación de las matemáticas en el aula que describiremos se enmarca en el ámbito de la llamada evaluación interna (ICME TSG 25, 2003) o evaluación integrada en el proceso de enseñanza (Chambers 1993). Compartimos ante todo la idea de que la evaluación tiene como principal objetivo conseguir el progreso del alumnado y reconocer distintos niveles y tipos de razonamiento (Gimenez & Fortuny 1993, De Lange 1995). Los docentes que desean introducir elementos de un desarrollo formativo de evaluación se encuentran ante muchos desafíos: desde el diseño de las tareas hasta el análisis de sus observaciones. En nuestra presentación, nos interesamos en dos problemáticas específicas: relatar fenómenos que ocurren al considerar que el docente interpreta los resultados de la evaluación como un elemento de aprendizaje (mirada sobre el docente y el proceso) y (b) el efecto especial de algunos elementos linguísticos de las tareas evaluadoras sobre el alumnado deficiente auditivo en particular (mirada sobre el alumno). Pretendemos analizar datos de un estudio de caso asociado a un desarrollo de evaluación reguladora en un proceso de estudio sobre visualización, triángulos y volumen, observando el comportamiento de alumnado con deficiencia auditiva de 12-16 años, sus pares oyentes y el desarrollo del grupo.

En este trabajo se desarrollan tres ejes fundamentales: (1) planteamiento de una de las problemáticas actuales de la evaluación (que centra la presentación en un problema de investigación educativo), (2) enfrentamiento de una problemática de origen social (el enfrentamiento educativo de la discapacidad auditiva) especializada, y (3) tratamiento de un desarrollo de producción matemática mediante un diseño de un proceso telemático que pretende ser interactivo. Así pues, aunque el objetivo de esta presentación sea hablar de la investigación de un proceso de evaluación formativa, no podemos olvidar los otros dos marcos que contextualizan la investigación.

Sabemos además que muy pocos deficientes auditivos incluidos acceden a estudios científicos de ámbito superior y pensamos que debemos colaborar a que cada vez más esos alumnos se incorporen a la Universidad. Son varios los problemas que conlleva la educación matemática de este alumnado en la Etapa 12-16 años para enfrentar el problema citado. Uno de ellos es que los docentes de matemáticas no saben cómo hacer frente a esta problemática a pesar de la ayuda que reciben de sus compañeros logopedas. No fueron formados para ver sus dificultades específicas e interpretan sus respuestas como las del resto de estudiantes sin reconocer sus posibles dificultades y limitaciones.

El estudio, se inserta en el trabajo del grupo TELEMAT que hemos constituido el 1998 en el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la Universidad de Barcelona. Dicho estudio usa las TIC porque el proceso que pretendemos evaluar puede y debe utilizar nuevos medios, y superar el material inerte de los libros, e introducir el elemento interactivo y autoevaluativo. En ese marco, el proyecto amplio AUDIMAT ***pretende identificar indicadores de diagnóstico y formación geométrica que permita reforzar las habilidades y destrezas de razonamiento matemático mediante un sistema de teletutorización que implica al alumnado sordo, al profesor de aula y a los tutores (Gimenez et al 2002)***. Para realizar esta tarea es muy importante la colaboración efectiva de todos los agentes implicados en la formación: padres, profesores, comunidad escolar y comunidad investigadora.

Una de las dificultades del alumnado deficiente auditivo en escuelas ordinarias, es que debe tener la atención dividida entre las explicaciones del docente y el contenido (Rosich 1995). Por ello su rendimiento académico es normalmente menor al de sus colegas oyentes. Como consecuencia de lo dicho, una de las problemáticas que se tiene en la línea de evaluación en matemáticas y enfocamos en esta presentación es reconocer dificultades y ambigüedades que aparecen en el desarrollo de tareas de evaluación reguladora y la consecuente interpretación de los significados matemáticos que parece que el alumno ha asumido por parte de los docentes y el propio estudiante. Especial atención recibirá la reflexión de lo que hace el deficiente auditivo en relación a lo que observamos de su par oyente. Por ello, nuestro objetivo es: ***identificar rasgos específicos del alumnado deficiente auditivo (en el sentido de cultura específica como cita Coob et al 1999) y reconocer dificultades del proceso a partir de identificar como el docente da sentido a las observaciones de la evaluación.***

Pretendemos analizar los significados elaborados por los alumnos y docentes, dependen de la situación y de la interacción social (comunidad de práctica). Se considera la comunidad de práctica como una condición intrínseca en la existencia del conocimiento y mantenemos el principio de participación en la práctica cultural donde el conocimiento existe. Por ello, una consecuencia práctica del estudio que realizamos es precisamente que al reconocer las llamadas relaciones evaluativas (Gipps 1999) que se producen en el aula, podamos inferir los elementos de ayuda que debemos introducir en un nuevo diseño de regulación, útil para el alumnado con deficiencia auditiva con un formato teleinteractivo.

2. EL FUNDAMENTO TEORICO

Para ser sistemáticos, explicitamos el estado de la cuestión en cada uno de los tres marcos de referencia del trabajo que se presenta y se explican a continuación.: Matemáticas con deficientes auditivos.(2.1), Diseño de entornos telemáticos constructivos de aprendizaje (2.2.), y Evaluación reguladora formativa interactiva (2.3.) .

2.1. Un marco de estudio sobre matemáticas y deficiencia auditiva.

Respecto al eje de tratamiento educativo de deficientes auditivos, digamos que la mayoría de las investigaciones realizadas concretamente sobre niños y jóvenes han girado básicamente entorno a dos aspectos: describir sus capacidades cognitivas y resaltar sus competencias lingüísticas. En Matemáticas se comenzó analizando pruebas para poner de manifiesto las capacidades de razonamiento lógico (sobre todo a partir de los estudios de Piaget) y la capacidad de pensamiento abstracto de las personas con déficit auditivo. En este contexto podemos citar los trabajos de Suppes en 1974, los de Wood y col.. (1981, 1984), que utilizaron tests que incluían pruebas matemáticas (en las cuales el lenguaje estaba minimizado), para poner de relieve que sus capacidades para resolver cuestiones matemáticas eran similares a las de los oyentes. Aunque en estas investigaciones no se pudo establecer una correlación clara entre sordera y habilidad matemática, Wood apuntó que las diferencias encontradas entre los sordos profundos (que obtenían puntuaciones respecto de los oyentes) podían ser debidas a otras causas: los medios educacionales, nivel de inteligencia, talento matemático, contexto familiar, etc. Actualmente resaltamos el trabajo de Terezinha Nunes con alumnado sordo en el ámbito de la numeración.

Muy pocos trabajos con alumnado deficiente auditivo se han centrado en ver sus capacidades geométricas. Entre ellos: (a) sobre las capacidades de organización del espacio (Marchesi et al. 1978); (b) sobre los niveles de pensamiento geométrico y la resolución de problemas geométricos con alumnos sordos y oyentes y sus implicaciones para la enseñanza de los polígonos y de poliedros (Rosich, 1995); (c) las concepciones de profesores y estudiantes sordos sobre el signo del triángulo (Mason, 1995);y (d) sobre comunicación-gestual-visual que realizan estudiantes sordos de escuela especial durante dos semanas para diseñar un golf en miniatura de 4 y 8 agujeros (Pleiss,1998) y más recientemente los estudios sobre la influencia del uso de realidad virtual 3D en procesos inductivos de razonamiento.

La hipótesis de que las dificultades fundamentales del alumnado con deficiencia auditiva son de orden lingüístico se ha establecido en recientes investigaciones aunque se sustentan con problemas de enunciado verbal en aritmética (Carrasumada 1988). Así, sabemos que encuentran dificultades con palabras con significados diferentes en matemáticas que los que se dan fuera de las matemáticas, dificultades con formas de expresión diferentes para un mismo concepto y con el uso de diversidad de símbolos y abreviaturas (Kidd,Madsen & Lamb 1993 citado en Kelly and Mousley (2001). Estos autores concluyen que no se desafía suficientemente a los sordos y cuando los problemas crecen en dificultad, dejan mucho más los problemas en blanco que los oyentes, aunque no expresan su ansiedad. Sus actitudes frente a la resolución de problemas son negativas e influencian su mejora. Dado que las investigaciones con sordos en la Universidad muestran que éstos desarrollan estrategias similares, se lanza la hipótesis que sus habilidades son similares a las de los oyentes. La investigación de Kelly, Lang, and Pagliaro (2003) mostró, además, que los docentes de estos alumnos no enfatizan el uso de una verdadera resolución de problemas como deberían. Una de las razones es que piensan que sus sordos no son suficientemente fuertes y hábiles en la lengua escrita. Así, no se suele proponer a los estudiantes con tareas de más alto nivel mientras resuelven situaciones problemáticas. Acaban por hacer menos tareas de resolución de problemas con ellos, y por eso los resultados son más débiles. Pero vemos que existe una falta de trabajos que analicen el proceso geométrico general de este alumnado en clave del desarrollo regulador y nos permita reconocer sus dificultades específicas ayudando a comprender mejor las influencias de los problemas de lenguaje y los de visualización.

2.2. Sobre el marco teleinteractivo.

Respecto al eje del diseño telemático algunas investigaciones analizaron el uso de las nuevas metodologías de enseñanza mediante el ordenador con alumnado sordo para la enseñanza de los conceptos básicos del algoritmo de función, jugando un papel primordial las diferentes formas de representación de las funciones para la construcción mental de los modelos (Cohors Fresemburg, 1988). El ordenador se ha mostrado siempre como un colaborador eficaz del profesor para el desarrollo del lenguaje verbal y matemático de forma razonada en los alumnos con déficit auditivo. Las investigaciones de (Barham y Bishop, 1991) muestran la importancia del uso del ordenador como un excelente medio de interactividad para generar actividades matemáticas que ayuden a reflexionar y focalizar la atención (Barham, 1988) , siempre y cuando estas tareas se presenten en la pantalla de un modo suficientemente variado y atractivo. Por todo ello, decidimos que nuestra regulación se integre en un marco telemático de enseñanza/aprendizaje mediante el uso de entornos constructivistas de aprendizaje

(Jonassen y Roher-Murphy 1999) que se caracteriza por los componentes siguientes: (a) **Espacio proyecto-problema:** surge de contextos reales, recorriendo al sistema de actividad que está involucrado en un entorno constructivista de aprendizaje. Tiene tres componentes integrados y altamente interrelacionados: el contexto del problema, la presentación o simulación del problema y su manipulación. (b) **Recursos informáticos:** informaciones (vídeo, recursos sonoros, animaciones, ...) sobre el objeto soporte de la resolución del problema. (c) **Herramientas cognitivas:** la complejidad de un entorno constructivista de aprendizaje frecuentemente necesita de actividades que los estudiantes involucrados no poseen. En este sentido, *los diseñadores* deben identificar las habilidades que son necesarias en la resolución de un problema y elaborar herramientas cognitivas que ayuden a los alumnos en la realización de las tareas. Estas herramientas cognitivas pueden ser: organización semántica, modelización, dinámica, interpretación-información, construcción de conocimiento y (d) **Herramientas de conversación y colaboración:** entornos constructivistas de aprendizaje utilizan una variedad de métodos de comunicación mediados por ordenador, que auxilian en la colaboración entre las comunidades de aprendizaje, por ejemplo, videoconferencia, *chats*, lista de discusión, ... A partir de estas observaciones, nuestro objetivo a largo y medio plazo es establecer una plataforma innovadora, y nuestro objetivo a corto plazo es reconocer los elementos que vamos a introducir en el sistema a partir de lo conocido a priori.

2.3. El planteamiento sobre la evaluación.

Evaluar el conocimiento matemático de personas con déficit auditivo ha sido objeto de diversas investigaciones (Wood et al 1983, 1984) centradas normalmente en los logros conseguidos por grupos amplios de alumnado. El objetivo en estas investigaciones ha sido analizar los resultados comparados con los de los pares oyentes y observar razonamientos realizados. Otros trabajos han relatado las dificultades lingüísticas especificas de este alumnado. En el trabajo de Rosich (1995) se evaluó los conocimientos con objetos básicos geométricos (bidimensionales y tridimensionales) siguiendo el modelo de Van Hiele para reconocer las influencias de lenguaje entre niveles y si eran comparables con los datos obtenidos de sus pares oyentes. En estos casos, la evaluación no contempló el control del proceso sino sólo trató situaciones y hechos. Pensamos que reconocer el proceso de enseñanza/aprendizaje es fundamental para comprender las dificultades del alumnado sordo y ver que es en el proceso donde precisamente se manifiestan las competencias del alumnado de forma privilegiada.

En un contexto más general en aulas de matemáticas. Sabemos que los docentes enjuician los resultados de las tareas de evaluación más en base a su presentación y formulación de calidad más que por las habilidades y conocimiento pretendido en la tarea (Moschkovich 1998) y por lo tanto queremos detectar algunos elementos que pueden dificultar dichos juicios específicos y poner de manifiesto las dificultades de los docentes ante la regulación y autorregulación. Para algunos autores autorregular es una habilidad metacognitiva (Brown 1987) que puede trabajarse mediante instrumentos como: reflexión y contraste colaborativo, basados en la idea de Vigotsky de que en el plano intrapsicológico el individuo controla las acciones y en el interpsicológico lo hace en confrontación con otros. Y lo cierto es que las experiencias realizadas con el uso de videos (Kayashima & Inaba 2003) en la formación docente, donde se aplicó la idea, no son fáciles de desarrollar con estudiantes más jóvenes. Los desarrollos autorreguladores han sido objeto de investigación en resolución de problemas (Giménez 1997,Pape & Smyth 2000, Callejo 2003) con alumnado regular. En estas tareas, el alumnado se enfrenta con sus propias habilidades y resultados, modificando perspectivas y controlando sus conductas a partir de la interacción con el docente mediante observación, emulación, control y autorregulación (Zimmerman 2000). En el trabajo de Rodriguez (2003) se describe un proceso detallado ante situaciones de medidas de distancias inaccesibles en donde la fase de emulación no existe porque se sustituye por el simple diálogo regulador y se reconoce el valor evaluador de este proceso como actividad comunicativa (Leontiev 1991).

Evaluar formativamente es una forma de fomentar la actividad matemática de manera que analicemos la información sobre lo que el alumnado comprende y se va haciendo competente y hacia qué dirección nos dirigimos para mejorar (Hattle 1999). Entendemos que la evaluación formativa debe desarrollarse mediante. un sistema de autoregulación interactivo con procesos formales e informales (Allal 1988, Gimenez 1997, Santos 2002) y control observador (Torrance & Pryor 1998) que pretende reconocer un proceso más que un producto (Santos 2003) en el que el alumnado debe tomar parte en la tarea de evaluación mediante un discurso abierto (Taylor et al 1997). En dicho sistema, pensamos que el alumnado se hace más consciente de su situación y reflexiona sobre su desempeño (Broadfoot 1996), y sus competencias (Perrenoud 1997) mediante instrumentos diversos (Giménez 1997), y al mismo tiempo recibe inputs o feedback del docente, que pueden `ser evaluativos (mostrando el progreso) o descriptivos (construyendo caminos para el futuro) (Gipps 1996). Consideramos, pues, que **analizando estas interacciones como parte de la actividad** (Leontiev 1991) obtendremos pistas para mejorar los instrumentos de autoregulación del alumnado y contribuiremos a la autoformación docente en el sentido que éste **aumente la calidad de sus juicios evaluadores en el tratamiento de los deficientes auditivos incluidos en aulas regulares**.

Por ello , entendemos que regular implica: clarificar los fines y la planificación, compartir los objetivos al inicio del proceso, buscar la complicidad del estudiante en autoevaluación, focalizar un feedback sobre los fines de forma oral y escrita, organizar fines individuales de los logros basados en lo que pueden hacer aunque también consideremos lo que necesitan, usar preguntas ricas para provocar desafíos (Gipps, C et al 2000).

3. METODOLOGIA

Se adopta una hipótesis general constructivista sobre el desarrollo y evaluación de los aprendizajes y la formación. Por tratar de investigaciones en las que se estudian procesos cognitivos de los alumnos en formación y análisis de los procesos reguladores escolares se desarrolla una etnografía de tipo descriptivo (de toda la investigación) exploratoria y evaluativa (en algunos momentos de la investigación) mediante estudio de caso sobre teletutorización asistida. Y otra parte se desarrolla mediante Investigación –acción del proceso socioeducativo implicado un estudio de caso del proceso educativo como investigación evaluativa en el aula (Van der Heuvel 1996, 2003). Procuramos integrar todos los agentes implicados: docente de aula, docente de refuerzo, logopedas, alumnos y familias.

3.1. Los sujetos y los datos de la investigación.

Resaltamos aquí que en el estudio global tratamos con 8 sujetos, de los que vamos a comentar aquí las aportaciones de dos de ellos. AN (15 años) sordera neurosensorial bilateral regular. Autonomía y autoaceptación normales. Habilidades normales de comunicación en contextos sociales. Usa bien códigos orales y buena comprensión de frases simples. Buen nivel de lenguaje funcional. Baja autoimagen. Nivel general en matemáticas de cerca de 11 años. LO (15 años) sordera profunda neurosensorial bilateral. Muestra algunas asimetrías y dificultades visuales. Necesita adaptaciones textuales, porque tiene dificultades en frases sintácticamente complejas. Usa códigos orales.. Comprensión auditiva baja aunque funcionalmente aceptable. Lenguaje escrito bien estructurado, y comprensión oral y lectora aceptables. Su nivel matemático se sitúa en 12 años. Junto a ellos, se toman pares oyentes (CL y AB) con características similares desde el punto de vista de sus resultados, a partir de lo que nos indican los docentes. Se realiza una toma de datos directa a partir de instrumentos como: Entrevistas a docentes, alumnado, e informes de los docentes y padres de alumnos, Observación grabada del proceso de Regulación diferida mediante procesos de devolución. Y también, Indirecta a partir de: Regulación del proceso recogiendo tareas, dossiers y otros materiales de aula así como recogida de tareas realizadas en el ordenador.

3.2. Sobre los instrumentos de regulación diseñados

Pensamos que los estudiantes deben regular su aprendizaje desde el inicio, reconociendo sus conocimientos previos. Pretendemos que en la arquitectura de evaluación telemático y/o presencial, el estudiante anticipe su acción, de forma proactiva, se planifique y finalmente se apropie del sistema para hacerse consciente de su aprendizaje. Por tanto, el diseño de un proceso como el que se está estudiando contempla una evaluación inicial (EI) y una fase formativa (FF). En la fase inicial formativa se realiza: la presentación de los objetivos (PO), la aceptación de un "contrato de trabajo" del alumno (CTA). Se desarrolla un análisis de la situación inicial del alumno (SIA). Esto incluye la realización de una encuesta inicial de contenido matemático (EICM) y un test inicial de contenido matemático (TICM) que en nuestro caso estará compuesta de tres partes. Como segundo paso de la fase formativa, se encuentran los elementos que están en las actividades con objetivo regulador interactivo (ERI), así como los elementos de observación de la actividad matemática (OAM). Los ***instrumentos reguladores interactivos*** utilizados en este proceso son: (a) tests iniciales de contenido matemático (TICMU) como instrumento de regulación proactiva (b) Los elementos reguladores de la actividad matemática (ERAMU) pueden ser: Tareas Sintetizadoras (ERAMUTS), Tareas Organizadoras (ERAMUTO), Autorreguladores de soporte (ERAMUA), Tareas de Respuesta asíncronas (ERAMURA), (c) tests autoevaluativos de la unidad (TAU); (d) tests de actitudes de la unidad (TACU).

Los ***elementos de observación matemática*** utilizados son los formularios de observación de la unidad (FOBU). En él se lleva un registro de las interacciones entre profesor y alumno, un registro de las interacciones entre alumno y el material y un registro de las acciones significativas que se producen. En el último paso de la fase formativa, se encuentra el test final de contenidos matemáticos (TFCM).

<table>
<tr><td rowspan="4">Evaluación Inicial (EI)</td><td colspan="7">Fase formativa (FF)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Presentación de los objetivos(PO)
“Contrato de trabajo del alumno”(CTA)
Situación inicial del alumno (SIA) (EICM +PICM)</td><td>Act. 1</td><td>Act.2</td><td>Act. 3</td><td>...</td><td>Act. Final</td><td rowspan="2">Prueba final (TFCM)</td></tr>
<tr><td colspan="5">TICMU, ERAMUTS, ERAMUTO, ERAMUA, ERAMUR, TAU, TACU, FOBU</td></tr>
<tr><td colspan="5">Regulación proactiva (TICMU)
Regulación interactiva (ERI) + Observación (OAM)</td><td>Regulación retroactiva</td></tr>
</table>

Figura 1. Esquema de los instrumentos en el proceso de regulación.

3.3. Sobre el análisis de los datos .

El análisis de los datos se comienza por identificar los constructos importantes para la elaboración de los **entornos presenciales/virtuales** de aprendizaje/formación/ evaluación. A partir de ahí, se pretende: hacer un análisis **comunicativo y de discurso** (para el **Control del sistema de Teleutorización)** sobre interacciones de concepciones y perspectivas en el estudio de caso. Reconocimiento de puntos de interactividad necesarios –en nuestro caso- para la regulación. Efectividad del diseño de la web que será implementada. Para el desarrollo empírico del trabajo de campo y análisis etnográfico interpretativo correspondiente, seguimos los pasos siguientes en cada uno de los instrumentos:

1- Descripción de las competencias esperadas en términos generales en relación a la propuesta de tareas reguladoras. Sirve fundamentalmente para el docente, para justificar a posteriori su rediseño y contrastar con el resto del equipo investigador lo que sucede en el proceso.

2- Identificación inicial de resultados que sirve para adecuar la planificación docente y situar el alumnado. Identificación de ideas alternativas y estrategias espontáneas, Debe servir para proporcionar información de éxitos y progresos. A partir de ahí, Reconocimiento de diferencias culturales. El alumnado sordo como cultura. Características observadas.

3- Explicitación de los elementos de control informal del proceso que han aparecido. Reconocimiento de contratos intermedios de aprendizaje. Con ello, Caracterización de procesos de desarrollo y dificultad a partir de los registros comunicativos.

4- Reconocimiento de los elementos competenciales matemáticos que han mostrado dificultad y deben apoyarse en un rediseño.

4. RESULTADOS

Para describir algunos resultados, nos centramos en explicar tres aspectos fundamentales: (a) los que muestran las dificultades que surgen del desarrollo inicial de la regulación (4.1), (b) los que surgen de la regulación interactiva del proceso en la fase formativa y nos muestran características comunes del alumnado con deficiencia auditiva (4.2.) y los que muestran los instrumentos finales de regulación (4.3).

4.1. Sobre el análisis regulador inicial, sus dificultades y limitaciones.

Constatamos ante todo que las entrevistas realizadas en las tareas iniciales de observación de su nivel de visualización no sólo son una metodología de investigación, sino que deben realizarse con diálogos verbales en las aulas regulares por lo menos con este alumnado. Para ello, en estos casos, pensamos que debemos contar con las horas que dedican a estos alumnos los logopedas correspondientes. En la mayoría de los casos estudiados, el análisis comparativo con estudiantes regulares y de currículo adaptado nos ha permitido reconocer dificultades específicas de los sordos e identificar necesidades de apoyo y formación docente. Asimismo se ha podido ajustar los niveles lingüísticos iniciales de este alumnado. Así, no sólo nos muestran dificultades para describir verbalmente lo que ven, y la necesidad que tienen de apoyarse en los gestos, sino que cuando tienen un nivel oral bueno no saben reconocer elementos de variabilidad mediante las acciones de transformación, porque su expresión de la observación es normalmente suma de realidades estáticas. Por ejemplo reconocen realidades que implican movimiento video pero las describen como si fuera un cómic. Esto sorprende al docente que no está habituado porque se confunde a veces con la idea de que no tiene un conocimiento correcto.

La práctica totalidad de los alumnos observados se reconocen al inicio con niveles bajos, se manifiestan con incomprensiones y responden en muchas ocasiones diciendo que no entienden la formulación de las preguntas correspondientes a la autoevaluación inicial. Ello es importante, porque nos da una idea del nivel de autoestima concreto de cada alumno deficiente auditivo y nos permite relacionarlo con lo que sabemos de su nivel de lenguaje y nivel de audición.

Por otra parte, en las actividades de regulación especifica inicial hemos constatado fenómenos de interacción que revelan como el papel del docente es fundamental para no dejar este alumnado escondido entre el grupo y resaltar sus peculiaridades ya desde el inicio. Las tareas normalmente escritas que se les propone no son suficientes en su forma habitual para reconocer todos sus problemas. Ya desde este momento deben atenderse las dificultades lingüísticas que poseen y procurar minimizarlas en la elaboración de las tareas y apoyar su desarrollo como sucede en una entrevista de investigación. Constatamos además el valor de la experiencia de investigación-acción en el sentido de que amplia el conocimiento profesional del propio docente involucrado.

En algunas de las experiencias observadas, resaltamos el fenómeno de cómo ante ciertas expresiones de los enunciados de las tareas, la observación docente de los resultados y su preocupación por el grupo-clase, enmascara las dificultades especificas de los deficientes auditivos. Sólo el contacto y discusión con otros investigadores permite al docente investigador que pueda aprender de la situación y reconocer sus dificultades. Podemos interpretar, pues, que en este primer momento, hay una tendencia a usar recursos evaluativos por encima de descriptivos (Gipps 1999). En efecto, se observa en los diversos casos como los docentes privilegian la seguridad e indiscutibilidad de sus propuestas de tareas, ausencia de reflexión crítica externa, intención clasificatoria, reduccionismo en los datos observados, privilegio del control cuantitativo del grupo sobre lo cualitativo del individuo, etc. Como indicaron Gillborn y Gipps (1996) hablando de las minorías étnicas, los enfoques cualitativos nos pueden ayudar a comprender las dinámicas de aprendizaje pero además nos revelan factores que subyacen los éxitos o fracasos que se demuestran en los tests y exámenes clásicos. Veamos un ejemplo de aparición de este fenómeno específico. Hemos resaltado en cursiva las reflexiones numeradas de la investigación-acción y nuestro discurso sigue con la letra habitual.

R1- Ante una situación en la que se pide calcular el volumen de una maleta con unas dimensiones dadas. se puede ver que el comportamiento de Lo (deficiente auditiva) manifiesta una idea de volumen como cálculo multiplicativo tal como hace un 35% del curso. El docente suele sistematizar las respuestas en tablas (como la de la figura 5) y caracteriza a Lo en el grupo del 19% de estudiantes que identifican el volumen con un cálculo y donde la unidad de referencia "se suele olvidar". AB en la tabla es el par oyente.

IDEA DE VOLUMEN EN LA SITUACIÓN MALETA:		N=21
VOLUMEN COMO CÁLCULO SOBRE UNAS DIMENSIONES DE UN OBJETO	Reconoce el volumen como producto de las tres medidas evocando la unidad adecuada	4,7%
	Aplica relación multiplicativa como superficie y el resultado es erróneo.	14,3%
	calcula como si fuera un perímetro sumando las dimensiones sin evocación de la unidad.	14,2% (AB)
	Identifica el producto pero con error en el cálculo y sin explicitación de la unidad de medida	9,5% (LO)
IDEA DE VOLUMEN COMO CABIDA QUE VARIA EN FUNCION DE LAS DIMENSIONES	Muestran de alguna manera la dependencia de las medidas del objeto, o hacen un cubicado... para justificar el cálculo. Explicitando la multiplicación	14,2%
	Indican de alguna manera la dependencia de dos o tres variables. Dan idea de profundidad/ base/ altura.	28,5%
NO PARECE APRECIAR LA DEPENDENCIA DE LAS DIMENSIONES	Fijación en una dimensión	4,7%
	Volumen como cantidad	4,7%
	NO HAY RESPUESTA --	4,7%

Fgura 5: Idea de volumen en la actividad 1 de la prueba inicial

Al interpretar el fenómeno indicado, creemos que lo que ocurre es que los docentes no fueron formados suficientemente en el análisis cualitativo de respuestas, y en el caso de estos estudiantes, debemos conocer con atención sus dificultades, para atenderlas y no identificarlas como simples errores.

R2- De nuevo con el ejemplo, el docente identifica que la idea del volumen como algo simplemente operativo es mayoritaria en el grupo y así aparece que Lo está aparentemente "escondida en un grupo". Pero lo que se ve es que mayoritariamente parece haber una idea de que el volumen es "algo" *dependiente de las medidas del objeto por parte de esta mayoría. Es decir, la identificación de la idea de volumen como dependiente de unas variables no había sido percibida inicialmente por el docente. (del diario de invesigiación)*

La regulación inicial nos está permitiendo, pues, reconocer estos detalles, si sabemos percibirlos. El instrumento regulador no es poderoso en sí mismo, sino como se utiliza.

R3- Así, reconocemos que no aparece globalmente una noción intuitiva de volumen como cantidad de centímetros cúbicos de la maleta (aunque la situación era real y el alumnado conoce lo que son los centímetros cúbicos porque han oido hablar de ellos y un 50% del grupo los indica, aunque un 25% diga que son centímetros cuadrados). Después de reflexionar sobre las respuestas dadas, pensamos que gran parte de los alumnos asocian la multiplicación por analogía a la superficie (área), lo que había sido observado en otras investigaciones (Hart, 1983). De entre todos los alumnos que realizaron este ejercicio, un 19% muestran una idea de volumen relacionada con las dimensiones del objeto además de dar un cálculo multiplicativo de las tres medidas. Pero una observación más detallada nos hace ver que, el resultado que da Lo es una cantidad diez veces superior a la real si se expresa en cc. Además ella ha sido la única alumna que ha dado un valor tan superior al real (del diario de investigación)

En muy diversas ocasiones los instrumentos de evaluación como pruebas o situaciones, no son suficientes para provocar respuestas porque algunos estudiantes sordos no responden, o sus explicaciones son débiles, o simplemente no sabemos identificar el sentido de sus errores. Se hace importante afinar el análisis de lo sucedido. El docente a menudo se satisface con las respuestas de los sordos o las considera mal y ya está.

R4- Al mirar la respuesta dada por Ab (alumna considerada pareja oyente con nivel semejante a LO) , vemos que utiliza una relación sumativa para resolver el problema sin evocación de la unidad. Esto nos muestra que Ab forma parte del grupo de alumnado que no tiene una idea de volumen como cabida sino como algo simplemente relacional en donde "deben intervenir las dimensiones del objeto" pero cree que es la suma. Aparentemente su nivel inicial en ese punto estaría por debajo de LO, cosa que no se observa fácilmente de manera inmediata si no se está preparado para ello. Tampoco se reconocen las peculiares dificultades con la argumentación, no estrictamente matemáticas .(del diario de investigación)

La argumentación de la resolución del problema de ambas es pobre, ya que sólo indican " He multiplicado" y " He sumado todos los lados", respectivamente. "Esto lo hacen muchos alumnos, no entienden que se deban dar otras explicaciones más que la operativa y todos hacen lo mismo"

(del diario de la profesora).

Así, en este ejemplo y otros parecidos vemos las ***dificultades del propio instrumento regulador si no se realiza un control de confrontación específico con el grupo***. El alumnado escribe poco, argumenta poco sus razonamientos e incluso en ocasiones no deja trazas del cálculo efectuado. El docente no puede inferir fácilmente a partir de estos instrumentos conductas específicas o detectar claramente el contenido previo de todo el alumnado. Sólo un desarrollo regulador inicial que conciba a priori una reflexión pormenorizada conjunta con los logopedas e investigadores externos y un diálogo con este alumnado puede permitir identificar el tipo de dificultades específicas que puede tener. Y así tendría efectos autoreguladores potentes. Podemos atenuar las dificultades del instrumento en el caso particular contrastando a posteriori con otras informaciones.

> *R5- En otro ejercicio en el que le hemos pedido cuántas veces una pirámide cabe en el prisma correspondiente, LO nos dice que una vez y cuando le hemos pedido una cantidad correspondiente a la cabida de instrumentos de cocina, LO comete errrores también de bulto*
> *(diario de investigación).*

Sabemos de las dificultades del alumnado sordo con las palabras asociadas a conceptos clasificatorios o relacionales y que frente a ello, los sordos se crean a veces su significado (Carrasumada 1988). Puede darse el caso de que en casos como el que comentamos en el ejemplo, el hecho de que los docentes suelen asociar "cálculo" con medida les puede parecer que el concepto de volumen no tiene otra connotación que el de hacer una operación, y por eso no se actúa con pruebas de contraste estimativo.

> *R6- ¿Podria ser que en su lectura del enunciado domine la expresión "cálculo" sobre la propia palabra volumen de forma que influya en su respuesta? ¿Será cierto que LO no identifica el error citado porque precisamente ante un enunciado identifica la búsqueda del volumen con una cantidad que se asocia a los objetos y no a una idea de cabida relacionada con una unidad determinada? Si fuera así su conocimiento base intuitivo sería positivo y su problema sería claramente linguístico centrado en la dificultad de comprender que la unidad puede ser variable. Si se hiciera un proceso de reflexión conjunta de clase (o bien individual aprovechando el soporte de los logopedas) sobre las respuestas quizás alguien daría algún argumento para reconocer que una maleta no puede tener 210.000 cc porque es demasiado Las otras situaciones que hemos utilizado no nos dan oportunidad de saber lo que está ocurriendo con LO por ahora. Quizás el hecho de saber que equivaldria a 210 botellas de litro le daría la idea de imposibilidad del resultado... (del diario de investigación)*

Si adoptáramos un diálogo autoregulador con el grupo (que no siempre se hace) y contastáramos determinados tipos de respuesta, conscientes de la posible dificultad del enunciado posiblemente el instrumento sería más eficaz. En la investigación amplia mostramos que las dificultades que estos alumnos tienen respecto los conceptos que indican variabilidad ***se aumentan o no se enfrentan*** porque el docente no suele insistir en ello.

> *R7- Así, no se insiste que el volumen "depende" de la unidad, y no sólo de las medidas del objeto y se suele decir "se olvidan las unidades" como indicando metafóricamente que simplemente el volumen "no es un número" y no le gusta al docente que ponga sólo un número. (del diario de investigación)*

Si bien este es uno de los problemas detectados por diversas investigaciones en la noción de volumen en general, lo que aparece como nuevo es que el lenguaje "calcula el volumen" puede ser un obstáculo para alumnado con deficiencia auditiva porque no se enfrenta con el problema de la variabilidad del contenido. *La persistencia en asociar conceptos con significados diferentes (como el volumen con el cálculo), acentúan las posibles dificultades del alumnado, porque centran el contrato de aprendizaje en un punto que olvida que se trata de un concepto que implica variabilidad en función de la idea de UNIDAD.* Pero además estas dificultades pueden ser extensible a alumnado con dificultades de lenguaje (dislexias, trastornos de habla, etc).

En suma, vemos que en las actividades de regulación inicial, la tarea no es el único elemento a ser considerado. Reconocer y "evaluar de forma reguladora" capacidades y competencias previas del alumnado requiere una planificación especial: propuesta de multiplicidad de tareas diversas para un mismo contenido, usando lenguajes diferentes, diálogo verbal específico con los deficientes auditivos, inclusión de soportes reguladores lingüísticos en el enunciado de la tarea, reflexión conjunta de equipo docente interviniente, y control posterior de dificultades sobre todo en el establecimiento de relaciones conceptuales contrastadas verbalmente. Eso implica un nuevo contrato del docente con el equipo y con el alumnado en esas condiciones que no debe recibir la actuación como algo especial sino como algo especializado.

4.2. La regulación del contenido durante el proceso.

Aparentemente, los docentes creen que todos los enunciados que proponen están claros para todos los estudiantes y se cumplen siempre los prerequisitos necesarios de una determinada actividad, pero no siempre es así. En la regulación intermedia se puede manifestar no sólo las dificultades del alumnado sino las del propio proceso y evidenciar problemáticas especificas de los enunciados de las tareas que no han sido pensados a priori por el docente. En el ejemplo que vamos a mostrar ahora, queriamos suscitar una reflexión sobre lo que significa el volumen como cabida de objetos tridimensionales. Para ello, en la unidad didáctica preparada, hacemos ver que caber se asocia a todo tipo de medidas, como puede ser la longitud , la superficie, el peso... Y así suscitamos la situación siguiente: ¿cuál es la longitud máxima de un tubo rígido que podría caber en la nave industrial (ortoedro) de una medidas numéricas dadas?. La alumna AB no tiene dudas en reconocer la diagonal como la máxima longitud. A continuación, mostramoslos datos de una entrevista con LO para reconocer sus peculiares dificultades. LO no sólo no entiende lo que es una nave industrial, sino que, después de asimilarla a una caja (y comprenderlo), no sabe representar en el plano el objeto tridimensional. En realidad no parecía relevante para resolver el problema, pero sí que lo es puesto que no consigue tener una imagen de la situación .

L: Es que no sé como dibujarlo [L habia dibujado un casi rectángulo en el papel]
P: Es que no sabes como dibujarlo,vale ¿ Sería como si fuese una caja, no?
L: Sí,
P: ¿Y cómo dibujarías una caja?
L: ¿ Con volumen?
P: Claro, con volumen. O ¿ has visto alguna vez una caja sin volumen?
L: No ***... [Ahí la profesora le ayuda a hacer la representación]***

P: Y cuando hayas practicado más, eh, cuando ya hagas más cajas, cada vez te saldrán mejor

Después de un largo diálogo, en el que vemos las enormes dificultades y desconocimiento previo de la alumna, nos podemos adentrar en el proceso de resolución, y es entonces cuando encontramos otro tipo de dificultad en el enunciado verbal de la pregunta. **El diálogo actúa como auténtico regulador** en la construcción de LO de la solución al problema planteado. En él, la docente actua con claridad, no corrige inmediatamente el error, propone situaciones de reflexión, anima incentivando e indicando lo correcto, provoca contrastes, pistas para acciones futuras, (Santos 2003). Aparecen diversos momentos de descubrimiento matemático en el diálogo: (1) La alumna reconoce como máximo la altura, (2) rectifica porque reconoce que un lado es mayor, (3) necesita comparar los segmentos iguales que hay en un ortoedro, (4) reconoce a partir del diálogo que la diagonal de la base es aún mayor, (5) finalmente ve que la diagonal del ortoedro es la longitud mayor. Veamos a continuación como en el primer momento no tiene clara la demanda del problema, porque identifica máximo con mayor en un caso particular.

P:... Me has dicho que lo máximo que podemos colocar era la altura,
L: Sí
P: ¿Sí?
L: Pero yo pensaba que era por dentro, o sea el plano.
P: Sí, si, por dentro, por dentro. Ah, o sea que te pensabas que era esto, si tienes una pared la altura
L:No, no, yo pensaba que era por dentro de la nave...
P: Claro. Es por dentro, por dentro
L: Yo había contado también el suelo de...
P: Mira (la profesora le muestra la caja)
L: Yo había contado también el suelo
P: Si, si, es que es todo
P: Vale, nuestra nave. Esta es nuestra nave.
L:No
P: ¿Por dónde podemos colocar una viga o un tubo?
L: Por fuera, por dónde quiera
P: A ver,piensa, ...Sacamos la tapa, pero piensa que aquí hay techo.Vale.[...] ..

En el segundo momento, la profesora trata de ver si tiene claro lo que significa máximo. A partir de la demanda de la profesora de si hay otro segmento mayor, LO "se da cuenta" de que el segmento indicado no es el mayor, porque por dentro puedes poner más cosas y la horizontal es mayor que la altura. Pero no le es suficiente para resolver la situación, y se entretiene en comparar los lados del prisma que son iguales.

P:¿Cuál es la longitud máxima?
L: Esta que es más...[señala el lado mayor de la base]
P: Este que es más grande. Más grande que esta, la que decías. [señala el menor]
L: Sí
P: Vale.¿ Hay alguna otra más grande todavía?
L:Esta de arriba, ¿no? [señala una arista paralela a la que indicó antes]
P: ¿Esta de arriba, y esta de abajo cómo son?

L: Iguales
P: Iguales. Por tanto, estas dos no me sirven
L: ¿Una más grande?
P: Hay una más grande. A ver, piensa Coge si quieres la caja, mírala bien
L: Más grande?
P: Sí, hay una más grande
L: Si estas dos partes son iguales, estas dos iguales
P: Quiere decir que quizás no está en estas partes, sino que es otro lugar
L: Este es más pequeño [señala la altura, y luego el lado menor de la base]
P: Es más pequeño, aja.
L:Este es igual

Sólo después de mirar la caja, y ante la provocación de que EXISTE una longitud mayor, trata de imaginar la situación de nuevo, y finalmente piensa en la diagonal de la base. Con ello, nos apercibimos de que la variabilidad del proceso no está siendo percibida por Lo. Se conforma con una más grande, pero no "la más grande". Este fenómeno queda escondido a menudo en el interior de un diálogo de grupo, en el que buena parte del alumnado reconoce inmediatamente que la diagonal del ortoedro es la medida buscada. Con ello, se produce un efecto inesperado como es el hecho que estos alumnos al "perder de vista el enunciado" el problema deja de tener sentido. Tanto es así, que Lo pretende medir la diagonal para responder, quedando sin reconocer el objetivo del problema como es el descubrimiento de una medida desconocida a partir de las otras conocildas por medio de cálculos aplicativos del Teorema de Pitágoras. La subdivisión del problema en partes (Polya 1969) es la estrategia a seguir globalmente para acabar resolviéndolo. Los docentes que han comprendido la necesidad de atender más a estos alumnos, sin paternalismos, han obtenido mejores resultados. En algunos aspectos, reconocemos concepciones (Balacheff 2000b) de los DA más débiles que las de sus pares oyentes. Por ejemplo, en aquellas tareas que contienen implicaciones lingüísticas como en la identificación de situaciones clasificatorias no dicotómicas y en tareas reflexivas en las que se asocian imágenes a contenidos. Todo ello dificulta la creación de imágenes y relaciones entre ellas. En especial, les cuesta entender enunciados en las que aparecen negaciones vinculadas con tiempos pasados. En efecto, ante los enunciados de las tareas, el alumnado con deficiencia auditiva tiende a simplificarlos, transformándolos en formatos más comprensibles, lo que no siempre lleva a una interpretación correcta de la demanda (Rosich y Serrano 1998). La persona deficiente auditiva tiene dificultades en interpretar situaciones complejas, ya que no tiene los referenciales como el oyente.

La lección aprendida en este y otros episodios, es que ante la dificultad de establecer un "proceso adecuado con preguntas bien enfocadas" (semejante a lo que propone Santos 2003) no se suele reconocer que en determinadas situaciones **no es suficiente el reconocimiento verbal de un enunciado, sino que hay expresiones que implican reconocer la variabilidad de un proceso y provocan una dificultad específica para los deficientes auditivos**. Darse cuenta de que existe un máximo absoluto exige reconocer una cierta funcionalidad al considerar la distancia entre dos puntos de un objeto que crece en determinados valores, y luego decrece a partir de un punto"... Además, constatamos que la regulación de grupo no resuelve este tipo de problemas porque el docente no puede estar siempre pendiente de LO y olvidar el resto del alumnado, y por eso debe establecerse algún tipo de regulación individualizada. Por ello pensamos en ofrecer un sistemas de ayudas especiales para contrastar la variabilidad de procesos matemáticos que ofrece sin duda la tecnología. En este sentido nuestro descubrimiento es un enfoque diferente de la distinción entre figura y dibujo que se propone en el uso de programas como CABRI o similares (Laborde 1993) puesto que indicamos ahora el valor autoregulador formativo de estos procesos de variabilidad.

Las respuestas del alumnado a los tests de autorregulación intermedio no sólo nos han permitido ver la evolución sino que contribuyen a afianzar la autoestima. En ellos vemos que se sobrevaloran en algunos casos y en otros –por el contrario – se consideran muy por debajo de sus pares oyentes en general. Todos los alumnos del estudio han mostrado dificultades ante las expresiones hipotéticas, y argumentaciones que impliquen condicionales. Además tiene una lectura textual y el docente interpreta sólo que no resolvió el problema matemático y no se “ataca” el problema como dificultad de lenguaje más que matemática (Silvestre et al 1998). Asimismo, como en ocasiones se pierden el contexto de referencia por desatención, no comprenden bien la situación. Por otro lado, tienen muchas dificultades en la verbalización de situaciones de movimientos, en las que no expresan elementos relacionales. Y tienen grandes dificultades en la verbalización de justificaciones en situaciones demostrativas cuando los procesos constructivos asociados no están suficientemente sólidos.

4.3. Los tests finales como evocadores de rasgos específicos del alumnado sordo.

Al término de estas actividades de aprendizaje se desarrolla una aula reguladora que prepara el control final. En ella, tratamos de que el alumnado como LO y AN reflexionen sobre su aprendizaje y vean lo que no saben o no tienen consolidado. Finalmente se realiza un ejercicio de control para detectar los progresos y competencias adquiridas. A lo largo de las tareas reconocemos dificultades específicas de muy diversos tipos. Una de ellas es que las argumentaciones lógicas no sólo se basan en coherencias sintácticamente bien construidas. Cuando la situación exige varias observaciones, o se muestra una forma negativa, el alumnado trata de dar una respuesta coherente pero los sordos no saben ajustar los argumentos (Gimenez et al 2002). No es suficiente el conocimiento que pueda haber trabajado con los logopedas de las frases causales o condicionales. Los argumentos geométricos a veces son hipotéticos y, por ello, descontextualizados o se trata de generalizaciones. Los deficientes auditivos no saben como enfrentarse a ellos, entre otras cosas porque carecen del lenguaje apropiado significativo para establecer las relaciones. Los argumentos lógicos usan un lenguaje diferente en las aulas de matemáticas que en la “lógica del sentido común” y para ellos en cambio, están relacionados con lo que consiguen percibir de inmediato. Desconocen las implicaciones de determinados significados. Así, ante los frecuentes "abusos de normas de lenguaje" que se usan en las aulas regulares, los docentes no son conscientes de las implicaciones en estos casos puesto que los deficientes auditivos no pueden incorporar ese juego de lenguaje fácilmente.

Veamos un ejemplo: Pedimos a AN dibujar un árbol de 4m de alto con un pájaro encima de él.. . AN representa un lindo pajarito en la cima del árbol y sitúa correctamente la medida con flechitas. Pero no comprende la frase "Cristina pone un alimento a 3m de la base del árbol", ya que lo pone en el propio árbol y no en el suelo. La correspondiente oyente de su clase, identifica correctamente este hecho, y el docente se extraña del error. CL (par oyente de AN) ha integrado la norma, e interpreta que se trata de un problema de Pitágoras, marca con el dedo el recorrido de la hipotenusa, aplica la raiz cuadrada de los cuadrados de los catetos con corrección y muestra que debe ser un triángulo rectángulo.

Diagrama de AN

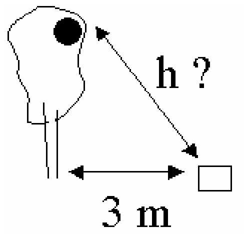


Diagrama de CL

Cuando se le insiste, haciéndole ver que no era una buena interpretación, y acepta colocar el cestito en el suelo, AN dice que la distancia que debe recorrer el pájaro es 7 metros, interpretando que no se le está pidiendo la mínima distancia. Si bien sabemos que hay oyentes que hacen este razonamiento, no es el caso de ninguno de los que hemos entrevistado en la investigación. Con ello se muestra que tienen dificultades en integrar ideas conceptuales como el hecho de que si tienes muchos caminos entre A y B, se sabe cuál es el más corto y se dice correctamente que la recta, pero cuando hablamos de distancia, nadie le ha indicado a estos alumnos que queremos conocer la mínima distancia, porque la otra medida sería evidente! Ahí se muestra la necesidad de contrastar el razonamiento lógico habitual ligado a representaciones perceptivas o bien la aceptación de normas matemáticas geométricas.

A partir de éste y otros ejemplos, mostramos dificultades comunes geométricos especial izados del alumnado con deficiencia auditiva incluido en clases regulares: (a) realizan conexiones directas palabra-imagen con dificultad en asociar posibles cuestiones asociadas a la imagen, (b) efectúan interpretaciones inmediatas de que un proceso de demanda del docente casi siempre está relacionado con una actividad de identificación, (c) tienen dificultades en aceptar clasificaciones no dicotómicas, (d) dificultades específicas en la interpretación de propiedades matemáticas como reglas de existencia, y (e) dificultades en reconocer que existen diversas posibilidades de definir caracterizando conceptos geométricos mediante propiedades diferentes.

Observando otras preguntas de la prueba final encontramos respuestas favorables del alumnado sordo frente los pares oyentes en algunos ítems. No nos quedemos con la idea de que las dificultades son las mismas en todos los problemas o situaciones. En algunos casos los resultados son mejores que los pares oyentes. Ante sus dificultades lingüísticas, consideramos necesarias adaptaciones específicas en los enunciados de las actividades de regulación, intentando evitar expresiones o palabras que puedan llevar a confusión. Son del tipo siguiente: evitar al máximo subordinadas y conjunciones, fomentar descripciones , evitando al máximo tiempos verbales subjuntivos y, tratando de que las frases sean cortas. Asímismo, reconocemos la necesidad de ayudas visuales textuales específicas en el momento que se describen procesos. Mediante textos aclaratorios que se activan al pasar el ratón por encima o el uso de cómics que sugieren el desarrollo de la actividad de forma manipulativa conseguimos que se imagine el contenido correspondiente. Además de las ayudas estructuramos: apoyos, organizadores y significadores que podrían servir para todo tipo de alumnado (oyente o no). Por otra parte consideramos que las actividades deben ser variadas (Gorgorió 1995) en cuanto al enunciado, que faciliten estrategias distintas, promuevan estructuración, procesamiento y aproximación, fomentando contenido figurativo o no, con introducción adecuada a los códigos representativos utilizados.

En cuanto a los logros, se dan comportamientos análogos a los comportamientos de oyentes con niveles de vocabulario y rendimiento semejantes en tareas de identificación visual inmediata, y reconocimiento de nociones topológicas como separación, superposición y vecindad. Estos elementos parece que han sido bien asumidos en la Educación Primaria. Constatamos anclajes debidos al tratamiento de contenidos descontextualizados que hacen que se desconozca lo que es bisectriz, razonar sobre que el baricentro debe estar siempre dentro del triángulo, etc También vemos dificultades comunes en establecer conexiones entre ideas o nociones y referenciales como es la distinción entre perímetro y área, asociación de tipos de triángulos con nombres en situación de clasificación, así como dificultades en reconocer aplicaciones de contenidos aparentemente inmediatos.

5. CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS

Después del estudio realizado, evidenciamos que la intervención y desarrollo regulador fue positivo y contribuyó al acceso del alumnado sordo al currículo regular de todos sus compañeros/as. En cuanto a las competencias, un análisis comparativo de los resultados sordos/oyentes sugiere que se avanza un punto en los niveles de Van Hiele con un 50% de ellos. Las dificultades de lenguaje previas de los estudiantes no han podido definirse ni atacarse completamente pero reconocemos que el uso mayor de imágenes, modelos y acompañamientos analógicos mediante sistemas gráficos ha ayudado a su progreso. El trabajo colaborativo ha contribuido a su mejor desarrollo porque el que aprende construye su propio significado en colaboración con los otros.Por ello es importante orientar procesos de evaluación formativa colaborativos junto con los instrumentos individualizados. Además, actuar sobre los elementos motivacionales individualizados ha sido importante con este tipo de alumnado. Con esta intervención conseguimos también que mejore su autoestima pero debemos reconocer que los elementos cognitivos se enmascaran con los afectivos .

Es difícil mantener el diálogo necesario y exigenteque requiere en alumnado DA pero consideramos que algunos deficientes auditivos (no todos) necesitan verbalizar con los especialistas logopedas tareas matemáticas reguladoras independientemente de la acción docente. Por otra parte, constatamos que se consiguió mejoras si se especifican, estructuran e instrumentalizan de forma reguladora los procesos de formación desarrollados, los procedimientos de interpretación, interacción i reflexión en sesiones específicas de sintesis, procurando que el alumnado con deficiencia auditiva intervenga en público.

Con todo, aunque no tenemos evidencias contundentes, tenemos muestras de que se produce un conjunto de rasgos específicos del alumnado sordo en cuanto a sus dificultades lingüísticas y estructurales en la construcción de entidades geométricas. Si bien no hemos conseguido una completa comunidad de práctica (Wenger 2001) el entorno implementado ha permitido que en algunos aspectos se dan comportamientos colaborativos más positivos que los de los correspondientes oyentes. Así, por ejemplo, aumenta la motivación si se insiste sobre ellos, sin paternalismos, y aumenta el interés en cuanto hay éxito en el desarrollo de pruebas , que se convierten en elementos de aprendizaje a medida que se van respondiendo, mucho más que en los oyentes. Y en aprendizajes en que se dan soportes visuales inmediatos, se observan algunos casos en los que el razonamiento lógico es más potente que en los pares oyentes. Entendemos que resolver algunas de esas dificultades minimiza el rol de controlador del docente y le deja tiempo para ser un buen observador. No olvidamos que lo que pretendemos con los soportes de regulación es sustituir la entrevista que haria el docente y que no siempre hay tiempo para hacerla.

Para terminar, indicamos que es necesaria una formación docente especifica. Las acciones de regulación presencial y teleinteractiva han evidenciado dificultades que provienen de comportamientos docentes en los que no se sabe aún muy bien como enfrentar la integración. Así, debemos indicar como este tipo de investigación tiene un beneficiario secundario que es el propio docente e, incluso a veces, los propios investigadores. En un proceso de investigación en la acción con alumnado con déficit auditivo integrado se refuerza la acción y reflexión del docente implicado. Ello beneficia al grupo clase global, porque se hace una reflexión sobre la practica docente y sus efectos. En concreto, en esta parte de evaluación, en la necesidad de ejercer una labor más profesional de atención especializada. Se promueve la integración de todos los intervinientes en el proceso: logopedas, padres e investigadores .

Las dificultades y limitaciones fundamentales provienen de las exigencias del propio estudio de caso, que dificulta la generabilidad: Requerimientos de material informático (no siempre disponibile) para generalizar el estudio; Necesidad de mayor formación permanente del profesorado trabajando con n.e.e; etc. Las interacciones reguladoras a través de mediaciones por Internet favorecen el desarrollo de un profesional crítico en algunos aspectos (Ponte 2001), sin embargo la investigación aqui descrita nos muestra que aún tenemos otro gran desafio que es pensar en como desarrollar y profundizar una reflexión y contraste teórico en ambientes de aprendizaje de corta duración colaborativos (Wood, 2001). Tal demanda no se refiere a los ambientes virtuales, sino para todos los escenarios formativos (Bellamy 1996). A partir de un análisis de la actividad colaborativa (Zack,V y Graves,B 2001) de la acción docente en el aula, los propios profesores seguramente mejorarían su práctica y atención al alumnado deficiente auditivo.

REFERENCIAS

ALSINA, C.; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.M. (1987) *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid : Síntesis.

BALACHEFF N., SUTHERLAND R. (1999) Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4, pp. 1-26

BALACHEFF N. (2000a) Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. In: Gregorió N., Deulofeu J., Bishop A. (eds.) *Matemáticas y Educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.70-88). Barcelona: Graó ICE-UB

BALL,D & STACEY,K (2000) Mathematics in Junior high school . Unpublished paper for the Discussion group. ICME Tokio.

BARHAM, J. (1988): Teaching Mathematics to Deaf Children. Tesis Doctoral. University of Cambridge

BARHAM, J. y BISHOP, A. (1991): " Mathematics and Deaf Child". En Durvin, K. I Shire, B. (Eds): Language in Mathematical Education: Research and Practice. Manchester. Open University Press

BELLAMY, R.K.E.(1996) Designing educational technology. In Nardi B.A (ed.) *Context and Consciousness*. Cambridge, USA: MIT Press

BROWN,,A (1987) Metacognition,Executive control, self regulation and other Mysterious Mechanisms In FE Weinert & H Kluwe (Eds) *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp 65-116) Lawrence Erlbaum Associates.

CARRASUMADA,C (1988) *Proceso de resolución de problemas aritméticos en alumnado sordo*. Tesis microfichada. Bellaterra Universitat Autònoma de Barcelona

CHAMBERS,,D (1993) Integrating assessment and instruction. In N.L. Webb(Ed) Assessment in the Mathematics classroom (pp 17-25) NCTM Yearbook.

COBB, P., WOOD, T., & YACKEL, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E.A. Forman, N. Minick, & C.A. Stone (Eds.), Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.

COOPER, B. (1998) Using Bernstein and Bourdieu to understand children's difficulties with "realistic" mathematics testing. An exploratory study. QAualitative Studies in Education 11, 511-532.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L., & EYNDE, P.O. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In M. Boekaerts, P.R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), Handbook of self-regulation (pp. 687-726). San Diego, CA: Academic Press.

D'AMBROSIO, U. (1990) "The role of Matematics education in building a democratic and just society" *For the learning of mathematics* vol:10 nº3 (noviembre). pp: 20-23.

DAVILA, R. (2000): "Education of the Deaf in the New Millenium - Assessing the Past and Projecting into the Future". En Actas ICED 2000 Australia, pàg. 101

DE LANGE, J (1987) Mathematics, Insight and meaning. Utrecht. Valgroep Onderzoek. Wisunddeonderwijs en Onderwijscomputercentrum.

GILLBORN, D, GIPPS,C (1996) Recent research on the achievement of ethnic minority pupils. OFSTED London. HSMO :

GIMENEZ, J & FORTUNY, JM (2000) Télétutorisation en mathématiques et traitement de l'heterogéneité. In: A. Ahmed et al. (eds) *Proceedings of the CIEAEM 1999*, Chichester, Elis Horword eds.

GIMENEZ,J et al (2003) AUDIMAT. Informe de Investigación. Publicación electrónica en Divisió V UB.

GIPPS,C, MCCALLUM,B, HARGREAVES,E (2000) GAT makes a good primary school teacher? London Routledge Falmer.

GOMEZ CHACÓN, I (2000) "Affective influences in the knowledge of mathematics". *Educational Studies in Mathematics 43,* Dordrecht. 149-168.

GORGORIÓ, N et al (1998) Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems, *Educational Studies in Mathematics* vol. 35, pp. 207-231.

HART, K (1983) *Children's mathematical frameworks 11-16*. Kings College. London.

HATTLE,J (1999) Influences on student learning. Inaugural lecture. University of Auckland.

HORVATH, J. y LEHRER, R. (2000) ¨The design of a case-based hypermedia teaching tool¨. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, n. 5, p.115-141

JONASSEN, J et al (1995) "Constructivism and Computer-Mediated Communication in Distance Education" The *American Journal of Distance Education 2*, vol9

JONASSEN, R y ROHRER-MURPHY,A (1999) "Activity theory as a framework for Designing Constructivist Learning Environments *ETRyD n1*,v.47, p 41-79

KAYASHIMA,,M & INABA,A (2003) Difficulties in Mastering Self-Regulation Skill and Supporting Method for It Document available at http://www.ei.sanken.osaka-u.ac.jp/pub/ina/kaya-aied03.pdf

KEBRAT-ORECCHIONI,C. (1994) “Les intéractions verbales” Tomos I,II,III. Armand Collin. Paris.

KELLY, R. R. & MOUSLEY, K. (2001). Solving word problems: More than reading issues for deaf students. *American Annals of the Deaf, 146*, 251-262.

KELLY, R.R., LANG, H.G., MOUSLEY, K, & DAVIS, S. (2003). Deaf college students' comprehension of relational statements in arithmetic compare problems. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, 8,

KELLY, R.R., LANG, H.G., & PAGLIARO, C.M. (2003). Mathematics word problem solving for deaf students: A survey of perceptions and practices. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 8*,

LANG,J (2003) Teaching Mathematics word problem solving to deaf students. Comets Workshop Follow-up readings. http://www.rit.edu/~comets/pages/workshops/problemsolvingpreread.html

MARCHESI, A. (1990): " La educación del niño sordo en una escuela integradora". En Marchesi, A. & Palacios, J. Desarrollo Psicológico y Educación III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar. Alianza editorial, Madrid. P`gs 249-266

MASON, M. (1995): "Geometric Knowledge in a Deaf Classroom: An Exploratory Study". *Focus on Learning Problems in Mathemathics*. Vol. 17, (3) pàgs. 57-69

MEIRA,L (2000) Aprendizagem e ensino na internet http://www.ufpe.br/psicologia/Luciano_21.htm

MOSCHKOVICH,J.N. (1998) Rethinking authentic assessments of student, mathematical activity. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20, 4, 1-18.

PAPE, S J. & SMYTH, C (2002) Self regulating mathematics skills. In Theory into practice. http://www.findarticles.com/cf_dls/m0NQM/2_41/90190496/p1/article.jhtml?term=

PEGG,J (2003) Assessment in Mathematics. A developmental approach. In JRoyer (Ed) Mathematical cognition (pp 227-259) Greenwich,CT Information Age Publishing.

PERRENOUD,P (1999) Costruir as competências desde a escola. Porto Alegre. ARTMED Ed. [Trad de l’original Costruir les compétences dès l’école.. de 1997]

PLEISS, L. (1998): A "Hole in one" for Communication: Geometry Project Lines Up Math Skills and Hearing/ Deaf Cooperation. Perspectives in *Education and Deafness*, v. 17, pàgs 6-9

REED,JL H., SHALLERT, D.L., DEITHLOFF,L.F. (2002) Investigating the Interface Between Self-Regulation and Involvement Processes In *Educational Psychologist,* March 2002, Vol. 37: 53-57

RIEL,A (1998) Learning Communities through computer networking. En J. G. Greeno y S. V. Goldman(Eds)*Thinking practices in mathematics and science learning* Hillsdale LEA: 369-398

ROSICH, N. (1993): "La importancia del lenguaje en el aprendizaje de la geometría en los adolescentes sordos". En Beltran, J. y otros: *Líneas actuales en la intervención psicopedagógica I: aprendizaje y contenidos del currículum*. Complutense de Madrid. Madrid

ROSICH, N. (1995): "*Los niveles de pensamiento geométrico y la resolución de problemas geométricos con alumnos sordos y oyentes: implicaciones pedagógicas*". Tesis doctoral. Universidad de Barcelona

ROSICH, N.; SERRANO, C. (1998): "Las adquisiciones escolares: aprendizaje en matemàticas". En N Silvestre (coord.) *Sordera. Comunicación y aprendizaje*. Mason. Baçrcelona. pp 133-141

SADLER,R (1998) Formative Assessment Revisiting the territory. *In Assessment in Education: Policies, Principles and Practice* 5, 77-84.

SANTOS,L (2002) Auto-avaluação regulada: porquê, o quê e como? In P Abrantes& F Araujo (coord) *Avaliação das aprendizagens* Lisboa:APM pp 75-84

SANTOS,L (2003) "Avaliar competências: uma tarefa impossivel?" En *Educação Matematica* 74 (set-otubro 2003) Lisboa APM pp16-21

SFARD,A & McKlain, K (2002) Analyzing tools: Perspectives on the role of designed artifacts in Mathematics Learning. *In The Journal of the Learning Sciences* 11(2&3), 153-161

SILVESTRE,N et al (1998) *Sordera. Comunicación y aprendizaje*. Mason. Barcelona.

TOMPHSON,A (1998) A vision for distance education: networked learning environments. *Open learning* 4-11

TORRANCE, H & PRYOR,J (1998) *Investigating formative assessment. Teaching and learning in the classroom.* Buckingham Open University Press.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN,M & BECKER,J (2003) Towards a didactic model for assessment design in Mathematics Education. In A Bishop & MA Clements, C.Keitel, J Kilpatrick & FKS Leung (Eds) 2nd International Handbook of Mathematics education (pp 689-716) Dordrecht: Kluwer Ac Publishers.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN,M (1996) Assessment and realistic Mathematics Education Utrecht. CD-β Press. http://www.fi.uu.nl/~marjah/documents/3_vdHeuvel-Panhuizen.pdf

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.

VELOSO,E (1998) *Geometria.* APM. Lisboa.

VIGOTSKY,L.A. (1930 republished 1978) *Mind and society.* Harward University Press.

WENGER,E (2001) *Comunidades en práctica*. Barcelona. Paidós. Texto original Communities of practice: learning as a social system. (1998) http://www.co-I-l.com/coil/knowledge-garden/cop/lss.html

WILDING, S. & ELPHICK, R. (1987): "The Hearing Impaired School Leavers and After Educational and Employment". En Taylos, I.G. (Eds) *The Education of the Deaf - Current Perspectives*. Croom Helm.

WOOD, T. (2001) "Learning to teach Mathematics differently: Reflection matters" *Proceedings 25th PME. Utrecht, vol. IV, pp. 431-438*

WOOD, D.; WOOD, H.; HOWARTH, L. (1983): "Language, Deafness and Mathematical Reasoning". In Rogers, D.R. & Sloboda, J.A. (Eds) *The Adquisition of Symbolic Skills*.Plenum Press. New York, pàgs 233-239

WOOD, D.; WOOD, H.; GRIFFITYHS, A. & HOWARTH, L. (1986): "Thinking, Talking and Mathematical Reasoning"- En Wood, D. Et al. (Eds) Teaching and Talking wuth Deaf Children. John Wiley & Sons. London

YACKEL, E, COOB, P, WOOD, P(1992) Instructional development and assessment from a sociocon- structivist perspective, in: G. LEDER (Ed.) *Assessment and Learning of Mathematics,* pp. 63–80 (Melbourne, Victoria, The Australian Council for Educational Research)

ZACK,V y GRAVES,B (2001) Making mathematical meaning through dialogue: once you think of it, the z minus three seems pretty weird. In *Educational Studies in Matehematics*, 46: Dordrecht. 229-271.

ZIMMERMAN, B.J. (1994). Dimensions of academic self-regulation: A conceptual framework for education. In D.H. Schunk & B.J. Zimmerman (Eds.), *Self-regulation of learning and performance: Issues and educational applications* (pp. 3-21). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

ZIMMERMAN, B.J. (2000). Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P.R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13-39). San Diego, CA: Academic Press.

O ensino e a aprendizagem da matemática Em portugal: um olhar através da avaliação

LEONOR SANTOS

Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências
Centro de Investigação em Educação
Grupo de Investigação DIF – Didáctica e Formação
leonor.santos@fc.ul.pt

Resumo:

Tal como acontece na maioria dos países vivemos momentos de mudança nas orientações curriculares em Matemática. Nesta comunicação procuraremos tecer um panorama do que se passa no ensino e aprendizagem em Matemática em Portugal no ensino não superior, através de dados decorrentes da avaliação. Partindo de uma breve análise da evolução de diversos documentos curriculares nacionais com importância no país, iremos recorrer a resultados obtidos através de provas externas de âmbito nacional e diversos estudos desenvolvidos na área da avaliação.

Em termos globais, pode afirmar-se que o que é actualmente prescrito não parece ser ainda uma realidade generalizada no terreno. Práticas de avaliação muito marcadas por um ensino do passado são aquelas que em geral são ainda a prática mais usual. Encontram-se experiências de práticas inovadoras na área da avaliação desenvolvidas em investigações que apostam em contextos de trabalho colaborativo entre professores e investigadores. Mas estas experiências são em número reduzido e localizadas.

Os indicadores de que se dispõem no que respeita às práticas são coerentes com os resultados obtidos em provas a nível nacional nos diferentes ciclos de escolaridade, onde os alunos revelam grandes dificuldades em competências como o raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação. É em questões que testam o conhecimento de conceitos e procedimentos que os alunos obtêm percentagens mais elevadas de respostas certas, enfoque do ensino da Matemática do passado.

Falar-se do ensino e aprendizagem da Matemática passa necessariamente por discutir e reflectir em torno das práticas avaliativas. Entendendo a avaliação como parte integrante do currículo, a forma como se percepciona a avaliação, em particular a avaliação do desempenho dos alunos, influencia de forma decisiva o próprio ensino e consequentemente a aprendizagem. Como afirmava Paulo Abrantes "diz-me como avalias, dir-te-ei como ensinas" (1990, p. 1).

Portugal tem vivido nas últimas duas décadas um processo dinâmico de desenvolvimento curricular, nomeadamente no que respeita o currículo de Matemática.

Perceber quais as orientações curriculares e aceder às práticas que se desenvolvem no terreno são formas insubstituíveis de compreensão da realidade. Esta compreensão poderá ser mais aprofundada quando completada com os resultados do desempenho dos alunos obtidos através de processos de avaliação externa, quer sejam concebidos para aferir a qualidade do sistema, quer para dar credibilidade social aos juízos escolares dos professores, isto é, através de exames nacionais. Procuraremos, assim neste texto caracterizar a situação portuguesa do ensino e aprendizagem da Matemática a partir de um olhar feito através da avaliação. Para tal, recorremos a uma análise documental de textos que consideramos marcantes nestes últimos anos, e de estudos desenvolvidos, quer a nível nacional, quer a nível mais local.

Orientações curriculares para a avaliação

Poder-se-á afirmar que é nos finais dos anos 80 que o movimento de renovação do ensino da Matemática sofre um forte impulso em Portugal. Em 1986 é constituída a Associação de Professores de Matemática (APM). No ano lectivo de 1987/88 é anunciado como principal tema de trabalho desta associação a renovação do currículo e dos programas de Matemática. É neste âmbito que, em Abril de 1988, se realiza o seminário de Vila Nova de Milfontes que reúne 25 professores e investigadores e que vem, mais tarde, dar origem a uma publicação que contempla quatro textos base, organizados em torno dos seguintes temas: i) os grandes objectivos e as orientações fundamentais para o Ensino da Matemática; ii) a natureza e organização das actividades de aprendizagem e o novo papel do professor; iii) os computadores e as calculadoras e o processo de ensino-aprendizagem; e iv) o estilo e a organização desejáveis para o currículo de matemática nos vários níveis de ensino (APM, 1988).

Tal como é claramente explicado na introdução deste documento, nem todos os problemas cruciais da renovação curricular em Matemática são obviamente tratados, neles se incluindo "princípios, formas e instrumentos de avaliação dos alunos" (APM, 1988, p. 4). Contudo, algumas referências breves são desde logo feitas à avaliação. Como pode ler-se, existe uma chamada de atenção à forma quase única como "o sucesso ou insucesso dos alunos tem sido avaliado e medido quase exclusivamente através de provas escritas, individuais, sem consulta e em tempo limitado, as quais têm exercido uma considerável influência nas atitudes e práticas de alunos e professores" (p. 17). Entendendo o currículo como um conjunto organizado de objectivos, orientações metodológicas, conteúdos e processos de avaliação, emerge a preocupação de garantir o desenvolvimento de processos avaliativos coerentes com as outras componentes curriculares. Assim, a avaliação não deve dirigir-se apenas aos objectivos cognitivos como a memorização de factos, algoritmos, técnicas de resolução de exercícios rotineiros, aspectos preferencialmente cobertos pelas provas escritas de formato tradicional, mas igualmente incluir objectivos que traduzam capacidades ligadas a níveis elevados tanto no domínio cognitivo, como no afectivo e social. Por outras palavras, preconiza-se a utilização por parte do professor de "um amplo espectro de instrumentos de avaliação" (APM, 1988, p. 73), que esteja de acordo com os objectivos e tipos de experiências de aprendizagem. As mudanças a operar a nível da avaliação não se confinam aos procedimentos, mas igualmente ao nível das intenções, privilegiando e dando maior atenção à sua componente formativa.

Consciente da importância de atender à avaliação, considerada como uma componente indissociável do currículo, realiza-se, ainda integrado no plano de actividades da APM, um outro seminário agora totalmente dedicado ao tema da avaliação das aprendizagens. Estamos no ano lectivo de 1990/91. Discute-se o significado e implicações de "uma nova cultura de avaliação" (Pinto, 1991), e são reforçadas e desenvolvidas as questões atrás apontadas, nomeadamente a necessidade de "maior equilíbrio entre a avaliação 'classificadora' e a 'reguladora', dando a esta última mais espaço e maior oportunidade de realização" (APM; 1991, p. 51), de ajustar as experiências de aprendizagem às formas de avaliação e de reforçar o papel do aluno em todo o processo.

Novos programas para o ensino da Matemática surgem entretanto, no âmbito da reforma do ensino em Portugal que na altura está em curso. São então publicados em 1991, novos programas de Matemática para o ensino básico e secundário[1]. Uma vez mais a avaliação é abordada. Por exemplo, no currículo de Matemática do ensino básico, 2º e 3º ciclos de escolaridade, pode ler-se que porque "a avaliação assume um carácter eminentemente formativo, favorecedor da progressão pessoal e da autonomia do aluno, tem de ser integrada no processo de ensino-aprendizagem, para permitir ao aluno implicar-se no próprio processo e ao professor controlar e melhorar a sua prática pedagógica" (ME, 1991, p. 199). A auto-avaliação e a co-avaliação constituem modos de participação e implicação dos alunos na sua própria formação. O objecto de avaliação recairá nos três domínios identificados – conteúdos de aprendizagem, conhecimentos, capacidades e atitudes – em particular, no conhecimento e compreensão de conceitos e métodos, na capacidade para aplicar conhecimentos na resolução de problemas, para utilizar linguagem matemática, para comunicar ideias, para raciocinar e analisar, e na atitude face à Matemática, nomeadamente na sua confiança em fazer matemática, na perseverança na realização das tarefas e na cooperação no trabalho de grupo. Uma vez mais é feita a chamada de atenção para a adequação de se recolher à observação e registo regulares através de instrumentos diversificados e adequados, condições para se desenvolva uma avaliação formativa e contínua que contemple não só todos os domínios de aprendizagem como também respeite a diversidade individual de cada aluno.

Já em 1997, quando do ajustamento do programa de Matemática para o ensino secundário, chama-se a atenção para que "o professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos" (ME, 1997, p. 13), devendo diversificar. "Cerca de metade" (p. 13) da avaliação deve ser feita usando outros instrumentos que não os testes clássicos. É ainda fortemente recomendado que, em cada período lectivo, um dos elementos de avaliação seja uma redacção escrita matemática que reforce a importante componente da comunicação. No mesmo documento alerta-se ainda o professor para o facto de uma verdadeira preparação para o exame a nível nacional, que irá ocorrer no final deste ciclo, se faz trabalhando com regularidade e não usando instrumentos apenas com o formato de exame.

---

[1] O ensino básico obrigatório em Portugal é composto de três ciclos:
1º ciclo que inclui os quatro primeiros anos de escolaridade (dos 6 aos 9 anos de idade)
2º ciclo que inclui o 5º e 6º anos de escolaridade
3º ciclo que inclui o 7º ao 9º anos de escolaridade
O ensino secundário é constituído por três anos: do 10º ao 12º anos de escolaridade. Não faz parte do ensino obrigatório e é constituído por cinco grandes vias: o ensino científico-humanístico (vocacionado para o prosseguimento de estudos ao ensino superior de carácter universitário, preferencialmente, ou politécnico); o ensino tecnológico (com orientação dupla, para prosseguimento de estudos, preferencialmente para o ensino politécnico ou para cursos pós-secundários de especialização tecnológica); o ensino artístico; e o ensino profissional (inserção no mercado de trabalho).

No presente, com a recente reforma em curso, a avaliação toma, talvez pela primeira vez a nível institucional, um destaque muito particular. Falamos, por exemplo, na publicação de uma colectânea de textos sobre a avaliação das aprendizagens que acompanha, juntamente com outras publicações, as mudanças introduzidas no ensino básico obrigatório, designadas de uma forma geral por “Gestão flexível do currículo”. Nela são tratados temas como a avaliação de competências, os critérios de avaliação, métodos de avaliação pedagógica e a auto-avaliação regulada (ME, 2002). É também a primeira vez que a nível institucional são enunciados princípios orientadores da avaliação: da *consistência* dos procedimentos de avaliação relativamente aos objectivos curriculares e às formas de trabalho efectivamente desenvolvidas pelos alunos; o *carácter essencialmente formativo* da avaliação; a necessidade de *promover a confiança social* na avaliação, envolvendo nos seus processos alunos e encarregados de educação.

Em síntese, e do exposto, podemos afirmar que as grandes linhas orientadoras para a avaliação das aprendizagens, em particular, na Matemática, expressas nos diversos documentos com especial relevância curricular em Portugal vão na mesma linha das que se podem encontrar a nível internacional (Santos, 2003). Em particular, destaca-se (i) o para quê da avaliação, a ênfase na vertente reguladora da avaliação (Jorro, 2000; NCTM, 1989; 2000; Perrenoud, 1999), na qual se inclui a auto-avaliação (Hadji, 1997; Nunziati, 1990; Santos, 2002), (ii) o objecto de avaliação, que deve incidir sobretudo naquilo que se entende por relevante na matemática, e não apenas o que é fácil de avaliar (NCTM, 1989, 1995, 2000); (iii) a diversidade de formas e instrumentos de avaliação, de natureza formal e não formal (NCTM, 1989, 1995, 2000).

Avaliação externa de âmbito nacional

Existem alguns estudos realizados em Portugal, nestes últimos anos, que nos permitem ter alguns indicadores sobre o desempenho dos alunos em Matemática. Em particular, no que respeita ao ensino básico obrigatório iremos de seguida apresentar alguns dados sobre as provas aferidas realizadas a partir de 2000. Para o ensino secundário, iremos fazer referência a um outro estudo realizado a partir dos resultados obtidos nos exames nacionais do 12º ano.

Provas de aferição no ensino básico obrigatório

As provas de aferição inserem-se numa modalidade de avaliação externa que visa o controlo dos níveis de desempenho dos alunos e a avaliação da eficácia do ensino. Deste modo, não têm qualquer interferência na avaliação sumativa dos alunos, nem tão pouco na progressão dos alunos dentro do sistema de ensino.

As provas de aferição do ensino básico[2] na disciplina de Matemática são realizadas em anos terminais de ciclo, tendo-se iniciado em 2000 com o 4º ano de escolaridade (alunos com 9 anos de idade), alargando-se ao 6ºano (alunos com 11anos de idade) em 2001 e, finalmente, incluído também o 9º ano (alunos com 14 anos de idade) desde 2002. A partir de 2002, as provas deixaram de ser aplicadas a todos os alunos das escolas da rede pública e dos estabelecimentos de ensino particular e cooperativo que assim o

[2] A realização destas provas percorreu diversas fases e envolveu para além de muitos professores e escolas, vários organismos do Ministério da Educação: O Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE), as Direcções Regionais, o Departamento da Educação Básica e a Editorial.

solicitaram e passaram a uma amostra da população escolar do respectivo ciclo. Uma informação sobre o tipo de itens a constar nas provas, bem como as condições da sua realização e procedimentos a seguir são anualmente enviadas às escolas com alguns meses de antecedência. A realização das provas ocorre habitualmente por volta do mês de Maio, cerca de um mês antes do final do ano lectivo. As provas são realizadas nas próprias escolas onde os alunos estão matriculados. Os resultados das provas são anualmente enviados às respectivas escolas de modo a permitir uma interpretação e reflexão de natureza pedagógica, nomeadamente no sentido de promover uma discussão em torno dos resultados obtidos e o modo como foram desenvolvidas e concretizadas localmente as orientações curriculares (ME, 2002).

As provas de aferição contêm, em cada ano, itens que incluem os quatro temas matemáticos aglutinadores contemplados no currículo nacional:

- Números e cálculo, grandezas e medida, forma e espaço, organização e recolha de dados, para o 4º ano de escolaridade;
- Números e cálculo, geometria, estatística, para o 6º ano de escolaridade;
- Números e cálculo; geometria, estatística e funções, para o 9º ano

Foram ainda definidas quatro tipos de competências: conhecimento de conceitos e procedimentos; resolução de problemas, raciocínio e comunicação. Não é referida qualquer tipo de hierarquia entre este tipo de competências.

A cada item são atribuídos códigos a que correspondem níveis de desempenho: código 0 que corresponde ao nível mais baixo (resposta incorrecta ou ilegível); código máximo (resposta correcta) e códigos intermédios que correspondem a respostas que se aproximam ou afastam da resposta correcta. É ainda atribuído um código especial para a não resposta.

A título de exemplo, indicam-se de seguida alguns itens aplicados nas provas de 2001.

Item para o 4º ano de escolaridade, do tema *Números e Cálculo,* competência *Conhecer conceitos/procedimentos*:

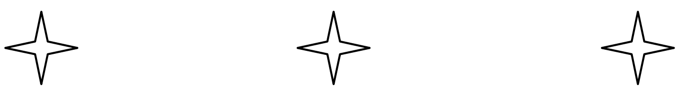
<u>Item 16</u>:
Assinala com **X** o número que pode ser o resultado da multiplicação de um número inteiro por 5.

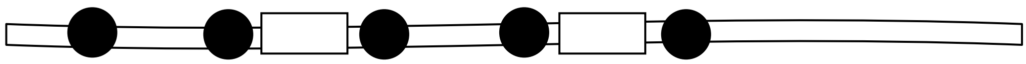
☐58 ☐ 82 ☐ 125 ☐ 519

Códigos para classificação desta pergunta:
Código 0: Qualquer resposta incorrecta
ou
Assinala mais do que uma resposta.
Código 1: Resposta correcta: 125

Item para o 4º ano, do tema *Forma e espaço,* competência *raciocínio*:

<u>Item 20</u>:
A Marta está a fazer uma pulseira e já colocou no fio as peças que tu vês na figura.
Continuando o padrão, desenha as três peças seguintes no fio da pulseira.





Códigos para classificação desta pergunta:
Código 0: Não desenha as três peças seguintes por ordem
ou
Desenha apenas uma peça.
Código 1: Desenha as três peças seguintes correctamente, mas desenha mais peças que não obedecem à ordem.
Código 2: Desenha apenas as duas peças seguintes correctamente.
Código 3: Desenha correctamente as três peças seguintes
Ou
Desenha mais peças correctamente

Item para o 6º ano, do tema *Geometria*, competência *resolução de problemas*:

Item 9:
O rectângulo e o quadrado da figura têm o mesmo perímetro.

14cm

7cm

Tendo em conta os dados da figura, calcula, em centímetros, a medida do **lado do quadrado**.
Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas ou cálculos.

Códigos para classificação desta pergunta.
Código 0: Apresenta simplesmente uma outra resposta, além das mencionadas
Ou
Os dados são copiados do enunciado e existe, eventualmente, algum trabalho de compreensão do problema.
Código 1: Utiliza uma estratégia apropriada, mas incompleta, de resolução do problema, podendo ter, ou não, alguns erros de percurso
Ou
Responde 10,5cm, sem apresentar uma explicação compreensível ou sem apresentar uma explicação
Código 2: Utiliza uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas comete um pequeno erro de percurso
Apresenta a resposta de acordo com a estratégia escolhida e com o erro cometido.
Código 3: Utiliza uma estratégia apropriada de resolução do problema.
Responde correctamente à pergunta **ou**, embora não respondendo explicitamente à pergunta, há evidência de ter chegado à resposta correcta.

Item para o 6º ano de escolaridade, do tema *Números e Cálculo*, competência de *comunicação*:

Item 17:
A Carla comeu metade de um chocolate
A Sara comeu metade de outro chocolate

Lê os seus comentários:
Carla: *Comi mais chocolate do que tu.*
Sara: *Não é verdade, comeste exactamente a mesma quantidade de chocolate do que eu.*

A Carla tem razão no que diz.
Explica como é possível a Carla ter comido mais chocolate do que a Sara.

Códigos para classificação desta pergunta:
Código 0: Apresenta um exemplo que não corresponde a uma situação em que Carla tenha razão ou resposta incompreensível.
Código 1: Escreve uma frase que transmite a ideia de que os chocolates têm tamanhos diferentes.
Código2: Resposta correcta. Escreve uma frase que transmite a ideia de que o chocolate de Carla tem de ser maior.

Exemplos de respostas dadas:
Código 0:
"Isto nunca pode acontecer, elas comem as duas a mesma coisa."
"A situação em que ela tem razão é que comeu chocolate."

Código1:
"Os chocolates tinham de ser diferentes."
A situação em que Carla tem razão é que o seu chocolate pode ser maior ou menor do que o outro."

Código 2:
"A Carla tem razão, porque a metade do chocolate dela pode ser maior do que a metade do chocolate da Sara."
"A Carla tem razão se o chocolate dela for maior do que o da Sara. Se os chocolates forem do mesmo tamanho, não tem razão."

Em termos de resultados obtidos gostaríamos de chamar a atenção para o facto de que se desconhecem estudos que nos permitam afirmar que os testes ao longo dos anos são comparáveis, nomeadamente se existe ou não correlação entre resultados de itens nos diferentes anos, se o grau de dificuldade se mantém o mesmo, qual a variação decorrente de razões externas, como seja modo de questionar, contexto, etc… É ainda de fazer notar que nem todas as competências têm o mesmo número de itens, estando, por exemplo, a comunicação representada nalgumas das provas por um número muito escasso de itens (ver Anexo I). Com esta ressalva, destacamos de seguida alguns dos resultados obtidos e que podem ser lidos em relatórios ou páginas do Ministério da Educação:

- Ao nível do 4º ano, o conhecimento de conceitos e procedimentos é a competência que apresenta uma percentagem de alunos com código máximo mais elevado nos resultados de todos os anos (65% em 2000; 67% em 2001; 75% em 2002 e 68% 2003). Segue-se-lhe o raciocínio (45% em 2000; 59% em 2001; 50% em 2002 e 35% em 2003). A resolução de problemas, nos primeiros anos apresenta valores mais baixos (apenas 34% de alunos obtêm cotação máxima em 2000; 26% em 2001; e cerca de 50% nos dois anos seguintes). Por último, a comunicação, é a competência que apresenta valores mais baixos (17% em 2000, 1% em 2001; cerca de 37% em 2003 e obtém cerca de 23% em 2003). No entanto, é salientado que esta competência em 2001 era ainda pouco valorizada em termos curriculares, havendo apenas dois itens que a cobriam. No que respeita à distribuição por temas matemáticos, em 2001, afirma-se decorrente dos resultados obtidos que é na área temática “Organização e Recolha de dados” que se observa maior percentagem de alunos nos níveis mais elevados (59%). Segue-se-lhe “Forma e espaço” com 54%; “Números e Cálculo” com 53% e, por último, grandezas e medida com 46%. Uma informação que não pode ser ignorada diz respeito à percentagem de respostas com código zero. Em 2000, em termos globais atingiu 32%, em 2001 28% e em 2003 cerca de 35% .

- No 6º ano de escolaridade, não só os resultados são em geral mais baixos, mas também existem algumas variações. O conhecimento de conceitos e procedimentos apresenta maior percentagem de alunos com código máximo quando comparado com as outras competências em 2001, mas tal comportamento não se mantém nos anos seguintes (54% em 2001 para 48% no raciocínio; 30% na resolução de problemas e 28% na comunicação; 30% em 2002, para 38% no raciocínio, 24% na resolução de problemas, 16% na comunicação; e 30% em 2003 para 35% no raciocínio; 20% na resolução de problemas e 10% na comunicação). No que respeita à distribuição por temas matemáticos, em 2001, a Estatística é o tema que apresenta maior número de alunos com pontuação máxima (58%), seguindo-se-lhe a “Geometria” (43%) e, por último, “Números e cálculo” (35%). Em termos globais, em 2001, houve uma percentagem de 35% de respostas com código zero e em 2003, a percentagem é de cerca de 43%.

- No 9º ano de escolaridade, no que respeita ao conhecimento de conceitos e procedimentos (cerca de 45% dos alunos obtiveram cotação máxima em 2002, e cerca de 53% em 2003). A comunicação apresenta uma percentagem de alunos que obtém cotação máxima que ronda os 34%, em 2002, e 44% em 2003. Ao nível do raciocínio as percentagens são mais baixas em ambos os anos (cerca de 26% em 2002, e 24% em 2003). A resolução de problemas apresenta do mesmo modo valores igualmente baixos (de cerca de 25% em 2002, e de 15% em 2003). Em termos globais em 2003, foi atribuído código zero a cerca de 35% dos alunos.

Como pode ler-se num relatório publicado temporariamente na Internet relativo aos resultados de 2003, “em termos globais, os alunos do 4º ano revelam melhor desempenho; verifica-se um desnível nas taxas de sucesso do 4º para o 6º ano e há uma recuperação do 9º ano relativamente aos resultados do 6º”. Fica a questão de saber até que ponto um sistema educativo com reprovações anuais e uma taxa de abandono elevado como se verifica em Portugal[3], não poderão ter contribuído para esta situação.

Exames nacionais no ensino secundário

O GAVE (Gabinete de avaliação educacional), entidade pertencente ao Ministério da Educação, desenvolveu um estudo a partir das provas de exame (nível nacional) do 12º ano (ano terminal do ensino secundário) de 2000 e 2001 (GAVE, 2002). Os exames a nível nacional do 12º ano são elaborados tendo por base os programas em vigor e as respectivas orientações de gestão do programa. Este estudo teve por base o desempenho

[3] A percentagem de indivíduos em idade de escolaridade obrigatória (dos 6 aos 15 anos) que abandonaram a escola antes de completar o 9º ano de escolaridade é, em 2001, de 1,7% e a percentagem de indivíduos dos 18 aos 24 anos que saíram da escola antes de completar a escolaridade obrigatória é, em 2001, de 24,6%.

de alunos em cada um dos itens incluídos nas provas de 1ª e 2ª chamadas correspondente a uma amostra de 50 escolas, previamente definidas de forma a representar o universo das instituições em que têm lugar os exames nacionais. Foram considerados quatro indicadores de desempenho:

- a percentagem de examinandos com cotação total no item;
- a percentagem de examinandos com cotação nula no item;
- a percentagem de examinandos com cotação maior ou igual a 50% da cotação total atribuída ao item;
- a percentagem da cotação média em relação à cotação total do item.

Nas conclusões deste estudo pode ler-se que, da análise das questões de resposta aberta, o desempenho dos alunos não depende em geral dos temas matemáticos considerados – Funções, Complexos e Probabilidades – nem dos conteúdos no âmbito de cada tema. O mesmo parece já não acontecer nas questões de escolha múltipla, são nas questões relativas às Funções que os alunos obtêm melhor desempenho e nas dos Complexos desempenhos mais baixos. Mas, dado o número reduzido de questões deste último tema, não é possível extrair conclusões válidas. É igualmente chamada a atenção para a importância da fiabilidade da classificação das questões de resposta aberta. Procurou-se, como é afirmado, elaborar de forma cuidadosa cotações intermédias estabelecidas nos critérios de classificação e garantir o rigoroso cumprimento por parte dos classificadores.

De acordo com os resultados obtidos (ver Anexo II), as principais conclusões que se podem ler deste estudo indicam que o desempenho dos alunos no exame do 12º ano, em 2000 e 2001, é:

i) bom, nas questões que testam apenas o conhecimento e conceitos (64% dos examinandos obtiveram cotação total nas questões de escolha múltipla e 68% nas questões de resposta aberta);

ii) razoável nas questões que testam o conhecimento de propriedades, a capacidade de resolução de problemas simples e/ou a aplicação a situações simples da vida real e a capacidade de comunicação (nas questões de escolha múltipla nas duas primeiras competências, a percentagem de alunos com cotação total foi, respectivamente, de 56% e 44%; e nas questões de resposta aberta, foi respectivamente de 26%, 25%, 11% e com cotação maior ou igual a 50% foi respectivamente de 55%, 58% e 43%);

iii) mau nas questões que testam a aplicação a situações novas, a destreza de cálculo, a resolução de problemas e/ou a interpretação de resultados, a utilização da calculadora e as conexões entre diferentes temas (nas questões abertas, a percentagem de alunos que obtiveram cotação total em cada uma destas competências foram, respectivamente, 10%, 5%, 11%, 8% e 11%, e com cotação maior ou igual a 50% da cotação total, de 21%, 27%, 23%, 25% e 18%);

iv) muito mau nas questões que testam a capacidade de desenvolver raciocínios demonstrativos (nas questões abertas, apenas 5% dos alunos obtiveram cotação total e 12% cotação maior ou igual a 50% da cotação total).

Avaliação interna

O desenvolvimento dos processos avaliativos na prática lectiva dos professores tem sido estudado em Portugal ainda de forma pouco alargada. O primeiro estudo inteiramente dirigido à área da avaliação das aprendizagens em Matemática data de 1992 e, daí até à actualidade, apenas mais cinco foram concluídos. Três deles tiveram por objecto primordial de estudo professores, nomeadamente as suas concepções e práticas de avaliação, e os restantes incidiram na aplicação e análise de instrumentos de avaliação. Embora de forma menos evidenciada, a opinião dos alunos, num ou noutro caso, foi igualmente considerada. Os níveis de escolaridade abrangidos foram o 2º e 3º ciclos do ensino básico e o ensino secundário. Todos os seis estudos foram realizados no âmbito de mestrados em educação. Há a acrescentar outros estudos desenvolvidos de forma menos aprofundada e sistemática a que faremos referência numa ou noutra situação.

Em particular, nos trabalhos que incidiram sobre professores, refira-se Maria Margarida Graça que, em 1995, estuda as relações entre as concepções acerca da avaliação e, em particular da avaliação da resolução de problemas, e as respectivas práticas pedagógicas de quatro professores de Matemática do 3º ciclo, pertencentes a escolas diferentes e a leccionarem respectivamente o 8º e 9º anos. No ano seguinte, Maria da Paz Martins, publica um estudo que tem como principal objectivo identificar e compreender as concepções sobre a avaliação das aprendizagens, tomando em linha de conta as práticas de três professoras de Matemática do ensino secundário a leccionarem o 11º ano, de uma mesma escola. Finalmente, já em 1998, Amélia Rafael, volta a reequacionar o estudo das concepções e práticas de avaliação, envolvendo três professores do ensino secundário, que leccionam numa mesma escola todas as turmas do 10º ano.

No grupo de investigações que procuraram estudar instrumentos de avaliação, Leonor Cunha Leal, em 1992, analisa um conjunto diversificado de instrumentos, trabalhados num contexto de inovação curricular, o projecto Mat_{789} (Abrantes et al., 1997), que cobriu o 3º ciclo do ensino básico, em particular duas turmas de 8º ano de escolaridade, pertencentes a duas escolas diferentes. Mais recentemente, em 2000, José Manuel Varandas desenvolve uma investigação que teve como principal objectivo estudar o processo de avaliação do desempenho de alunos de duas turmas do 10º ano do ensino secundário de duas escolas na realização de tarefas de investigação matemática. Por último, em 2004, Hugo Menino analisa a utilização de diversos instrumentos alternativos de avaliação em Matemática, desenvolvidos num contexto de trabalho colaborativo envolvendo quatro entre professores de Matemática do 2º ciclo do ensino básico e o investigador.

Embora ainda em fase de desenvolvimento, tomaremos em linha de conta um último estudo de Paulo Dias que procura compreender o tipo de recursos que alunos do ensino secundário, 10º ano de escolaridade, fazem apelo para ultrapassar as suas dificuldades quando resolvem tarefas de investigação matemática.

É ainda de assinalar que todos estes estudos seguiram uma abordagem metodológica de cunho interpretativo, tomando na sua maior parte a forma de estudos de caso. Em todos eles foram utilizados como instrumentos de recolha de dados entrevistas semi-estruturadas, observação e análise documental. Num ou noutro estudo, recorreu-se também à aplicação de questionários.

Iremos igualmente fazer referência a um estudo desenvolvido pela APM, de 1996 a 1998, que teve como propósito elaborar um diagnóstico e um conjunto de recomendações sobre o ensino e a aprendizagem em Portugal (APM, 1998). Embora incidindo em domínios mais abrangentes do ensino e aprendizagem da Matemática, é possível encontrar alguns indicadores sobre a avaliação das aprendizagens. A recolha de dados foi feita através da aplicação de um inquérito aplicado a uma amostra estratificada de professores de todos os níveis de escolaridade do ensino não superior, construída a nível do território do continente e a entrevistas colectivas feitas a partir de um guião previamente definido e realizadas aos professores do conselho escolar no 1º ciclo e do grupo de Matemática, nos restantes ciclos.

A avaliação no quotidiano da sala de aula

A importância da vertente reguladora da avaliação tem sido largamente enunciada nos diversos documentos curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática. Contudo, dos estudos de que dispomos, não emerge de forma clara e inequívoca a importância que esta modalidade de avaliação, nomeadamente na sua expressão mais informal, tem merecido por parte dos professores. Este facto é coerente com o significado fortemente classificativo que a avaliação assume para os professores. Parece verificar-se ainda hoje uma herança cultural muito forte de uma concepção de avaliação mais ligada à ideia de medida, paradigma vigente durante mais de um século no sistema escolar (Noizet & Caverni, 1978; Guba & Lincoln, 1989). A avaliação encarada como classificação, embora não sendo bem aceite pelos professores estudados por Graça (1995), é aquela que de imediato surge ao falar-se de avaliação. Apenas num segundo nível de reflexão, os professores associam a avaliação à sua vertente reguladora. Também dos três professores estudados por Rafael (1998), apenas um se refere de imediato às duas modalidades de avaliação, reguladora e classificativa.

No que respeita uma avaliação que acompanhe o dia-a-dia da sala de aula, dirigida essencialmente à regulação das aprendizagens, segundo Graça (1995), Martins (1996) e Rafael (1998), os professores recorrem sobretudo à observação e ao questionamento dos alunos. Procurando essencialmente compreender certas atitudes dos alunos e apreciar a forma como comunicam os seus raciocínios, o desenvolvimento de uma avaliação reguladora é marcado por grande informalidade. Em geral, a recolha de informação não é acompanhada de registos, nem tão pouco é feita de forma sistemática e estruturada.

Já no que respeita a estratégias desenvolvidas pelos alunos para ultrapassarem as suas dificuldades enquanto desenvolvem investigações matemáticas na sala aula, Paulo Dias numa investigação que está ainda a desenvolver, estuda em particular um aluno do 10º ano de escolaridade, o Lourenço. Os primeiros resultados apontam que este aluno recorre a diversos tipos de estratégias. Para a compreensão da tarefa, estabelece uma análise comparativa com experiências vividas anteriormente. A título de exemplo, refira-se que numa tarefa, depois de realizar sucessivas leituras da proposta de investigação, exclamou para os outros alunos que com ele interagiram: “Isto não foi aquilo que fizemos na outra aula: ângulos iguais e lados iguais?”. Durante o desenvolvimento da tarefa, auto-avalia o seu trabalho de forma sistemática, usando como sistema de referência os seus conhecimentos, procurando justificar as suas conclusões parcelares para as validar ou encontrar incorrecções, recorrendo a diversas interacções, quer com os colegas, quer com o professor, ou ainda consultando o sue livro de texto: “Sinceramente, …não temos conhecimentos para fazer isto, vamos ao livro!”.

Dos dados de que dispomos podemos avançar que a avaliação enquanto processo regulador da aprendizagem desenvolvido no quotidiano do trabalho da sala de aula não parece ser o meio onde os professores mais apostam para ajudar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades. Segundo a APM (1998), os professores de Matemática dos diferentes níveis de ensino propõem 31% dos seus alunos para apoio pedagógico acrescido, isto é, para um acréscimo do tempo lectivo em Matemática. Esta percentagem vai crescendo ligeiramente com a progressão dos níveis de escolaridade (26% no 2º ciclo, 32% no 3º e 38% no secundário). A forma mais comum de concretizar este apoio é o trabalho individualizado (68% referido pelos professores do 2º ciclo, 53% do 3º e 71% do ensino secundário). Apenas uma pequena minoria de professores (10%) afirma recorrer a estratégias alternativas, como seja, metodologias de ensino específicas, recurso a materiais didácticos particulares e manipuláveis, actividades lúdicas e trabalho de grupo.

Momentos formais de avaliação

Questionados quanto aos instrumentos de avaliação que utilizam para recolha de informação, os professores indicaram no estudo desenvolvido pela APM (1998), usar as seguintes formas de recolha de informação, *sempre* e *em muitas aulas*:

Práticas de avaliação

(soma das percentagens atribuídas aos valores mais elevados sempre ou em muitas aulas)

Instrumentos de avaliação	Total %	2º ciclo %	3º ciclo %	Ens. sec. %
Observação do trabalho na aula	92	95	93	88
Testes escritos	82	73	78	94
Questões orais	74	80	70	71
Trabalhos escritos/relatórios	33	40	32	26
Projectos	3	2	3	3

(APM, 1998, p. 41)

Da leitura da tabela, pode ver-se que existe uma relativa uniformidade nas respostas obtidas ao longo dos ciclos. A observação do trabalho na aula é a forma utilizada por uma esmagadora maioria dos professores, sendo a mais usada em qualquer nível de ensino, à excepção do ensino secundário, onde em primeiro lugar se encontra o teste escrito. Enquanto a observação e os trabalhos escritos/relatórios registam um pequeno decréscimo ao longo da escolaridade, o teste escrito apresenta uma evolução em sentido contrário, aumenta ligeiramente à medida que se vai progredindo. As questões orais apresentam um ligeiro decréscimo, mas apenas do 2º para o 3º ciclo de escolaridade.

Como pode ler-se no relatório deste estudo, embora os projectos sejam utilizados muito frequentemente por um grupo reduzido de professores, aqueles que "ainda os utilizam algumas vezes ainda assume uma expressão significativa no 2º ciclo (29%), sendo mais reduzido no 3º ciclo e no ensino secundário (20% e 14%)" (APM, p. 42).

Quanto ao peso que estas diversas formas de recolha de informação têm na atribuição de uma classificação final dos alunos, algumas diferenças são apontadas quando comparadas com os dados anteriores. Assim, embora cerca de metade dos professores do 2º ciclo (52%) continuem a colocar em primeiro lugar a observação das aulas, no 3º ciclo e no ensino secundário é o teste escrito o que ocupa o primeiro lugar (56% e 75%, respectivamente). Peso semelhante às práticas dos professores é encontrado – as questões orais ocupam o 3º lugar, os trabalhos escritos/relatórios o 4º e os projectos o 5º lugar (APM; 1998).

Os estudos qualitativos sobre as práticas de professores já referidos apontam para resultados idênticos ao apresentados neste relatório. Em particular, o teste escrito é o instrumento preferencialmente utilizado por todos os professores (Graça, 1995; Martins, 1996; Rafael, 1998).

Segundo Graça (1995), os professores aplicam dois testes escritos por período lectivo. Reconhecendo que este tipo de instrumento é redutor, dado não cobrir diversos aspectos da Matemática, nomeadamente a resolução de problemas, três dos quatro professores recorrem a variantes do teste tradicional, nomeadamente em duas partes, durante a mesma aula, sendo a primeira com perguntas mais fechadas e resolvido individualmente e a segunda com perguntas mais abertas e resolvido ou em pares ou em grupo de mais de dois alunos, ou com "cábulas" ou com consulta. A resolução escrita de tarefas realizadas na aula ou a realização de relatórios escritos, de trabalhos de casa ou de jogos, são igualmente utilizados na sua prática avaliativa, embora lhe atribuam menos peso que o teste escrito.

Também as professoras estudadas por Martins (1996) utilizam preferencialmente os testes escritos, informando os alunos previamente sobre a data da sua realização e os temas matemáticos que serão abordados. Uma das professoras recorre ainda a outros trabalhos, como sejam relatórios escritos e apresentação oral.

Os professores estudados por Rafael (1998) justificam utilizar preferencialmente o teste escrito porque consideram este instrumento mais objectivo quando o comparam com outros e, porque lhes oferece segurança, tendo em conta o número elevado de alunos. Os testes apresentam uma estrutura semelhante nos três professores, e incluem questões relacionadas com aquilo que foi trabalhado na sala de aula.

Em contextos de inovação ou de colaboração entre investigador e professores no terreno foram experimentados e estudados em particular formas de recolha de informação, algumas delas habitualmente pouco utilizadas em Portugal (APM, 1998). Vejamos de seguida quais os principais resultados encontrados para o uso de relatórios, testes em duas fases, apresentação oral e portefólios.

O <u>relatório escrito</u>, instrumento de recolha de informação também usado por alguns professores dos diferentes níveis de ensino (APM, 1998; Graça, 1995) foi sujeito a um estudo mais sistemático por Menino (2004) no 2º ciclo de escolaridade, por Leal (1992) no 3º ciclo e por Varandas (2000) no ensino secundário. Nestes estudos, foram experimentadas e analisadas diversas modalidades de relatórios, como seja, o realizado em grupo e individualmente, na sala de aula ou fora dela. Para Menino (2004), o uso do relatório possibilitou a prática de uma avaliação reguladora das aprendizagens, já que o facto de ter havido uma primeira versão, sujeita a comentários formativos, e os alunos terem tido posteriormente possibilidade de a aperfeiçoar, parece ter sido favorável ao desenvolvimento de uma prática formativa, centrada no professor, e de uma prática de auto-avaliação, centrada no aluno. No caso de Varandas (2000), os relatórios realizados individualmente permitiram, na perspectiva das professoras, formar uma imagem mais nítida dos alunos sendo aqueles que serviram de forma mais adequada o uso sumativo da avaliação. Ainda segundo estas professoras, a avaliação deste instrumento deverá ser completada com as informações recolhidas durante a observação da realização da tarefa, dado nem sempre este trabalho escrito fazer jus à riqueza da exploração da tarefa realizada.

Em termos globais, os aspectos matemáticos que preferencialmente este meio permite desenvolver nos alunos são, segundo Leal (1992), no domínio cognitivo, capacidades como a comunicação, a interpretação, a reflexão, a exploração de ideias matemáticas e o espírito crítico, e, no domínio afectivo, o sentido da responsabilidade pessoal e de grupo, a perseverança e a relação entre os alunos. Também uma professora estudada por Menino (2004) faz referência explícita a aspectos relativos à expressão escrita, à organização de ideias, à construção de cadeias lógicas de pensamento e à autonomia. Uma outra reafirma a comunicação matemática, aspecto onde os alunos revelam dificuldades "tem a vantagem de colocar a ênfase nas capacidades de comunicação escrita, onde habitualmente há muitas falhas" (p. 128). Uma terceira professora destaca a reflexão sobre a actividade matemática, "o relatório mostra-me como os alunos pensam e o modo como organizam o seu pensamento" (p. 128).

Para as professoras envolvidas no estudo de Leal (1992), a realização da proposta de trabalho não apresentou dificuldades aos professores e o tempo gasto foi considerado reduzido, sendo assim o seu grau de aplicabilidade visto como elevado. Quanto à sua adaptabilidade a outros contextos foi considerada como condição necessária os alunos terem já desenvolvido uma dinâmica de trabalho de grupo. Já no estudo de Menino (2004) são salientadas desafios acrescidos na gestão da aula em que o instrumento é utilizado, nomeadamente nas incertezas sentidas quanto à transferência de um maior grau de liberdade a dar ao aluno. Também a classificação destes trabalhos revelou-se problemática. Para estas professoras, o principal desafio residiu no uso de critérios, tendo em atenção as características individuais dos alunos. Segundo Varandas (2000) no caso particular do trabalho e relatório serem feitos ambos individualmente e na sala de aula, logo em tempo limitado, as professoras não puderam dispor de informações recolhidas através da observação, dado o número de alunos a observar, informação considerada como essencial para completar a que é possível recolher através dos relatórios.

Os alunos revelaram uma boa aceitação relativamente a esta forma de avaliação, especialmente no caso de ser em grupo e de ter sido realizado na aula. A componente escrita do trabalho foi vista, de uma forma geral, pelos alunos como dificultando a realização da tarefa (Leal, 1992). Também segundo Varandas (2000) os alunos valorizaram o facto de ser em grupo e, na sua grande maioria, consideraram pertinentes os comentários que receberam. Contudo, exactamente pelo facto de ser em grupo, os alunos vêem-no como impeditivo de ser muito valorizado pelas professoras e de ser revelador do seu trabalho, em termos individuais. Deste modo, manifestaram maior adesão aos relatórios individuais, resultantes de um trabalho realizado em grupo, argumentando que, por um lado, continuando o desenvolvimento da tarefa a ser feita em grupo, favorece a troca de ideias e, por outro, o facto do relatório ser individual, permite que os professores avaliem o seu trabalho de uma forma mais "precisa" e "correcta".

O <u>teste em duas fases</u> foi outro instrumento estudado. Entende-se por teste em duas fases um teste que é realizado em duas etapas. Uma primeira, na sala de aula em tempo limitado e uma segunda fora da sala de aula. Entre a primeira e a segunda fase, o professor comenta as respostas dadas pelo aluno na primeira fase e entrega-a ao aluno para que este possa dispor desta informação no trabalho a realizar na segunda fase. Este teste deverá incluir perguntas de natureza mais aberta.

Segundo Menino (2004), as professoras do 2º ciclo participantes no estudo são unânimes em relação às vantagens da utilização deste tipo de instrumento, em especial quanto ao facto do erro ser encarado como uma possibilidade de realizar novas aprendizagens. Também a ênfase na avaliação enquanto elemento ao serviço da aprendizagem é destacada no estudo de Leal (1992) desenvolvido a nível do 3º ciclo, 8º ano de escolaridade. O facto de existir uma segunda fase, permite, deste modo, que o aluno volte a repensar sobre algumas das questões colocadas, permitindo-lhe desenvolver novas aprendizagens. A possibilidade que os alunos têm de corrigir e reflectir sobre os seus erros ao elaborarem a 2º fase é igualmente salientada por Martins et al. (2003) agora com alunos do secundário. Qualquer destes autores chama a atenção para importância da elaboração de comentários escritos à primeira fase do teste por parte dos professores.

São diversos os aspectos matemáticos que este instrumento pode cobrir. Segundo Leal (1992), este instrumento favorece o desenvolvimento de capacidades como a comunicação, a interpretação, a reflexão e a exploração de ideias matemáticas; e contribui para a auto-confiança do aluno na sua relação da Matemática; o sentido da responsabilidade; a perseverança; e o empenhamento nas tarefas. Dada a natureza aberta de algumas das questões, a valorização dos raciocínios e a comunicação matemática são particularmente destacados por Martins et al. (2003). Ainda, segundo Menino (2004), a existência de uma segunda fase, favorece o desenvolvimento das capacidades de análise e reflexão, estimula o sentido crítico, o empenho e perseverança nas tarefas. Contudo, as professoras participantes neste estudo assinalam que a faixa etária dos alunos constituiu um condicionante importante. No entanto, a identificação desta dificuldade não implica o não recurso a este instrumento, mas antes pelo contrário, no reconhecimento de que é fundamental desde cedo que sejam proporcionadas experiências deste tipo para que os alunos possam aos poucos ir desenvolvendo estas capacidades.

A dificuldade na elaboração deste tipo de teste e o tempo gasto na sua classificação, superior ao de dois testes de tipo tradicional, foram condicionantes, para o professor, apontadas por Leal (1992) e Menino (2004). Para professores com pouca experiência em fazer comentários formativos a produções de alunos o comentar a primeira fase constituiu também um desafio, dado que "é necessário decidir o que escrever e como escrever de tal modo que não seja dada a resposta ao aluno de forma imediata, mas também não seja redigido um comentário tão geral que não o possa auxiliar" (Menino, 2004, p. 175). Contudo, os comentários que os professores fazem, "dada a sua natureza personalizada, promovem uma maior proximidade entre aluno e professor" (Martins et al., 2003, p. 46). Podem ainda verificarem-se dificuldades de compreensão e de aceitação de forma imediata dos alunos a este instrumento. "Não basta que o professor explique o funcionamento do instrumento, os alunos têm de viver o processo." (Menino, 2004, p. 174) Apenas após a vivência de uma primeira experiência os alunos compreendem que estão a trabalhar com um instrumento que em muito se distingue de um teste de tipo tradicional, acompanhado da sua correcção (Leal, 1992).

Os alunos revelam, em geral, um elevado grau de aceitação, destacando, em particular, o forte contributo que tal instrumento dá ao processo de aprendizagem:

> Fazer desta maneira os testes de matemática é uma outra maneira de aprendermos. (Leal, 1992, p. 258)

> Eu sou de opinião que aquele teste é ou foi um bom instrumento de aprendizagem (…) Na segunda fase os alunos têm possibilidade de corrigir os erros efectuados na primeira fase e ao corrigir os erros do passado, as pessoas estão a aprender para que no futuro esses erros não se repitam. (Martins et al., 2003, p. 47)

Esta posição favorável dos alunos não veio sequer a ser afectado pelo descontentamento que alguns deles disseram sentir face à classificação que obtiveram.

A apresentação oral como fase final de um trabalho desenvolvido em grupo é uma outra forma de avaliação. Segundo Leal (1992), a apreciação das duas professoras participantes não foi coincidente dada a diversidade de experiências vividas nas duas turmas. Vista à partida como um meio de desenvolver a comunicação oral e o gosto de os alunos se relacionarem uns com os outros, após a experiência desenvolvida, uma das professoras considerou este último objectivo não atingido, enquanto a outra professora, não excluindo nenhum deles, acrescentou um outro, o de conhecer e compreender conceitos e processos matemáticos, uma vez que foi possível identificar falhas de aprendizagem, que foram posteriormente tema de discussão entre professor e alunos. Quanto ao seu grau de aplicabilidade não se verificaram problemas na fase de preparação e de aplicação, sendo indicadas algumas dificuldades na atribuição da classificação final, decorrente, segundo as professoras, da sua pouca prática nesta forma de avaliação. Quanto à sua adaptabilidade, as posições não foram concordantes. Enquanto uma professora defendeu a sua aplicação noutras turmas, a outra levantou muitas reservas, admitindo voltar a fazê-lo apenas se fosse um trabalho individual ou no máximo em grupos de dois. Das formas de avaliação estudadas esta foi a que mereceu menor aceitação por parte dos alunos de uma das turmas pelos conflitos que desencadeou e por criar uma certa tensão entre eles, associada à sua exposição pública (Leal, 1992). No processo desenvolvido em Varandas (2000), as professoras introduziram a condição de todos os alunos terem de ter uma intervenção activa na apresentação oral. O facto de não existir nenhum suporte escrito levantou alguma preocupação às professoras. Os alunos tiveram opiniões bastante diversificadas face a este instrumento. Como vantagem, foi indicada a facilidade que alguns alunos sentem em exprimirem-se oralmente e, como desvantagem, tornar-se um processo repetitivo, podendo favorecer os alunos que apresentam em último lugar.

Por último, apresentam-se ainda alguns resultados decorrentes do estudo do uso de portefólios. Menino (2004) destaca duas consequências interessantes não referidas nos instrumentos anteriores. Por um lado, os elementos reflexivos constituintes do portefólio foram informantes essenciais sobre a progressão de cada aluno, permitindo, deste modo, que o carácter normativo da avaliação, comparação de cada aluno com uma norma, fosse minimizado, passando cada aluno a ser comparado consigo próprio. Por outro, em particular numa das professoras participantes no estudo, a utilização do portefólio revelou-se particularmente marcante para reflectir sobre a sua acção pedagógica, sobre o tipo de tarefas que propõe e sobre a avaliação que pratica. Para Lourenço & Paula (2003), que trabalharam igualmente com alunos do 2º ciclo, foi ainda destacado o envolvimento dos pais que ao contrário do que habitualmente sucedia, passaram a intervir sobretudo “como parceiros educativos e não como consumidores” (p. 14).

São múltiplos os aspectos identificados por Menino (2004) como preferencialmente desenvolvidos através do o uso de portefólios. São referidos, por exemplo, a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação, a organização, a criatividade, hábitos de trabalho e competências reflexivas e metacognitivas. A estes aspectos são ainda acrescentados a influência que este instrumento pode ter no desenvolvimento das concepções dos alunos sobre o que significa saber e fazer Matemática e o envolvimento afectivo destes na construção do seu portefólio. Um conhecimento mais profundo de cada aluno por parte do professor é outra potencialidade apontada por Lourenço & Paula (2003).

Contudo, dos diferentes instrumentos estudados pode dizer-se que o portefólio parece ser aquele que levanta maiores dificuldades aos professores. Note-se que no estudo desenvolvido por Menino (2004) o portefólio é o único instrumento que acaba por não ser trabalhado por todos os professores, duas das quatro professoras acabaram por abandonar o seu uso. Estas professoras identificaram factores de ordem pessoal, baixas expectativas em relação a este instrumento, e factores de ordem profissional, nomeadamente o elevado volume de trabalho que o uso do instrumento envolve, a dificuldade de comentar os trabalhos e de analisar as reflexões dos alunos. Estas razões de ordem externa foram igualmente enunciadas para justificar que apenas uma das professoras do estudo de Lourenço & Paula (2003) tenham dado continuidade ao trabalho. A professora que tinha mais de uma disciplina e de uma turma, embora por várias vezes tenha manifestado vontade de continuar, acabou por não o fazer.

Lourenço & Paula (2003) apresentam diversos depoimentos de alunos relativos ao balanço que fazem da sua experiência com os portefólios. No caso geral a adesão é enorme. Neste grupo incluem-se alunos que segundo as professoras, "passariam facilmente despercebidos nas aulas" (p. 13), por não fazerem normalmente perguntas, nem tão pouco responderem espontaneamente. Disporem de mais tempo, cobrir diversas áreas, ser mais justo, despertar a curiosidade são, entre outros, pontes fortes do portefólio:

> Prefiro o portfolio ao teste, tenho mais tempo.
>
> Há maior justiça no final do período com os portfolios do que só nos testes, pois assim a avaliação é sobre tudo.
>
> Com o portfolio pesquiso mais e amplio o que aprendi nas aulas.
>
> (Lourenço & Paula, 2003, p. 14)

Alguns alunos expressaram contudo a sua preferência dos testes em relação ao portefólio. Esta é a opinião de um aluno com bom resultado escolar em Matemática, para quem os testes representam desafios que consegue ultrapassar com sucesso:

> Tenho mais facilidade nos testes, porque no portefólio penso muito mais e tenho dificuldades em passar os assuntos das aulas para o papel. (Lourenço & Paula, 2003, p. 14)

Conclusões

Procurámos ao longo deste texto dar um panorama do ensino e aprendizagem da Matemática no ensino não superior em Portugal. Uma primeira conclusão que podemos tirar é que há ainda um grande fosso entre aquilo que são as orientações curriculares e os indicadores de que dispomos sobre as práticas dos professores. A avaliação enquanto parte integrante do currículo ainda não parece ser uma realidade generalizada no nosso país.

Contudo, não podemos deixar de salientar que parece haver um elevado grau de coerência entre os diversos resultados obtidos em provas externas de âmbito nacional e uma prática mais tradicional desenvolvida na sala de aula. Note-se que, quer nas provas de aferição, quer nos exames do 12º ano, os alunos obtêm melhores resultados nas questões que fazem apelo ao conhecimento de conceitos e procedimentos. Poder-se-á dizer que qualquer que sejam as experiências de aprendizagem vividas pelos alunos tal é o que habitualmente acontece, dado que o que está em causa neste tipo de questões é a capacidade de reprodução, em detrimento de uma capacidade cognitiva mais exigente. Mas, se adicionarmos a este facto uma prática de ensino que valoriza sobretudo exactamente este tipo de saberes, por maioria de razão serão de esperar este tipo de resultados. Como é assinalado por diversos autores, é aquilo que o professor considera nas provas formais de avaliação que dão o indicador mais convincente ao aluno daquilo que é importante saber-se (Charles et al., 1990; Clarke, 1996). Ora, sendo o teste, prova escrita, realizada individualmente e em tempo limitado, logo testando perguntas que apelam sobretudo à capacidade de reprodução, o instrumento de avaliação mais comum, não será de estranhar que seja este tipo de saberes aqueles que os alunos têm mais desenvolvidos.

Um outro aspecto que não queríamos deixar de assinalar prende-se com a elevada percentagem de respostas totalmente erradas encontradas nas provas globais. Sendo preocupante, leva-nos a questionar até que ponto este tipo de questões não constituirão para os alunos situações totalmente novas, embora sejam adequadas ao currículo prescrito oficial. Se tal de facto assim for, e tendo ainda presente que as questões que testam a aplicação a situações novas, em particular a resolução de problemas, é em geral muito baixa, pergunta-se até que ponto os professores desenvolvem um ensino que se inscreve nos actuais programas de Matemática. Evidentemente que a prática lectiva não pode ser caracterizada apenas com informações decorrentes de uma prova, mas não deixa de ser um indicador que permitirá levantar a questão que terá de ser aprofundada posteriormente.

O que parece poder afirmar-se é que, enquanto os professores não recorrerem a formas diversificadas de recolha de informação, dificilmente atenderão àquilo que hoje se entende por saber e fazer Matemática. O "poder matemático" (NCTM, 1989) do aluno ou a sua "competência matemática" (Abrantes et al., 1999) ultrapassa largamente aquilo que pode ser incluído num teste escrito de tipo tradicional. Se tais práticas não forem implementadas no terreno dificilmente os professores deixarão de testar aquilo que é fácil de fazer, em detrimento daquilo que é importante desenvolver nos alunos em Matemática. Os resultados referidos nos estudos que procuraram analisar de forma sistemática o uso de instrumentos alternativos de avaliação são elucidativos quanto às potencialidades que lhes são apontadas em termos das capacidades e competências que permitem desenvolver nos alunos. Marcadas pela diversidade, pertencem à lista de aspectos considerados actualmente como fundamentais na aprendizagem matemática. Falamos, por exemplo, da capacidade de resolução de problemas, de comunicação, de interpretação, de reflexão, análise e espírito crítico e a exploração de ideias matemáticas, a auto-confiança do aluno na sua relação da Matemática, o sentido da responsabilidade, a perseverança, e o empenhamento nas tarefas.

Em síntese, e embora a avaliação esteja na ordem do dia, em que se pode reconhecer uma maior preocupação em discutir e ter documentos relativos à avaliação, há ainda muito a fazer para que os professores tenham o suporte necessário que os ajude na mudança das suas práticas avaliativas. O mesmo acontece enquanto área de destaque na investigação, onde até hoje se encontra um reduzido número de estudos. Podemos assim concluir que, no futuro próximo, a avaliação precisa estar na agenda dos educadores e investigadores matemáticos.

Existem ainda múltiplas áreas para explorar. Os resultados dos estudos em análise apontam para um deficit em práticas inovadoras de avaliação – perspectivas da avaliação; domínios de incidência; formas de recolha de informação; papel desempenhado pelo professor e pelo aluno, etc... Muito embora alguns dos estudos tenham procurado dar uma resposta neste sentido, desenvolvendo no terreno e identificando características de certas formas de avaliação, parece poder falar-se na pertinência do desenvolvimento de mais investigações de cariz colaborativa (Reason, 1988) que ensaiem e estudem práticas avaliativas, por um lado, com um cunho mais marcadamente regulador das aprendizagens e, por outro, que tornem uma realidade o princípio da diversidade de instrumentos.

O conhecimento sobre o que os alunos pensam e que estratégias utilizam nos procedimentos avaliativos é outra área em que, pela sua importância, é premente dar-se devida atenção. A ela acresce o estudo de outras dimensões, tais como, o modo como os professores trabalham as orientações curriculares, como as percepcionam, que dificuldades se lhe colocam nas suas práticas e como estas poderão ser ultrapassadas.

Referências

ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; TEIXEIRA, P. & VELOSO, E. (1997). *Mat_{789}, Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

ABRANTES, P. (1990). Diz-me como avalias, dir-te-ei como ensinas. *Educação e Matemática*, 16, 1.

ABRANTES, P. SERRAZINA, L. & OLIVEIRA, I. (19999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME, DEB.

ABRANTES, P. & ARAÚJO, F. (2002). *Avaliação das aprendizagens. Das concepções às práticas.* Lisboa: Departamento da educação Básica, Ministério da Educação.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

APM (1991). Avaliação: uma questão a enfrentar. *Actas do seminário sobre avaliação*. Lisboa: APM.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

CHARLES, R.; LESTER, F. & O'DAFFER, P. (1990). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: NCTM.

CLARKE, D. (1996). Assessment. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 327-370). Dordrecht: Kluwer.

GAVE (2002). *Contributo para uma melhor compreensão do desempenho dos alunos nos exames do 12º ano*. Mem Martins: GAVE; Ministério da Educação.

GRAÇA, M. M. (1995). *Avaliação da resolução de problemas: Contributo para o estudo das relações entre as concepções e as praticas pedagógicas dos professores* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

GUBA, E. & LINCOLN, I. (1989). *Fourth generation of evaluation*. San Francisco: Jossey Bass.

HADGI, C. (1997). *L´évaluation démystifiée*. Paris: ESF Éditeur.

LEAL, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

LOURENÇO, A. & PAULA, I. (2003). Avaliando competências através de portfolios. *Educação e Matemática*, 74, 11-15.

MARTINS, M. P. (1996). *A avaliação das aprendizagens em Matemática: concepções dos professores* (tese de mestrado. Universidade católica Portuguesa). Lisboa: APM.
MARTINS, A.; SAPORITI, C.; NEVES, P.; BASTOS, R. & ANDRADE, S. (2003). Testes em duas fases: uma experiência. *Educação e Matemática*, 74, 43-47.
ME (1991). *Organização curricular e programas. Ensino Básico. 3º ciclo*. (vol. II). Lisboa: Ministério de Educação.
ME (2002). *Provas de aferição do ensino básico 4º e 6º anos – 2001. Relatório nacional.* Mem Martins: Ministério de Educação.
MENINO, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumento de avaliação das aprendizagens em Matemática – um estudo no 2º ciclo do Ensino Básico*. (Universidade de Lisboa, tese de mestrado). (no prelo)
NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
NCTM (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
NOIZET, G. & Caverni, J. (1978). *Psychologie de l´évaluation scolaire*. Paris: PUF.
NUNZIATI, G. (1990). Pour construire un dispositif d´évaluation formatrice. *Cahiers Pedagogiques*, 280, pp. 47-62.
PERRENOUD, P. (1999). *Avaliação. Da excelência à regulação das aprendizagens. Entre duas lógicas.* Porto Alegre: ARTMED (Trabalho original em francês, publicado em 1998)
PINTO, J. (1999). Algumas questões sobre a avaliação pedagógica – uma nova cultura de avaliação. In H. Guimarães, L. Leal & P. Abrantes (Orgs.), Avaliação: uma questão a enfrentar. *Actas do seminário sobre avaliação* (pp. 37-40). Lisboa: APM.
RAFAEL, M. A. (1998). *Avaliação em Matemática no ensino secundário: Concepções e práticas de professores e expectativas de alunos* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
REASON, P. (1988). The co-operative inquiry group. In P. Reason (Ed.), *Human inquiry in action. Developments in new paradigm research.* London: Sage Publications.
SANTOS, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.), *Avaliação das aprendizagens* (pp. 75-84). Lisboa: DEB, ME.
SANTOS, L. (2003). A avaliação em documentos orientadores para o ensino da Matemática: uma análise sucinta. *Quadrante*, XII(1), 7-20.
VARANDAS, J. M. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas. Uma experiência*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). (http://ia.fc.ul.pt)

Anexo I

Tipo de competência Áreas temáticas	Conhecer conceitos/ procedimentos	Raciocínio	Comunicação	Resolução de problemas	Nº total
Números e cálculo	4	2		3	9
Grandezas e medida	3			2	5

Forma e espaço	3	3	1	1	8
Organização e recolha de dados	2			1	3
Nº total	12	5	1	7	25

Tabela: Predominância das áreas de conteúdos e competências nos itens da prova de aferição do 4º ano, ano 2001 (adaptado de ME, 2002, p. 19)

Tipo de competência Áreas temáticas	Conhecer conceitos/ procedimentos	Raciocínio	Comunicação	Resolução de problemas	Nº total
Números e cálculo	4	3	1	2	10
Geometria	3	4	1	2	10
Estatística	2		1	1	4
Nº total	9	7	3	5	24

Tabela: Predominância das áreas de conteúdos e competências nos itens da prova de aferição do 6º ano, ano 2001 (adaptado de ME, 2002, p. 19)

Anexo II

Competência	Número de questões	Percentagem de examinandos com cotação total
Conhecimento de conceitos	5	64
Conhecimento de propriedades e/ou cálculo simples	10	56
Resolução de problemas simples e/ou aplicação a situações simples da vida real	5	44
Aplicação a situações novas	7	30
Conexões entre diferentes temas	1	38

Tabela: Competências e número de itens analisados nas questões de escolha múltipla (GAVE; 2002, p. 31)

Competência	Número de questões	% de examinandos com cotação total	% de examinandos com cotação nula	% de examinandos com cotação maior ou igual a 50% da cotação total	% da cotação média em relação à cotação total
Conhecimento de conceitos	1	68	23	75	74
Conhecimento de propriedades e/ou cálculo simples	6	26	23	55	56
Resolução de problemas simples e/ou aplicações a situações simples da vida real	3	25	20	58	59
Comunicação	3	11	18	43	47
Cálculo	7	5	34	27	31
Resolução de problemas e/ou interpretação	5	11	39	23	30
Aplicação a situações novas	4	10	55	21	25
Utilização da calculadora	3	8	46	25	28

Conexões entre diferentes temas	4	11	48	18	25
Desenvolvimento de raciocínios demonstrativos	3	5	62	12	17

Tabela: Competências e número de itens analisados nas questões de resposta aberta (GAVE; 2002, pp. 31)

Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales

JORGE I. ACEVEDO Y VICENÇ FONT

Universitat de Barcelona

Resumen:

En este trabajo aplicamos herramientas de la teoría de Lakoff y Núñez (2000) y de la teoría de las funciones semióticas (Godino, Contreras y Font, 2004) al análisis de una sesión de clase de bachillerato en la que se estudia la representación gráfica de funciones. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. Dentro de cada configuración didáctica enfocamos nuestro análisis a los fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor y en el de los alumnos. Terminamos con algunas consideraciones sobre las posibles causas de estos fenómenos.

Summary:

In this paper, we apply tools of the theoretical framework about the embodiment of mind proposed by Lakoff and Núñez (2000) and the theoretical framework about semiotic function (Godino, Contreras y Font, 2004) to the analysis the teacher's discourse when explaining the graphical representation of functions at high school. We propose as primary unit of analysis the didactic configuration, constituted by the interactions teacher-student concerning a mathematical task and using some specific material resources. Inside each didactic configuration, we focus our analyses to the phenomenon related with the use of metaphors in the professor's discourse and student's discourse. We end up with some considerations about the possible causes of this phenomenon

1 Marco teórico

El marco teórico utilizado en esta investigación fundamentalmente es la teoría sobre "qué son las matemáticas", propuesta por Lakoff y Núñez (2000). El núcleo central de esta teoría está basado en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, y en los relativamente recientes hallazgos en lingüística cognitiva. Su tesis principal afirma que el origen de las estructuras matemáticas que construyen las personas, y también las que se construyen en instituciones, hay que buscarlo en los procesos cognoscitivos cotidianos, como son los esquemas de las imágenes y el pensamiento metafórico. Según estos autores, dichos procesos permiten explicar cómo la construcción de los objetos matemáticos, tanto los personales como los institucionales, está sostenida por la manera de relacionarse nuestro cuerpo con los objetos de la vida cotidiana. En segundo lugar, también tendremos en cuenta algunos constructos de la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS a partir de ahora).

1.1 Pensamiento metafórico

En esta investigación asumimos la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro. Las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se trasladen una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Otra de las funciones que cumple la metáfora es la de conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático.

Nuestra representación del mundo está siempre influida por las metáforas que inyectamos en él, casi siempre de una manera inconsciente. La mayor parte de los seres humanos conceptualizamos cosas abstractas en términos de cosas concretas. Por ejemplo, cuando entendemos el sentimiento de cariño por medio de la experiencia térmica utilizamos diferentes metáforas (por ejemplo, "un caluroso abrazo"). Una posible explicación de estas metáforas, llamadas metáforas conceptuales, es que se sustentan en las experiencias fenoménicas que vive nuestro cuerpo para relacionarse con su entorno físico y cultural.

En relación con las matemáticas, podemos distinguir dos tipos de metáforas conceptuales.

- Grounding metáforas: Son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Por ejemplo: “Las clases son contenedores”, “los puntos son objetos”, etc.

- Linking metáforas: Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, “los números reales son los puntos de una recta”, las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas”.

La importancia que tiene el pensamiento metafórico en la construcción del significado de los objetos matemáticos es reconocida por una gran mayoría de los investigadores en didáctica de las matemáticas y es el origen de una teoría sobre las matemáticas propuesta por Lakoff y Núñez (2000). Según este punto de vista, la naturaleza de las matemáticas hay que buscarla en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones ni en mundos trascendentes platónicos. Estas ideas surgen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Por razones de tipo evolutivo, todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas. Debido a su origen común, las ideas matemáticas no son arbitrarias, no son el producto de convenciones completamente sociales y culturales -aunque los aspectos sociales e históricos juegan papeles importantes en la formación y desarrollo de estas ideas-[1].

A la pregunta ¿Cuáles son las capacidades cognitivas, basadas en la importancia del cuerpo sobre la mente, que permiten a una persona pasar de las habilidades numéricas básicas innatas a un entender profundo y rico de, por ejemplo, las matemáticas de una licenciatura universitaria de una facultad de ciencias? Lakoff y Núñez (2000) responden que éstas no son independientes del aparato cognitivo usado fuera de la matemática. Según estos autores, la estructura cognitiva necesaria para la matemática avanzada usa el mismo aparato conceptual que el pensamiento cotidiano en las situaciones ordinarias no matemáticas, esto es: *"(…) esquemas de la imagen, esquemas aspectuales, mezclas conceptuales y la metáfora conceptual."* (Núñez, 2000, pág. 4) Para dicha teoría, de todos estos procesos es el pensamiento metafórico el más importante para la construcción de las matemáticas.

1.2 Metáforas relacionadas con las gráficas de funciones

También hemos tenido en cuenta trabajos más concretos en los que se aplica la teoría anteriormente expuesta a las funciones:

1) En Núñez, Edwards y Matos (1999) se muestra como el tipo de metáfora que relaciona un objeto matemático con un campo no matemático de la vida cotidiana, es básico para entender las dificultades cognitivas relacionadas con la continuidad de funciones.

2) Según Font (2000) las gráficas se han estructurado históricamente a partir de las siguientes metáforas: a) Las curvas son secciones b) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones c) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva. d) La grafica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

Por otra parte, en Font (2000, pág. 122) se observó que el hecho de utilizar una variación de la metáfora *c* de manera inconsciente en el discurso del profesor producía la siguiente dificultad en los alumnos: (...) *observamos que había alumnos que, cuando movían el punto A, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto A y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho, es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación*."

c) En Font y Acevedo (2003) y Acevedo, Font y Giménez (2003) se detectó el siguiente fenómeno al analizar el discurso del profesor cuando explica la representación gráfica de funciones en el bachillerato: el profesor usa expresiones que sugieren, entre otras, metáforas del tipo «la gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica». También se muestra que: 1) el profesor usa de manera poco consciente estas metáforas y cree que sus efectos en la comprensión de sus alumnos son inocuos, 2) contrariamente a lo que cree el profesor, los alumnos

[1] En Johnson (1991) se puede encontrar la justificación filosófica que permite a esta teoría distanciarse tanto del objetivismo realista como del relativismo.

estructuran su conocimiento sobre las funciones en los términos metafóricos que ha utilizado el profesor de manera inconsciente.

1.3 Configuraciones didácticas

La TFS (Godino, Contreras y Font 2004) proporciona un marco en el que es posible analizar la interacción entre el profesor y los alumnos a propósito de un contenido matemático específico. Una *configuración didáctica* se compone de una configuración epistémica, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción (además de las correspondientes cognitivas, emocionales y mediacionales). El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación, etc.

La configuración didáctica se concibe como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de la trayectoria didáctica de la que forma parte. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. En la sesión de clase completa sobre "representación gráfica de funciones" que usamos como ejemplo hemos identificado una secuencia de 14 configuraciones didácticas. En los apartados siguientes vamos a analizar cuatro, no consecutivas, que son las que, en nuestra opinión, permiten ilustrar mejor el tipo de análisis que proponemos.

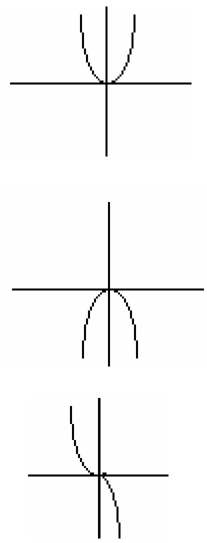
2 Análisis de las metáforas presentes en algunas configuraciones didácticas

En la primera configuración de la transcripción de la sesión de clase el profesor propone la resolución de un problema seleccionado del libro de texto (esbozo de la gráfica de las funciones $f(x)=2x^4$, $g(x)=-2x^4$ y $h(x)=-2x^5$) que los alumnos tenían que resolver en casa. Con la información disponible no se puede saber el grado de asunción de la tarea por parte de los alumnos, en particular cuántos de ellos trataron de resolver el "ejercicio para casa" y qué fueron capaces de hacer. No hay comunicación por parte de los alumnos, sino sólo presentación de la solución por parte del profesor quien regula la forma de resolver la tarea. Hay un momento de evaluación colectiva mediante la pregunta genérica *¿De acuerdo?* Hay un momento en que el profesor "cambia de tarea", iniciándose la segunda *configuración didáctica*.

La segunda configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de manera visual a partir del esbozo de las tres funciones obtenidas en la configuración anterior. Sólo se observa la presentación de la solución por parte del profesor.

Configuración didáctica 3: Cálculo de la derivada en $x=0$.

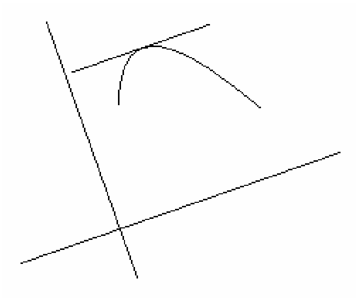
Transcripción de la primera parte de la CD3	Pizarra	Observaciones

La parte *c*, para cada una de las funciones se ha de encontrar una derivada en x = 0, comencemos por la primera, la efe, la primera derivada………… $8x^3$… la segunda derivada $24x^2$, pensemos que la primera en la función $f(x)$ en x = 0 presenta un mínimo y la derivada en x = 0 es 0, como cabía esperar, porque ahora esta tangente es horizontal, y la segunda derivada en x = 0 también da 0.		El profesor hace el gesto de poner la mano indicando la posición horizontal de la recta tangente en cada gráfica.

La tercera configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de determinar la derivada en x = 0 para cada una de las tres funciones de las configuraciones anteriores. No hay comunicación por parte de los alumnos, sino sólo presentación de la solución por parte del profesor quien además da una interpretación geométrica al resultado obtenido analíticamente. El profesor hace observar a los alumnos que la derivada en los tres casos es cero debido a que en las tres gráficas la recta tangente en x = 0 es horizontal.

En esta explicación se puede observar el uso de una metáfora orientacional (Lakoff y Johnson 1991, pág. 50) por parte del profesor puesto que en su explicación utiliza el término “horizontal” en lugar de utilizar la expresión “paralela al eje de abscisas”.

Esta metáfora es muy habitual en las clases de bachillerato y puede facilitar errores en los alumnos, puesto que éstos ante la gráfica siguiente pueden considerar que, cuando x es la abscisa del máximo, la derivada no es cero ya que la recta tangente no es “horizontal”



Este posible error no suele manifestarse debido a que en los libros de texto, y en las explicaciones de los profesores, se suelen presentar sistemas de coordenadas que tiene el eje de abscisas en posición horizontal y el eje de ordenadas en posición vertical. Se trata de un típico fenómeno de generación de ejemplos prototipos.

La cuarta configuración consiste en un comentario del profesor sobre el hecho de que si la derivada segunda es cero, podemos tener máximos, mínimos o puntos de inflexión. Primero calcula las derivadas primera y segunda de las tres funciones anteriores haciendo observar a los alumnos que en los tres casos en x = 0 la derivada segunda se anula. Después utiliza las gráficas de las funciones cuyo esbozo estaba dibujado en la pizarra para hacerles ver que en la primera función en $x = 0$ hay un máximo, en la segunda un mínimo y en la tercera un punto de inflexión. No hay diálogo por parte de los alumnos y el profesor se limita a explicarlo.

Configuración didáctica 5: Criterio suficiente de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Estudio de la variación de la derivada en un entorno del punto

Transcripción	Pizarra	Observaciones
En la actividad anterior se ha de observar que si la primera derivada en $x=a$ es 0, y la segunda derivada en $x = a$ también es 0, son posibles diversas situaciones. En este caso, es conveniente hacer el estudio del comportamiento del signo de la derivada primera en un entorno de $x = a$, para determinar en que situaciones nos encontramos. Esto quiere decir que si nosotros sabemos que hay en $x = a$ un máximo o un mínimo o un punto de inflexión, y al hacer la segunda derivada da cero. La segunda derivada no nos aporta nueva información. Lo que se ha de hacer es una tabla de variación. Si antes del cero es creciente, si después de cero es creciente, si antes del cero y después del cero es creciente tenemos un punto de inflexión. Si antes del cero es creciente y después del cero es decreciente, un máximo. Si antes del cero es decreciente y después de cero es creciente, un mínimo. Haced la tabla de cada función. ¿Hay alguna pregunta?	Siguen dibujadas las gráficas de la CD3	El profesor lee este párrafo literalmente del libro de texto. Acompaña este comentario con gestos sobre las gráficas dibujadas en la pizarra.

La quinta configuración se organiza en torno a la técnica que propone el profesor para determinar si tenemos un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$ cuando $f''(a) = 0$. Para ilustrar dicha técnica toma el caso particular "$a = 0$", y propone realizar el estudio de la variación de la derivada primera en un entorno del punto de abscisa $x = 0$.

En esta configuración, el discurso metafórico del profesor puede inducir al alumno a entender el cero como un punto determinado sobre un camino que se recorre o una línea por la cual se transita. Palabras como "antes de cero", "después de cero" pueden producir este efecto en el alumno. Para Lakoff y Núñez (2000, pág. 38) esta es una poderosa metáfora utilizada muy a menudo por los profesores en todos los niveles de enseñanza. En dicha metáfora se sugiere una organización espacial, se tiene un origen ("de"), un camino ("pasa por", "aquí", "a lo largo"), y un fin ("a", "hasta") y además se contempla algo que se mueve (punto, objeto, etc.) y que se puede localizar en un momento dado.

A pesar de que el profesor termina esta configuración con una pregunta que, a nuestro entender, tiene una función evaluativa, los alumnos siguen sin intervenir. Esta configuración la consideramos de tipo argumentativo, ya que el profesor recuerda una serie de propiedades generales que aplica a casos particulares.

3 El papel de la metáfora en la negociación de significados

En una configuración didáctica posterior (la n.º 8) el profesor tiene por objetivo recordar el concepto "dominio de una función" y de las técnicas estudiadas para su determinación. Para ello, el profesor propone dos ejemplos, el primero de los cuales es la función racional $f(x)=1/(x+1)$. El profesor primero introduce la formulación: *el dominio es el conjunto de valores de la variable independiente que tienen imagen* y a continuación introduce la siguiente: *son los valores de los cuales se puede calcular la imagen*. Esta segunda formulación resulta más operativa para el cálculo del dominio que la primera, ya que facilita entrar en un "juego de lenguaje" que permite llegar a un consenso sobre cuál es el dominio de la función. Las características de este juego de lenguaje son:

- *Introducción de un elemento genérico*. El profesor introduce el elemento genérico x sobre el cual realizar las operaciones indicadas en la fórmula de la función mediante la frase "cuando yo substituyo la x (señala la x de la fórmula con el dedo) por esos números, puedo hacer todo este cálculo (con la mano rodea la fracción $1/(x+1)$)" y después dice "tomemos un número" y espera que los alumnos mentalmente encuentren los valores para los cuales se pueden realizar las operaciones indicadas en la fórmula de la función.

- *Consenso sobre el rango de valores del elemento genérico*. Los alumnos formulan hipótesis sobre el dominio hasta llegar a un consenso que es aceptado por los alumnos y, sobre todo, por el profesor. En este caso varios alumnos dicen "todos menos el -1" y el profesor da por buena esta afirmación.

En el segundo ejemplo se reproduce el mismo juego de lenguaje con las siguientes variantes. La primera variante es que en este caso el elemento genérico es un punto de la parte negativa del eje de abscisas. En efecto, el profesor en este caso dibuja la gráfica de la función $f(x)= \ln x$ y espera que los alumnos mentalmente apliquen la técnica de: 1) pensar en un punto de la parte negativa del eje de abscisas, 2) trazar la perpendicular al eje de abscisas por este punto, 3) observar que esta recta no corta a la gráfica de la función logaritmo neperiano y 4) que este razonamiento es válido para cualquier punto de la parte negativa del eje de abscisas y también para el origen de coordenadas (esta técnica gráfica de determinación del dominio ya ha sido trabajada en una unidad anterior). La segunda variante es que, cuando los alumnos responde "de cero a más infinito", el profesor considera ambigua esta respuesta para llegar a un consenso y decide intervenir pidiendo a los alumnos si el cero es del dominio, para después aceptar como buena la respuesta de los alumnos de que el cero no es del dominio.

Es importante remarcar que el consenso al que se llega está expresado en términos metafóricos ya que, tanto los alumnos como el profesor, utilizan la expresión "de cero a más infinito", los alumnos lo hacen oralmente, mientras que el profesor, a esta expresión oral, asocia la representación $(0,+\infty)$ y también la gesticulación sobre la parte positiva del eje de abscisas (mueve la mano desde el origen de coordenadas hacia la derecha). Se trata de la metáfora que considera la semirrecta numérica como un camino con un comienzo y con un horizonte (el infinito).

La combinación del lenguaje dinámico y el movimiento de la mano permite entender el dominio, un caso de infinito actual puesto que es un intervalo abierto, como el resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio. Según Lakoff y Núñez (2000, p. 158), entendemos este caso de infinito actual como resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio, gracias a que proyectamos metafóricamente sobre este tipo de procesos nuestro conocimiento de los procesos que tienen principio y final. Lakoff y Núñez afirman que los procesos que continúan indefinidamente se conceptualizan metafóricamente como teniendo un final y un último resultado. Para estos autores, este tipo de conceptualización es el resultado de la aplicación de lo que ellos llaman la Metáfora Básica del Infinito.

4 Consideraciones finales

En este trabajo se constata la importancia que tiene el uso de la metáfora tanto en el discurso del profesor como en el del alumno. Este uso, probablemente inevitable e inconsciente, es fundamental en la construcción de los objetos matemáticos de los alumnos y en la negociación de significados en el aula.

Las causas que puede explicar este fenómeno son complejas. Por una parte, tal como señalan Lakoff y Núñez, el uso de la metáfora es fundamental en la comprensión de cualquier tema –y, por tanto, en su explicación –; ahora bien, en nuestra opinión, también puede haber causas relacionadas con las matemáticas, ya que la representación gráfica de funciones necesita, además de una descripción en términos globales, la introducción de conceptos locales tales como crecimiento y decrecimiento en un punto, etc. Estos conceptos locales presentan una gran dificultad para los alumnos, motivo por el cual, a nuestro entender, hay profesores que los dejan en un segundo plano y prefieren utilizar explicaciones dinámicas en las que el uso de la metáfora es fundamental.

Bibliografía

ACEVEDO, J. I. , FONT, V. y GIMÉNEZ, J. (2004) Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions. In Giménez,, J, Fitzsimons, G, Hahn, C (ed) *Globalisation and mathematics Education*. *CIEAEM 54* (pp. 336-342). Barcelona: Graó.

FONT, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

FONT, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias,* 21, 3, 405-418.

GODINO, J. D., CONTRERAS, A. y FONT, V. (2004). *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática*. XX Jornadas del SI-IDM. Madrid 2004.

JOHNSON, M. (1991). *El cuerpo en la mente*. Madrid: Debate.

LAKOFF, G. y JOHNSON, M. (1991). Metáforas de la vida cotidiana. Madrid: Cátedra

LAKOFF, G. y NÚÑEZ, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

NÚÑEZ, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics, en Nakaora T. y Koyama M. (eds.). *Proceedings of PME24* (vol.1, pp. 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

NÚÑEZ, R., EDWARDS, L. y MATOS, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 45-65.

Las fuentes de información como recurso para la planificación

AZCÁRATE, P.; SERRADÓ, A. Y CARDEÑOSO, JM[a]

Grupo de Investigaciópn DPD (Desarrollo Profesional del Docente)
Universidad de Cádiz

Resumen:

En este trabajo presentamos los resultados de una primera aproximación al conocimiento del tipo de fuentes de información que utilizan los profesores de secundaria y cómo las usan. A través del estudio de sus argumentaciones justificativas, se analizan que fuentes consideran necesarias y para qué las utilizan en los procesos de planificación de la enseñanza del conocimiento probabilístico.

Abstract:

In this work we present the results from a first approach to the knowledge of what sources of information the professors use of secondary and how. Through the study of their vindicative arguments they are analyzed that sources consider necessary and for what reason they use them in the processes of planning of the teaching of the knowledge probabilístico.

Presentación

Los alumnos, futuros ciudadanos del siglo XXI, se habrán de enfrentar a un mundo cambiante dominado por la incertidumbre. Comprender un mundo de esas características, implica aprender a relacionar y analizar críticamente la realidad, no como un conjunto de partes, sino como una totalidad (Azcárate, 1997). Las decisiones diarias y las discusiones sobre temas sociales cada vez están más influenciadas por la estadística y por los resultados obtenidos a partir de inferencias sobre datos probabilísticos. Las herramientas que aporta la probabilidad para la comprensión del mundo es uno de los factores que justifican su inclusión en el currículum (Cardeñoso y Azcárate, 1995).

La inclusión del "Tratamiento del Azar" en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria supone la emergencia de un campo de investigación en torno a los procesos de enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad. En este sentido, investigadores como Ortiz y Serrano (2001), argumentan sobre la conveniencia de que los profesores de Educación Secundaria Obligatoria inicien modificaciones, diseñando, desarrollando y evaluando propuestas curriculares.

El diseño y desarrollo de nuevas propuestas curriculares, supone la reflexión intencionada por parte del profesor de las ideas y decisiones que guían su intervención. La falta de formación didáctica y experiencia por parte de los profesores en el campo de investigación del conocimiento probabilístico, favorece la búsqueda de nuevas informaciones, referentes, recursos y materiales que faciliten la planificación de dicha intervención.

En esta perspectiva se enmarca la investigación desarrollada (Serradó, 2004), que intenta ser una primera aproximación a las ideas y decisiones que argumentan los profesores al seleccionar y utilizar determinadas fuentes de información, cuando planifican su intervención en general y, para los procesos de enseñanza y aprendizaje del conocimiento probabilístico, en particular. Los pocos referentes a investigaciones que disponemos, relacionadas al estudio de las fuentes de información se deben básicamente a Smylie (1995) y Tomazos (1997). En ellas, se acepta como definición de fuente de información*: "un conocimiento referido a la materia a enseñar, que se define como una información específica necesaria para que los profesores enseñen el contenido".*

El conocimiento profesional y las fuentes de información

En los procesos de planificación de la intervención, los profesores ponen en funcionamiento los sistemas de ideas que han configurado desde sus saberes procedentes de la experiencia, saberes disciplinares y saberes metadisciplinares (Sánchez y Valcárcel, 2000). La complejidad del proceso surgirá del nivel de integración en su sistema de ideas, de la reflexión y valoración de las informaciones que utilicen durante la planificación de la acción.

Desde nuestra perspectiva, la progresiva elaboración del conocimiento profesional supone un proceso continuo de mejora, que engloba necesariamente el uso y apoyo de referentes que pueden proveer de las nuevas informaciones y recursos necesarios. La implementación de nuevos tópicos o contenidos curriculares, es un momento significativo para el proceso de desarrollo profesional, al incorporar y evaluar nuevas fuentes de información que pueden permitir la aparición de nuevas perspectiva de análisis. Desde esta idea, la definición de fuente de información antes señalada nos aporta poca información sobre su influencia en el desarrollo profesional del docente, al no poder caracterizar el uso que el profesor hace de la información en sí misma, por ello hemos diferenciado entre las nociones de fuente de información y, lo que denominamos, fuente de conocimiento.

Si el uso de una determinada fuente por parte del profesor se limita a extraer la información tal cual, sin cuestionarla ni modificarla en función de sus propias finalidades, entendemos que el uso que hace de dicha fuente es de **carácter estático**, ya que no le invita a reflexionar sobre el significado de adquiere en su práctica; en este caso se utilizaremos el término de *fuente de información*. En cambio, si el profesor utiliza una determinada fuente de información y reflexiona de manera intencionada sobre la información que le ha aportado y su influencia en las decisiones que toma, adquiriendo un **carácter dinámico,** pensamos que ésta se puede convertir en "conocimiento" y revertir en su desarrollo profesional. Entonces utilizamos el término *fuente de conocimiento.* Desde estos referentes analizamos la información obtenida en el proceso de la investigación realizada.

Metodología

En función de los referentes señalados en la sección anterior, y con el objetivo de analizar las ideas y decisiones, que expresan los profesores, sobre el uso de las fuentes de información en la planificación, nos planteamos los siguientes problemas de investigación:

¿Qué fuentes de información utilizan los profesores en la planificación de la intervención? ¿Qué propósitos de aprendizaje guían la selección de las fuentes de información en la planificación de la intervención? ¿Qué propósitos de enseñanza guían la selección de las fuentes de información? ¿En qué momentos se utilizan las fuentes de información? Y ¿Cómo se utilizan las fuentes de información?

El diseño de investigación para dar respuesta a los interrogantes planteados con anterioridad, tiene las características generales de un diseño de investigación cualitativo referido a un estudio de casos. Nuestra intención es dar sentido e interpretar, los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. (Rodríguez, Gil y García, 1999).

En una primera **fase preparatoria**, se elaboraron un conjunto de hipótesis de progresión relativas a las fuentes de información. Dichas hipótesis de progresión surgen de las reflexiones sobre la caracterización del Conocimiento Profesional, que les da forma y significado, acordes con los principios establecidos por el grupo Ires (Porlán y Rivero, 1998). Al estar elaboradas como marco de referencia, nos permiten tanto la elaboración de los instrumentos de recogida de datos como la interpretación de la información obtenida. Los instrumentos de recogida de información elaborados consisten en dos cuestionarios (Cuestionario sobre las fuentes de información que se utilizan en la planificación de la intervención y cuestionario y cuestionario sobre la planificación de la intervención en el Tratamiento del Azar) y una entrevista semiestruturada, que tenía como finalidad clarificar las respuestas de los cuestionarios.

El estudio se realizó sobre una muestra intencionada de tres profesores que fueron seleccionados en función de los años de experiencia, la licenciatura realizada, el área de conocimiento prioritaria de estudios de licenciatura, la constancia de la participación en actividades de innovación o investigación y la inclusión del "Tratamiento del Azar" en el currículum.

Atributos	Prof. A	Prof. B	Prof. C
Años de experiencia	5	2	10
Licenciatura matemáticas	SI	SI	SI
Área de conocimiento	PRO	ANA	PRO
Innovación o investigación	NO	NO	SI
Inclusión del "T. del Azar"	NO	NO	SI

En una segunda fase, para la **recogida de datos,** se han cumplimentado los dos cuestionarios señalados, se realizó un primer análisis de los mismos para la elaboración de los interrogantes de la entrevista semiestructurada. Una vez realizadas y grabadas las entrevistas se transcribieron para su análisis.

En la tercera fase de **análisis de los datos** se han seguido los siguientes pasos:

- La diferenciación y organización de las unidades de información contenidas en los cuestionarios y entrevistas.
- La agrupación de estas unidades de información según los momentos, la selección y organización de los contenidos, actividades, estrategias metodológicas, el aprendizaje y la motivación.
- La formulación estándar de cada uno de los ítems siguiendo la terminología empleada en los sistemas de indicadores establecidos a partir de las hipótesis de progresión.

- La agrupación de los ítems en función de que se refiriesen a la misma fuente de información.
- Y, el contraste de la información obtenida de cada sujeto con los indicadores establecidos en las hipótesis de progresión correspondientes, con la finalidad de establecer los perfiles de los sujetos.

El proceso metodológico cualitativo seguido, ha permitido la reformulación de las hipótesis de progresión y de las técnicas de análisis, para adaptarlas a la información obtenida. Dicha reformulación se realizó después de la trascripción y análisis de las dos primeras entrevistas a los profesores en el sentido de incorporar nuevas categorías de análisis no consideradas inicialmente.

Resultados

En esta sección presentamos una primera aproximación a la respuesta de los interrogantes que guían la investigación, con relación a la descripción de cuáles son las fuentes de información que utilizan los profesores y qué propósitos guían la selección de cada una de las fuentes de información.

Los tres profesores de la muestra expresan que utilizan básicamente una única fuente de información, el libro de texto, pues le facilita la selección y organización de los contenidos matemáticos y actividades a desarrollar en el aula. Los profesores A y C expresan que realizan un uso directo o lineal del texto, sin plantearse otras posibles organizaciones o secuenciaciones (que no sean las planteadas en el mismo). En cambio, el profesor B indica que él elabora un esquema previo de los contenidos a desarrollar en función de las definiciones y ejemplificaciones que cree oportunas, y a partir de este esquema selecciona la información de los libros de texto.

El profesor A y B sugieren que utilizan, además, como una información complementaria los Decretos (Diseños curriculares Base). El profesor A, explica que los utiliza para poder elaborar y revisar el proyecto curricular de Centro, pero que configura como un documento externo a su intervención en el aula. En cambio, el profesor B argumenta que utiliza los decretos como fuente que le aporta información sobre los contenidos mínimos. El profesor C especifica que sustituye la información que le podrían aportar los Diseños por la información proveniente de las "Programaciones de aula".

Además, de estas dos fuentes, los profesores expresan que utilizan, en menor medida, la información proveniente de cursos de formación, jornadas, seminarios, artículos y textos de divulgación. La información que obtienen desde este tipo fuente, les permite, por ejemplo, conocer y reflexionar sobre las experiencias llevadas a cabo por otros profesores, siendo un posible referente a la hora de introducir pequeñas innovaciones en el aula que favorezcan la participación del alumno. El profesor A indica que selecciona dicha información como estrategia para facilitar la motivación. El profesor B busca en ellas información para analizar y corregir los errores que cometen los alumnos. Y el profesor C, inventa sus propias actividades a partir de la información obtenida.

Los tres profesores, cuando se refieren a las concepciones de los alumnos, a lo largo de la entrevista, realmente hablen de los conocimientos previos sobre el tema que van abordar y, los utilizan a corto plazo para la introducción de ciertas actividades de refuerzo, en función de las deficiencias detectadas.

Los profesores de la muestra utilizan estas fuentes de información para la selección y secuenciación de los contenidos y las actividades asociadas, pero no para reflexionar y seleccionar estrategias metodológicas.

La **selección de los contenidos** (conocimiento matemático y probabilístico) se realiza a partir de dos fuentes de información básica, los libros de texto y los Decretos (Diseños Curriculares Base). El uso lineal del libro de texto por parte de dos de los profesores de la muestra, indica la falta intencionada de reflexión sobre la validez de la información obtenida y de las secuenciaciones propuestas en los textos (Boostrom, 2001). Esta falta de reflexión puede indicar el carácter estático que adquiere esta fuente de información a la hora de seleccionar y secuenciar los contenidos, configurándose la misma estructura cerrada del texto como un obstáculo para convertirse en una fuente de conocimiento.

En cambio, un uso del libro de texto que complementase un esquema previo para secuenciar los contenidos, podría indicar la búsqueda intencionada por parte del profesor de información que favoreciese la integración de su sistema de ideas sobre cómo se pueden establecer relaciones entre los contenidos. La reflexión sobre la información obtenida del libro de texto y, el posterior, análisis sobre el uso de dicha información, fomentaría un dinamismo en el uso de dicho texto, que podría permitir su constitución como una fuente de conocimiento.

Los tres profesores indican que las decisiones sobre las **estrategias metodológicas** se resuelven durante el mismo desarrollo de la acción, y se reducen a una mayor o menor participación del alumno en las explicaciones realizadas por el profesor y en la realización de las actividades. Sugieren que las innovaciones que han introducido en el aula surgen al introducir **actividades** puntuales, fueras de las propuestas en el texto, a pesar de que continúen siendo actividades de aplicación o refuerzo de los contenidos desarrollados por el profesor.

Se detecta que hay cierto tipo de información, fundamentalmente la procedente de cursos o congresos, que favorecen la introducción de innovaciones en el aula, que favorezca la motivación del alumno, la aplicación o refuerzo de los contenidos, etc., en cualquier caso, modificando el sentido del proceso de enseñanza y aprendizaje. El uso de este tipo de información facilita la reflexión del profesor. Dicho cambio en el docente no se restringe a la planificación y desarrollo de nuevas actividades, sino al propósito que adquieren estas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El profesor pone en juego su concepción sobre el significado de la enseñanza y el aprendizaje, a partir de una primera reflexión sobre la importancia de la motivación y atención a la diversidad del alumnado. El dinamismo que aporta dicha información hace que se constituya como una fuente de conocimiento.

Para ellos, adquiere gran importancia los **conocimientos previos de los alumnos**. Uno de los profesores expresa que la falta de estos conocimientos previos es un obstáculo a la hora de planificar la intervención, no lo considera una fuente de información fundamental a la hora de la planificación. Mientras que, los otros dos profesores expresan que estos conocimientos previos permiten indagar sobre las necesidades formativas de los alumnos. Para uno de ellos es un motivo para la elaboración de actividades, seleccionadas de los textos, con la finalidad de reforzar conocimientos previos. Mientras que para el otro, es el punto de partida en el desarrollo del profesor, sin una reflexión previa durante la planificación sobre como van a utilizar estos conocimientos previos.

Esta primera aproximación al uso, en general de las fuentes de información, en la planificación del conocimiento matemático, nos permiten plantear un nuevo objetivo, relacionado con el tópico que es de especial interés para nuestras investigaciones, sobre los criterios que les sugieren introducir o no las unidades dedicadas al “Tratamiento del Azar” en sus aulas y un análisis de la posible influencia de las fuentes de información utilizadas en esta decisión.

Con respecto a las argumentaciones que se refieren en el análisis de porque no introducen la probabilidad (Serradó, 2004), uno de los profesores, argumenta básicamente en función de que considera únicamente una finalidad formativa y académica del aprendizaje de las matemáticas, y en esta finalidad no cabe la introducción de las unidades dedicadas al “Tratamiento del Azar”. Expresa que los contenidos de estas unidades se basan en intuiciones de los alumnos, sin adquirir cuerpo de conocimientos suficiente como para introducirlo en su propuesta de contenidos. Además, argumenta la falta de tiempo para el tratamiento de todos los contenidos, que junto con un uso lineal del texto, en el cual estos conocimientos están en las últimas posiciones, no le permite introducir estas unidades.

El otro profesor, argumenta desde perspectivas diferentes la no inclusión del “Tratamiento del Azar”, destacamos, en este caso, que el factor que incide en su decisión sobre porque no introducir la probabilidad, son sus concepciones epistemológicas, deterministas y positivistas, que sustentan la naturaleza del conocimiento matemático, que son un reflejo consciente o inconsciente de la tradicionalidad en esta área.

En cambio el profesor que introduce en su planificación el “Tratamiento del Azar, valora como positivo el cambio que se produce en los alumnos al introducir estas unidades, expresando la mayor participación y motivación del alumnado. Indica que este cambio puede deberse a un mayor acercamiento a sus expectativas de aprendizaje relevante. Este cambio en el desarrollo de la acción con una mayor participación en el aula, no se refleja en la planificación de la actuación del profesor.

Unas Primeras Conclusiones

Los resultados y conclusiones obtenidas a partir del estudio realizado sobre el uso de las fuentes de información en la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje, tienen carácter interpretativo de cada uno de los casos particulares representados por los profesores de la muestra. Evidentemente no se pueden entender como el único uso que pueden realizar los profesores de estas fuentes de información, pero sí que se conforman como una primera caracterización de este uso. Intentamos aproximarnos a la comprensión de las argumentaciones de los profesores sobre el uso que dan a las diferentes fuentes de información que indican y, en segundo lugar, la posible influencia de éstas en la toma de decisiones sobre la inclusión o no del “Tratamiento del Azar” en los libros de texto. Esta información nos permite interpretar y realizar ciertos contrastes entre las argumentaciones aportadas por tres profesores de la muestra, pero no permite, en ningún caso, generalizar los resultados obtenidos.

La profundización en el complejo y contextualizado proceso de enseñanza y aprendizaje se debería realizar a partir del estudio longitudinal del papel que la información obtenida desde los diferentes tipos de fuentes que utiliza el profesor en la planificación evoluciona y adquieren su significatividad en el desarrollo y evaluación del proceso. La necesidad de realizar estudios de esta naturaleza sobre el uso de las fuentes de información a lo largo de la intervención docente, es básica para poder evaluar el carácter estático o dinámico que adquieren dichas informaciones y cómo facilitan el desarrollo profesional. Con la investigación realizada sólo podemos anticipar las posibles evoluciones de los profesores basadas en hipótesis de progresión globales de la construcción del conocimiento profesional.

Referencias

AZCÁRATE, P. (1997): ¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual?. En *Investigación en la Escuela*, 32, 77-86.

BOOSTROM, R. (2001): Whither textbooks?. En *Jornual of Curriculum Studies*, 32 (2), 229-243.

CARDEÑOSO, J.M. y AZCÁRATE, P. (1995): Tratamiento del conocimiento probabilístico en los proyectos y materiales curriculares. En *Revista Suma*, 20, 41-51.

ORTIZ, J.J. y SERRANO, L. (2001): Reflexiones sobre el lenguaje probabilístico en los libros de texto de Educación Secundaria. En *Jornadas Europeas de Estadísticas*. Islas Baleares. (http://www.ciab.es.ibae/esdeveniments)

PORLÁN, R. y RIVERO, A. (1998): *El conocimiento profesional de los profesores*. Sevilla: Diada.

RODRÍGUEZ, G.; GIL, J. y GARCÍA, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe.

SÁNCHEZ, G y VALCÁRCEL, M.V. (2000): "¿Qué tienen en cuenta los profesores cuando seleccionan el contenido de enseñanza? Cambios y dificultades tras un programa de formación". En *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 423-437.

SMYLIE, M. A. (1995): Teacher learning in the workplace: Implications for school reform. In T. R. Guskey & M. Huberman (Eds.): *Professional development in education: New paradigms & practices*, 92-113. NY: Teachers College, Columbia University.

SERRADÓ, A. (2004): *El Tratamiento del Azar en Educación Secundaria Obligatoria*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz, (en prensa).

TOMAZOS, D. (1997): What do university teachers say about improving university teaching? En Pospisil. R. and Willcoxson, L. (Eds): *Learning Through Teaching. Proceedings of the 6th Annual Teaching Learning Forum*, 333-340, Murdoch University, February, 1997. Perth: Murdoch University. http://cea.curtin.edu.au/tlf/tlf1997/tomazos.htlm

Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático

MARÍA CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO
Universidad de Zaragoza.

ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ
Universidad de Granada.

Resumen:

En este trabajo se presenta el resultado obtenido del análisis de un proceso de razonamiento inductivo desarrollado por 12 estudiantes de secundaria en un contexto de resolución de problemas. Se plantea un problema, en el transcurso de una entrevista, que consiste en determinar el número máximo de regiones que se obtienen al trazar rectas sobre un plano. Durante la resolución del problema los estudiantes, y a través del dialogo con el entrevistador, han de explicar y justificar sus decisiones. Centrándonos en el trabajo de Pólya y en otras investigaciones previas relacionadas sobre este tema, se define un sistema de categorías mediante las cuales se organizan los datos para su análisis.

Abstract:

In this report we present some of the results of the analysis of the inductive reasoning process developed by 12 Secondary students in a problem solving context. We proposed a problem in an interview in which students are required to determine the maximum number of regions they get when they trace straight lines in a map. They must justify their answers as well. Focusing on Polya's investigation and another related to it, we define a category system which we use in data analysis.

Introducción

En el marco idílico de la educación matemática que se presenta en el primer capítulo del texto Principios y Estándares para la Educación Matemática del N.C.T.M. (2000) se indica: "Los profesores ayudan a sus alumnos a formular, perfeccionar y explorar conjeturas partiendo de evidencias y a utilizar diferentes tipos de razonamiento, así como distintas técnicas de demostración para confirmarlas o refutarlas" (p.3). Se considera en este documento que para que un individuo entienda la matemática es de suma importancia que sea capaz de razonar, que razonar matemáticamente es un hábito mental y, como todo hábito, ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos matemáticos.

La habilidad de razonar está relaciona con el pensamiento y es propia de los seres humanos. Al razonamiento se le asocian procesos de pensamiento diferentes. Por una parte, los procesos que conllevan una inferencia explícita, son aquellos en los que de una o varias proposiciones, se infiere otra; estos procesos están intrínsecamente ligados a un lenguaje. Por otro lado se consideran los procesos inherentes a un acto de exploración (Duval, 1999), en éstos nos vamos a centrar.

En Psicología, una ciencia cada vez más especializada, cuando se alude a los procesos de pensamiento se hace referencia generalmente a aquellas acciones de inferencia en tareas de razonamiento deductivo e inductivo y al marco global en el que se insertan estas inferencias como son la toma de decisiones y la resolución de problemas (González, 1998). Se puede considerar el razonamiento, de manera general, como el modo de encadenar conceptos e ideas que permite llegar a una conclusión.

Razonamiento inductivo y resolución de problemas

La distinción clásica y generalmente aceptada, entre tipos de razonamiento, se hace entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. El razonamiento deductivo parte de unas premisas y llega a una conclusión que se sigue de las mismas, mientras que el razonamiento inductivo consiste en alcanzar una conclusión que está apoyada por unas premisas. No obstante, existen dudas con relación a una separación drástica de estos dos tipos de razonamiento. No resulta fácil hablar de razonamiento inductivo sin que aparezca unido al razonamiento deductivo (Duval, 1999). No obstante, para este trabajo es necesario que nos centremos en el razonamiento inductivo y vamos a tratar de hacerlo, sin perder de vista la recomendación de Duval.

Hemos apuntado que el razonamiento inductivo es un proceso que parte de sucesos particulares y busca la generalidad de los hechos que acontecen. Un razonamiento inductivo se considera fuerte si es improbable que su conclusión sea falsa cuando sus premisas sean verdaderas. En este sentido se dice que el razonamiento inductivo depende del apoyo empírico que le prestan las premisas para alcanzar la conclusión. Pólya, gran defensor de la resolución de problemas y de la utilización del razonamiento inductivo para el aprendizaje de las matemáticas, concibe las matemáticas como una actividad en la que el descubrimiento es uno de sus principales compromisos, en definitiva, como resolución de problemas; considera que muchos descubrimientos se han hecho por razonamiento inductivo y que investigar una situación comprobando casos particulares es una estrategia poderosa en el aprendizaje, en general, y en el de las matemáticas en particular, pues mirar casos especiales ayuda a entender una situación y ver si una conjetura sobre una regla se cumple o no. Pólya (1966) establece cuatro pasos en un proceso correcto de razonamiento inductivo para la resolución de problemas.

- Trabajo con casos particulares.
- Formulación de conjetura.
- Justificación de la conjetura.
- Comprobación con nuevos casos particulares.

Investigaciones realizadas, con objetivos muy próximos al de este trabajo, (Jeffery, 1978; Almeida, 1996; Ibañes, 2001) han detectado grandes dificultades en la realización de estos pasos por parte de los alumnos y lo achacan a la escasez de trabajo sistemático de los estudiantes, de niveles educativos inferiores a los universitarios, sobre procesos informales de justificación de propiedades matemáticas. Cuando los procesos de razonamiento relacionados con la justificación son tratados en niveles educativos de secundaria y primeros cursos de universidad, aparecen fuertes vinculaciones con la evidencia empírica y la búsqueda de patrones (Baker, 1996). De acuerdo con las ideas anteriores, reivindicamos que, en la medida que lo permita cada nivel educativo, se lleve a cabo trabajo con patrones, se aventuren conjeturas que se aceptarán o rechazarán dependiendo de la justificación que los estudiantes sean capaces de realizar. Siempre que se trata con relaciones y se miran patrones, se trata con generalizaciones. La generalización, partiendo de casos específicos para llegar a una regla general, es un aspecto fundamental en el quehacer matemático, una forma de llegar al álgebra.. Las reglas generales pueden ser descritas verbalmente, algebraicamente, geométricamente, gráficamente.

Objetivo de la investigación

El objetivo de investigación, de este trabajo, es realizar un análisis y posterior descripción del razonamiento inductivo empleado por 12 estudiantes de Secundaria, cuando resuelven un problema “no simple” para ellos.

METODOLOGÍA

Se ha utilizado la entrevista individual semiestructurada, como metodología, por creer que para estudiar el razonamiento de un sujeto se requiere de una observación “cercana” al mismo, en el momento de realizar la tarea. La entrevista preparada y organizadas las posibles preguntas y respuestas a hacer a, y, por los alumnos, pero con libertad para modificarlas durante el desarrollo de la actividad, si es necesario hacerlo durante el desarrollo de la misma. La persona que realizó todas las entrevistas fue una de las investigadoras. A los estudiantes se les plantea una situación abierta y éstos tienen flexibilidad y libertad para dar respuesta (Cohen y Manion, 1990).

Problema

Tanto Pólya (1966) como Jeffery (1978) defiende que si se trata de analizar las explicaciones dadas por estudiantes, es necesario centrarse en contextos donde las cuestiones no sean procedimientos estándar y se supone que los contextos más apropiados son aquellos que involucran investigación de situaciones matemáticas y en las que los alumnos lleguen a conclusiones y den explicaciones.

En el caso que nos ocupa, la situación planteada a los alumnos en un lenguaje asequible para ellos es el siguiente problema:

> *Un plano P es disecado por un número de rectas. Todo par de rectas distintas se corta en un sólo punto. ¿Cual es el mayor número de partes en que el plano queda dividido por las rectas trazadas?*

Este problema no se puede ver como uno de tipo familiar, ni puede ser resuelto utilizando un algoritmo simple. Utilizar un método de ensayo y error puede dar resultados positivos. Si se utiliza la estrategia de ver qué pasa tomando números pequeños, la iteración y la recursión juegan un papel importante en el proceso de resolución del mismo. La característica esencial en la iteración, es la ejecución repetida de alguna noción particular- en esta ocasión la separación del plano en “partes o trozos de plano” mediante el trazado de restas sobre el mismo-. La iteración produce una secuencia de términos como a_n, $a_{n+1,}$ cada uno de los cuales depende de sus predecesores de una cierta forma- en este caso concreto, el trazado de una línea da origen a dos trozos; la segunda línea da lugar a que aparezcan cuatro trozos, añadiendo la tercera línea aparecen siete trozos, y así sucesivamente-. La continuación de este proceso permite descubrir una cierta regularidad y la recursión proporciona la siguiente expresión:

$$a_1=2, \quad a_2=4, \quad a_3=7, \ldots \qquad a_{n+1}=a_n+n+1$$

Esta expresión, puede constituir una solución aceptable en algunos niveles educativos. Continuando con la estrategia emprendida para resolver el problema, se pueden observar las diferencias entre dos términos adyacentes de la secuencia, y deducir una regla desde estas comparaciones especiales y razonando que: *si se aumenta una línea, el número de trozos que aumenta es, en cada caso, uno más que en el caso anterior*. El aumento al pasar de una línea a dos es de *dos* partes de plano, el aumento al pasar de dos líneas a tres, es de *tres* partes de plano y así sucesivamante.

Esta estrategia que estamos comentando, para que sea efectiva, pasa por un serie de acciones sistemáticas: Ir señalando cómo van aumentando el número de regiones según aumenta el número de rectas trazadas. Descubrir que el mayor número de regiones se obtiene cuando al trazar una nueva recta, ésta corta al mayor número de las que ya había trazadas. Ordenar los datos en una tabla que sirva de ayuda para ver la relación entre ellos para. Generalizar la relación. Finalmente, demostrar la expresión general por inducción completa.

Sujetos

Aunando las orientaciones curriculares (BOE, 2003) y nuestros intereses de investigación se vio la idoneidad de tomar estudiantes de los últimos cursos de secundaria para desarrollar este trabajo. Dado que pretendíamos estudiar el comportamiento de los alumnos durante la realización de la tarea, tomamos doce sujetos de los cuatro últimos cursos de Educación Secundaria elegidos intencionadamente de la siguiente forma: tres estudiantes de cada uno de los cursos, atendiendo a los rendimientos de los alumnos: alto (1), medio (2), bajo (3). Al género (chica, chico). De esta forma de los doce alumnos que intervinieron había cuatro de cada tipo de rendimiento; siendo seis chicas y seis chicos. La identificación de cada uno de ellos se hizo utilizando siglas que indicaban curso al que pertenecen y rendimiento, no se consideró que se pudiese obtener resultados diferentes en función del sexo de los sujetos, por lo que no se indicó esta diferencia.

La pretensión es “ver” como funcionan los pasos de Pólya asociados al razonamiento inductivo en la resolución del problema mencionado, con los alumnos elegidos y comprobar hasta donde son capaces de llegar en el proceso descrito anteriormente. No se intenta hacer una generalización de los resultados obtenidos. Como mucho, mostrar la forma de actuar de unos sujetos concretos y que puede servir de referencia para profesionales de la enseñanza de niveles semejantes en un trabajo similar con sus alumnos.

RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

Los datos se recogieron de tres modos: a) las entrevistas, que fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas, b) los trabajos escritos realizados por los estudiantes y, c) las notas que la entrevistadora tomó durante y después de la entrevista, sobre aspectos relevantes imposibles de registrar en la cinta audio. Toda esta información, convenientemente preparada, se trató mediante el programa de análisis cualitativo de datos, Nud*ist revision (N4). Esto permitió ver los datos de una forma estructurada, descubrir detalles, patrones y relaciones entre ellos.

Para la preparación de la información fue útil y necesario definir un sistema de categorías que respondía a las acciones relacionadas con el razonamiento inductivo, adaptando los pasos de Pólya, anteriormente señalados, a la información real proporcionada por la producción de los estudiantes, siguiendo las directrices de Anguera (1991) y las aportaciones de los investigadores Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992); Goetting, (1995), Edwards, (1999), Reid, (2002). El sistema de categorías y subcategorías que quedó establecido se muestran en la tabla 1.

RESULTADOS

El análisis de los datos recogidos en los documentos señalados anteriormente permite comprobar que, aunque el enunciado del problema se trató de hacer de forma cercana a los estudiantes, utilizando un vocabulario de expresión sencilla, la comprensión del enunciado presentó dificultad para todos los estudiantes. Las dificultades fueron de distinta índole. Los alumnos de de 3º de ESO no entendían la propuesta de trabajo que se les hacía. En el resto de los cursos, la dificultad estaba relacionada con la comprensión de conceptos involucrados en el problema, y que no habían trabajado anteriormente, o lo habían hecho poco (regiones, plano o rectas son los conceptos que más dudas suscitaron).

CATEGORÍAS	**SUBCATEGORÍAS**
1. Enunciado de la tarea	Comprensión del enunciado El estudiante interpreta incorrectamente Pierde/considera el enunciado en su trabajo
2. Trabajo con casos particulares	Número de casos particulares Tipos de casos particulares Sistemático/NO sistemático Organización
4. Formulación de conjeturas	Relación simple Proporcionalidad directa Relación de recurrencia Forma de representación Generalización de conjeturas
5. Validación de conjeturas	Basada en casos particulares Forma de representación
6. Justificación de la conjetura general	Necesidad de justificación Basado en casos particulares

Tabla 1

Una vez que la entrevistadora explica el enunciado y los estudiantes lo comprenden, se producen dos comportamientos diferentes. Por un lado, cuatro estudiantes (3ESO2, 1BAC3, 1BAC2 y 2BAC3) tienen en cuenta el enunciado de la tarea durante todo su trabajo, no lo olvidan. El resto, de los estudiantes, se centran en el trazado de rectas y el recuento de regiones y se olvidan del planteamiento de la tarea, perdiendo, en ocasiones, el objetivo que debían perseguir.

La forma en que los entrevistados trabajaron con los casos particulares y el uso que hicieron de los mismos queda reflejada en la tabla 2.

Casos particulares			
Sujeto	Número	Sis.	Or.
3ESO3	4	■	
3ESO2	5		■
3ESO1	4		■
4ESO3	3		■
4ESO2	4		
4ESO1	4	■	■
1BAC3	5		■
1BAC2	+ de 5	■	
1BAC1	5		■
2BAC3	4	■	
2BAC2	5	■	■
2BAC1	3	■	

Tabla 2

Se observa en la tabla1 que solamente dos estudiantes organizan los datos que van obteniendo sistemáticamente.

Todos los estudiantes coincidían en que el éxito de la tarea radica en el control de un número elevado de casos particulares. Todos los estudiantes excepto 1BAC2 y 2BAC3 trazaron un número de rectas comprendido entre 0 y 5.

Hay estudiantes que siguieron algún patrón al trazar las rectas (paralelas entre sí o formando cuadrícula) pero así no conseguían el mayor número de regiones. Algunos estudiantes fueron sistemáticos en el trazado de las rectas y trataron que la última recta cortara a las anteriormente trazadas. Estos mismos estudiantes iban aumentando el número de rectas de una en una, salvo 2BAC3, quien pasó del caso con tres rectas, al caso de ocho.

La forma en que los estudiantes trataban los casos particulares influye en la tarea de generalización. En la tabla 2 se pueden observar los estudiantes que organizaron la información relativa a los casos particulares que trabajaron. Sólo una de los estudiantes (4ESO1) lo hizo por propia iniciativa. El resto de los estudiantes que organizaron la información, lo hicieron guiados por la entrevistadora.

En cuanto a la formulación de conjeturas, todos indicaron que cuantas más rectas tracen, más regiones obtienen. En la tabla 3 quedan reflejadas las conjeturas que formularon y la generalización que obtuvieron, en caso de que lo consiguieran[2].

Sujetos	Conjeturas					
	Infini	Lineales			Recur	Gener
		n+1	2n	R.T		
3ESO3			■			
3ESO2			■			
3ESO1		■	■	■		
4ESO3	■		■	■	■	
4ESO2	■					
4ESO1	■	■			■	■
1BAC3			■		■	
1BAC2	■		■		■	
1BAC1	■		■			
2BAC3	■		■	■	■	
2BAC2	■		■		■	
2BAC1	■		■		■	

Tabla 3

En la columna encabezada por Infini se señalan los estudiantes que consideraron que el número de regiones que se obtiene es infinito, puesto que pueden trazar un número infinito de rectas en el plano, que es ilimitado. La entrevistadora ha de aclarar que de los que se trata es de buscar la relación entre el número de restas trazadas y el número de regiones. A partir de aquí, todos los estudiantes excepto 4ESO2 consideran que entre el número de rectas trazado y el número máximo de regiones existe una relación lineal. Entre éstos se distinguieron tres grupos de sujetos. En un primer grupo están los que indican que el número de regiones que se obtiene es el número de rectas más uno. En un segundo grupo los que mencionan que el número de regiones es el doble del número de rectas. En un tercer grupo están los sujetos que utilizan la regla de tres como algoritmo para la resolución del problema.

---

[1] Sis. = Sistematiza, Or. = Organización
[2] Infini.= Infinitas; RT= Regla de Tres; Recur = Recursión; Gener = Generalización

Los estudiantes de 3º de ESO hacen intentos de generalizar a partir de los casos particulares, pero no obtienen ninguna conjetura para el caso general. En 4º de ESO hubo dos sujetos que obtuvieron una relación por recurrencia, mediante la cual se podía conocer el número máximo de regiones para un número determinado de rectas conociendo los casos particulares que le preceden.

Los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato, excepto 1BAC1 llegan a la relación por recurrencia y sólo 4ESO1 consigue un generalización que no es por una forma recurrente, siente necesidad de justificar que la expresión obtenida es correcta, pero no puede hacerlo.

La forma de expresar estas generalizaciones era oral, en todos los casos. Cuando los estudiantes buscaron una relación general aparecieron términos que consideraban propios del lenguaje matemático, como *ley*, *ecuación*, *sistema de ecuaciones*, *norma fija*, *fórmula*, *progresión*, *regla*. La translación del lenguaje oral e la expresión escrita se hizo mediante representación algebraica y geométrica, fundamentalmente. Los alumnos de Bachillerato y 4ESO1 utilizan *n* ó *x* para representar el número de rectas y en función de éstas tratan de expresar algebraicamente el número máximo de regiones.

Todos los sujetos que trataron de validar su conjetura para el caso general, lo hicieron mediante casos particulares. Los estudiantes que emplearon *n* ó *x* como variables que representan el número de rectas, validaron sus conjeturas dando valores a la variable considerada y compararon esos datos con los resultados que obtuvieron en las representaciones gráficas.

Al tratarse de una tarea que no era familiar para ninguno de los sujetos entrevistados, no hubo diferencias significativas en la resolución de la tarea. Donde sí hubo diferencias fue en la expresión de la generalización: los alumnos de los cursos más elevados manejaron el lenguaje algebraico escrito y el resto lo expresaron en lenguaje oral (algebraico o no). Esto se debe más a los contenidos matemáticos que se trabajan en cada curso al que pertenecen que a las capacidades de razonamiento de los estudiantes según sus niveles educativos.

En estos resultados hemos omitido los errores y las dificultades que presentaron los estudiantes en los diferentes pasos del proceso de razonamiento inductivo, aunque esto conformó un punto importante del estudio.

CONCLUSIONES

Como señalábamos no pretendemos generalizar resultados sino traducir nuestros resultados en orientaciones para los profesionales de la enseñanza, en ese sentido hacemos las conclusiones.

Todos los estudiantes entrevistados muestran duda e inseguridad durante la realización de la tarea, constantemente buscan el apoyo y respuestas a su trabajo, por parte de la entrevistadora, valoramos no positiva esta actitud por lo que consideramos importante, para la mejora de la misma, trabajar de manera que se proporcione al estudiante confianza en su trabajo, transmitiendo la idea de que no siempre se llega a una solución “a la primera”. En la resolución de un problema, se pueden hacer ensayos y comprobaciones para desechar aquella respuesta que resulte errónea. Comenzar de nuevo y seguir otra estrategia o procedimiento. Ser perseverantes y no abandonar el trabajo observando a “primera vista” que el problema es difícil.

El hecho de que todos los estudiantes hayan hecho conjeturas (en muchos casos a instancias de la entrevistadora) que van desechando por comprobar que son erróneas y haciendo otras de nivel más elaborado, nos lleva a sugerir que es necesaria mucha participación del profesor, proponiendo retos y orientando en la consecución de los mismos. Insistimos en que se requiere mucha explicación por parte del profesor y diálogo entre profesor y estudiante ante una tarea nueva (fuera de la rutina) para los alumnos. Las explicaciones van dirigidas a proporcionar conceptos nuevos y desconocidos para los estudiantes o a recordarlos si son conocidos y están olvidados.

Mas recomendaciones para los profesores que se desprenden del trabajo son: Transmitir a los alumnos las ideas de que en el trabajo con problemas, en los que el procedimiento requiere concentración, hay que volver varias veces a centrarse en el objetivo que se pretende con la resolución del problema. Para los problemas que se basen en la recursión, el centro de interés no es tomar muchos casos particulares, que además de llevar tiempo pueden ser cada vez más complicados, sino buscar, lo antes posible, el patrón que hay implícito.

Se ha detectado que, en los alumnos, no es intuitiva la acción de seguir una estrategia sistemática ni organizar los datos que se van obteniendo, por lo que es algo a trabajar para crear hábito en estas acciones.

Dado que siete estudiantes han alcanzado la relación por recurrencia nos muestra que es posible este tipo de trabajo en alumnos de estos niveles.

Las expresiones de la generalización, o la conjetura, se hacen en distintos lenguajes (verbal, escrito, algebraico), esto proporciona un motivo para realizar translaciones entre distintas representaciones de un mismo concepto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, D. (1996). Proof in Undergraduate Mathematics in the UK: A Case of Bridging from the Informal to the Formal? *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (Seville, Spain July 14-21)

ANGUERA, M. (1991). Proceso de categorización, en: Anguera (eda) *Metodología Observacional en la Investigación Sociológica*. PPU. Barcelona

BAKER, J. D. (1996). Students´ Difficulties with Proof by Mathematical Induction. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, New York, April, 8-12, 1996, 21p.

Bolletín Oficial del Estado. (2003). *Real Decreto, 832/2003*.

CAÑADAS, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.

COHEN, L. & MANION, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* México D.C.: Universidad del Valle.

EDWARDS, L. D. (1999). Odds and Evens: Mathematical Reasoning and Informal Proof among High School Students. *Journal of Mathematical Behavior, 17*, 4, 489-504.

GOETTING, M. (1995). *The college student´s understanding of mathematical proof.* Doctoral Disseration. Philosophy Department of University of Maryland.

GONZÁLEZ, M. J. (1998). *Introducción a la psicología del pensamiento*. Madrid: Editorial Trotta.

JEFFERY, R. (1978). *A study of the generalisation and explanation strategies of 10 and 11 year old children in mathematics*. Thesis for the Degree of Master of Philosophy, University of Nottingham.

N.C.T.M. (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducido al Castellano por Sociedad Matemática de Educació Matemática THALES. 2003. Granada

NEUBERT, G. A. & BINKO, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington D.C.: National Education Association.

POLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

REID, D. (2002). Elements in accepting an explanation. *Journal of Mathematics Behavior*, 20, 527-547.

Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación

CARLOS DE CASTRO HERNÁNDEZ

Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle. Universidad Autónoma de Madrid

ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ E ISIDORO SEGOVIA ALEX

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Resumen:

En este estudio se analizan los errores –en el ajuste del valor posicional– que cometen los maestros en formación en tareas de estimación de multiplicación y división con números naturales y decimales. Para ello, se ha elaborado una prueba de estimación compuesta por 24 cálculos directos –sin contexto. Participan 26 estudiantes del CSEU La Salle. Se administra la prueba de estimación a los maestros y posteriormente se realizan entrevistas para determinar los errores que han cometido. Se han encontrado 8 tipos diferentes de errores. Destacan, por su frecuencia, los errores debidos a un conteo defectuoso de las posiciones para establecer el orden de magnitud de los resultados y los que se producen al dividir un número por otro mayor añadiendo un cero de más al cociente. La colocación de la coma decimal en el resultado es, en todos los casos, una gran fuente de dificultad.

Abstract:

In this study we analyze the errors –in the adjustment of positional value– of preservice elementary teachers in computational estimation tasks of multiplication and division with integers and decimals. We have elaborated an estimation test composed by 24 direct computations –without context. Twenty six students of CSEU La Salle have participated in the study. The estimation test was administered to the teachers and after this we interviewed the teachers to determine the errors made in estimation. We have found 8 different types of errors. We can highlight, because of their frequency, errors due to a wrong counting of positions to establish the order of magnitude of results and those errors produced in division when divisor is greater than the dividend adding one extra cero to the quotient. Finding the place for decimal point is, in all the cases, a great source of difficulty.

Introducción

La estimación en cálculo puede definirse como el "proceso de transformar números exactos en aproximaciones y calcular mentalmente con estos números para obtener una respuesta razonablemente próxima al resultado exacto de un cálculo" (Sowder 1988, p. 182). La estimación es una destreza socialmente útil cuyo conocimiento, dentro del desempeño de cualquier profesión, permite una adaptación mejor a las circunstancias del entorno. Por esta razón, desde hace tiempo se ha tratado de introducir la estimación en el currículo matemático de la educación primaria y secundaria. Uno de los medios principales para favorecer esta introducción es a través de la formación de maestros. Esto ha sido señalado por el NCTM (2000) al indicar que:

> Los maestros deben ayudar a sus alumnos a aprender a decidir cuándo es más apropiada una respuesta exacta o una estimación, cómo elegir el método de cálculo más adecuado, y cómo evaluar la razonabilidad de los resultados de los cálculos. (p. 220)

Dado que los maestros son los responsables más directos de la introducción de la estimación en el currículo, parece importante preguntarse sobre cuál es su conocimiento sobre la estimación. Además, un estudio sobre la habilidad de estimar de los maestros y sobre los errores que cometen al estimar puede ayudarnos a comprender mejor los puntos fuertes y las debilidades de su pensamiento sobre conocimientos y destrezas estrechamente vinculados a la habilidad de estimar. Entre estos aspectos pueden destacarse el cálculo mental, la comparación de números y el conocimiento sobre los decimales y el valor posicional.

En el presente trabajo analizamos los errores cometidos por los maestros en formación en el ajuste del valor posicional cuando realizan estimaciones para operaciones de multiplicación y división con números naturales y decimales. El objetivo de este análisis es el de clasificar estos errores y estudiar su distribución con relación al tipo de operación y al tipo de número.

Dificultades de los maestros en formación con los números decimales menores que uno

Los maestros en formación suelen tener dificultades con los decimales menores que uno (Thipkong y Davis, 1991; Tirosh y Graeber, 1989; Tirosh y Graeber, 1990). Algunos sostienen de manera explícita que "la multiplicación siempre aumenta" o que en un problema de división, el cociente debe ser menor que el dividendo (Tirosh y Graeber, 1989). Suelen mostrar una dependencia muy fuerte de las operaciones con números enteros y del conocimiento procedimental que tienen sobre las mismas.

Markovits y Even (1999) también han encontrado dificultades en el uso de los decimales por parte de los maestros al proponer la siguiente situación de clase en cursos de formación:

> A un alumno se le dijo que 15,24 × 4,5 = 6858, y se le pidió que colocara él la coma decimal. El alumno contestó que la respuesta era 6,858 porque había dos lugares decimales después de la coma decimal en 15,24 y un lugar después de la coma decimal en 4,5 y que juntos hacen tres lugares detrás de la coma decimal en la respuesta. ¿Cómo le responderías?

Algunos maestros, en esta situación, dan la respuesta del niño por correcta.

Por otro lado, es necesario indicar que gran parte de las dificultades, que tienen los niños y los maestros en formación, con los números decimales tienen su origen en el modo en que estos se enseñan en la escuela. Lampert (1989, p. 229), refiriéndose a las dificultades relacionadas con el valor posicional, señala a la "invisibilidad de la cantidad en el sistema de valor posicional" como uno de los problemas que impiden alcanzar una correcta comprensión del modo en que se trabaja con el valor posicional en los algoritmos de multiplicación y división:

> Precisamente por que los ceros suelen "asumirse" ... los números que aparecen según se realizan las distintas partes del algoritmo no se parecen a los números que corresponden a las cantidades que realmente representan. Para obtener la respuesta final, uno debe seguir cuidadosamente el procedimiento para recuperar el orden de magnitud correcto. (p. 229)

G. Brousseau, N. Brousseau y Warfield (2004) critican el hecho de que los decimales se enseñen como enteros con coma decimal: "A nuestro parecer, el procedimiento didáctico de extender de forma 'analógica' o 'metafórica' el uso del conocimiento carece de valor" (p. 20). Para ellos, los enteros, las fracciones y los decimales son muy diferentes y se debe dar a cada tipo de número un tratamiento específico evitando, por ejemplo, tratar la división con números decimales, después de haber estudiado la división con enteros, como una simple aplicación de la misma idea sin importar que algunas propiedades de la división se hayan "modificado drásticamente sin que los alumnos lo hayan advertido" (p. 20).

Errores en la estimación en cálculo

Dentro del campo de la estimación, la palabra "error" se utiliza con dos significados distintos. Por una parte, Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) indican que:

> Error es el término que designa la diferencia o desviación que un valor aproximado tiene con respecto del valor exacto al que representa. Cuando es necesario precisamos más y al error le llamamos error absoluto, para diferenciarlo del error relativo, que expresa la razón entre el error absoluto y el valor exacto. (p. 85)

En este contexto podríamos decir que el término "error" es sinónimo de "inexactitud" y algunas veces –cuando el error relativo es grande– de "imprecisión". La propia naturaleza de la estimación supone la existencia y la aceptación de un cierto margen de error. De acuerdo con esto, Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982) ven la tolerancia del error como una "comprensión del concepto de estimación que permite [a quien la realiza] sentirse cómodo con cierto grado de error" (p. 198). No obstante, este margen de error debe tener un límite, pues un exceso de tolerancia con el error podría conducir a producir estimaciones no razonables.

Por otra parte, el termino "error" también se emplea en matemáticas como manifestación de un "conocimiento deficiente e incompleto" (Rico, 1995, p. 69). A veces, el error es el "efecto efecto de un conocimiento previo que era interesante y exitoso, pero que ahora se revela como falso o simplemente inadaptado" (Brousseau, 1997, p. 82). Esta forma de ver el error tiene su origen en trabajos como el de Bachelard (1999), que introdujo el término "obstáculo epistemológico":

> Es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones... es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos... Se conoce en contra de un conocimiento anterior (p. 15)

Así, el conocimiento de los números naturales puede convertirse en un obstáculo para el aprendizaje de los decimales. Esto se debe a la consideración de los números decimales como "números naturales con un punto decimal" (p. 92). Además, Brousseau (1997) añade:

> Esta integración como números naturales obviamente será reforzada por el estudio de las operaciones de forma mecánica, es decir, acciones efectuadas de memoria, sin comprensión, realizadas de la misma forma que con números naturales, únicamente con una pequeña extensión para el punto decimal. (p. 92)

De acuerdo con esto, algunas ideas equivocadas sobre las operaciones –como la creencia de que "la multiplicación siempre aumenta"– reflejan un conocimiento que tiene un cierto dominio de validez –las operaciones con números enteros– pero constituyen un error cuando se intenta extrapolarlas a las operaciones con decimales menores que uno. Esta situación ha sido también descrita por Hiebert y Wearne (1986):

> La extensión de los conceptos propios de los números enteros a referentes apropiados para el sistema de las fracciones decimales es un proceso delicado... Algunas características del sistema de los números enteros pueden importarse y conectarse al sistema de símbolos de las fracciones decimales, pero otras no... (p. 204)

Dentro del ámbito de la estimación, el análisis de los errores ha sido tratado en algunas investigaciones –De Castro, Castro y Segovia (2002), Levine (1980) y Morgan (1990). En algunos de estos trabajos, se han descrito errores en el ajuste del valor posicional. Sin embargo, este tipo de error no ha sido todavía analizado en profundidad estableciendo subcategorías del mismo que permitan distinguir los orígenes diversos de los mismos.

Se han propuesto dos objetivos para la investigación: (1) Elaborar un esquema de clasificación para los errores –que se producen en el ajuste del valor posicional– que cometen al estimar los maestros en, y (2) Estudiar la distribución de dichos errores[1] en función del tipo de operación y del tipo de número que aparecen en las tareas de estimación.

MÉTODO

Variables

Se han empleado dos variables independientes en la elaboración de las tareas de estimación: el *tipo de operación* y el *tipo de número*. Los *tipos de operación* considerados han sido la multiplicación (O_1 en las tablas), división de un número por otro menor (O_2), y división de un número por otro mayor (O_3). En cuanto al *tipo de número* se han empleado cuatro tipos de tareas de estimación: tareas en las que sólo aparecen números enteros (N_1); tareas en las que aparecen números decimales mayores que uno pero no contienen números decimales menores que uno (N_2); tareas en las que aparecen números decimales menores que uno pero no contienen números decimales menores que 0,1 (N_3); y tareas en las que aparecen números decimales menores que 0,1 (N_4).

En el trabajo se han considerado como variables dependientes: El *tipo de error* cometido por el sujeto al producir su estimación y la *puntuación*[2] que obtiene al realizar la misma. Esta puntuación es de cero puntos si el porcentaje de error es superior al 30%, de un punto si dicho porcentaje está entre el 20% y el 30%, de dos puntos si es mayor que el 10% pero menor o igual que el 20% y de tres puntos si es menor o igual que el 10%.

Los sujetos

En la investigación han participado 26 sujetos[3] del Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle[4]. Todos ellos cursaron, durante el segundo semestre del curso 2002-2003, la asignatura "Matemáticas y su Didáctica". Dentro de la misma han tenido un periodo de instrucción sobre estimación en cálculo –de 10 horas de duración– en el que aprendieron estrategias de estimación y practicaron la estimación en cálculos directos y aplicados. También se discutieron aspectos sobre la enseñanza de la estimación –como la evaluación– y se analizaron propuestas de actividades de estimación para la Educación Primaria. Al finalizar el periodo de instrucción, los alumnos realizaron la prueba de estimación y la entrevista que se presentan en la siguiente sección.

Tabla 1. *Tareas de estimación clasificadas por tipo de operación y tipo de número*

	Operación		
Número	O_1	O_2	O_3
N_1	(1) 46×771 (2) 58×244	(3) $968 \div 24$ (4) $354 \div 88$	(5) $86 \div 222$ (6) $36 \div 258$
N_2	(7) $78{,}4 \times 89{,}5$ (8) $34{,}1 \times 47{,}2$	(9) $85{,}9 \div 3{,}42$ (10) $96{,}2 \div 6{,}25$	(11) $9{,}88 \div 25{,}6$ (12) $8{,}85 \div 42{,}6$
N_3	(13) $2{,}57 \times 0{,}72$ (14) $0{,}45 \times 7{,}85$	(15) $0{,}962 \div 0{,}25$ (16) $0{,}747 \div 0{,}35$	(17) $0{,}37 \div 0{,}543$ (18) $0{,}63 \div 0{,}785$
N_4	(19) $0{,}025 \times 776$ (20) $852 \times 0{,}048$	(21) $0{,}46 \div 0{,}066$ (22) $0{,}68 \div 0{,}024$	(23) $0{,}059 \div 0{,}23$ (24) $0{,}086 \div 0{,}42$

[1] Esta parte aparece sólo esbozada al final de la sección de resultados.
[2] Esta variable no aparece en la parte cualitativa de la investigación dedicada al análisis de errores. Sin embargo, ha sido incluida en este informe para que el lector conozca el margen de error permitido en las estimaciones y para facilitar la interpretación de la columna "puntuación" de la tabla 2.
[3] Han participado 156 sujetos en el marco global de la investigación. De ellos, 133 pertenecientes al CSEU La Salle y 23 a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.
[4] Centro universitario privado, adscrito a la Universidad Autónoma de Madrid.

Instrumentos

En este estudio se han utilizado dos instrumentos: a) una prueba de estimación que ha servido para estudiar la dificultad de las tareas de estimación en función del tipo de operación y tipo de número[5] y, b) una entrevista que se ha utilizado para realizar el análisis de errores.

La prueba de estimación. La prueba de estimación está compuesta por los 24 cálculos que aparecen en la tabla 1. Los cálculos aparecen clasificados atendiendo a las variables independientes Tipo de operación y Tipo de número. En la tabla 2 se muestra un resumen del análisis previo realizado a las tareas de estimación que componen la prueba. En la primera columna, aparecen las tareas de estimación que se han propuesto. En la segunda se proponen distintos ejemplos de sustitución de los números iniciales por aproximaciones. En la tercera columna figura el tipo de sustitución –nombre de la destreza de aproximación– indicando la presencia –en su caso– de una compensación previa al cálculo. Por último, desde la columna cuarta a la sexta pueden observarse los resultados de las posibles estimaciones empleando cada destreza de aproximación –que se utilizaron para determinar el intervalo de respuesta aceptable, la puntuación que obtendría cada estimación y, por último, los intervalos de respuesta aceptable y del 30% de error.

Las entrevistas. Las entrevistas se han realizado con el fin de realizar la fase del estudio de análisis de errores. En dicha entrevista se pedía a los sujetos que dieran una estimación para un cálculo propuesto explicando el procedimiento que habían utilizado para producir su estimación. Los sujetos fueron divididos en dos grupos. En uno de los grupos se utilizaron para la entrevista las tareas impares de la prueba de estimación y en el otro grupo las pares. Las entrevistas han sido realizadas individualmente utilizando un programa de ordenador[6]. Fueron registradas utilizando una grabadora y transcritas a papel para su posterior análisis.

Tabla 2. *Ejemplos de análisis de las tareas de estimación empleadas en la prueba*

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
	40 × 700	Truncamiento	28000	1	
	40 × 3/4 × 1000	Fracciones	30000	2	
	40 × 800	Redondeo + comp.	32000	3	[24826,46105]
(1) 46 × 771	50 × 700	Redondeo + comp.	35000	3	[28000,46000]
	50 × 800	Redondeo	40000	2	
	100/2 de 800	Fracciones	40000	2	
	46 × 1000	Potencias de 10	46000	1	
	0,6 ÷ 0,03	N. compatibles	20	1	
	0,5 ÷ 1/40	Fracciones	20	1	
	0,6 ÷ 1/40	Fracciones	24	2	
	0,5 ÷ 0,02	N. compatibles	25	2	[19,8 , 36,8]
(22) 0,68 ÷ 0,024	0,7 ÷ 1/40	Fracciones	28	3	[20,35]
	0,6 ÷ 0,02	Truncamiento	30	3	
	0,66 ÷ 0,022	N. compatibles	30	3	
	0,75 ÷ 0,025	N. compatibles	30	3	
	0,7 ÷ 0,02	Redondeo	35	1	

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE ERRORES

Al analizar las transcripciones de las entrevistas se han encontrado los tipos de errores que figuran a continuación. En cada caso se proponen algún ejemplo que acompaña la definición del error.

Error en el conteo de los ceros (PV1). Se produce cuando el sujeto emplea una estrategia de estimación correcta, empleando una destreza de aproximación y sustituyendo los datos iniciales por otros que acaban en uno o varios ceros, pero produce una estimación de un orden de magnitud distinto al del resultado exacto del cálculo debido a una contabilización incorrecta de los ceros.

[5] En este trabajo sólo se informa de la parte de la investigación relativa al análisis de errores. No aparece, por tanto, la parte dedicada al estudio de la dificultad de las tareas en función de las dos variables independientes.

[6] El mismo que se había empleado en la administración de la prueba de estimación para evitar que los sujetos hicieran cálculos escritos.

Entrevistador: 2.57×0.72

Sujeto 5: Y aquí pues cojo, por ejemplo, 250 por 70 y... O bueno. Por ejemplo, 200 por 70 que serían... 200 por 70, 1400. 1400 y le quito 4... A ver. Serían 1400... y le quito uno, dos, tres, cuatro. 0,14... ... Bueno pero como... he bajado mucho, puedo poner 0,2.

Entrevistador: $96.2 \div 6.25$

Sujeto 1: Aquí serían 100 entre... 100 entre... Paso la coma y serían 1000... una, dos. Tengo que poner 1000... 10000 y 600. 10000 entre 600. Si lo divido entre 500, lo redondeo a 500 me daría... 10000 entre 500 me daría a 2... a 200.

Error en la determinación del valor posicional de la primera cifra del cociente (PV2). Es un error que se produce cuando en una división se utiliza como estrategia una adaptación del algoritmo escrito consistente en determinar la primera cifra del cociente y luego establecer el valor posicional de la misma –abandonando después el algoritmo de la división sin concluir el mismo:

Entrevistador: $96.2 \div 6.25$

Sujeto 6: Sería, como hay dos cifras [en 6.25] a la derecha de la coma, lo multiplicaría por 100. Sería 625 y el 96,2 también por 100, sería 9620. 9620 entre 625 sería 1,3 más o menos.

Error por falta de coordinación entre la destreza de aproximación y las reglas para operar el punto decimal (PV3). Son errores que se producen cuando el sujeto emplea una destreza de aproximación –como el redondeo– eliminando alguna cifra decimal, opera los números como si fuesen enteros, apartando la coma decimal, y después –al colocar la coma decimal– cuenta el número de cifras decimales de los números de partida sin tener en cuenta que estos números han sido previamente sustituidos por aproximaciones.

Entrevistador: 34.1×47.2

Sujeto 10: Lo redondeo. Esto a 50, el 47 a 50 y 34 a 30. 3 por 5 serían 15. Tomo el 3 y el 5. y dos ceros, del 4 y del 7, serían 1500. Pero 1500 le tengo que quitar estos dos decimales, con lo cual serían 15.

Omisión de los ceros en el ajuste del valor posicional (PV4). Error que consiste en que el sujeto quita las comas decimales, sustituye los números por aproximaciones terminadas en uno o varios ceros, opera las cifras significativas y establece el orden de magnitud del resultado ignorando los ceros finales de las aproximaciones empleadas en el cálculo y teniendo en cuenta únicamente el número de cifras decimales que hay en los datos iniciales.

Entrevistador: 2.57×0.72

Sujeto 29: 300 por 70... 3 por 7 son 21. Uno, dos, tres, cuatro. Sería 0,0021.

Error de añadir un cero de más en el cociente (PV5). Es un error que se produce cuando se comienza una división de un número por otro número mayor escribiendo "0,0" y moviendo un solo lugar la coma decimal en el dividendo.

Entrevistador: $8.85 \div 42.6$

Sujeto 30: Vamos a quitar la coma de 42,6. Corremos un lugar... y... en 8,85 también con lo cual tendríamos 88,5 entre 426 pero como no cabe, ponemos un 0... 0 coma... tampoco cabe. Pondríamos otro cero y tendríamos 885 entre 426. Entonces sería 0,0... a 2. Sería 0,02. Yo creo.

Recuperación impropia de la coma decimal en la división (PV6). Error que consiste en multiplicar el dividendo y el divisor por la misma potencia de 10, calcular el cociente, y dividirlo por la misma potencia de 10 por la que habíamos antes multiplicado. Es un error típico de la división. Los sujetos se comportan como si no supiesen que al multiplicar o dividir dividendo y divisor de una división por una potencia de 10, el cociente permanece inalterado.

Entrevistador: 354 ÷ 88

Sujeto 16: 300 dividido entre 90. Le quito un cero a cada uno y me queda 30 dividido entre 9. 3 por 9, 27 y luego le pongo el 0 que le he quitado a los dos y ya está.

Entrevistador: 0.46 ÷ 0.066

Sujeto 19: El 0,46 lo redondearía a 0,5. El 0,066 lo redondearía a 0,07. Y lo dividiría, que sería... 0,50 entre 0,07... 7 por 7, 49. 7 por 8, 56. 0,07, más o menos.

En el primer ejemplo no hay realmente “recuperación de la coma decimal”, puesto que no hay comas decimales, pero sí entra perfectamente dentro de la definición dada del error.

Error de operar la coma decimal en la división como en la multiplicación (PV7). Error en el que se suma el número de cifras decimales del dividendo y del divisor para establecer el número de cifras decimales del cociente. Parece una extrapolación inadecuada del método que se utiliza en la multiplicación para colocar la coma decimal en el resultado.

Entrevistador: 0.747 ÷ 0.35

Sujeto 1: Este lo redondeo al 800 y este al 40. Entonces son: 8 entre 4 a 2. A 2, que serían, dos ceros de aquí y uno de aquí, serían 1000, 2000 y, como tengo que poner una, dos, tres, cuatro y cinco, serían... 2000,... 0,02.

Otros errores en el ajuste del valor posicional (PVOT). Son errores en el ajuste del valor posicional que no han podido incluirse dentro de las categorías anteriores. En el ejemplo siguiente el sujeto opera los decimales como si fuesen enteros, arrastrando el “0,”.

Entrevistador: 0.962 ÷ 0.25

Sujeto 14: 0,962 lo voy a redondear a cero coma mil. Entre 0,20. El cero coma veinte lo redondeo hacia abajo, para que tenga un cero... y, en la división, pues quitarle un cero de cada lado. ¿No? Entonces, el primer divisor se queda en cero coma cien y el segundo en 0,2. Y 100 entre 2 son 50. El resultado es 0,50.

Para finalizar, en la tabla 4 puede verse la frecuencia de aparición de cada tipo de error y su distribución según el tipo de operación y el tipo de número presentes en las tareas de estimación. En ella puede verse como los errores son mucho más frecuentes cuando se opera con números decimales menores que uno.

Tabla 4. *Número de errores de cada tipo según el tipo de operación y el tipo de número*

		Tipo de error									
Tipo de número	**Tipo de operación**	**PV1**	**PV2**	**PV3**	**PV4**	**PV5**	**PV6**	**PV7**	**PVOT**	**Total**	**Total**
	O_1	2	0	0	0	0	0	0	0	**2**	
N_1	**O_2**	1	0	0	0	0	1	0	0	**2**	**8**
	O_3	0	0	0	0	4	0	0	0	**4**	
	O_1	2	0	2	0	0	0	0	1	**5**	
N_2	**O_2**	1	4	0	0	0	0	0	0	**5**	**17**
	O_3	1	0	1*	0	5	0	0	0	**7**	
	O_1	3	0	1	3	1*	0	0	1	**9**	
N_3	**O_2**	1	0	0	0	0	1	2	3	**7**	**23**

	O_3	1	0	0	0	5	0	0	1	**7**	
	O_1	2	0	3	3	0	0	0	3	**11**	
N_4	**O_2**	1	3	0	0	0	5	1	1	**11**	**34**
	O_3	0	0	0	0	6	0	3	3	**12**	
Total		**15**	**7**	**7**	**6**	**21**	**7**	**6**	**13**	**82**	**82**

CONCLUSIONES

Los errores en el ajuste del valor posicional reflejan un conocimiento deficiente de las reglas de cálculo con números decimales. Como indican Hiebert y Wearne (1986) "A pesar de que todas las reglas están motivadas por consideraciones conceptuales, es posible que los alumnos no conecten las reglas con sus justificaciones conceptuales" (p. 202). Esta ausencia de conexiones –falta de comprensión– hace que algunos alumnos "inventen" procedimientos incorrectos para determinar la posición adecuada para el punto decimal. Los errores en el ajuste del valor posicional que cometen los maestros en formación habían sido antes descritos por (Gómez, 1995a, 1995b) en trabajos sobre cálculo mental. Así, Gómez (1995a) hace una clasificación de este tipo de fallos y errores en cálculo mental que incluiría: no recuperación de la coma decimal, no recuperación de los ceros apartados, eliminación-recuperación impropia de la coma, ubicación incorrecta de la coma decimal y contabilización incorrecta de los ceros del resultado. Este autor encuentra que algunos de los errores son debidos a extrapolaciones (Gómez 1995b, p. 318) como el uso de la coma decimal en la multiplicación como se hace en la división. El mismo tipo de error que se ha encontrado en este trabajo en la categoría PV7. Las similitudes que se encuentran entre los resultados de Gómez (1995a, 1995b) y del presente trabajo se deben a que, tanto las tareas de cálculo mental como las de estimación obligan a los maestros en formación –que muestran una gran dependencia del cálculo escrito– a realizar los cálculos mentalmente. En esta situación se ponen de manifiesto debilidades del conocimiento sobre el valor posicional y sobre la forma de operar la coma decimal que, en el cálculo escrito, a veces quedan ocultas bajo una ejecución mecánica.

El error PV5 no ha sido descrito en otros estudios sobre errores en estimación. En él parece como si los sujetos atribuyesen a los ceros que hay en el cociente, a la izquierda y derecha de la coma decimal, dos significados distintos. El "0," significaría "Cuando divido un número por otro número mayor debo comenzar la operación escribiendo '0,' en el cociente". Sin embargo, el segundo cero significaría "cero al cociente y bajo la cifra siguiente". La detección de este tipo de error, asociado a la división de un número por otro número mayor justifica el haber introducido este tipo de operación –distinguiéndola de la división de un número por otro menor. Esta distinción no se había hecho en De Castro y otros (2002) ni en ninguna otra investigación previa sobre estimación.

REFERENCIAS

BACHELARD, G. (1999). *La formación del espíritu científico.* (22ª ed.). México, DF: Siglo XXI.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. (Traducido al inglés y editado por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., & Warfield, V.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N., & WARFIELD, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 23,* 1–20.

DE CASTRO, C., CASTRO, E., & SEGOVIA, I. (2002). Influence of number type and analysis of errors in computational estimation tasks. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 201-208). Norwich, UK.

GÓMEZ, B. (1995a). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Granada: Comares.

GÓMEZ, B. (1995b). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 13*(3), 313-325.

HIEBERT, J., & WEARNE, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal numbers. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 199-223). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

LAMPERT, M. (1989). Choosing and using mathematical tools in classroom discourse. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (Vol. 1, pp. 223-264). Greenwich, CT: JAI.

LEVINE, D. R. (1980). *Computational estimation ability and the use of estimation strategies among college students.* Doctoral dissertation. New York University.

MARKOVITS, Z., & EVEN, R. (1999). The decimal point situation: A close look at the use of mathematics-classroom-situations in teacher education. *Teaching and Teacher Education, 15,* 653-665.

MORGAN, C. (1990). Factors affecting children's strategies and success in estimation. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 265-272). Mexico.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

REYS, R. E., BESTGEN, B. J., RYBOLT, J., & WYATT, J. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 183-201.

RICO, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática* (pp. 69-108). Bogotá & México: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamérica.

SEGOVIA, I., CASTRO, E., CASTRO, E., & RICO, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

SOWDER, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, VA: NCTM.

THIPKONG, S., & DAVIS, E. J. (1991). Preservice elementary teachers' misconceptions in interpreting and applying decimals. *School Science and Mathematics, 91*(3), 93-99.

TIROSH, D., & GRAEBER, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 79-96.

TIROSH, D., & GRAEBER, A. O. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teacher's thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 98-108.

¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas? Diferencias entre alumnos de 12 y 14 años

JORGE CRUZ

Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos Santiago Maior de Beja, Portugal

JOSÉ CARRILLO

Universidad de Huelva

Resumen:

Esta comunicación presenta resultados parciales de una investigación más amplia, realizada en Portugal, con alumnos de 12 y 14 años de edad. Se analizan los recursos, heurísticos y estrategias de control puestas en juego al resolver problemas. Los resultados permiten concluir la ausencia de diferencias significativas respecto de las tres componentes anteriores en función de la edad, lo que nos hace reflexionar sobre la utilidad del conocimiento matemático y estratégico enseñado y aprendido en la escuela.

Abstract:

This paper presents some partial results of a wider research, which has been carried out in Portugal, with 12 and 14 pupils. Resources, heuristics and control strategies applied by the pupils when solving problems are analysed. The results lead us to reach the conclusion that there are not meaningful differencies concerning the three above mentioned components according to the age. It helps us to reflect on the usefulness of the mathematical and strategical knowledge which is taught and learnt in the school.

1. Introducción

La resolución de problemas no necesita ya ser justificada como vehículo de aprendizaje matemático, poseyendo también interés en sí misma como medio que favorece el desarrollo de estrategias aplicables en contextos escolares y cotidianos, así como actitudes positivas hacia la matemática.

Sin embargo, interesa indagar en lo que realmente aprenden los alumnos. Tras unos años en la escuela, ¿qué han aprendido?, ¿cómo aplican su conocimiento al enfrentarse a situaciones que les resultan problemáticas?

Sólo es posible acercarse humildemente a las respuestas a las preguntas anteriores, ya que tras ellas existe una gran complejidad, inherente a cualquier fenómeno educativo. Lo haremos sobre la base del análisis de protocolos de resolución de problemas por alumnos de 7º y 9º cursos (12 y 14 años). Concretamos los objetivos de la investigación en:

A) Obtención de datos relativos a recursos, heurísticos y control puestos en práctica por alunos de nivel 7 y 9 durante la resolución de problemas.

B) Definir perfiles de actuación de alumnos de nivel 7 y 9.

Comenzaremos presentando los elementos teóricos respecto a los cuales puede interpretarse el estudio.

2. Aspectos teóricos sobre la resolución de problemas

Asumimos una caracterización amplia de problema como cualquier situación o tarea que requiere cierta deliberación por parte del resolutor, para la que no posee, de modo inmediato, regla, fórmula, algoritmo o cualquier herramienta matemática que la resuelva, pero que se encuentra al alcance de sus posibilidades.

Aplicaremos el modelo de análisis de resolución de problemas propuesto por Schoenfeld (1985), que establece 4 categorias, de las que analizaremos las 3 primeras: recursos (conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio del problema, hechos y definiciones, procedimientos de rutina o conocimientos sobre reglas del discurso), heurísticos (técnicas generales que permiten descubrir caminos para proseguir cuando se encuentra una dificultad), control (decisiones con vista a la aplicación de recursos y heurísticos) y creencias y afectos (que determinan una visión personal de la matemática y constituyen un conjunto, que puede ser inconsciente, de condicionantes del comportamiento).

Asimismo, nos basamos en el concepto de heurística de Puig (1996):

“lo que es propio de la heurística es el estudio de los *modos* de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos que son *independientes del contenido* y que no *suponen garantía* de que se obtenga la solución, y calificaremos, por tanto, de «heurísticos» a tales modos y medios”(p. 38),

que distingue claramente los heurísticos de los recursos de Schoenfeld.

Adoptamos la lista de heurísticos de Carrillo (1998, p. 108-112), organizada según las fases del proceso de resolución de problemas:

- <u>Comprensión</u>: C1: Organizar la información; C2: Ejemplificar; C3: Expresar en otros términos
- <u>Planificación y Exploración</u>: PE1: Simplificar; PE2: Estimar, PE3: Buscar regularidades con intención de generalizar; PE3a: Tantear; PE4: Considerar problemas equivalentes; PE5: Argüir por contradicción; PE6: Asumir la solución; PE7: Partir de lo que se sabe; PE8: Planificar jerárquicamente a solución; PE9: Descomponer el problema; PE10: Explorar problemas similares; PE11: Conjeturar
- <u>Ejecución</u>: Registrar todos los cálculos; Resaltar los logros intermedios; Actuar com orden y com precisión; Explicar el estado de la ejecución
- <u>Verificación</u>: V1: Analizar a consistencia de la solución; V2: Expresar de outra forma la solución; V3: Analizar la consistencia del proceso; V4: Analizar si se puede llegar al resultado de outra manera.; V5: Generalizar

Dada la diferencia entre los dos subgrupos principales de resolutores (7º y 9º), cabe esperar diferencias significativas respecto a su comportamiento. Relativas a los recursos, pues tras 2 años de escolaridad los alumnos deberán haber adquirido conocimientos aplicables (aunque no de imprescindible uso) en estos problemas.

Relativas a heurísticos, ya que el Programa de Matemática (Ministério da Educação, 1991) propone el trabajo con problemas para:

“- Desarrollar la capacidad de resolver problemas;

- Desarrollar el razonamiento;

- Desarrollar la capacidad de comunicación.” (p. 10, 11)

Relativas al control, pues en ese tiempo se desarrollan capacidades de control de procesos y toma de decisiones, asociado también al desarrollo natural (Schoenfeld, 1992).

Sobre la base de los elementos aquí presentados (caracterización de problema, modelo de Schoenfeld, concepto y lista de heurísticos) y teniendo presente la importancia que los currículos atribuyen a la resolución de problemas, interesa analizar la prestación de los resolutores respecto a las 3 componentes seleccionadas: recursos, heurísticos y control.

3. Metodología

El propósito de este estudio es describir e interpretar las acciones y decisiones tomadas en los protocolos de resolución. Se trata de un estudio enmarcado en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, usando un método cualitativo bajo el paradigma interpretativo. La información se obtiene sin aplicar método específico de enseñanza. No hemos pretendido constatar o refutar ninguna teoría, sino acercarnos a comprender mejor cómo resuelven los alumnos y qué evolución muestran al cabo de dos años. Dicha evolución ha de entenderse de modo aproximado, ya que no son los mismos los alumnos de 7º y 9º, sino aquellos que presentan un perfil similar de logro académico.

La técnica de recogida de dados es la prueba escrita con problemas de tipo escolar. Los alumnos recibieron el enunciado por escrito en una hoja donde aparecía una línea al margen derecho y se les indicaba que en ese hueco debían explicar las razones de las decisiones que tomaran. Se efectúa un análisis de protocolos según los recursos, heurísticos y control puestos en juego. Asimismo, tras las sesiones, los alumnos fueron preguntados acerca de aspectos menos claros de sus protocolos a través de entrevistas cortas.

Los alumnos son de *Terceiro Ciclo do Ensino Básico*, niveles 7 y 9, de una escuela portuguesa. Participaron 6 alumnos de cada nivel, 2 con buena calificación en Matemáticas, 2 en la media y 2 con malas notas. Para designar cada resolutor se usó la notación nXs (n: nivel 7 o 9; X: A o B, para distinguir resolutores del mesmo tipo; s: <, = o >, conforme a la calificación). Así 7A> se refiere al resolutor A de 7º año con buena calificación. Para este artículo hemos tomado los resolutores de calificación superior y uno de calificación media de 7º por la originalidad de su resolución, por lo que contaremos con 5 alumnos.

Cada resolutor se enfrentó a 5 problemas de Números y 5 de Geometría, de los que hemos seleccionado uno para este artículo. Para la elaboración de los problemas consultamos, además de libros de texto, Guzmán (1991), Krulik y Rudnick (1993), Nunokawa (2000), Polya (1989) y Wood (1998).

La señora García hizo dos tipos de tartas. Las tartas de fresas[1] necesitan dos tazas de azúcar y dos tazas de harina. Las tartas de nata[2] necesitan dos tazas de harina pero una de azúcar. Al final se han gastado diez tazas de harina y siete de azúcar. ¿Cuántas tartas de fresas y cuántas tartas de natas hizo?

El problema puede resolverse aplicando operaciones aritméticas básicas o a través de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, conocimiento este último sólo enseñado en 9º.

Los heurísticos esperados son (ver apartado 2):

C1: Es importante la selección de los datos importantes.

C3: La traducción al lenguaje algebraico facilita la relación entre los elementos del problema.

PE1: Es posible explorar el comportamiento de una incógnita dejando fija la otra, opción adecuada para los que no formulan algebraicamente el problema.

PE2: La magnitud de las cantidades es pequeña, por lo que presuponer un valor aproximado (entero) puede conducir a una respuesta razonable.

PE3a: Si la simplificación y la estimación no tienen éxito, se abre el camino al proceso de tanteo hasta encontrar la solución.

PE6: Asumir una solución lleva a profundizar en la resolución con un fuerte carácter exploratorio. No supone el descubrimiento y verificación de una respuesta (PE2).

PE7: Comenzar por relacionar los datos puede ser útil a fin de extraer alguna sugerencia para la estimación, el tanteo o el planteamiento del sistema de ecuaciones.

V1: Aplicar las condiciones a los resultados obtenidos permite certificar la consistencia de la resolución.

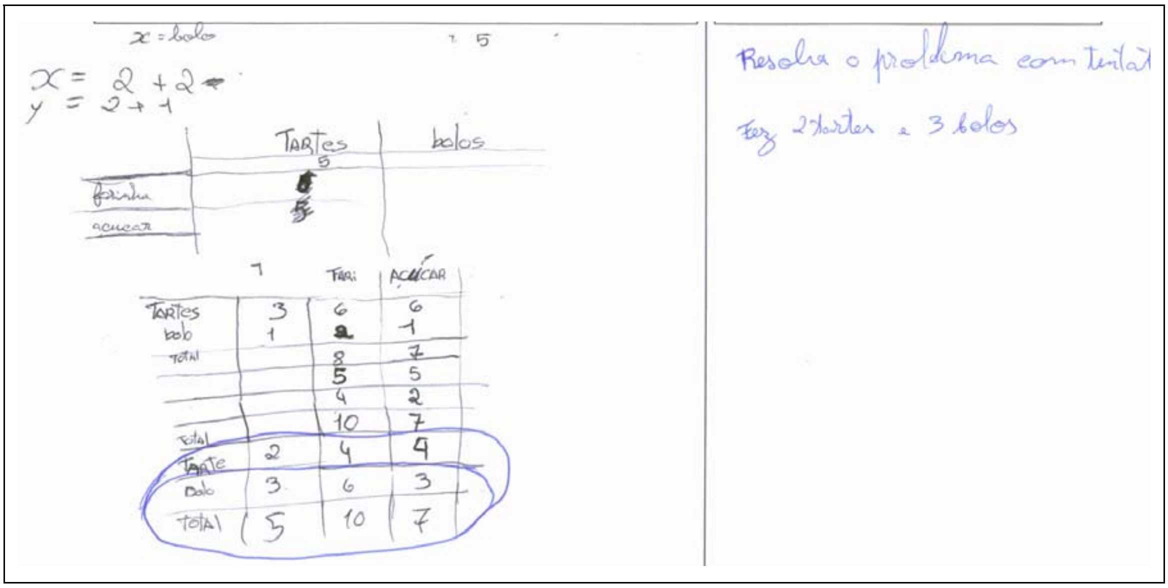
V4: Analizar si se puede llegar al resultado de otra manera se considera un heurístico apropiado para problemas con diferentes posibilidades de exploración. Un resolutor que haya hecho un proceso PE7→PE6→Pe3a, por ejemplo, podría intentar una resolución más "económica".

4. Análisis

En este epígrafe se analizan los pasos dados por cada resolutor, enfatizando los recursos y heurísticos puestos en práctica. A continuación se traza un esbozo de su posible perfil donde se destaca el comportamiento del resolutor en las fases del proceso de resolución de problemas (comprensión, planificación y exploración, ejecución, y verificación), así como las decisiones relativas al control. Se presentan los protocolos de los alumnos.

Resolutor 7A>

[1] En portugués se utilizó la expresión "tarte".
[2] En portugués se utilizó la expresión "bolo".



Análisis

Selecciona los datos subrayándolos en el enunciado. Intenta expresar en otros términos (C3) al escribir “$x = 2 + 2$” e “$y = 2 + 1$”, pero abandona la estrategia. Organiza la información en una tabla y subraya los datos en el enunciado (C1). Hace tentativas aleatorias (no aparentan sistematización) (PE3a). Muestra persistencia y cuestionamiento sobre la estrategia escogida, pues hay tentativas iniciadas y abandonadas en el protocolo, de donde se pueden inferir capacidades metacognitivas (control). Utiliza las 4 operaciones aritméticas básicas y llega a la respuesta correcta.

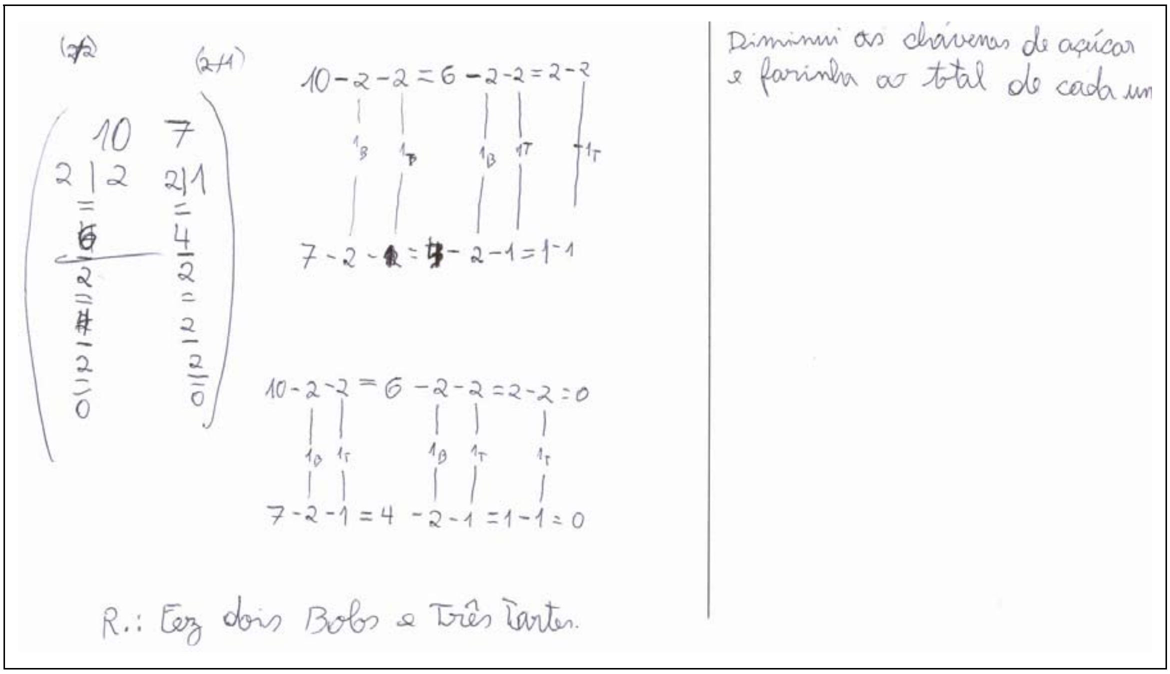
Esbozo de Perfil

El resolutor atribuye importancia a la fase de comprensión, pues se esfuerza por organizar la información en una tabla.

Es crítico en cuanto a la estrategia de resolución que sigue, pues intenta de dos formas hasta decidirse por una tercera, la cual le proporciona la respuesta al problema. La actitud crítica y la preocupación por el proceso revelan mecanismos de control activos.

Intenta matematizar situaciones, en particular intenta una traducción algebraica, aunque superficial.

<u>Resolutor 7B></u>



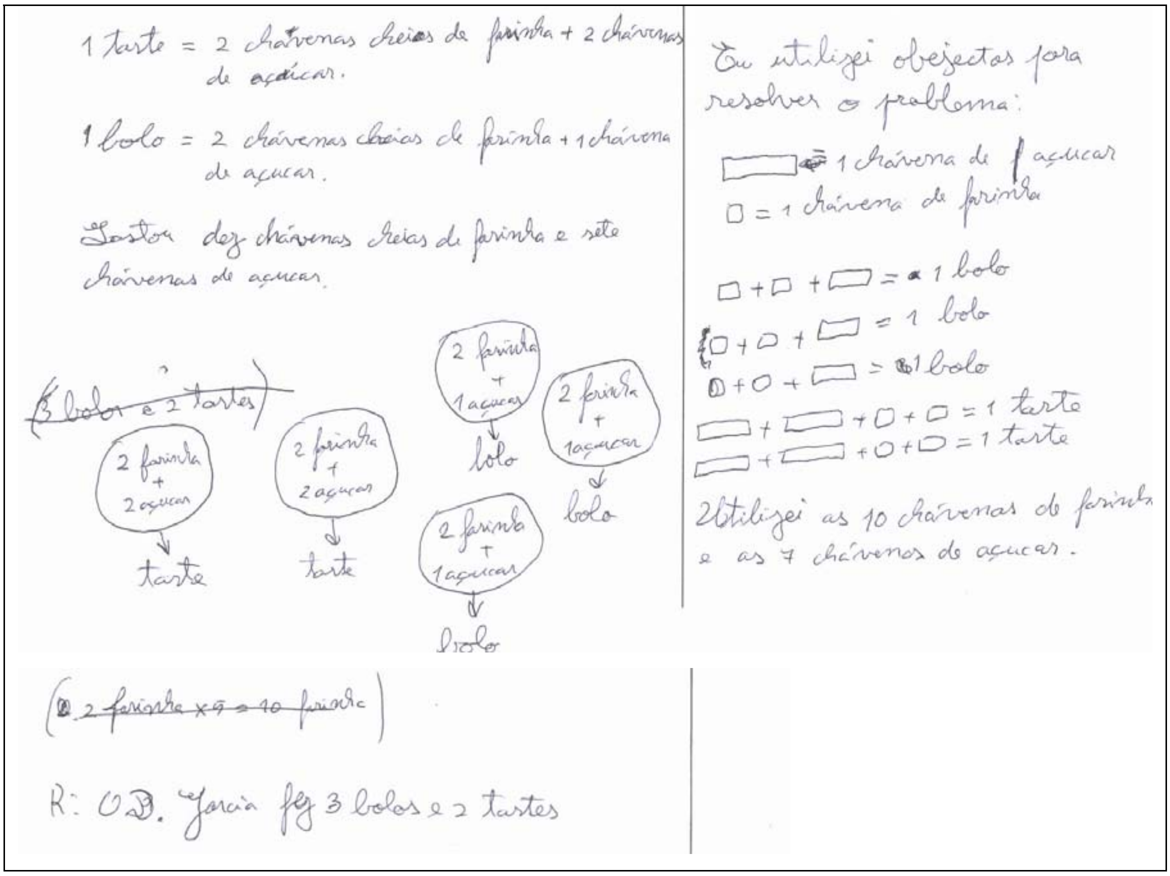
Análisis

Parte de lo que sabe (PE7) e por tentativas (PE3a) ejecuta, controlando siempre los resultados obtenidos, para llegar a una respuesta compatible. Comete un error de representación de la información, al atribuir las condiciones de una incógnita (tarta de fresas -bolo en el original) a otra incógnita (tarta de natas -tarte en el original) y vice versa. Revela control del proceso, concentrado en la fase de ejecución. No verifica desde la fase de comprensción, por lo que no llega a detectar el error. Utiliza las 4 operaciones aritméticas básicas y no llega a la respuesta correcta, debido al cambio en la designación de las incógnitas.

Esbozo de perfil

Prima la acción, centrando su trabajo en las fases de planificación y exploración y execución. En esta fase revela buen sistema de control y vuelta atrás. Lamentablemente parece considerarse bastante seguro de las interpretaciones que hace; por eso no vuelve atrás hasta la fase de compreensión, por lo que no siempre detecta los errores cometidos. Piensa que puede cometer errores en los cálculos, pero no en la comprensión del enunciado.

<u>Resolutor 7B=</u>



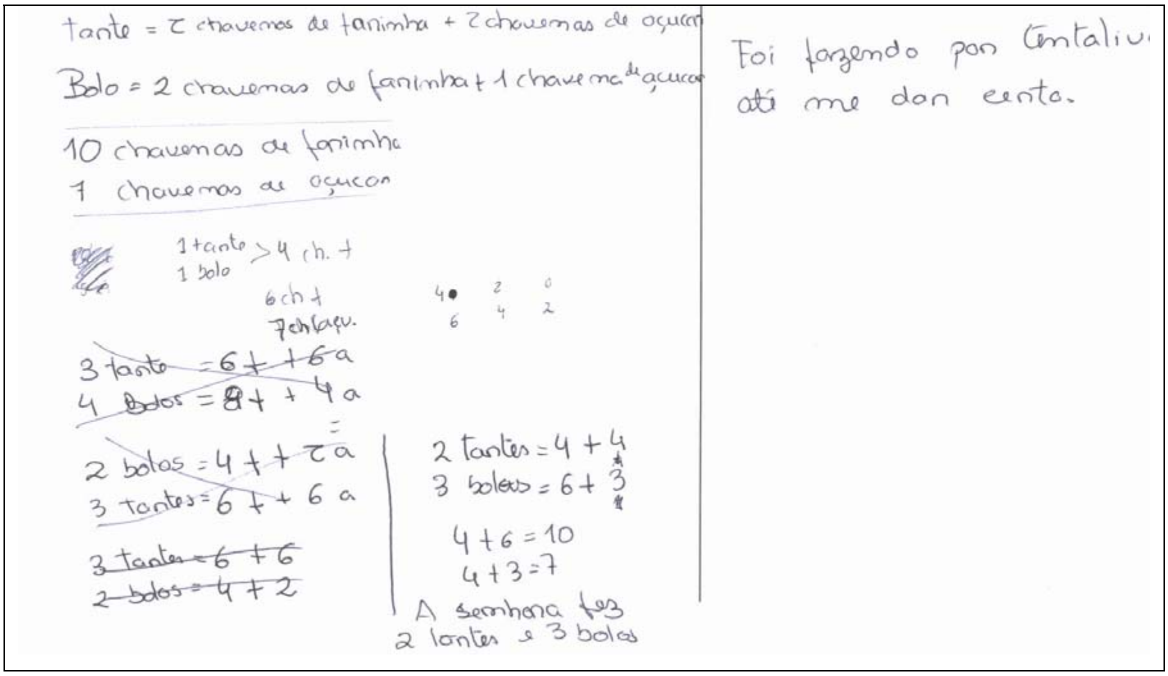
Análisis

Organiza la información (C1). Dispone de un modelo manipulativo (usa materiales que estabam disponibles en el aula y los representa explícitamente en el protocolo). Considera um problema equivalente (PE4), en la medida en que lo reformula, cambiando las perspectivas. Registra los logros intermedios durante la ejecución. La descripción esquemática del trabajo escrita al margen derecho puede considerarse una verificación (V1). Utiliza las 4 operaciones aritméticas básicas y llega a la respuesta correcta.

Esbozo de perfil

Utiliza heurísticos de comprensión, de planificación/exploración y de verificación. Revela conocimientos sobre resolución de problemas, concretamente en cuanto a la importancia de organizar la información, de utilizar formas eficaces para representar la información y de explorar las relacions entre los datos. Es creativo. Tiene buen control, lo que revela buenas capacidades metacognitivas. Es capaz de seguir un razonamiento con coherencia y explicarlo. Concede importancia a la fase de verificación.

Resolutor 9A>


tante = 2 chavenas de farinha + 2 chavenas de açucar
Bolo = 2 chavenas de farinha + 1 chavena de açucar
10 chavenas de farinha
7 chavenas de açucar
1 tante > 4 ch. +
1 bolo
6 ch +
7 ch açu.
4 2 0
6 4 2
~~3 tante = 6 f + 6 a~~
~~4 bolos = 8 f + 4 a~~
~~2 bolos = 4 f + 2 a~~
~~3 tantes = 6 f + 6 a~~
~~3 tantes = 6 + 6~~
~~2 bolos = 4 + 2~~
2 tantes = 4 + 4
3 boleos = 6 + 3
4 + 6 = 10
4 + 3 = 7
A semana fez
2 tantes e 3 bolos

Foi fazendo por tentativas até me dar certo.

Análisis

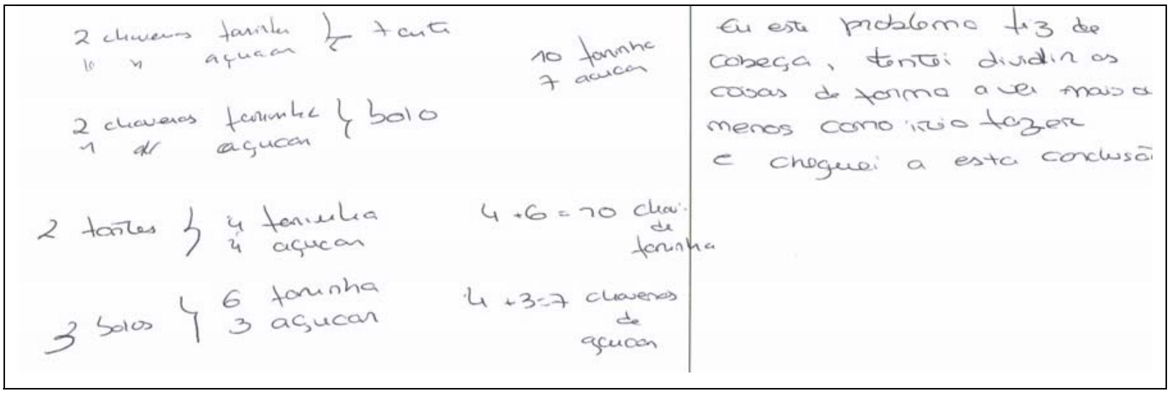
Organiza la información (C1). Usa tentativas (PE3a). Parece haber intencionalidad, por lo que se puede considerar su uso sistemático (los resultados muestran una sucesiva aproximación a la respuesta final).

Puede también considerarse la aplicación de V1, pues tras la obtención de una respuesta, verifica su consistencia confrontándola con las condiciones del problema. Llega a la respuesta correcta.

Esbozo de perfil

Utiliza heurísticos de comprensión, de planificación/exploración y de verificación. Sabe tantear de forma sistemática, utilizando la información obtenida en un intento para orientar el siguiente hacia la respuesta pretendida. Tiene buen control, pues no pierde información (ni de los datos iniciales ni de los logros intermedios).

<u>Resolutor 9B></u>


2 chavenas farinha } tante
1 açucar
10 farinha
7 açucar
2 chavenas farinha } bolo
1 de açucar
2 tantes } 4 farinha
4 açucar
4 + 6 = 10 chav. de farinha
3 bolos } 6 farinha
3 açucar
4 + 3 = 7 chavenas de açucar

Eu este problema fiz de cabeça, tentei dividir as coisas de forma a ver mais ou menos como iria fazer e cheguei a esta conclusão

Análisis

Selecciona toda la información relevante del problema y la organiza (forma pares de valores afines y esquematiza) (C1).

Consigue una buena elaboración mental del problema, lo que le permite hacer una apuesta plausible (PE2) la cual, una vez comprobada, verifica que se trata de la respuesta al problema.

Analiza la consistencia de la solución (V1).

Esbozo de perfil

Utiliza heurísticos de comprensión, de planificación/exploración y de verificación. Tiene buena representación mental, lo que supone buen control. Sintetiza los registros.

5. Resultados y conclusiones

Recursos

El problema presentado proporciona a los resolutores de nivel 9 la posibilidad de aplicar conocimiento matemático inaccesible para los de nivel 7: sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sin embargo, no movilizan ese conocimiento. Se registra un intento de formulación algebraica, pero en el resolutor 7A>. Puede decirse que los resolutores (estudiados) de 9º año no evidencian más recursos provenientes del aprendizaje de la matemática escolar que los de 7º en situaciones problemáticas iguales.

Heurísticos

Los resolutores de nivel 7 revelan más disciplina en la organización de datos en tablas, listas secuenciales o a través de objetos manipulativos. En un primer momento esta organización podría considerarse dentro de la fase de comprensción, pero casi siempre el aprovechamiento de estas formas de organización se extiende, al menos, hasta la fase de ejecución. En la fase de Planificación y Exploración el heurístico preferido por lo general fue el Tanteo (PE3a), por lo que no hay diferencias significativas entre los grupos. Otros resolutores no usaron este heurístico, porque se basaron en Estimar (PE2) y Partir de lo que se sabe (PE7) (caso de 7A=, no incluido aquí), lo que no implica un potencial heurístico superior al tanteo (PE3a). El único caso que merece la pena destacar es el uso del heurístico Considerar problemas equivalentes (PE4), que, por su carácter más general, puede portar mayor potencial heurístico. No se concretó ninguna superioridad de los resolutores de 9º, como cabría esperar.

Control

Entre los dos niveles de escolaridad estudiados, no se puede decir que haya superioridad de uno sobre otro. En general puede considerarse que no se detallan mucho las explicaciones, lo que permite suponer falta de trabajo en cuanto a la explicitación y reflexión sobre el razonamiento propio. En los casos de los dos resolutores que no llegaron a la respuesta correcta más algunos no referidos en el artículo, la insuficiencia en el control es bien evidente, pues no detectaron el error, ni fueron capaces de seleccionar ou explorar un heurístico de forma conveniente.

En resumen, puede decirse que tener más años de matemática escolar no implica necesariamente tener mejores capacidades de movilización de recursos, heurísticos ni mecanismos eficaces de control en resolución de problemas.

Referencias

CARRILLO, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Servicio de Publicaciones Universidad de Huelva.

GUZMÁN, M. (1991): *Aventuras Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

KRULIK, S. E RUDNICK, J. A. (1993): *Reasoning and Problem Solving a Handbook for Elementary School Teachers*. Needham Heights (Massachusetts): Simon & Schuster, Inc.

Ministério da Educação – D. G. E. B. S. – (1991). *Programa do Ensino Básico. Plano de organização do ensino-aprendizagem*. vol II. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

NUNOKAWA, K. (2000): Heuristic Strategies and probing problem situations. En Carrillo, J. y Contreras, L. C. (Eds*): Resolución de Problemas en los Albores de Siglo XXI: Una visión Internacional desde Múltiples Perspactivas Y Niveles Educativos*. Huelva: Hegué, Editora Andaluza.

POLYA, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. (Traducción al Castellano de *How to solve it*)

PUIG, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

SCHOENFELD, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. En Grouws, D. A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan. Cap. 15.

WOOD, L. (1998): *Estrategias de Pensamiento*. Barcelona. Editorial Labor.

Influencia del número de conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos de dos pasos

ANTONIO FRÍAS
Universidad de Almería

ENRIQUE CASTRO
Universidad de Granada

Resumen:

En este trabajo identificamos una variable lingüística en los problemas aritméticos verbales de dos pasos, que denominamos "nodo". Describimos una experiencia con estudiantes de 5º y 6º de Primaria (10 y 12 años) cuyo fin fue observar si esta variable lingüística tiene o no influencia significativa en la elección de las operaciones necesarias para solucionar este tipo de problemas. Los resultados obtenidos muestran que el número de nodos en un problema de dos pasos tiene efecto significativo en el proceso de resolución. Esta influencia no se ve alterada por otros factores considerados en este estudio.

Abstract:

In this work we identify a new factor in two-steps arithmetic word problems, which we denominate " node " factor. We describe an experience with students of 5th and 6th degree in primary school (11- and 12-year-old pupils) whose purpose was to observe if this factor has or it has not significant influence in the election of the necessary operations to solve this type of problems. The obtained results show that the number of nodes in a problem of two steps has significant effect in the resolution process. This significant influence is not altered by other factors considered in this study.

El trabajo que presentamos es una parte de una investigación más amplia que estamos realizando sobre problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. Las investigaciones previas sobre problemas aritméticos se han centrado, prioritariamente, en problemas verbales simples de estructura aditiva y multiplicativa. En estos problemas interviene una sola relación ternaria, en la que Nesher y Hershkovitz (1991) distinguen tres componentes relacionadas:

a) Dos componentes completas, que suministran información numérica en forma de datos.

b) Una componente en forma de pregunta, que demanda una información numérica.

Una manera de representar la relación ternaria es mediante un esquema. Así el esquema de la figura 1 representa la relación ternaria entre las componentes del problema 1

Problema 1. María tiene 5 cajas de cromos, en cada caja tiene 12 cromos. ¿Cuántos cromos tiene María?

El problema 1 contiene en su texto tres *componentes* o proposiciones:

Componente 1: María tiene 5 cajas de cromos (completa)

Componente 2: En cada caja tiene 12 cromos (completa)

Componente 3: ¿Cuántos cromos tiene María? (incompleta)

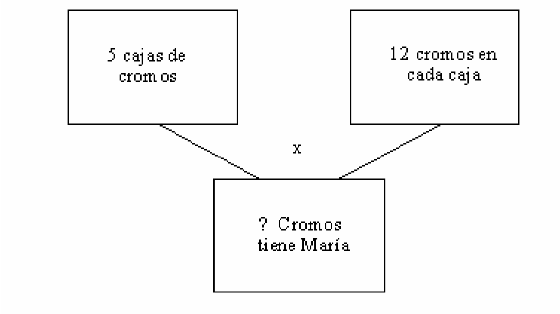


Figura 1. Relación ternaria entre las componentes de un problema

dos de ellas contienen información numérica y la tercera es la pregunta del problema. A las dos primeras se les llama componentes completas y a la cuestión, componente incompleta; esta última carece de información numérica pero sí describe el conjunto al que se refiere.

Pero en el currículum escolar, además de los problemas simples de estructura aditiva y de estructura multiplicativa, los estudiantes aprenden a resolver problemas del tipo:

Problema 2. Ana tiene 30 cromos. María tiene 6 veces más cromos que Ana ¿Cuántos cromos tienen entre las dos?

En este problema hay tres componentes y, sin embargo, no es un problema simple que se resuelva con sólo una operación. Es necesario emplear dos operaciones para su resolución: la multiplicación y la adición. ¿Cómo caracterizar a estos problemas en términos de relaciones y esquemas? Veamos nuestro análisis.

Puesto que hemos descartado que sea un problema simple, hacemos su caracterización considerando que es un problema compuesto y, para ello, empleamos el análisis que hacen Nesher y Hershkovitz .

Nesher & Hershkovitz (1991, 1994) consideran que un problema de un paso tiene una estructura subyacente constituida por una relación ternaria. La combinación de dos estructuras da lugar a esquemas de problemas de dos pasos. En este análisis, un esquema compuesto se forma por la conexión de dos esquemas simples mediante la componente latente. Distinguen tres esquemas compuestos de dos relaciones.

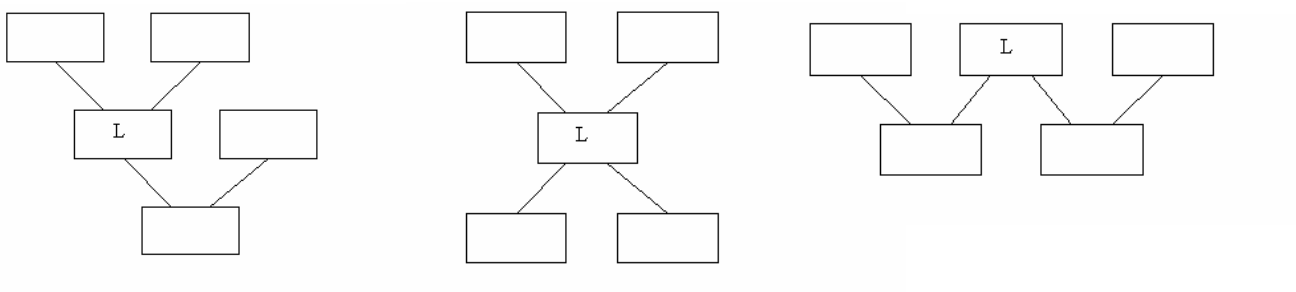


Figura 2. Esquemas compuestos de dos relaciones según Nesher y Hershkovitz (1991, 1994)

En estos tres esquemas[1] de problemas de dos pasos (figura 2) hay tres componentes explícitas, una componente latente implícita que sirve de unión entre las estructuras simples, y una componente desconocida que hay que hallar.

Noción de nodo

En los esquemas compuestos correspondientes a los problemas de dos pasos (Nesher & Hershkovitz, 1991, 1994) la conexión entre los dos esquemas simples se produce mediante una componente latente del problema (figura 3), que es común a los dos esquemas simples. En esta situación decimos que existe un *nexo o nodo* entre las dos estructuras simples que originan el esquema compuesto correspondiente. Por tanto, hay una cantidad compartida por dos estructuras simples dentro de un problema compuesto. Por ejemplo, en el problema 3:

> *Problema 3.* He comprado 5 libros, cada libro cuesta 8 euros. Si entrego 50 euros, ¿cuánto dinero me devuelven?

En este problema 3 la cantidad latente (precio de todos los libros) es compartida por la primera estructura aritmética y por la segunda. Esta cantidad latente, que no está explícita en el enunciado del problema, conecta ambas estructuras, de modo que se obtiene en la primera estructura, en donde tiene la función de incógnita, y se utiliza en la segunda como dato, con el cual se resuelve el problema de dos pasos. Esta función de conexión entre las dos estructuras es la que nos lleva a llamarla nodo o nexo entre ambas.

He comprado 5 libros
Cada libro cuesta 8 euros
¿Cuánto cuestan todos los libros?

En la primera estructura la componente latente es la pregunta del primer problema.

Todos los libros cuestan 40 euros
Entrego 50 euros
¿Cuánto dinero me devuelven?

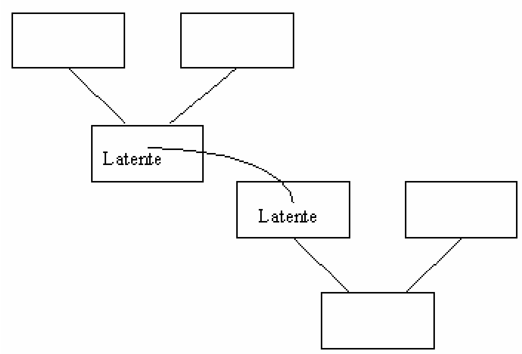


Figura 3. Componente latente

En la segunda estructura la componente latente pasa a ser una componente completa o dato y, en este caso, es una parte (sustraendo) de la estructura aditiva.

En los esquemas de problemas de dos pasos definidos por Nesher y Hershkovitz (1991, 1994) la cantidad latente es el único nexo de unión entre dos estructuras. Pero la condición de nodo no lleva implícito ser una cantidad latente ni tampoco ser la única cantidad con tal condición. El nodo también puede ser un dato explícito en el enunciado, que es compartido por más de una estructura simple dentro de un problema compuesto. Es posible encontrar problemas de dos pasos que tengan dos estructuras conectadas por dos nodos, como ocurre en el siguiente problema:

> *Problema 4.* Juan tiene 5 bolas y su abuelo le regala el triple de las que tenía. ¿Cuántas bolas tiene ahora Juan?

[1] El esquema que Nesher y Hershkovitz denominan jerárquico lo notamos por J, el esquema de compartir el todo por CT y el esquema de compartir una parte por CP.

En este problema 4 se combina un esquema multiplicativo y uno aditivo; en ambos esquemas hay dos cantidades, 5 bolas de Juan y las bolas que regala su abuelo a Juan, que son compartidas. Su resolución requiere la siguiente secuencia de operaciones: 3 x 5 + 5. En la figura podemos ver la representación de los dos esquemas simples y cómo ambos contienen a las dos cantidades compartidas. Este tipo de problemas de dos pasos tiene sólo dos datos, o si se prefiere tres datos, pero uno de ellos se repite. Por ello hay dos componentes compartidas por las dos estructuras simples, una de ellas es la componente latente (bolas que regala el abuelo) y otra el dato repetido (5 bolas de Juan) del problema.

La condición de nodo, por tanto, la tienen aquellas cantidades que son compartidas por varias estructuras simples dentro de un problema compuesto, con independencia de que tales cantidades sean datos del problema o incógnitas intermedias (cantidades latentes) del mismo.

A partir de las consideraciones anteriores, en los problemas de dos pasos hemos definido una característica nueva que hemos denominado *nodo*, y que hemos considerado como una variable que, en este campo de problemas, toma dos valores: a) problemas de dos pasos con un nodo y b) problemas de dos pasos con dos nodos. La variable *nodo* es un objetivo de estudio en nuestra investigación.

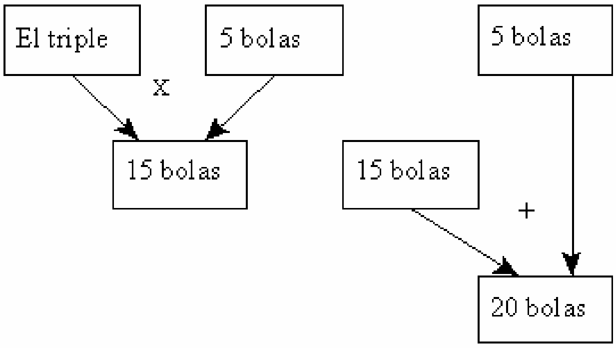


Figura 4. Esquemas simples de un problema con dos nodos

Los problemas con dos nodos

Si consideramos dos nodos para conectar las dos estructuras simples que forman un problema de dos pasos, aparecen los siguientes esquemas compuestos:

1. Cuando una parte y el todo de un esquema simple coinciden con parte y parte del otro esquema simple (P, T = P, P). Este esquema compuesto (fig. 5) lo notaremos por JP, ya que también puede obtenerse a partir del esquema compuesto J, haciendo coincidir una parte de cada esquema simple.

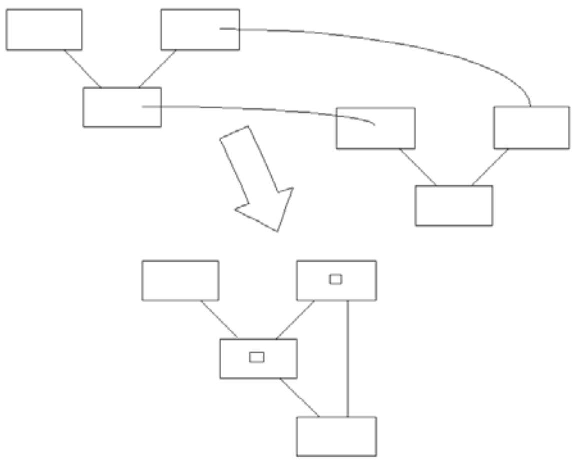


Figura 5. Esquema compuesto JP

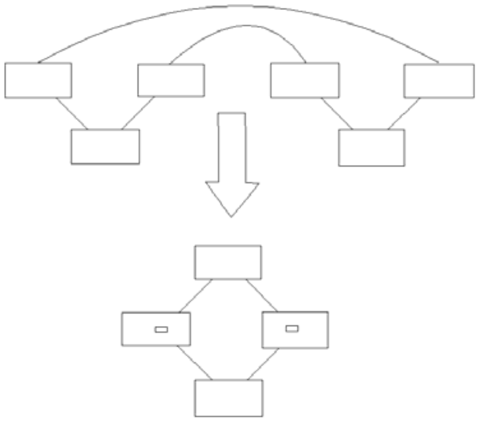


Figura 6. Esquema compuesto CPP

2. Cuando las dos partes de un esquema simple coinciden con las del otro (P, P = P, P), tenemos el esquema compuesto (fig. 6) que llamamos CPP (Compartir Parte y Parte), también puede generarse a partir del esquema compuesto CP, haciendo coincidir la otra parte de ambos esquemas simples.

3. Cuando una parte y el todo de un esquema simple coinciden con parte y todo del otro (P, T = P, T), tenemos el esquema compuesto (fig. 7) que notamos por CTP (Compartir Todo y Parte), que podemos obtenerlo también a partir del esquema compuesto CT, si hacemos coincidir una parte de cada esquema simple, o también a partir del esquema compuesto CP, si hacemos coincidir el todo de cada esquema simple.

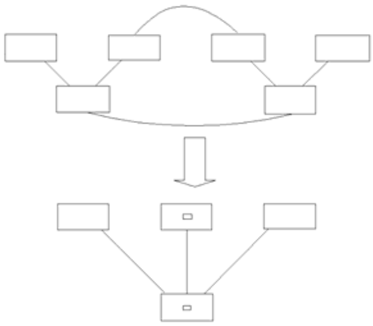


Figura 7. Esquema compuesto CTP

Todos estos esquemas representan a problemas de dos pasos con sólo dos datos, o dicho de otro modo, con tres datos, de los cuales uno *interviene* dos veces. Las dos conexiones (nodos) no desempeñan el mismo rol en el esquema: una es la componente latente, por lo cual nunca podrá ser dato del problema, y la otra es el dato repetido, que nunca podrá ser incógnita. Por tanto, dependiendo de donde se coloque la componente latente, tendremos esquemas diferentes. Así, en el esquema JP pueden darse (fig. 8) dos posibilidades.

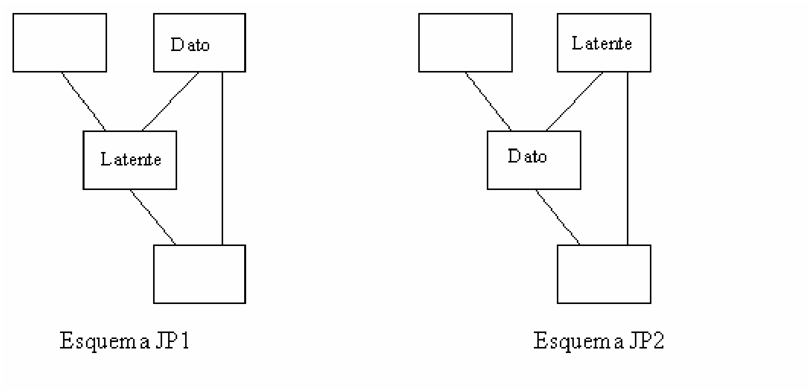


Figura 8. Esquemas compuestos derivados del esquema JP

Si en el esquema JP la componente latente es el todo de una de las estructuras, obtenemos el esquema compuesto que notamos JP1, y si la componente latente es la parte compartida por ambos esquemas simples, tenemos el esquema compuesto que notamos por JP2.

De igual modo, si en el esquema CTP la componente latente es el todo compartido por las dos estructuras, tenemos el esquema compuesto que denominamos CTP1, y si la componente latente es la parte compartida por las dos estructuras, obtenemos el esquema que llamamos CTP2 (fig. 9).

En el esquema CPP, al cambiar la componente latente de posición se obtiene un esquema equivalente, lo cual viene producido por la simetría de dicho esquema. Con ello, podemos identificar cinco opciones en los problemas de dos pasos con dos nodos: JP1, JP2, CTP1, CTP2 Y CPP.

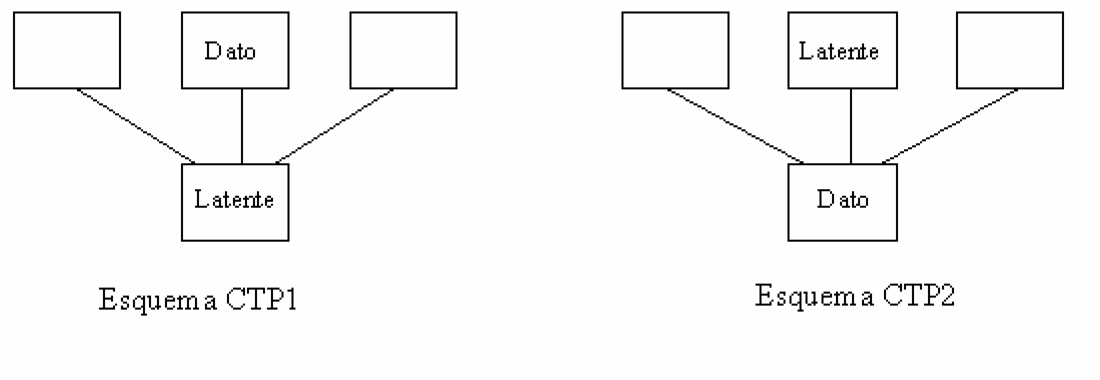


Figura 9. Esquemas compuestos derivados del esquema CTP

La pregunta que nos hacemos en esta investigación es: ¿Tiene influencia la variable *nodo* en la elección correcta de las operaciones aritméticas necesarias para resolver problemas de dos pasos? Para contestar a esta pregunta hemos realizado una experiencia en la que analizamos las producciones escritas de los alumnos de los últimos cursos de educación primaria en respuesta a problemas aritméticos compuestos de dos relaciones con una o dos conexiones. La forma de realizar la experiencia y los resultados los presentamos a continuación.

Método

Sujetos

En este estudio han participado ciento setenta y dos estudiantes de educación primaria de colegios públicos de la ciudad de Almería. Ochenta y seis alumnos de 5º curso y otros ochenta y seis de 6º curso. La edad de los alumnos oscila entre diez y doce años.

Tipo de problemas a estudiar

Nuestro interés está en los problemas de dos pasos que sólo contengan categorías estáticas de problemas simples, por tanto éstos serán de comparación (Cp) o de combinación (Co) y, por tanto, para un problema estático de dos pasos hay cuatro categorías posibles: Co-Co, Co-Cp, Cp-Co, Cp-Cp. En este estudio nos limitamos a problemas de la categoría Cp-Co. En esta categoría semántica de problemas el esquema compuesto asociado es JP, circunstancia que va a condicionar los valores de las variables presentes en este estudio.

Variables

En este estudio hemos empleado un diseño factorial con cuatro factores o variables independientes que son:

– *Primer factor*. Se refiere a la relación aritmética doble, que llamamos variable A, y que toma dos valores, correspondientes a las combinaciones posibles en un problema compuesto de dos relaciones: una relación aditiva y otra multiplicativa:

  A_1 para una relación aditiva seguida de una multiplicativa (+, x)
  A_2 para una relación multiplicativa seguida de una aditiva (x, +)

– *Segunda variable*. El tipo de enunciado en un problema de comparación puede ser consistente o inconsistente (Lewis y Mayer, 1987), atendiendo a estos dos tipos de enunciados de los problemas de comparación consideramos la variable tipo de enunciado en la comparación, que vamos a llamar variable E, y que toma dos valores:

  E_1: el enunciado de la comparación es consistente
  $E_{2\,:}$ el enunciado de la comparación es inconsistente

– *Tercera variable*. Cada una de las relaciones simples que intervienen en un problema de dos pasos puede ser de aumento o de disminución (Castro y otros, 1996; Rico y otros, 1994). Llamamos R a la variable que combina las dos posibilidades en la relación doble. En este trabajo sólo vamos a tener en cuenta dos valores:

  R_1 para la relación de aumento-aumento (AA)
  R_2 para la relación de disminución-aumento (DA)

– *Cuarta variable*. El número de nodos, que llamamos variable nodos (N), y que toma dos valores:

  N_1 para los problemas con dos nodos
  N_2 para los problemas con un nodo

Instrumento y procedimiento

El instrumento utilizado en esta experiencia ha sido un cuestionario de dieciséis problemas. Los dieciséis problemas corresponden a las posibilidades que surgen al cruzar los cuatro factores anteriores en un diseño factorial.

		N_1		N_2	
		A_1	A_2	A_1	A_2
E_1	R_1	1	2	9	10
	R_2	3	4	11	12
E_2	R_1	5	6	13	14
	R_2	7	8	15	16

Este conjunto de 16 problemas lo hemos distribuido en dos cuestionarios:

Cuestionario 1		N_1		N_2	
		A_1	A_2	A_1	A_2
E_1	R_1	X		X	
	R_2		X		X
E_2	R_1	X		X	
	R_2		X		X

Cuestionario 2		N_1		N_2	
		A_1	A_2	A_1	A_2
E_1	R_1		X		X
	R_2	X		X	
E_2	R_1		X		X
	R_2	X		X	

Los problemas de estos cuestionarios fueron resueltos por los niños de manera individual y en silencio en el salón de clase en una prueba de lápiz y papel. A cada niño se le dio un cuestionario de forma aleatoria.

Resultados

El análisis de la varianza aplicado a los datos obtenidos ha producido efecto significativo en los siguientes casos:

– variable N número de nodos (F = 6.677, p=0.010). El porcentaje de éxito en problemas con un nodo o con dos nodos es:

N_1 dos nodos	N_2 un nodo
41%	63%

– variable R combinaciones de aumento y disminución (F=20.982, p=0.000). Con un porcentaje de éxitos en las combinaciones aumento-aumento y disminución-aumento de

Aumento-aumento	Disminución-aumento
49%	38%

– variable E o tipo de enunciado (F=56.504, p=0.000).

Consistente	Inconsistente
61%	45%

– variable A combinación de relaciones aditivas y multiplicativas (F=116.760, p= 0.000). Los porcentajes de éxito en las combinaciones de relaciones aditivas y multiplicativas empleadas han sido:

Combinación + x	Combinación x +
30 %	57 %

El único efecto de interacción significativo en el que interviene la variable nodo es NxA (F=6.084, p=0.014). Pero esta interacción no altera el orden de dificultad que tienen los valores de la variable nodo, como se ve en el gráfico 1:

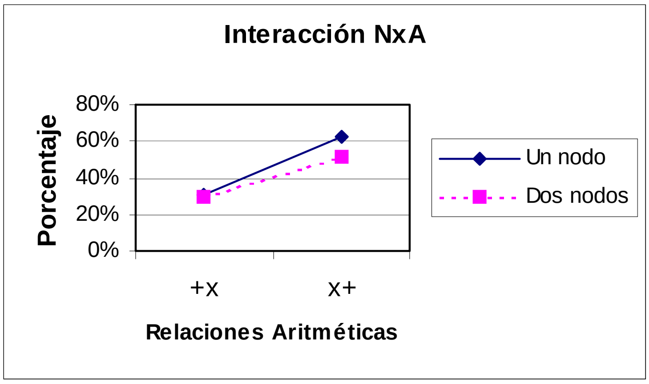


Gráfico 1. Porcentajes de aciertos según los nodos y las combinaciones de relaciones

En este gráfico 1 podemos observar que los problemas con dos nodos son más difíciles de traducir en una representación simbólica que los problemas con un nodo para las dos combinaciones de operaciones aritméticas.

Conclusiones

En este trabajo hemos identificado una clase particular de problemas aritméticos verbales de dos pasos que contienen en su enunciado sólo dos cantidades conocidas. Hemos puesto de manifiesto que estos problemas tienen una característica común: están formados por estructuras aditivas y multiplicativas conectadas por dos nexos o nodos. En trabajos previos, los problemas de dos pasos que fueron estudiados por Nesher y Hershkovitz (1991, 1994) tienen un solo nexo de unión. Hemos realizado una experiencia para contrastar la hipótesis de si hay diferencias significativas entre problemas de dos pasos que difieren en el número de nodos o conexiones entre relaciones. Mediante un análisis de varianza hemos encontrado que hay diferencias significativas de dificultad entre problemas aritméticos enunciados verbalmente con un nodo y problemas equivalentes con dos nodos. Los problemas aritméticos verbales de dos pasos con dos nodos son más difíciles de trasladar en expresiones aritméticas que sus equivalentes con un nodo. Además, hemos encontrado de manera significativa que este resultado no está influido por otras variables que también tienen influencia en la dificultad de traslación a expresiones aritméticas como el hecho de que la relación de comparación esté expresada en lenguaje consistente o inconsistente, si las relaciones aditiva y multiplicativa son de aumento o de disminución, y también es independiente de las combinaciones de estructuras aditivas y multiplicativas que forman el esquema del problema de dos pasos. Aunque hay interacción significativa entre el factor nodo y el factor que representa las combinaciones de estructuras aditivas y multiplicativas, el análisis de esta interacción pone de manifiesto que el orden de dificultad entre los problemas de dos pasos con un nodo y con dos nodos se mantiene. Por tanto, el número de nodos es un aspecto que nos permite diferenciar tipos de problemas y explicar parte de la dificultad que plantean a los niños los problemas aritméticos verbales de dos pasos.

Referencias

CASTRO, E., RICO, L., GUTIÉRREZ, J., CASTRO, E., SEGOVIA, I., MORCILLO, N., FERNÁNDEZ, F., GONZÁLEZ, E. y TORTOSA, A. (1996). Evaluación de la resolución de problemas aritméticos en Primaria. *Revista de Investigación Educativa*, 14 (2), 121-139.

GREENO, J. G. (1987). Instructional Representations Based on Research about Understanding. En A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

HERSHKOVITZ, S. y NESHER, P. (1991). Two-Step Problems, The Scheme Approach. En F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings Fifteenth PME Conference*, Vol. II, pp. 189-196. Assissi, Italy.

HERSHKOVITZ, S. y NESHER, P. (1996). The role of schemes in designing computerized environments. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 339-366.

LEWIS, A. B. y MAYER, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371.

NESHER, P. y HERSHKOVITZ, S. (1991). Two-Step Problems, Research Findings. En F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings Fifteenth PME Conference,* Vol. III (pp. 65-71). Assissi, Italy.

NESHER, P. y HERSHKOVITZ, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics,* 26, 1-23.

RICO, L., CASTRO, E., GONZÁLEZ, E. y CASTRO, E. (1994). Two-Step Addition Problems with Duplicated Semantic Structure. En *Proceedings of the Eigteenth International Conference for the Psycology of Mathematics Education*. Vol. IV (pp. 121-128). Lisbom, Portugal.

Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta

GREGORIA GUILLÉN y OLIMPIA FIGUERAS.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de Valencia. España.
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Resumen:

Hay diferentes situaciones relacionadas con la práctica educativa en las que es útil conocer las concepciones y creencias que los profesores tienen en relación con una materia escolar, los contenidos que los profesores imparten, aquellos a los que les dan más importancia, aquellos para los que enfrentan dificultades; por ejemplo, cuando se quiere implicar a los profesores para que la Geometría, que ha sido un valor en alza en las reformas curriculares de la década de los 90, "llegue" a los salones de las clases.

Este informe contiene una descripción de la segunda versión de una encuesta diseñada para que maestros en ejercicio aporten información respecto de la situación actual de la enseñanza de la geometría en algunas escuelas de primaria mexicanas, la cual se ha elaborado a partir de la experimentación de una versión anterior con 20 maestros en ejercicio de primaria en el Estado de Nayarit, México. Asimismo en este informe damos cuenta de las categorías de respuestas delimitadas en un análisis de los datos, obtenidos de las respuestas de los docentes a preguntas de la encuesta; categorías que servirán como marco para estudios posteriores.

Abstract:

There are diverse situations linked to teaching activities for which it is useful to know teachers´ conceptions of and beliefs about a specific subject matter. That is, which are the specific contents they actually teach; which are considered by them, the most important; dealing with which contents they encounter difficulties. One of the aforementioned situations is a collaborative process with teachers aimed at "taking geometry to the classrooms", that geometry which has been valued more and more during the decade of the nineties in curriculum changes.

This paper contains a description of the second version of a questionnaire used to collect information concerning the situation of geometry teaching in primary Mexican schools. The questionnaire was designed taking into account the results of a trial set up with twenty teachers from the State of Nayarit in the northeast of Mexico. A description of a framework for data analysis of teacher's answers is included also in this paper. The classes of responses characterized will enable analysis of further related investigations.

PRESENTACIÓN

La segunda versión de una encuesta elaborada a partir de la experimentación de una primera versión de la misma con 20 maestros tiene como objeto obtener información sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría en algunas escuelas de primaria mexicana. Dicha información se relaciona con 4 grandes temáticas: 1. La importancia dada por los maestros a: i) la geometría con respecto a los otros ejes temáticos del currículum mexicano: aritmética, medición, predicción y azar, procesos de cambio y tratamiento de la información; ii) la geometría con respecto a la medición. 2. Las razones de los maestros para explicar: i) el porqué no imparten todos los contenidos geométricos del currículum de primaria, ii) el porqué imparten geometría en este nivel educativo, iii) los contenidos geométricos específicos que enseñan o no enseñan. 3. Los contenidos geométricos: i) que los docentes dicen impartir, ii) que conllevan dificultades para ellos, iii) a los que ellos les asignan mayor importancia. 4. Ideas de los maestros sobre el bajo rendimiento escolar en geometría.

Las categorías que hemos delimitado en nuestro análisis de las respuestas de los docentes a preguntas de la encuesta en su versión experimental agrupan expresiones utilizadas por los docentes para comunicar las razones para impartir o no contenidos específicos en una situación ideal, en la que se dispone de tiempo suficiente para la enseñanza de contenidos geométricos.

El estudio descrito en este documento forma parte de un trabajo más amplio realizado en Tepic, Estado de Nayarit con maestros de primaria en ejercicio[1]. A partir de él obtuvimos información sobre cuatro problemáticas relacionadas con la práctica educativa: i) situación actual de la enseñanza de la geometría en escuelas de primaria de ese Estado, ii) concepciones y creencias que sobre la enseñanza de la geometría en primaria tienen los maestros en ejercicio que participaron en el estudio, iii) preparación que tienen estos docentes sobre los contenidos relativos a la geometría de los sólidos del currículum de primaria y acerca de los posibles enfoques con los que se puede abordar su estudio y iv) disposición de los docentes para mejorar su formación. La indagación realizada es un estudio exploratorio en el cual se emplearon dos tipos de técnicas de recolección de datos: i) una encuesta por medio de un cuestionario escrito, y ii) un “curso taller” para 20 maestros en ejercicio, espacio diseñado ad-hoc para la experimentación de secuencias de actividades que permite la “reflexión en voz alta” de los docentes. El estudio que presentamos en este documento se refiere a la elaboración del cuestionario escrito.

ANTECEDENTES. UN MARCO DE REFERENCIA

[1] Este trabajo se enmarca en el Proyecto de investigación “Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas”, que se está desarrollando en México, (co-financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, con clave G37301-S).

En Guillén et al. (2003) se establecen los antecedentes y el marco de referencia del que se deriva este informe. Como indicamos en este trabajo, una de las líneas de investigación que tenemos como referencia alude a la observación de procesos de enseñanza/aprendizaje de la Geometría de los sólidos (Guillén, 1997; Sáiz 2002). Con la investigación previa desarrollada disponemos de información sobre: a) dificultades que enfrentan algunos estudiantes de Magisterio (estudiantes para maestro) sobre determinados contenidos geométricos, b) tendencias en la enseñanza/aprendizaje de algunos contenidos geométricos, c) sugerencias para llevar a cabo la instrucción, y d) experiencias realizadas con estudiantes de primaria trabajando contenidos geométricos.

Partimos de las hipótesis previas siguientes: i) Los maestros no enseñan toda la geometría que hay en el currículum de Primaria, ii) hay contenidos geométricos del currículum de primaria para el que los maestros tienen dificultades, iii) los maestros de primaria apenas prestan atención a la geometría del espacio. Suponemos que en las aclaraciones que aporten los maestros para explicar por qué no imparten toda la geometría, entre las causas más frecuentes figuren: a) la falta de tiempo para impartir todo el currículum, b) la ausencia de estos contenidos en los test nacionales de evaluación de los estudiantes de primaria, c) la falta de materiales adecuados de los que se dispone para preparar las clases, e incluso, d) la falta de preparación que se tiene para impartir geometría en este nivel.

Diferentes tipos de conocimiento

Situando la investigación actual en el marco de la formación del profesor, tomando como referente, entre otros, el trabajo de Climent y Carrillo (2003) y los que ahí se referencian, en el conocimiento del profesor se consideran diferentes componentes: Conocimiento del contenido matemático *de* y *sobre* las matemáticas y el conocimiento de la materia para su enseñanza. En este estudio nosotros nos centramos especialmente en el contenido escolar de hechos, procedimientos, conceptos, etc. Hemos reorganizado este contenido como referido a: a) procesos matemáticos (como describir, clasificar, generalizar, etc.), b) relaciones entre contenidos geométricos, c) uso de destrezas (construir, modificar, transformar) para trabajar los procesos matemáticos indicados o para desarrollar habilidades (comunicar y/o representar formas), d) objetos mentales[2] de los estudiantes relativos a conceptos geométricos. En este trabajo, al referirnos a la encuesta como instrumento para la obtención de información, no ha sido objeto de estudio lo referido al punto d) y respecto de c) sólo obtenemos información acerca de las destrezas que se proponen en el currículum de primaria mexicano, pero no estudiamos con qué objeto se propone que se desarrollen estas destrezas.

[2] Usamos *Objeto mental* con el significado de Freudenthal (1983).

Acerca de creencias y concepciones.

Como marco para el trabajo consideramos también los estudios que han señalado la influencia de las concepciones de los individuos sobre su modo de actuar (véase por ejemplo, Peterson, Fennema, Carpenter y Loef, 1989, citado por Llinares, 1996) y los estudios relacionados con las creencias y concepciones de los profesores de geometría sobre la geometría y sobre su enseñanza (por ejemplo, véase Sáiz, 2002). Por ello, es importante identificar las concepciones y creencias que sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría tienen los profesores de educación primaria si queremos implicarlos en procesos de cambio. “El profesor no motiva a ciegas el aprendizaje, como mero operario, sino que interpreta y aplica el currículum oficial según unos criterios, entre los que destacan sus concepciones” (Carrillo, 2000, pag. 80).

El término *creencia* en un sentido bastante general significa “tener un enunciado por verdadero” o “tener un hecho por existente”, aceptar la verdad y realidad de algo, sin dar a entender que mis pruebas sean o no suficientes. En este sentido general, una creencia es verdadera sólo si la proposición en la que se expresa lo es. En este estudio se utiliza el término creencia con el significado de Villoro (1982, pag. 71), quien considera que las condiciones necesarias para toda creencia son: *S* cree que *p* si y sólo si: 1) *S* está en un estado adquirido *x* de disposición a responder de determinada manera ante determinadas circunstancias; 2) *p* ha sido aprehendida por *S*, y 3) *p* determina *x*. De donde propone la siguiente definición: *creencia*, que se refiere a un estado interno del sujeto, es un estado disposicional adquirido, que causa un conjunto coherente de respuestas y que está determinado por un objeto o situación objetiva aprehendidos. Ese estado es una condición inicial sin la cual no se explicaría la consistencia en las respuestas del sujeto. Añadida a los estímulos y a otras condiciones iniciales (otras creencias y otras disposiciones) es causa del comportamiento. Las creencias se manifiestan a través de declaraciones verbales o de acciones.

El término *concepción* forma parte de teorías psicológicas. Nosotros vamos a usarlo con el significado que expresa Ponte (1994): Las concepciones son los marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva, que condicionan la forma en que realizamos las tareas. Thompson (1992) apunta que las concepciones se mantienen con plena convicción, son consensuadas y tienen procedimientos para evaluar su validez.

METODOLOGÍA. RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

Como se indica al hablar del marco de referencia, el estudio que estamos realizando, vinculado con las hipótesis previas que hemos indicado, se ha diseñado de forma que se obtengan datos de varias fuentes: i) una encuesta por medio de un cuestionario escrito, y ii) un “curso taller”. El trabajo de diseño de los instrumentos utilizados se planea en tres etapas que corresponden a tres estudios distintos que se complementan. Para el análisis de los datos y dada su diferente naturaleza se utilizan diferentes técnicas teniendo éste fundamentalmente un carácter cualitativo. Entre las herramientas que se utilizarán se encuentra el sofware Nvivo y el paquete comercial de técnicas estadísticas SPSS.

Etapas en las que se ha realizado el trabajo

Los resultados que presentamos en el siguiente apartado se han obtenido en las etapas siguientes:

1. A partir de la encuesta descrita en Guillén et al. (2003) elaboramos una versión experimental para el curso de Tepic. Esta versión tiene 3 secciones: “Geometría y medida”, “Geometría. Contenido geométrico” y “Contenido de Medida, longitud y área”. Las modificaciones de esta encuesta respecto de la versión que describimos en Guillén et al. (2003) se refieren especialmente a la

sección 2, relativa a los contenidos geométricos. Para el diseño de las preguntas de esta sección consideramos el currículum de primaria mexicano y se incorporaron otros contenidos que tenían como objeto servir como una forma de control de la respuesta de los docentes. Organizamos los contenidos geométricos en seis bloques temáticos: Bloque I: Ubicación espacial. Bloque II: Reconocer, nombrar e identificar cuerpos geométricos, figuras planas, líneas y puntos. Bloque III: Describir formas geométricas de tres, dos y una dimensiones. Bloque IV: Clasificar formas geométricas de tres, dos y una dimensiones bajo distintos criterios. Bloque V: Construcción y representación de cuerpos geométricos y de figuras planas mediante diversos procedimientos. Bloque VI: Modificar y explorar configuraciones de tres y dos dimensiones.

En esta versión experimental, para cada contenido de cada bloque se hacían 3 tipos de preguntas que se introducían con la cuestión 6 que se muestra en el cuadro I del anexo I. Al referirnos a cada contenido, la cuestión se replanteaba como muestra el cuadro II del anexo 1 para el contenido 1 del bloque II.

2. Este "Primer cuestionario sobre la Enseñanza de la Geometría y de la Medida" lo administramos a 20 maestros en ejercicio, que cubrían todos los niveles de la primaria (de 1º a 6º), en el ámbito de un curso denominado "Sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría en la primaria", de 25 horas de duración. Al aplicar la encuesta indicábamos que dejaran constancia de sus comentarios, escribiéndolos en ella o en una hoja que entregarían junto con el cuestionario.

3. Realizamos un primer nivel de análisis de las respuestas de los docentes que participaron en el primer estudio, análisis que llevó al establecimiento de categorías de respuestas para las preguntas de los contenidos geométricos mencionados anteriormente.

RESULTADOS

Como hemos adelantado en la presentación, los resultados se refieren al diseño de la segunda versión de la encuesta y al establecimiento de categorías.

La segunda versión de la encuesta para geometría, tiene 3 secciones, que denominamos: "sobre la enseñanza de la geometría en la primaria", "el maestro y el currículum de geometría" y "el maestro en la clase". La primera sección versa sobre las temáticas 1i), 1ii), 2i) y 2ii) detalladas en la presentación. La segunda sección integra los ítems 6 a 9. Las cuestiones que plantearon los docentes cuando se les administró la versión experimental, así como los primeros escrutinios de las respuestas de los maestros al cuestionario, posibilitaron mejorar las cuestiones relativas a contenidos geométricos. En la segunda versión de la encuesta la actividad del cuadro II se plantea como en el cuadro III del anexo 1. Puede notarse que se ha añadido una casilla en la que los docentes indican el grado/s (curso) en el que impartirían el contenido correspondiente (véase cuadro III del anexo I). La pregunta de la primera versión sobre si impartirían un contenido concreto causó bastante dificultad; había confusión entre si se debería responder referido al grado en el que estaban trabajando actualmente o si se podían contemplar otros cursos en los que sí lo habían impartido.

Las expresiones que los docentes utilizaron para explicar si impartírían o no un determinado contenido geométrico se incorporaron en la segunda versión de la encuesta (véase cuadro III del anexo I). Se esperaba que éstas resultaran familiares para los maestros y que la mayoría de docentes encontraran en ellas la/s que explicaban su respuesta. En consecuencia, se amplió considerablemente el cuestionario, por lo que decidimos separar en dos la encuesta experimental: Una se refiere al "Estudio de las formas. Geometría" y otra a la "Medición". Asimismo, como el cuestionario de geometría es muy extenso, cada ítem referido a un contenido sigue agrupando varios contenidos, al igual que en la versión experimental. Se contempla que al administrar la encuesta se diga que se puede subrayar, tachar,.. y hacer otros comentarios que aclaren la respuesta que se querría dar.

Asimismo puede observarse que con la cuestión 6 sólo se pregunta si lo han impartido o no y si lo impartirían o no; no se pregunta ni cómo ni para qué. Dadas las limitaciones que tiene este medio (una encuesta) y considerando las sugerencias dadas por los maestros que participaron en el estudio, incorporamos en la encuesta las cuestiones 7 y 8 de la sección 2 (véase el cuadro IV del anexo I) y una nueva sección, denominada “El maestro en la clase”; de este modo, la encuesta permite obtener información sobre la metodología de los docentes (véase el cuadro V del anexo I). Cabe señalar que la pregunta 9 (ver cuadro IV del anexo I) ya se incorporó en la versión experimental para averiguar algunas ideas que poseen los maestros sobre el bajo rendimiento escolar en geometría.

Los primeros escrutinios de las respuestas de los maestros al cuestionario no sólo se utilizaron para diseñar posibles razones para explicar las respuestas; permitieron crear grupos de formas de comunicar las razones para impartir o no impartir contenidos específicos en una situación ideal. En este escrutinio encontramos que las razones que los maestros explicitan para impartir o no un determinado contenido geométrico contienen diferentes elementos vinculados con su enseñanza, los planes y programas, los libros de texto, su propio dominio, las dificultades de los niños para construir un conocimiento, etc. Estos aspectos fueron los que sirvieron de guía para estructurar los diferentes agrupamientos que indicamos a continuación, para que pudieran servir de taxonomía de las expresiones verbales de los docentes. Cabe decir que estas categorías se han subdividido a su vez en subcategorías, que a su vez se han dividido en clases, pero dada la extensión de este informe sólo vamos a indicar las categorías que hemos establecido.

Categoría I – Grado. Las expresiones hacen referencia a un grado específico. Ejemplo: “no está en los curriculos de quinto, sólo algunos”, “no aparecen en los libros de texto”.

Categoría II – Contenido. En las expresiones se menciona un contenido geométrico, parte de los contenidos incluidos en una pregunta, o bien hacen alusión a contenidos escolares particulares. Ejemplo: “Sólo el cubo y prismas”.

Categoría III – Materiales. Las expresiones hacen referencia a materiales concretos, o bien manipulables que pueden emplearse en las secuencias de enseñanza en el aula. Ejemplos: “Si hubiera materiales atractivos”, “No hay material suficiente”.

Categoría IV – Contexto. Las expresiones aluden al contexto. Ejemplo: “Es importante la localización de cuerpos geométricos o de figuras planas en otros lugares de su entorno”.

Categoría V – Dominio. Las expresiones se refieren al domino del docente, ya sea de un conocimiento o contenido del currículo. También se incluyen frases que aluden al desconocimiento del profesor de un tópico de la geometría. Ejemplos: “No lo domino”, “lo desconozco”.

Categoría VI – Niños. Las expresiones describen competencias de los niños, o bien gustos o actitudes de ellos hacia la geometría, o bien dificultades que ellos enfrentan en los procesos de construcción de conocimientos. Ejemplos: “Les encanta a los niños”. “Es difícil para el niño”.

Categoría VII – Tiempo. Las expresiones se refieren al tiempo escolar. Ejemplo: “No tengo tiempo para impartirlo”.

Para finalizar queremos señalar que los primeros escrutinios de las respuestas de los maestros al cuestionario experimental han avanzado información sobre las 4 grandes temáticas a las que aludimos en la presentación; ahora bien, presentar resultados relativos a este análisis va más allá de los objetivos de este trabajo. Lo que queremos señalar es que estos resultados subrayan la pertinencia de la encuesta diseñada, de la que damos cuenta en este trabajo, para obtener información sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría escolar en otros ámbitos de estudio.

REFERENCIAS

CARRILLO, J. 2000. La formación del profesorado para el aprendizaje de las matemáticas. *Uno*, 24, pags. 79-91.

CLIMENT, N. y CARRILLO, J. 2003. El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, vol. 21, 3, pags. 387-404.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel.

GUILLÉN, G.; CORBERÁN, R.M.; SÁIZ, M. y FIGUERAS, O. (2003). Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría al aula, en Castro, E., Flores, P.; Ortega, T.; Rico, L.; Vallecillos, A. (eds.) (2002). *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la SEIEM* (Granada: Universidad de Granada), pags. 247-255.

LLINARES, S. (1996). Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria, en Jiménez, J.; Llinares, S. Y Sánchez, V. (Eds.). *El Proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Mathema, pags. 13-36.

PONTE, J. (1994). Mathematics Teacher' Professional Knowledge, en Ponte, J. y Matos, J. eds. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Lisboa: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

SÁIZ, M. (2002). *El pensamiento del maestro de Primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza.* (Tesis Doctoral). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

THOMPSON, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research, in Grouws, D.A. ed. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, pags. 127-147.

VILLORO, L. (1982). *Creer, saber, conocer.* México: Siglo XXI editores.

ANEXO 1

6. Cada una de las preguntas de este bloque del cuestionario se refiere a un contenido geométrico del currículum de la primaria. Para cada contenido se hacen tres tipos de cuestionamientos, a saber: a) Si lo ha impartido en el año escolar que acaba de terminar. En las opciones para las respuestas este aspecto se denomina "Situación actual". b) Cómo considera el contenido: Imprescindible, importante, se puede dejar de estudiar, nada importante. En las opciones para la respuesta este aspecto aparece como "Lo considero". c) Si lo impartiría suponiendo que tiene una situación ideal en el aula en la cual tiene tiempo suficiente para dar todos los contenidos del grado. En las opciones para las respuestas este aspecto se llama "Situación ideal".

Cuadro I

II.1 Reconocer, nombrar e identificar cubos, prismas, pirámides, cilindros, conos, esferas, cuando los sólidos se presentan aislados de otras formas.
a) Situación actual: Lo he impartido No lo he impartido
b) Lo considero: Imprescindible Importante Se puede dejar de estudiar Nada importante
c) Situación ideal: Lo impartiría No lo impartiría porque: No es de mi grado
No está en los libros de texto
No tengo dominio del tema
Lo desconozco
Otras razones: …..………………..

Cuadro II

II.1 Reconocer, nombrar e identificar cubos, prismas, pirámides, cilindros, conos, esferas, cuando los sólidos se presentan aislados de otras formas.
a) Situación actual: Lo he impartido No lo he impartido porque:
En grado/s
No es de mi grado.
No he tenido tiempo.
No está en los libros de texto.
No tengo dominio del tema.
Lo considero difícil para el niño.
Otras razones. Indique cuáles.
……………………………..
b) Lo considero: Imprescindible Importante Se puede dejar de estudiar Nada importante
c) Situación ideal: Lo impartiría En grado/s No lo impartiría porque:

Lo impartiría	No lo impartiría porque:
Porque está en el programa.	No es de mi grado.
Desarrolla capacidades del niño.	Lo considero un contenido para secundaria.
Se necesita para otros contenidos.	No está en los libros de texto.
Porque les gusta a los alumnos.	No tengo dominio del tema.
Porque tengo dominio del tema.	No tenemos el material.
Pero no es de mi grado.	No contamos con apoyos para formarnos.
Pero no está en los libros de texto.	Otras razones. Indique cuáles.
Pero necesito formación.	………………………………..
Otros comentarios.	
………………………………..	

Cuadro III

7. De los contenidos de geometría que ha impartido o está impartiendo indique cinco que sean los que usted considere los más importantes. Indique el grado en el que los imparte.
…………………………………………………………………………………………………
8. De los contenidos de geometría que ha impartido o está impartiendo indique tres que sean los que usted considere los menos importantes. Indique el grado en el que los imparte.
…………………………………………………………………………………………………
9. Indique aquellos contenidos que cuando el niño no los conoce usted considerará que tiene bajo rendimiento en geometría en el grado que imparte.
…………………………………………………………………………………………………

Cuadro IV.

10. De los materiales que indicamos a continuación señale aquel o aquellos que utiliza cuando imparte sus clases de geometría. Diga el grado al que se refiere.

Libros de texto. Grado/s
Material recortable del libro de texto.
Actividades de los ficheros.
Materiales que usted ha comprado. Indique cuales.
…………………………………………………………...
Materiales que ha construido. Indique cuales.
…………………………………………………………...
Otros. Indique cuales.
……………………………………………………………

11. Considerando los contenidos de geometría que está impartiendo indique cinco dificultades que usted ha detectado como las más usuales de los niños. Indique también el grado en el que las ha detectado. Grado/s
…………………………………………………………...………………
12. Considerando los contenidos de geometría que está impartiendo indique cinco errores que usted ha detectado como los más usuales de los niños. Indique también el grado en el que los ha detectado. Grado/s
…………………………………………………………...………………

Cuadro V

Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos

Mª ÁNGELES LONJEDO y *M. PEDRO HUERTA*

tomas_lonjedo@telefonica.net Manuel.P.Huerta@uv.es

Departament de Didàctica la Matemàtica
Universitat de València

Resumen:

En este artículo presentamos una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional atendiendo al análisis global del texto y su uso para la investigación y la enseñanza de dichos problemas. Los problemas se clasifican atendiendo a tres componentes que llamamos nivel, característica y tipo y que tienen que ver con los datos del problema y por la probabilidad por la que se pregunta. Mediante vectores con las tres componentes anteriores pueden clasificarse los problemas escolares de probabilidad condicional, clasificación que puede usarse tanto para investigar la resolución de dichos problemas por los estudiantes como para el análisis de los textos escolares. En este trabajo mostramos además el resultado de esto último.

Abstract:

In this work we present a classification of the conditional probability problems and how to use it in order to investigate the process of solving them and in order to make efficient their teaching. We classify these problems attending three components that we called level, characteristic and type that are related to the data in text of problem and question. So, we can identify each of the scholar conditional probability problems by mean of a vector of three components in order to be investigated or in order to be taught. In this article we also show the classification of these problems in textbooks.

Introducción

La intención inicial de este trabajo es mostrar una nueva clasificación de los problemas de probabilidad condicional y algún uso posible de esta clasificación. En un trabajo anterior, (Lonjedo, 2003; Huerta y Lonjedo, 2003), utilizamos la clasificación de los problemas de probabilidad condicional de Yáñez (2000) con intención de investigar la resolución de problemas de probabilidad condicional que podíamos clasificar según esa clasificación. Nuestra investigación, no obstante, reveló que dicha clasificación es insuficiente si solo se tiene en cuenta los datos como probabilidades y no se tiene en cuenta, además, la pregunta del problema. Nuestro trabajo ha sido refinar esta clasificación teniendo en cuenta, en primer lugar, los componentes que tienen que ver con la estructura de los datos y, en segundo lugar, relacionarlos con la pregunta del problema, con el fin de poder abordar el estudio de la resolución de estos problemas sujetos ahora a una nueva clasificación. Lo que mostraremos aquí es el uso que pueden darse a esos componentes de clasificación para el análisis de textos escolares, tanto si se piensa en la investigación sobre la resolución de esos problemas como para la enseñanza. El uso que nosotros le damos a esta clasificación tiene que ver con la investigación y el proyecto de tesis doctoral de la autora de este trabajo.

Los problemas de probabilidad condicional

Aunque ya lo mencionamos en otras comunicaciones (Huerta y Lonjedo, 2003) es conveniente centrar a qué nos referimos cuando hablamos de problemas de probabilidad condicional. Así, entendemos por problema escolar de probabilidad a un problema[1] que, situado en un contexto de azar o situación aleatoria, pregunta, de alguna de las formas tradicionales en las escuelas y en los libros de texto, por la probabilidad de un suceso[2].. Derivada de esta consideración, Huerta (2003) clasifica los problemas de probabilidad escolar en:

Problemas de asignación de probabilidades: Problemas de probabilidad en los que la respuesta a la pregunta "probabilidad de…" implica que el resolutor tome una decisión en términos de probabilidad sobre la ocurrencia o no de un suceso que pertenece a una situación aleatoria. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente:

Ejemplo 1:En un grupo de amigos hay 7 chicos y 8 chicas. Me llama por teléfono una persona de este grupo para ir al cine, ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona sea chico?

Problemas de cálculo de probabilidades: Problemas de probabilidad que para su resolución es necesario aplicar las relaciones o las reglas de cálculo de probabilidades entre los datos del problema. El siguiente problema puede servirnos como ejemplo:

Ejemplo 2:Si la probabilidad de ser aficionado al fútbol es 0.7, la de ser aficionado al baloncesto es 0.6 y la de ser a los dos deportes es 0.4:

a) Calcula la probabilidad de no ser aficionado a ninguno de los dos deportes.

b) Elegida una persona al azar de las aficionadas al fútbol, calcula la probabilidad de que sea aficionada al baloncesto.

Problemas de simulación: Simular un problema de probabilidad consiste en transformar el problema original en un nuevo problema reformulado para que pueda ser simulado, problema que probabilísticamente es equivalente al problema original y que mediante el generador de azar que simule la situación problemática original, la solución del problema simulado sea considerada solución del problema original con la ayuda de la ley de los grandes números. Entonces, llamamos problemas de simulación a aquellos problemas de probabilidad que para su resolución es necesario realizar una simulación del mismo.

Nuestro trabajo implica los dos primeros tipos de problemas. La frontera entre una tipología de problemas y la otra no está bien definida pues, según como se tome, hay intersecciones entre ellos. Así, algunos problemas que nosotros llamamos y clasificamos como problemas de asignación, en los libros escolares, se les trata como

[1] Problema en el sentido de Puig (1996)
[2] El término suceso lo usamos en su acepción más amplia que permite incluir otros significados además del de elemento de una σ-álgebra.

problemas de cálculo, generalmente porque se aplica una "regla de cálculo", la regla de Laplace, cuando realmente no hay un verdadero cálculo de probabilidades sino una asignación de una probabilidad a un suceso después de alguna consideración sobre la equiprobabilidad de los casos. En consecuencia, muchos de los problemas que se clasifican como problemas de cálculo son, para nosotros, de asignación, reservando la denominación de problemas cálculo de probabilidades a aquellos problemas cuya solución implica o exige usar relaciones o reglas de cálculo entre los datos del problema entendidos como probabilidades.

Llamamos **problema de probabilidad condicional PPC** (Huerta, 2003) a un problema de probabilidad en el que o bien en los datos o bien en la pregunta del problema es necesario que el resolutor considere la probabilidad condicional de un suceso[3]. Un ejemplo de esta subclase de problemas de probabilidad puede verse con el problema que hemos citado en el apartado b del ejemplo 2.

Cantidades y relaciones entre las cantidades presentes en un PPC

Dados los sucesos A y B, con $p(B)\neq 0$, se define la probabilidad condicional del suceso A –el condicionado- dado que el suceso B –el condicionante- se ha realizado, expresada por $p(A|B)$, por: $p(A|B) = p(A\cap B)/p(B)$

Considerados los sucesos A y B y sus complementarios –A y –B, podemos establecer 8 relaciones de probabilidad condicional entre estos sucesos, con la única condición de que la probabilidad del suceso condicionante no sea cero.

Con la finalidad de ser operativos, llamamos de la siguiente forma a estas probabilidades (tomado de Yáñez, 2000): $p(A|B)$ probabilidades condicionales, o sólo condicionales; $p(A\cap B)$ probabilidades de intersección, o sólo intersecciones; $p(A)$ probabilidades marginales, o sólo marginales. En consecuencia, toda la información que se puede presentar en un problema de probabilidad condicional, se resume en 4 marginales, 4 intersecciones y 8 condicionales (citadas en la nota a pie de página 3)

La condición para que un problema de probabilidad condicional sea un problema es que en su enunciado no aparezcan todas estas cantidades, de forma que para su resolución necesitemos establecer más de una relación entre sus datos.

Por otra parte, derivado de las relaciones conocidas entre las probabilidades del tipo que hemos mencionado, dada un cantidad en el problema es posible disponer de nuevas cantidades que van a ser necesarias para la resolución del problema. En este sentido pues, no es necesario disponer de todas las marginales ni de todas las condicionales, ya que sabemos que sólo con dos marginales no complementarias tendremos las cuatro, y que sólo con 4 condicionales no complementarias obtendremos las 8. Por otra parte, con dos marginales no complementarias y las cuatro intersecciones pueden reducirse a dos marginales no complementarias y una intersección, o a dos intersecciones y una marginal –que no estén relacionadas- o a 3 intersecciones. Siempre se puede utilizar, además, la definición de $p(A|B)$ para relacionar la con una marginal y una intersección.

[3] En este trabajo estudiamos los problemas de probabilidad condicional que implican dos sucesos A y B y las probabilidades siguientes: las 4 probabilidades marginales: $p(A)$, $p(B)$, $p(-A)$, $p(-B)$, las 4 probabilidades de la intersección: $p(A\cap B)$, $p(A\cap -B)$, $p(-A\cap B)$, $p(-A\cap -B)$ y las 8 probabilidades condicionales: $p(A|B)$, $p(-A|B)$, $p(A|-B)$, $p(-A|-B)$, $p(B|A)$, $p(-B|A)$, $p(B|-A)$, $p(-B|-A)$.

Lo que acabamos de describir, sirve para confirmar que con tres datos escogidos de forma conveniente entre las marginales, las intersecciones y las condicionales, se puede plantear y resolver cualquier problema escolar de probabilidad condicional en el sentido en el que lo usamos aquí. Además, dichos datos se encuentran relacionados mediante 18 relaciones, 10 aditivas y 8 multiplicativas, como las que se describen a continuación:

Ocho relaciones multiplicativas que del tipo: $p(A|B)=p(A\cap B)/p(B)$

Diez relaciones aditivas de las cuales 6 son relaciones de complementariedad:

Dos de ellas:$1 = p(A)+p(-A)$

Cuatro de ellas: $1 = p(A|B) + p(-A|B)$

Cuatro de ellas: $p(A) = p(A\cap B) +p(A\cap -B)$

Clasificación inicial de los Problemas de Probabilidad Condicional

Yáñez (2000) presenta una clasificación de los problemas de probabilidad condicional según los datos explícitamente mencionados en el problema. Como hemos mencionado antes, sabemos de una parte que tres es el número mínimo de datos explícitamente mencionados en el texto que debe presentar un problema escolar de probabilidad condicional para que tenga solución. Por otra parte, también sabemos que esos tres datos deben estar escogidos convenientemente entre las probabilidades marginales, las probabilidades de la intersección o las probabilidades condicionales. Consecuente con un análisis combinatorio al tomar los datos convenientemente, los problemas de probabilidad condicional pueden clasificarse mediante un vector de tres componentes, como sigue:

Tipo 1: los datos son tres intersecciones: (0, 3, 0)

Tipo 2: los datos son una marginal y dos intersecciones: (1, 2, 0)

Tipo 3: los datos son dos marginales y una intersección: (2, 1, 0)

Tipo 4: los datos son dos marginales y una condicional: (2, 0, 1)

Tipo 5: los datos son dos intersecciones y una condicional: (0, 2, 1)

Tipo 6: los datos son una marginal, una intersección y una condicional: (1, 1, 1)

Tipo 7: los datos son una marginal y dos condicionales: (1, 0, 2)

Tipo 8: los datos son una intersección y dos condicionales: (0, 1, 2)

Tipo 9: los datos son 3 condicionales: (0, 0, 3)

Utilizamos esta clasificación en el proyecto de investigación (Lonjedo, 2003) que reveló que es insuficiente si sólo se tiene en cuenta los datos como probabilidades y no se tiene en cuenta, además, los datos en el texto del problema, la presentación de los datos en el texto del problema, la semántica y sintaxis del problema y la pregunta del problema.

Por otra parte, si consideramos que un problema escolar de probabilidad condicional puede ser considerado en un instante del proceso de resolución como un problema aritmético de más de una etapa, igual que en Puig y Cerdán (1988) se exploran y analizan los problemas aritméticos de más de una etapa teniendo en cuenta el nº de datos y la incógnita, las relaciones entre los datos y la incógnita y las decisiones que ha de tomar el resolutor como ¿qué operaciones?, ¿entre qué cantidades?, ¿en qué orden?, pueden explorarse y analizarse los problemas escolares de probabilidad condicional.

Clasificación de los PPC atendiendo al análisis global del texto del problema.

Podemos realizar una clasificación de los PPC teniendo en cuenta alguno o los dos tipos de componentes siguientes:

a) Componentes que tienen que ver con la estructura de los datos y la pregunta del problema, y

b) Componentes que tienen que ver con la resolución del problema (o que afectan directamente a la resolución del problema)

La clasificación que presentamos en este trabajo tiene que ver con el primero de los componentes. Así, los problemas escolares de probabilidad condicional los clasificamos mediante una terna que describe el nivel (N), la categoría (C) y el tipo (T) del problema, según se define a continuación:

Nivel: Está determinado por el número de probabilidades condicionales (sólo condicionales) presentes en el texto del problema, o datos interpretables como probabilidades condicionales.

Dado que el número mínimo de datos en el problema es de tres probabilidades escogidas convenientemente entre las marginales, las intersecciones y las condicionales, pueden considerarse 4 niveles de problemas, en función de si los datos del problema son 0, 1, 2, ó 3 probabilidades condicionales o cantidades interpretables como probabilidades condicionales. Así, en cada uno de los niveles N_i, para i= 1, 2, 3, 4, definimos vectores del tipo (x, y, z) que representan el nº de datos interpretables como probabilidades marginales, probabilidades de la intersección y probabilidades condicionales respectivamente, y con la condición que x+y+z=3. En cada nivel tenemos:

Nivel 1: no hay probabilidades condicionales: (x, y, 0), x+y=3.

Nivel 2: Hay una probabilidad condicional: (x, y, 1), x+y=2.

Nivel 3: Hay dos probabilidades condicionales: (x, y, 2), x+y=1.

Nivel 4: Hay tres probabilidades condicionales: (0, 0 3).

Categoría: Determinada por el número datos que tienen que ver con las probabilidades marginales o datos interpretables como éstas. Las categorías dependen del nivel que consideremos, teniendo en cuenta la relación aditiva que relaciona las tres componentes del nivel de problemas.

Consideramos entonces las categorías C_i, i=1, 2, 3, dependiendo de que los datos que tienen que ver con las probabilidades marginales sean 0, 1 o 2 respectivamente.

Así, por ejemplo, en el nivel 1 y en el nivel 2 existen las tres categorías, pero en el nivel 3 sólo existen las categorías C_1 y C_2, y en el nivel 4 sólo existe la categoría C_1.

Tipo: Determinado por la pregunta del problema. Tenemos tres tipos:

Tipo 1: la pregunta del problema es una probabilidad condicional.

Tipo 2: la pregunta del problema es una probabilidad marginal.

Tipo 3: la pregunta del problema es una probabilidad de la intersección.

En principio, cada nivel quedaría dividido en tres categorías y cada una de éstas en tres tipos, luego podemos construir o considerar dentro de cada nivel 9 clases de problemas diferentes, atendiendo a las componentes que acabamos de definir.

Descripción de los problemas atendiendo al nivel, categoría y tipo.

Nivel 1: N_1: (x, y, 0)

Forma (x, y, 0), sin condicionales en el enunciado.

Pueden considerarse tres categorías, C_i i=1, 2, 3, Necesariamente, en este nivel y en cualquiera de las tres categorías, los problema serán siempre del Tipo 1, es decir, la pregunta es una probabilidad condicional, pues en caso contrario no consideramos el problema como problema de probabilidad condicional.

C_1: (0, 3, 0), los datos son tres intersecciones Tipo 1: (N_1, C_1, T_1)

Consideradas las diferentes formas de tomar las intersecciones como datos en el problema, la pregunta se corresponde con cualquiera de las 8 condicionales del Tipo 1, lo que nos da, potencialmente 32 problemas diferentes en datos y preguntas.

Suele ocurrir que todos los problemas con las características recién descritas que podemos encontrar en los libros de texto escolares suelen presentar los datos mediante una tabla de contingencia. En el anexo mostramos dos problemas como ejemplos. Además, el único problema que hemos encontrado en el que sólo haya tres datos que sean probabilidades de la intersección es el ejemplo 1, pues todos los demás problemas al presentar los datos mediante una tabla de frecuencias absolutas, incluyen al menos un dato redundante, como puede verse en el ejemplo 2.

C_2: (1, 2, 0), los datos son una marginal y dos intersecciones Tipo 1: (N_1, C_2, T_1)

En este caso pueden considerarse 24 problemas diferentes sin tener en cuenta la pregunta del problema, pero como todos han de ser de tipo 1, entonces podemos estar hablando para esta terna de 168 problemas diferentes.

C_3: (2, 1, 0), los datos son dos marginales y una intersección Tipo 1: (N_1, C_3, T_1)

En este caso, hablamos de 16 problemas diferentes sin tener en cuenta el tipo. Considerándolo, de 128 problemas.

Este nivel, por otra parte, queda dividido en tres subclases diferentes de problemas atendiendo a las posibles categorías: (N_1, C_1, T_1), (N_1, C_2, T_1) y (N_1, C_3, T_1)

Nivel 2: N_2: (x, y, 1)

Forma (x, y, 1), con un dato que tiene que ver con una condicional en el enunciado. Pueden considerarse, de una parte, tres categorías, C_i i=1, 2, 3, y, de otra, para cualquiera de las tres categorías, el problema puede presentar los tres tipos, es decir, la pregunta del problema puede considerar cualquiera de las tres probabilidades: marginal, intersección o una probabilidad condicional. Así, tenemos:

C_1: (0, 2, 1), los datos son dos intersecciones y una condicional: (N_2, C_1, T_1), (N_2, C_1, T_2) y (N_2, C_1, T_3)

Tenemos 6 formas de agrupar las 4 intersecciones de dos en dos, y por cada una de estas 6 formas tenemos 8 condicionales. Luego el número de problemas diferentes que pueden presentar estas restricciones es de 48.

En cada uno de estos 48 problemas no hemos tenido en cuenta el tipo. En este nivel, la pregunta del problema puede ser una probabilidad condicional, una probabilidad marginal o una probabilidad de la intersección. Es decir puede presentar cualquiera de los tres tipos. Por tanto, por cada uno de los tipos tenemos los 48 problemas.

En el análisis de los textos escolares que hemos realizado no hemos encontrado ningún problema de estas tres clases.

C_2: (1, 1, 1), con una marginal, una intersección y una condicional: (N_2, C_2, T_1), (N_2, C_2, T_2) y (N_2, C_2, T_3)

Tenemos por cada marginal 4 intersecciones y 8 condicionales. Como tenemos 4 marginales, el número total de problemas en este nivel y esta categoría, sin tener en cuenta los tipos es 128 diferentes.

En cada uno de estos 128 problemas no hemos tenido en cuenta la pregunta. En este nivel la pregunta del problema puede ser una probabilidad condicional, una probabilidad marginal o una probabilidad de la intersección. Es decir puede presentar cualquiera de los tres tipos, tipo 1, tipo 2, o tipo 3, respectivamente. Por tanto, por cada uno de los tipos tenemos los 128 problemas diferentes.

Del análisis de los libros de texto no hemos encontrado tampoco ningún problema de estas tres clases.

C_3: (2, 0, 1), con dos marginales y una condicional: (N_2, C_3, T_1) y (N_2, C_3, T_3)

Tenemos 6 formas de agrupar las 4 marginales de dos en dos, pero debemos tener en cuenta que las marginales deben ser no complementarias. Por lo que tenemos 4 parejas de marginales no complementarias. Por cada una de estas 4 formas tenemos 8 condicionales. Luego el número de problemas que pueden presentar estas restricciones es 32.

En esta categoría dentro del nivel 2, la pregunta del problema no puede ser una probabilidad marginal, pues ésta sería complementaria con uno de los datos. Luego estaremos en los tipos 1 y 3, en los que la pregunta es una probabilidad condicional y una probabilidad de la intersección respectivamente. Este nivel queda dividido así en 8 clases diferentes de problemas: (N_2, C_1, T_1), (N_2, C_1, T_2), (N_2, C_1, T_3), (N_2, C_2, T_1), (N_2, C_2, T_2), (N_2, C_2, T_3), (N_2, C_3, T_1) y (N_2, C_3, T_3).

Hemos encontrado en los libros de texto escolares únicamente los dos ejemplos de problemas que mostramos en el anexo.

Nivel 3: N_3: (x, y, 2)

Forma (x, y, 2), con dos datos que tienen que ver con probabilidades condicionales.

Pueden considerarse dos categorías, según que no hayan datos que pueden ser interpretados como probabilidades marginales y que un dato que tiene que ver con la probabilidad de la intersección o al revés.

C_1: (0, 1, 2), los datos son una intersección y dos condicionales: (N_3, C_1, T_1), (N_3, C_1, T_2) y (N_3, C_1, T_3)

Con los 8 condicionales podemos considerar 28 pares de datos, de los que eliminando los 4 pares formadas por condicionales complementarias nos quedan 24 pares de datos. Por cada uno de estos 24 pares tenemos 4 intersecciones como datos posibles, por lo que dentro de este nivel y esta categoría podemos tener considerar 96 problemas diferentes.

Si ahora tenemos en cuenta la pregunta del problema, en este nivel y categoría se pueden presentar problemas con cualquiera de los tres tipos.

Tampoco en este caso, en los libros de texto revisados, no hemos encontrado ningún problema con los datos referidos como una probabilidad de la intersección y dos condicionales.

C_2: (1, 0, 2), con una marginal y dos condicionales: (N_3, C_2, T_1), (N_3, C_2, T_2) y (N_3, C_2, T_3)

Ya sabemos que tenemos 24 parejas de condicionales no complementarias, que con las 4 marginales hacen un total de 96 problemas en este nivel y esta categoría. Al igual que en la anterior categoría, al tener en cuenta la pregunta del problemas, se pueden presentarlos tres tipos. Este nivel queda dividido en 6 clases diferentes de problemas: (N_3, C_1, T_1), (N_3, C_1, T_2), (N_3, C_1, T_3), (N_3, C_2, T_1), (N_3, C_2, T_2) y (N_3, C_2, T_3),

Los problemas de este nivel y esta categoría, en cualquiera de los tres tipos, (N_3, C_2, T_1), (N_3, C_2, T_2) y (N_3, C_2, T_3), son los que siempre están presentes en los libros de texto. Por decirlo de otra manera, en la que se basan los libros de texto para la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad condicional.

Nivel 4: N_4: (0, 0, 3)

Forma (0, 0, 3), los tres datos presentes en el problema son interpretables como probabilidades condicionales. Este nivel sólo presenta la categoría 1, pues estamos en el caso de 0 datos interpretables como probabilidades marginales. Además, esta categoría puede clasificarse con cualquiera de los tres tipos, teniendo en cuenta que en el tipo 1 la pregunta no puede ser una condicional complementaria con algún dato. Este nivel queda pues dividido en 3 clases diferentes de problemas: (N_4, C_1, T_1), (N_4, C_1, T_2) y (N_4, C_1, T_3)

Nuevamente, en los libros de texto examinados no presentan problemas descritos por este nivel.

La tabla siguiente pretende ser un resumen de las diferentes clases de problemas de probabilidad condicional que pueden presentarse y que puede usarse como criterios para la clasificación de estos problemas:

	N_1			**N_2**			**N_3**			**N_4**		
C_1	C_1T_1			C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3
C_2	C_2T_1			C_2T_1	C_2T_2	C_2T_3	C_2T_1	C_2T_2	C_2T_3			
C_3	C_3T_1			C_3T_1	C_3T_2							

En principio, cada nivel quedaría dividido en 9 clases, dependiendo de la categoría y del tipo. Pero como la categoría (datos que tienen que ver con las probabilidades marginales) dependen del nivel en el que nos encontramos, y el tipo (qué se pregunta) tiene que ver con que el problema de probabilidad ha de ser un problema de probabilidad condicional, la tabla muestra casillas en blanco que nos indican la imposibilidad de considerar problemas pertenecientes a las clases correspondientes a esas casillas.

Conclusiones

Lo que hemos presentado en este trabajo es una clasificación de los problemas escolares de probabilidad y los criterios por los que pueden ser clasificados. Las conclusiones, por tanto, no van a responder a cuestiones de investigación resueltas empíricamente. Lo que podemos concluir tiene, en parte, componentes teóricas y, en menor medida, empíricas en tanto que hemos clasificado los problemas escolares de probabilidad condicional atendiendo a los datos presentes tanto en el texto que da cuenta de la situación problemática como en la pregunta del problema. Esta clasificación la hemos usado para plantearnos las preguntas de investigación que implican, ahora, la resolución de dichos problemas por los estudiantes. Además, hemos usado dicha clasificación para el análisis de los problemas en los libros de texto escolares. Así, derivado de dicho análisis y como se muestra en el anexo a este trabajo, hemos estudiado textos escolares desde 1975 hasta el 2002, con la única intención de explorar cuál ha sido la presencia o ausencia de los problemas de probabilidad condicional y qué tipología de problemas está presente o ausente. Observamos como no todos los tipos de problemas que podemos considerar han estado ni están presentes en los libros de texto escolares. Las razones de estas ausencias no las podemos saber, aunque probablemente estén relacionadas con el tipo de solución que requieran: algebráica o aritmética (Yáñez, 2000; Huerta y Lonjedo, 2003).

Referencias

HUERTA, M.P. (2003), *Didàctica de la Probabilitat I l'estadística* (Curso de Doctorado). Universitat de València.

HUERTA, M. P.; LONJEDO, Mª A., (2003*) La resolución de problemas de probabilidad condicional: un estudio exploratorio con estudiantes de bachiller*. Comunicación presentada en el grupo PNA de la SEIEM. VI Simposio SEIEM. Granada.

LONJEDO Mª A., (2003), *La resolución de problemas de probabilidad condicional: Un estudio exploratorio con estudiantes de bachiller*, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València (Memoria de Tercer Ciclo no publicada)

PUIG, L. Cerdán, F. (1988) *Problemas aritméticos escolares*. (Síntesis. Madrid)

PUIG, L. (1996) Elementos de resolución de problemas, (Comares: Granada)

YÁÑEZ, G, 2000, El Álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional, en Gómez, P., y Rico, L. (eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada. pp. 355-371

El conocimiento profesional de los profesores y sus relaciones con la estadística y la probabilidad

CELI APARECIDA ESPASANDIN LOPES

Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL/São Paulo/Brasil

Resumen:

La pregunta que orienta esta investigación es ¿qué contribuciones aportan el estudio, la vivencia y la reflexión sobre conceptos de Estadística y Probabilidad al desarrollo profesional y a la práctica pedagógica de un grupo de profesoras de educación infantil?. Para dar respuesta a esa pregunta esta investigación se desarrolló en un ambiente de trabajo colaborativo. Los presupuestos que orientaron este trabajo fueron tres: uno, que el conocimiento profesional de los profesores resulta de la integración entre la teoría y la práctica, éste es personal y se manifiesta en la acción; dos, que los docentes desempeñan un papel esencial en el desarrollo curricular; y, tres, que el desarrollo profesional de los profesores se da a través de su opción de involucrarse en un proyecto de formación intencional. En este estudio se adoptó la perspectiva teórica del profesor reflexivo, bajo la visión de Paulo Freire. Los datos y registros para el análisis fueron obtenidos a partir de cuestionarios, entrevistas, relatos, notas de la investigadora, reflexión colectiva de textos, clases filmadas y actividades elaboradas y aplicadas por las profesoras en sus clases. El análisis de esos registros dio origen a cinco estudios de caso.

Abstract:

This research had a collaborative approach with the assumptions that the teachers professional knowledge that results in the integration of theory and practice, is personal and is seen, mainly, in the role they have in the curricula development, also the teachers professional development happens when they engage intentionally in an education project, to reason about their practice, as individuals and as a group. The theoretical perspective of the reflexive teacher in the freirian concept was taken into account when investigating the contributions that the study upon the Statistics and Probability concepts can bring to the professional education and the pedagogical practice of a group of teachers. The information were brought forth in three years teaching, mainly, through questionnaires, interviews, papers and the researchers notes, of the collective discussion about texts, recorded classes and analysis of activities planned and performed by the teachers, we had five case study.

Introducción

Este trabajo investigó las contribuciones que el estudio, la vivencia y la reflexión sobre conceptos de Estadística y Probabilidad pueden aportar al desarrollo profesional y a la práctica pedagógica de un grupo de cinco profesoras de Educación Infantil. Realizamos una intervención planificada, constituyéndose, así, un trabajo de grupo colaborativo que posibilitó la ampliación del conocimiento profesional de las educadoras en lo que se refiere al conocimiento de lo matemático y de lo estadístico, del currículo y de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para indagar sobre cuáles conocimientos didácticos acerca da probabilidad y de la estadística posee el profesor de educación infantil, sobre el cómo el profesor reflexiona epistemológicamente sobre las ideas estocásticas fundamentales, y sobre cómo el estudio, la vivencia y la reflexión colectiva acerca del contenido estocástico y su didáctica influencian el conocimiento profesional y la práctica del profesor de educación infantil, iniciamos un trabajo colectivo, creando el "*Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Estatística e a Probabilidade na Educação Infantil (GEPEPEI)"T*[1]. A lo largo del proceso de investigación —a través de la vivencia concreta del grupo, del análisis de algunas clases, y del contacto con la teoría— las profesoras participantes de la investigación (profesoras e investigadora) fueron transformándose. En ese proceso, discutimos y elaboramos la pregunta central de esta investigación:

> "*¿Qué contribuciones aportan el estudio, la vivencia y la reflexión sobre conceptos de Estadística y Probabilidad al desarrollo profesional y a la práctica pedagógica de un grupo de profesoras de educación infantil?*".

Para responder a esa pregunta, realizamos un trabajo con el grupo que se fue tornándose colaborativo. Este trabajo tenía como intención inicial ampliar el conocimiento didáctico de las educadoras y, consecuentemente, su desarrollo profesional.

Esa perspectiva de investigación generó una interdependencia entre las participantes del grupo y la investigadora. Ambas partes estuvieron comprometidas en la constitución colectiva del conocimiento y en el proceso continuo de reflexión, el cual tuvo un papel fundamental en la puesta en marcha del trabajo.

Privilegiamos la concepción de Estadística como arte y ciencia de recolectar, analizar y hacer inferencias a partir de datos. Concordamos con Batanero (1999) cuando afirma que es preferible integrar las actividades estocásticas para la matemática escolar, siempre que sea posible, aprovechando las conexiones con Aritmética, Geometría y situaciones cotidianas de los alumnos. Esas presupuestos dirigieron nuestro proceso de intervención o, mejor, la propuesta de formación de las educadoras con las cuales desarrollamos el trabajo.

En relación a la Probabilidad, consideramos que no debemos solamente percibirla por medio de una definición matemática, pues, de ser así, estaríamos despreciando su carácter estocástico, dejando de considerar las percepciones aleatorias traídas por el azar. El significado conceptual de la Probabilidad no puede estar basado simplemente en definiciones matemáticas, como habitualmente ocurre con otros conceptos. La dificultad de los alumnos no ha estado centrada en la definición de Probabilidad, pero sí en el modo como el concepto es interpretado y aplicado en situaciones específicas (Azcárate, 2001).

[1] Grupo de Estudios e Investigación sobre la Estadística y la Probabilidad en la Educación Infantil.

También es necesario notar que esa visión parte de la definición clásica de la medida de Probabilidad y se relaciona con los esquemas operatorios de las proporciones y de las operaciones combinatorias.

En relación a la práctica pedagógica, la alerta expresada por Godino, Batanero y Flores (1998) —al destacar las dificultades existentes en la formación de profesores en Estocástica como uno de los principales obstáculos a ser vencido— ayudó a delinear el proceso de intervención propuesto, una vez que, según ellos, no se puede reducir la enseñanza de ese tema al desarrollo de estructuras conceptuales y herramientas para la resolución de problemas. Los autores manifiestan que es necesario, también, orientar a los alumnos en el sentido de construir formas de razonamiento y un sistema sólido de intuiciones correctas.

Esos presupuestos teóricos, relacionados con la Educación Estadística, nos auxiliaron en la ejecución de nuestras directrices, en el sentido de la discusión sobre la interacción entre conocimiento, práctica pedagógica y desarrollo profesional del profesor, durante su acción y en su contexto. En relación al conocimiento profesional de los profesores consideramos que éste resulta de una integración entre teoría y práctica, es personal y se manifiesta, especialmente, en la acción. Consideramos también que los docentes desempeñan un papel esencial en el desarrollo curricular. Además, consideramos que el desarrollo profesional del docente puede darse como resultado de su opción de involucrarse en un proyecto de formación intencional. Ese involucrarse es a través de una adhesión libre y voluntaria del profesor, donde deberá reflexionar sobre su práctica, de forma individual y colectiva.

De acuerdo con Ponte (1994), el contexto profesional influencia el desarrollo de los profesores, tanto en el proyecto pedagógico de la escuela como en la clase. En esta investigación el contexto corresponde a una escuela que tiene su propuesta pedagógica centrada en una concepción de enseñanza y aprendizaje constructivista e interaccionista, concibiendo el conocimiento como construcción de significados y abordando el contenido de las diversas áreas de estudio en sus dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal. El currículo de Educación Infantil, en esa escuela, centra su foco en el trabajo con proyectos integrados, que tienen por objetivo formar una red de relaciones e interdependencias entre los diferentes conocimientos.

En relación al conocimiento didáctico, la investigación resalta la importancia de las actividades orientadas de enseñanza —como una posibilidad de organización y reestructuración de la práctica— y del contexto de aprendizaje que permite involucrar situaciones problema en Matemática y Estadística. Esas actividades fueron significativas para los párvulos y sirvieron para que las profesoras evaluaran sus conocimientos sobre el contenido estocástico y su naturaleza interdisciplinar. En el estudio, nos preocupamos con la manera como las docentes elaboraban, desarrollaban y evaluaban el proceso del desarrollo del pensamiento estadístico y de probabilidad de los alumnos.

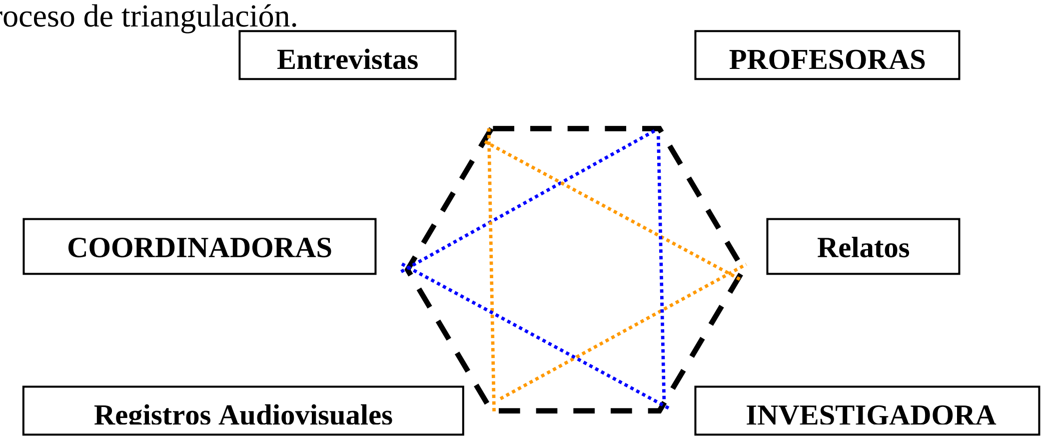
Metodología

Para responder a nuestra pregunta, desarrollamos una investigación cualitativa, bajo un abordaje interpretativo, basada en estudios de caso, en la perspectiva de un grupo colaborativo (Bogdan y Biklen, 1994). Este grupo fue formado por la investigadora y las educadoras participantes. Para Merriam (1998) el estudio de caso consiste en la observación detallada de un contexto, de individuo, de una única fuente de documentos o de un acontecimiento específico. En esta investigación optamos por estudios de caso con múltiples sujetos, un abordaje que, según Bogdan y Biklen (1994), asume una gran variedad de formas —una de ellas se refiere a realizar dos o más estudios de casos que son efectuados y, posteriormente, comparados e contrastados.

Al discutir las funciones del investigador de casos, Stake (1999) considera que ese tipo de investigación tiene el objetivo de clarificar las descripciones y dar solidez a las interpretaciones. Para ese autor, aceptar una visión constructivista del conocimiento no obliga al investigador a abstenerse de ofrecer generalizaciones; por el contrario, él puede ofrecer a los lectores una buena materia-prima para su propio proceso de generalización.

La triangulación permite al investigador usar varios métodos con diferentes combinaciones. La triangulación puede ser concebida como un proceso de múltiples percepciones para clarificar el sentido, verificándose la repetición de la observación o interpretación, como afirma Flick (1992).

De esta manera, utilizamos esas técnicas teniendo en cuenta las entrevistas, los registros de los encuentros en grabadoras y videos, y los relatos escritos producidos por las educadoras participantes. También hicimos una triangulación entre agentes, considerando las profesoras, las coordinadoras y la investigadora. La siguiente figura muestra como fue ese proceso de triangulación.



Para el análisis de esas informaciones no definimos categorías *a priori*. Buscamos construirlas a partir de las reflexiones sobre el material empírico, considerando el papel fundamental que la teoría ejerce en ese proceso de construcción. Encontramos afinidad teórica, sobre todo con Ponte y Santos (1998), entre las características del movimiento de formación de cada caso y los elementos aquí discutidos.

A partir del referencial teórico, confrontado con el material empírico, decidimos considerar las categorías, que enunciaremos a continuación, para elaborar los estudios de caso. Esa decisión fue tomada basándonos en Ponte y Santos (1998), que las utilizaron para discutir las prácticas lectivas en un contexto de reforma curricular.

La primera se refiere al conocimiento matemático y estadístico que, en esta investigación, se restringe a los conceptos de Combinatoria, Probabilidad y Estadística. El posicionamiento del profesor frente a la resolución de problemas es considerado una subcategoría.

La segunda categoría está relacionada al dominio del conocimiento profesional del profesor al respecto del currículo en acción, en un curso de Educación Infantil y, en especial, al recomendado por la propuesta pedagógica de la *Escola Comunitária de Campinas*, donde realizamos la investigación.

La última categoría trata del dominio del conocimiento profesional del profesor en cuanto a la preparación, conducción y evaluación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, considerando el respeto al desarrollo cognitivo y afectivo del niño.

Resultados y discusiones

Como resultado de esta investigación, tuvimos cinco estudios de caso referente a un grupo de educadoras. Estas educadoras buscaron y probaron, a veces de forma conjunta o individual, lo que para ellas y para sus alumnos tuviera significado. De esta forma, comprobaron que modelos listos y objetivos bien definidos por otros en el currículo no eran eficaces, ya que reducen la capacidad de juicio profesional del profesor y su posibilidad de aspiración educativa.

La profesora Denise pasó a resolver correctamente problemas que involucraban razonamiento combinatorio y cuestiones básicas sobre el pensamiento probabilístico y estadístico. Ella estableció relaciones de razonamiento combinatorio con situaciones del cotidiano del niño y presentó, también, dominio de lectura y de representación gráfica en esos tópicos. En relación al conocimiento del currículo, la profesora pasó a realizar un abordaje más adecuado de los contenidos matemáticos y estadísticos al elaborar actividades de enseñanza; amplió también sus habilidades en crear situaciones de aprendizaje, al integrar esos contenidos en los proyectos. En lo que se refiere al conocimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, la profesora tuvo más agilidad y percepción delante de situaciones de lo cotidiano y que, antes, pasaban desapercibidas. Ella logró establecer más relaciones y proponer desafíos con enfoques diferentes de los que habitualmente hacía. De igual forma, el proceso reflexivo de la profesora comenzó a darse con mayor fundamentación teórica.

La profesora Sônia[2], en su relación con la matemática y la estadística, después de la participación en el grupo, logró elaborar actividades de tratamiento de datos, presentó mayor dominio del razonamiento combinatorio y mejores nociones de probabilidad. Con relación al conocimiento del currículo, ella diferenció, en los proyectos, los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, presentó mayor habilidad en problematizar situaciones que involucraban estocástica y buscó trabajar situaciones básicas de Estocástica, cuando tuvo oportunidad de trabajar con los niños. En lo que se refiere al conocimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, Sônia logró abordar actividades básicas de Estadística y Probabilidad, incentivó a los niños a elaborar cuestiones, auxilió a la profesora titular y buscó participar más en la elaboración y en el desarrollo de las actividades; también acompañó e intervino durante las actividades extra-clase que involucraron situaciones con el pensamiento estocástico.

La profesora Maria Ida, negoció la comunicación y los significados, con los niños, sobre las ideas estocásticas. Adquirió la habilidad de promover el desarrollo de la capacidad de los

[2] profesora auxiliar.

niños para hacer hipótesis y relacionar hechos. Integró más los conocimientos de las diversas áreas en los proyectos integrados. Presentó mayor habilidad y autonomía en elaborar, desarrollar y analizar las actividades orientadas de enseñanza. Promovió la toma de decisiones a través del proceso de tratamiento de datos. Tuvo más agilidad y percepción delante de situaciones de lo cotidiano, situaciones que, antes, pasaban desapercibidas. Ella logró establecer más relaciones y proponer desafíos con enfoques diferentes de los que habitualmente hacía. De igual forma, el proceso reflexivo de la profesora comenzó a darse con mayor fundamentación teórica. La profesora tuvo mayor facilidad en trabajar y elaborar actividades de probabilidad. También incentivó a los niños a elaborar preguntas.

La profesora Sue presentó mayor dominio del conocimiento matemático y estadístico. A través del estudio, la profesora, pasó a establecer más conexiones con la Matemática a partir de los ejemplos socializados en el grupo. Utilizó, constantemente, la representación gráfica en las clases y amplió sus interpretaciones estadísticas a partir de la resolución de problemas que involucraron medidas de posición. La profesora interactuó más significativamente con los niños, permitiéndose aprender con ellos. Invirtió en confrontaciones con desafíos y levantamiento de hipótesis, para aproximar a los niños a la realidad. Integró los razonamientos combinatorio, probabilístico y estadístico a los temas de los proyectos. Presentó mayores capacidades para elaborar, desarrollar y analizar actividades orientadas hacia la enseñanza. Discutió y socializó con sus colegas la elaboración de actividades que involucraban Estocástica. Realizó más ampliamente las observaciones sobre las informaciones producidas en la práctica. Logró establecer más relaciones y proponer desafíos con enfoques diferentes de los que hacía habitualmente. Auxilió a los niños a desarrollar su razonamiento a partir de cuestionamientos. Así, la profesora promovió la búsqueda de respuestas e incentivó la socialización de las diferentes formas de pensar.

Las dos coordinadoras, Maria Cecília y Maria Celina, contribuyeron con el grupo, especialmente, al hacer conexiones de los conceptos con la realidad, destacando el universo infantil. Fueron claras al hablar sobre la necesidad del dominio conceptual que los profesores necesitan tener para elaborar actividades de enseñanza, con un abordaje contextualizado en los proyectos de Educación Infantil. Las coordinadoras percibieron, en el proceso de intervención de la investigación, una forma no sólo de desvendar el potencial del docente, sino también de colocarlo en movimiento constructivo de saberes; sobre todo de los saberes relacionados a la enseñanza y aprendizaje de temáticas referidas a la Estadística y a la Probabilidad. Además, las coordinadoras manifestaron la importancia del trabajo colectivo, valorizaron también la formación de las profesoras promovida por esta investigación y enfatizaron los cambios ocurridos en la acción pedagógica de ellas.

La profundización gradual que las profesoras y coordinadoras lograron en sus charlas —sobre sus evaluaciones de cómo enseñar Estadística y Probabilidad a los niños— nos convence de que el proceso de formación debe posibilitar al profesor reconocerse a sí mismo como verdadero protagonista curricular, capaz de tomar decisiones fundamentales para a su práctica, en función de las necesidades de sus alumnos y de los contextos institucionales. También, se destaca la importancia de la sistematización de los ejemplos socializados por las docentes, que elucidaban sus prácticas, a través de la elaboración de relatos escritos, en los cuales resaltaron el dominio de los aspectos teóricos relativos al aprender a enseñar.

Este estudio muestra y corrobora, en lo que se refiere al aspecto de la colaboración investigador/profesor, la necesidad de presentar un proceso dinámico, continuo, reflexivo, colaborativo y relacionado con la práctica docente.

En ese proceso la adquisición de conocimiento profesional se destaca, especialmente, en relación a: cómo actuar en situaciones reales relacionadas con la Estocástica; la ampliación de la capacidad de promover cuestiones, esencialmente, las que involucran conceptos matemáticos y estadísticos; la capacidad autocrítica y reflexiva sobre la práctica docente. También fue notado un proceso de transformación del papel de la investigadora ante la constitución del equipo de trabajo.

Las docentes desarrollaron un proceso de razonamiento didáctico/pedagógico y una actitud profesional en los que se ayudaron de sus comprensiones, al confrontarse con los dilemas de enseñar Estadística y Probabilidad, en un contexto particular. Las profesoras manifestaron creatividad y, hábilmente, alteraron sus procedimientos en clase, delante de lo imprevisible en las situaciones de enseñanza. Como consecuencia, desarrollaron nuevas comprensiones, mejoraron sus intuiciones y elaboraron nuevos conocimientos.

Realizar una intervención a través de un proceso de formación que valorara el saber de esas educadoras, que provocara en ellas una reflexión sistemática sobre las cuestiones en curso, que las habilitara a ser investigadoras de su propia práctica y que invirtiera en una producción colectiva de conocimiento, fue esencial para los resultados de ésta investigación.

En relación al conocimiento profesional, las docentes se hicieron constructoras del currículo, elaborando actividades de enseñanza, las cuales pretendían problematizar y probar en el trabajo los proyectos. Las profesoras efectuaron la inclusión de los temas de Combinatoria, Probabilidad y Estadística a las actividades de enseñanza de forma significativa y adecuada a la edad de los niños con los que trabajaban. Abordaron las ideas estocásticas conectadas a otras relaciones de conocimientos diversos, a medida que formalizaron los conceptos estudiados. El abordaje curricular realizado se centró en los intereses de los niños y las relaciones con la temática de los proyectos.

Buscamos sintetizar en el siguiente cuadro los resultados más significativos de este estudio, con relación a cada categoría de análisis.

Conocimiento profesional del profesor referido a la Matemática y a la Estadística, en la perspectiva de la problemática.	El conocimiento didáctico de la Matemática y de la Estadística se manifestó fuertemente en la elaboración de problemas y en la diversidad de estrategias de soluciones. El desarrollo profesional se amplió, a través del trabajo colectivo, con ética y solidaridad; hubo producción colectiva del conocimiento específico y didáctico de Matemática y de Estadística. El desarrollo profesional de las profesoras fue un proceso continuo, con constantes reflexiones sobre sus prácticas, profundizando el conocimiento matemático, estadístico y didáctico.

Conocimiento profesional del profesor referido al currículo en acción.	El conocimiento curricular desarrollado aparece asociado a las concepciones que los profesores tienen sobre el significado que la Estadística y Probabilidad pueden asumir en el desenvolvimiento infantil. Las profesoras tuvieron claridad de los objetivos curriculares de la Educación Infantil, elaborando propuestas insertadas en los contextos de los proyectos integrados del área. Las profesoras presentaron envolvimiento, dedicación al estudio, dinamismo, responsabilidad con el grupo, creatividad en la producción pedagógica, compromiso con su propio desarrollo profesional y con el de sus pares. La curiosidad epistemológica impulsó el envolvimiento con la temática. El deseo de insertar nuevas temáticas en los proyectos integrados de las diferentes áreas provocó la manifestación del proceso creativo, generando resultados de aprendizaje significativo en los párvulos.
Conocimiento profesional del profesor referido a la preparación, conducción y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, considerando el respeto al desarrollo cognitivo y afectivo del niño.	Las profesoras constantemente intercambiaron los resultados de sus procesos reflexivos que ocurrieron antes, durante o después de la acción pedagógica. Se destacó cuánto las educadoras percibían y se constituían como grupo, estableciendo una relación de confianza mutua e intercambio de experiencias pautada en la sinceridad y en una relación ética. Un factor que contribuyó para el desarrollo profesional de las docentes, directamente relacionado a la acción pedagógica, fue la disponibilidad para participar de la investigación y la interacción entre las colegas participantes. Al iniciar un trabajo de intercambio de conocimientos producidos por el grupo, junto a los compañeros que actúan en la propia escuela y en la red pública municipal y estatal, las profesoras ampliaron sus conocimientos en relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De forma especial resaltamos las publicaciones escritas referentes a las producciones del GEPEPEI, demostrando el compromiso del grupo para socializar el conocimiento producido colectivamente. Las redacciones de esos relatos condujeron a las profesoras a ser más cuidadosas en la recolección de informaciones sobre las actividades orientadas de enseñanza, planificadas y desarrolladas por ellas.

Conclusiones

Creemos que un currículo que inserta el trabajo con el pensamiento estadístico y de probabilidad, desde la Educación Infantil, permitirá la formación de un alumno con mayores posibilidades en el ejercicio de su ciudadanía y mayor poder de análisis y criticidad delante de datos e índices. En este sentido, el trabajo con proyectos integrados permite establecer una relación con el niño, en la cual él es productor de conocimientos y tiene su participación valorada por la profesora y por los colegas.

La formación del educador matemático y estadístico que actúa o actuará en la Educación Infantil debe prever unos procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurran a través de la resolución de problemas, simulacros y experimentos. Estas alternativas permiten al profesional construir conocimientos a medida que establece relaciones con informaciones adquiridas y con el dominio de diferentes lenguajes y formas de expresión. Consideramos que la amplitud del concepto sea más importante que el concepto formal para el trabajo docente.

El abordaje de la Estadística y de la Probabilidad es posible en otras realidades distintas de las presentadas en este estudio, pues, bajo cualquier concepción de Educación Infantil, consideramos que se pueden promover situaciones de aprendizaje de esa temática a través de juegos, historias infantiles y representaciones pictóricas, entre otras. Creemos en la importancia de los profesores para elaborar las actividades de acuerdo con su conocimiento profesional, con el currículo establecido por la institución y por la claridad en relación al perfil y a la etapa de desarrollo en que los niños se encuentran. Nos parece imprescindible que esos profesionales tengan la posibilidad de participar de una formación con las características defendidas por este estudio, adquiriendo un conocimiento profesional que les dé autonomía para definir *por qué*, c*uándo* y *cómo* se debe incluir Estocástica en sus clases.

Esta investigación exigió una postura diferente de la investigadora al analizar los datos empíricos, al tener conciencia de la necesidad de establecer categorías de análisis emergentes que fuese significativas para responder a los cuestionamientos de la investigación y para redirigir los trabajos con el grupo. Después de cada encuentro, evaluábamos los aspectos positivos y los que deberían ser revisados para no desviarnos del objetivo inicial, produciendo resultados que significaran la expresión de la ética y de la veracidad necesarias a la producción científica — especialmente en Educación. Siendo la ética y la veracidad el norte de las directrices para una mejora social.

En esta investigación cada profesora participante del GEPEPEI tuvo acceso al respectivo estudio de caso —antes de ser publicada la investigación— y, consecuentemente, pudo manifestarse al respecto de lo que escribimos. Lo anterior porque consideramos que al ser co-productoras de las informaciones originarias de este texto, ello respondería a un procedimiento ético, que reafirmaba las relaciones de confianza establecidas en el grupo, y que posibilitaría la continuidad a los trabajos, después de la conclusión de esta investigación.

Referencias Bibliográficas

AZCÁRATE, P. (1995) *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad: Su estudio en el caso de la educación primaria.* Tesis de Doctoral. Cádiz: Universidad de Cádiz.

______________. (2001) *El conocimiento profesional didáctico-matemático en la formación inicial de los maestros: una propuesta de intervención para su organización e elaboración.* Cádiz: Universidad de Cádiz.

BATANERO, C. (1999) *Didáctica de la Probabilidad y Estadís*tica. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, (mimeo).

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. (1994) *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Flick, Uwe. (1992) *An introduction to qualitative research.* London: Sage

FREIRE, P. (1997) *Pedagogia da Autonomia – saberes necessários à prática educativa.* R.J.: Paz e Terra.

GODINO, J. & BATANERO, C.& FLORES, P. (1998) *El análisis didáctico del conteúdo matemático como recurso en la formación de professores de matemáticas.* Universidad de Granada.

LOPES, Celi A. E. (2003) *O Conhecimento Profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil.* Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.

________________. (1998) *A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.

PONTE, João Pedro (1994). O professor de Matemática: um balanço de dez anos de investigação. *Quadrante*, 3 (2), 79-114.

PONTE, João Pedro e SANTOS, Leonor. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7 (1), 03-32, 1998.

STAKE, R.E. *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata,1999.

Concepto de cantidad, número y número negativo durante la época de influencia jesuita en España (1700-1767)

ALEXANDER MAZ MACHADO

Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba

LUIS RICO ROMERO

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Resumen:

La presencia destacable de la Compañía de Jesús en la sociedad española del siglo XVIII y, especialmente en el sistema educativo, se manifiesta en su influencia en la formación matemática que se imparte. Este hecho genera interés por conocer los métodos, libros y conceptos que se usaban en este período de la historia educativa española. Presentamos un avance de un estudio histórico-crítico sobre libros de textos matemáticos, en el que investigamos los conceptos de cantidad, número y número negativo.

Abstract:

The remarkable presence of the Company of Jesus in the XVIIIth century Spanish society, especially in the educative system, was shown by means of their prevalence in the mathematical formation that was taught then. This fact generates interest to know the methods, books and concepts that were taught in this period of Spanish educational history. For that reason we displayed an advance of a study historical-critic on mathematical textbooks, in which we investigated the concepts of quantity, number and negative number.

Introducción

Las tendencias actuales abogan por una enseñanza de la historia y epistemología de la ciencia mediante un acercamiento a sus contextos sociales, históricos, filosóficos, éticos y tecnológicos enfatizando el carácter social del conocimiento científico. El saber científico se difunde en la sociedad a través de la educación que, como es sabido, es un proceso social. En consecuencia, la Educación Matemática asume esta misma condición (Bishop, 1999) pues, su núcleo, las matemáticas, no son producto de una sola sociedad, cultura o época determinada, sino que son el resultado de la aportación de una amplia y variada base cultural a lo largo de su historia. Es desde esta perspectiva social y cultural del conocimiento desde donde encauzamos la investigación sobre algunos conceptos matemáticos durante un periodo histórico en España.

Wussing (1998) sostiene que sin la historia de los conceptos, de los problemas y de disciplinas matemáticas especiales, el cuadro de desarrollo de la matemática quedaría incompleto, puesto que todo conocimiento o idea matemática se ha gestado en una situación histórico-social concreta, consideramos que esta necesidad e interés por la historia y el desarrollo de los conceptos señalan la pertinencia de este estudio.

Objetivos

La investigación que presentamos es parte de un estudio sobre la historia de las matemáticas en España en los siglos XVIII y XIX, focalizada en algunos conceptos determinados. Los objetivos que se corresponden con el presente informe son:

- **O1**: Caracterizar el entorno social, cultural, científico y académico en que se ubican los matemáticos españoles autores de libros de texto en el siglos XVIII.
- **O2**: Caracterizar el tratamiento y desarrollo de los conceptos de cantidad, cantidad negativa, número y número entero en España en el siglo XVIII, mediante un análisis conceptual.

Metodología

Tomamos como modelo las fases propuestas por Ruiz Berrio (1997) para realizar una investigación histórica, éstas se han matizado y adaptado para el presente estudio, utilizando de una parte, el método histórico-crítico, que es uno de los métodos de análisis directo, el cual estudia la evolución del conocimiento científico en sus aspectos históricos, conceptuales y culturales, y se convierte en uno de los métodos, quizá el más característico, de la epistemología genética; por tal razón, utilizaremos esta técnica para analizar el significado de los conceptos que aparecen en los libros de texto españoles seleccionados para el estudio, estableciendo sus referencias principales. Por otra parte recurrimos al análisis de contenido el cual es *"una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto"* (Krippendorff, 1990; p.28).

Para el estudio de los conceptos de cantidad, número y número negativo se utilizan unas parrillas (ver Maz, 2000), las cuales se sometieron a triangulación entre expertos para evaluar su fiabilidad y controlar la crítica interna, característica de este tipo de investigaciones históricas. La crítica externa se controló mediante verificación de la autenticidad de los documentos, confirmando la fecha de edición y procurando acceder a las ediciones más antiguas.

Libros y Autores

Se tomaron como criterios para seleccionar los textos: a)La relevancia de los autores en la época; b) La trascendencia o influencia de los textos en la época; c) Que los textos fuesen ediciones originales y en español; d) Que los textos hubieran sido publicados entre 1700 y 1767en España; e) Que el nivel al que estuvieran dirigidos fuese de enseñanza secundaria o superior; f) Que estuvieran disponibles. Así la muestra sería intencional y por conveniencia.

De las reseñas consultadas sobre los autores y textos matemáticos en los años comprendidos entre 1700 y 1767 hechas por López Piñero et al. (1986) y Menéndez Pelayo (1954), hemos inferido que en esta época trabajan en España unos 18 matemáticos, los cuales publican 28 textos aproximadamente, de ellos, 13 son de aritmética y/o álgebra y los restantes se distribuyen en geometría, trigonometría, tablas logarítmicas y aplicaciones astronómicas de las matemáticas. Las cifras no son muy elevadas, pero indican una presencia institucional de la disciplina apreciable y un mercado de lectores en aumento, interesados por actualizar el dominio de esta disciplina. La elección de tres textos es una muestra representativa de los 13 publicados sobre aritmética y/o álgebra durante este periodo, sobre la cual llevamos a cabo nuestro estudio.

Los textos analizados son:

- *Pedro de Ulloa* (1706). *Elementos Mathematicos.* Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.
- *Thomas Vicente Tosca* (1727). *Compendio Matemático*. Tomos I y II. Segunda edición corregida y enmendada. Madrid: Imprenta de Antonio Marín.
- *Thomas Cerdá* (1758). *Liciones de Mathematica, o Elementos Generales de Arithmetica y Algebra para el uso de la clase.* Tomos I y II. Barcelona: Francisco Suriá, Impresor de la real Academia de Buenas Letras de dicha Ciudad.

Utilizaremos abreviaciones para referirnos a los libros: **U,** para Ulloa, **T,** para Tosca y **C,** para Cerda. Los tres autores elegidos para nuestro estudio son:

Pedro de Ulloa: (*n*. en Madrid, 1663; *m*. en Madrid, 1721) Jesuita, fue profesor de matemáticas en los Reales Estudios de Madrid.

Thomas Vicente Thosca: (*n*. en Valencia, 1651; *m*. en Valencia, 1723) Se ordenó sacerdote en la congregación de San Felipe Neri. Participó del movimiento novator junto a Gregorio Mayans y Síscar.

Thomas Cerda: (m. en Tarragona, 1715; m. en Forli, Italia, 1791) Discípulo de Mayans y Siscar, ingreso en la Compañía de Jesús en 1732. Fue profesor de matemáticas en el Colegio de Nobles de Santiago de Cordelles en Barcelona.

Se observa que estos autores abrazaron el sacerdocio como modelo de vida, recibiendo desde su juventud una educación eclesiástica fundamentada en los clásicos griegos; esta formación se refleja en sus textos con el seguimiento casi puntual de estos autores, como es el caso de los *Elementos* de Euclides para la Aritmética y la Geometría. Trabajan en instituciones educativas dedicadas a la formación de jóvenes cadetes y nobles o en la Universidad.

Nuestros autores se encuentran comprometidos con los esfuerzos por actualizar los conocimientos de su época y a ello contribuyen con la publicación de sus libros en castellano, en los que tratan de introducir los últimos avances y descubrimientos de las disciplinas científicas que abordan. Caracterizan a la clase intelectual que proviene del antiguo régimen en el caso de los dos primeros, y que está comprometida con los deseos de renovación y cambio intelectual de esta época.

La influencia educativa de los jesuitas

Una característica notable de la Compañía de Jesús durante el período de su primera fundación (1540-1773) es la implicación de sus miembros en el desarrollo y enseñanza de las ciencias. En España, la Compañía de Jesús destacó especialmente en el campo de la educación. A partir del siglo XVIII la Compañía prácticamente monopoliza la enseñanza secundaria. En el momento de su expulsión del reino en 1767, los jesuitas regían 105 colegios y 12 seminarios; en ultramar tenían 83 colegios y 19 seminarios. Al parecer el éxito de los jesuitas en la enseñanza se debió a la captación de las oligarquías locales así como al hecho de impartir docencia de materias universitarias (Filosofía, Teología). Los jesuitas ofrecían una serie de conocimientos auxiliares y preparación para avanzar en la sociedad, más allá de los conocimientos requeridos por las instituciones educativas.

Los jesuitas impartían enseñanzas básicas sobre las artes liberales a estudiantes hasta los catorce años. En el año 1603 alcanzan gran prosperidad y adquiere el titulo de Colegio Imperial de la Compañía de Jesús en Madrid. Este Colegio amplía su oferta educativa y se transforma en los Reales Estudios de San Isidro en 1625, son estudios superiores e incluían las matemáticas junto con otras ciencias. Tenían entre sus cátedras una de matemáticas y entre sus profesores estuvieron Pedro de Ulloa, Thomas Cerda y Francisco Verdejo (Garma, 2002).

La influencia Jesuita en el sistema educativa se hace evidente, al analizar que luego de su expulsión en un primer momento el gobierno debe recurrir a los Agustinos para rellenar el vació docente y educativo. Asimismo fue causa directa de reformas que afectaron a los Colegios Mayores como a la propia universidad. La concepción educativa jesuita y su influencia puede consultarse más ampliamente en Fernández (1990), Azcarate Ristori (1996), Benitez (1998) y Hernández (1998).

a) Jesuitas y Universidad

Las universidades españolas de principios del siglo XVIII se encontraban en un estado casi medieval y eran de carácter eclesiástico. Esto lo evidencian, entre otros, Fray Benito Jerónimo Feijoo en una carta titulada *Causas del atraso que se padece en España en orden a las ciencias naturale*s; y el marqués de la Ensenada quien en 1748 se lo comunica así al rey Fernando VI. Las universidades están dominadas por cuestiones y pleitos relacionados con privilegios, protocolos y discusiones, sobre problemas religiosos o filosóficos. Asuntos científicos, como las matemáticas, tienen escasa consideración. La clase dominante propugna un saber de corte medieval, mientras que la burguesía se inclina por una ciencia pragmática, que ayude al desarrollo de las artes, la agricultura y el comercio (Arenzana, 1987). Afirma Vernet (1998) que en la primera parte del siglo XVIII los españoles tuvieron conciencia de la incapacidad de las universidades existentes para actualizarse en los avances de la ciencia, que ocurrían más allá de sus fronteras.

Las deficiencias de las universidades tenían que ver con la enseñanza memorística, textos anticuados e interés primordial por disciplinas como derecho, teología y filosofía, en detrimento de matemáticas y ciencias (Peralta, 1999).

La enseñanza de las matemáticas en la época de los Austria estuvo asociada a ala universidades casi de forma exclusiva, con carácter de ciencia aplicada. Los Borbones la convierten en cuestión fundamental para la enseñanza y formación de ingenieros y, posteriormente en asignatura obligada en la enseñanza de Artes y filosofía en las universidades. Con la llegada de los Borbones se dotó de mayores medios a las instituciones que enseñaban matemáticas. Las universidades tradicionales se mantienen pero disminuyen sus privilegios. La creación por Felipe V de la Universidad de Cervera en el principado de Cataluña en 1717 trata de paliar las carencias de la enseñanza universitaria de la época, pero no ocurre así en las universidades castellanas. La Universidad de Cervera brindó su aportación al movimiento de renovación educativa a nivel universitario: su fundación fue un intento de cambio a nivel institucional, especialmente a través de la Facultad de Artes y de las cátedras impartidas por los jesuitas (Capitán Díaz, 1981). La labor jesuita fue notable en esta universidad, extiendo su influencia también en el campo universitario; ya al comienzo del reinado de la nueva dinastía, son los jesuitas quienes orientan la enseñanza de las matemáticas, liderando las nuevas instituciones o adaptando las antiguas a nuevos criterios. Además, a principios del siglo XVIII los jesuitas se hacen cargo de la enseñanza científica en los centros que controlan.

b)Expulsión de los Jesuitas

La Compañía de Jesús es muy atacada en el reinado de Carlos III porque se identificó a jesuitas y colegiales como enemigos políticos del gobierno y del rey. El 2 de abril de 1767 se ordenó el extrañamiento de los jesuitas que residían en España y de sus posesiones de ultramar. Esto provocó la necesidad de reorganizar la enseñanza, que prácticamente había estado en sus manos durante mucho tiempo.

La expulsión fue consecuencia de la pugna entre el poder político y el social, entre la Compañía de Jesús y la Corona. En el decreto de expulsión, esta se justifica entre otras cosas diciendo que el sistema de la Compañía de Jesús era incompatible con la monarquía española y mencionando las *perniciosas doctrinas de los jesuitas*. El gobierno culpó a los jesuitas de la decadencia en la enseñanza de las primeras letras. Tras su expulsión distribuyó las posesiones que tenía la Compañía en el reino español. Los edificios, en su mayoría, fueron destinados a aulas y habitaciones de maestros de primeras letras; algunos colegios fueron cedidos, como el Colegio de Vergara el cual se entregó a la Sociedad Vascongada de Amigos del País; el Seminario de Nobles de Valencia pasó a ser regido por el Arzobispado; a los colegios de Palma, Granada y Sevilla se trasladaron las universidades.

En el momento de su expulsión, los jesuitas tenían una enorme influencia; no sólo controlaban la enseñanza, sino que además contaban con bibliotecas, donde se encontraban los libros de la época, así como algunas reliquias y pinturas de gran valor artístico. Las colecciones de las bibliotecas fueron incorporada a las distintas universidades, logrando que estuvieran al alcance de los estudiantes y del común de las gentes.

La Compañía de Jesús tuvo una gran infraestructura educativa y con ella, prácticamente, monopolizó la enseñanza durante la primera mitad del siglo XVIII. Además, el continuo contacto con los centros europeos científicos otorgó a sus miembros acceso a los más recientes avances de la ciencia y de los métodos de enseñanza.

Análisis y resultados

Durante el Siglo XVII se producen una serie de avances en las matemáticas sustentados entre otros por los trabajos de Stifel, Stevin, Cardano, Harriot, Newton y Descartes lo cuales permiten abandonar la consideración clásica para los conceptos cantidad y número, pasándose a efectuar consideraciones relacionadas con las propiedades o relaciones entre los números (Kline, 1972). Tratamos de hallar indicios de estas nuevas ideas en los textos españoles, puesto que era factible la rápida difusión entre las comunidades religiosas dedicadas a la educación de tales avances, por los contactos con miembros de su congregación en el extranjero.

Tabla 1. Noción de Cantidad

Texto	**Concepto**	**Análisis**
UU1	*"todo lo que se puede medir y contar es cantidad inteligible"* (p. 4).	Ulloa hace referencia a la pluralidad y a la medida. La primera alude al número y la segunda a la magnitud, de esta forma la cantidad puede ser discreta o continua. Está

		presente la idea de cantidad que Aristóteles (1998) expone en la Metafísica (1020a).
T1 T	*"el objeto de la matemática aquello por lo cual una cosa se dize mayor, menor, ò igual a otra; y la razon es, porque todo su empleo consiste en averiguar, y demostrar las propiedades, y atributos de dicha quantidad"* (Tomo I, p. 2). *"la Algebra [es] vn Arte que enſeña a hallar cualquiera cantidad , reſolviendo la queſtion propueſta , por los miſmos terminos , con que ſe compuſo.[…] Divideſe ya comunmente la Algebra en vulgar y eſpeciofa"* (Tomo II, p. 72).	Tosca deja entrever una idea de cantidad como aquello que puede ser comparado con otro de su misma especie mediante una relación de orden con propiedades y atributos particulares. Esta es una idea positivista de la cantidad (Maz, 2000). En el tomo II, al tratarse de un texto de álgebra, la noción de cantidad es abstracta y de carácter general.
CC1	*"Toda Magnitud ſe puede comparar con otra de la miſma eſpecie , eſto es , linea con linea, cuerpo con cuerpo, eſpacio con eſpacio ; y por conſiguiente le es igual , mayor , ò menor , y ſolo por eſte cotejo con otra , como medida , podemos llegar a conocer ſu quantidad , ò quan grande ſea"* (pp. 1-2).	Cerda considera que la cantidad y la medida se refieren a la misma cosa, añadiendo a la noción de cantidad un significado comparativo y relacional. Esta identificación de cantidad esta acorde con la concepción de cantidad propuesta por Stevin (Maz, 2000).

Tabla 2. Noción de cantidad utilizada en los textos españoles (1700-1767).

Autor	Aristotélica	Algebraica	Stevin	Positivista
Pedro de Ulloa	**X**			
Vicente Tosca		**X**		**X**
Thomas Cerda			**X**	

Como se observa en la tabla 2 los autores utilizan diversas nociones para la cantidad; no hay consenso sobre este aspecto. Tosca hace uso de dos nociones en contextos diferentes: el aritmético y el algebraico.

Tabla 3. Noción de número

Autor	**Concepto**	**Análisis**
UU2	*"una cantidad cuyas partes eſtan*	El número es, pues, una abstracción de objetos

	diſcontinuadas aunque sea con imaginaria deſunion, ò diſcontinuacion" (p. 5). Cuando presenta la *addicion ó summa*, en la página 8, y la *subſtraccion*, en la página 9, lo hace mediante *líneas* (segmentos) con medidas enteras: Es decir, con cantidades cuyas partes *eſtan diſcontinuadas aunque sea con imaginaria deſunion*. Igualmente en el *producto* (p. 13) y en el *quociente* (p. 19) muestra el número como superficie o número plano. *"Uno, no es Numero; pero puede conſiderarſe como Principio, y origen de todo Numero"* (p. 5).	discretos, dada por una notación específica. Este texto es contemporáneo de la obra de Newton y Leibniz, sin embargo, la noción de número que sostiene es una noción clásica, basada en Euclides (Maz, 2000). Se aprecia el planteamiento euclídeo de la noción de número como pluralidad y la consideración de que el uno no es número pues, no es una pluralidad.
<u>T2</u> <u>T</u>	*Numero es una colección de unidades. Euclides def. 2 del libro 7."* (p. 136).	Hay una asociación del número con la acción de coleccionar unidades, por lo que está directamente relacionado con lo discreto y, por otra, está la exclusión de la unidad de la categoría de número.
<u>C2</u>	"*si la quantidad, ò magnitud, que medimos, es preciſamente igual à la que tomamos por medida, fe llama Unidad, ò uno: fi la contiene dos, ò mas veces, fe llama Numero"* (p. 2) "*Por nombre de Numeros entendemos aquí la unidad 1 , el complexo de muchas unidades , como 2, 3, 4, &c […] A. la unidad, ò al complexo de muchas unidades, llamamos Enteros*" (p. 9).	Cerda plantea la relación de la magnitud con respecto a la unidad, reflejando una definición sobre la base euclídea de número procedente del Libro VII de los *Elementos* (Euclides, 1994), pero que añade un aspecto relacional: número es las veces que una cantidad contiene a la unidad. La noción de número es convencional, aunque admite la unidad como número. Esta concepción permite que los números puedan combinarse de diversas formas para establecer distintos tipos de relaciones entre ellos. Por tanto hay presentes dos ideas para el número: una euclídea y otra relacional.

Tabla 4. Noción de número utilizada en los textos españoles (1700-1767).

Autor	Euclídea	Relacional
Pedro de Ulloa	**X**	
Vicente Tosca	**X**	
Thomas Cerda	**X**	**X**

En los tres autores la noción de número es euclídea, porque se apoyan en los *Elementos*; esta fundamentación procede de una acción: *"coleccionar unidades"* la cual evidencia una correspondencia entre medida y longitud. También se evidencia un acercamiento hacia la idea de número como relación.

Noción de número negativo

Debido al número de ítems (13) de la parrilla utilizada para este concepto solamente presentamos los resultados de los análisis. Estos autores consideran que:

a) Los números negativos son considerados como menos que nada o menores que cero desde el punto de vista operacional.

b) Los valores negativos que se obtienen para al resolver ecuaciones son considerados respuestas "falsas" siguiendo los planteamientos de Descartes (1981).

c) Son el resultado de efectuar operaciones y cálculos aritméticos o algebraicos, por lo tanto, para estos autores los negativos tienen una existencia matemática real.

d) Los números negativos son un conjunto numérico ordenado, bien en el orden usual de los enteros, o bien como números naturales relativos como afirma González Marí (1995), es decir ordenados respecto a cero siendo mayores los de valor absoluto mayor.

Tabla 5. Noción de número negativo utilizada en los textos españoles (1700-1767).

Autor	Cantidades falsas	Resultado de operaciones aritméticas y algebraicas	Estatus aritmético-algebraico
Pedro de Ulloa	**X**	**X**	
Vicente Tosca	**X**	**X**	
Thomas Cerda		**X**	**X**

Conclusiones

La formación religiosa y una educación eclesiástica fundamentada en los estudio clásicos de la mayoría de profesores y autores de textos matemáticos se refleja en el seguimiento sistemático de los *“Elementos”* de Euclides para la aritmética y la geometría.

Pese a esa formación tradicional y clásica, estos autores utilizan diferentes ideas para la cantidad y los números negativos, evidenciando la influencia de autores extranjeros.

Estos textos tienen gran significación dentro de la producción española de la época, pues incorporan ideas y conceptos desarrollados recientemente por matemáticos como Descartes, Newton, Leibniz y Euler.

Las ideas sobre los números negativos que plantean estos autores es semejante a las posiciones que sobre este concepto adoptaron matemáticos extranjeros como D´Alambert o Descartes, demostrando que la matemática española ha seguido por la misma senda que sus homólogos europeos, aunque eso sí, con un poco de retraso.

El análisis histórico-crítico de textos permite conocer la evolución de los conceptos matemáticos y también desentrañar las relaciones entre el autor y la sociedad en que se desenvuelve.

Referencias bibliográficas

ARENZANA, V. (1987). *La enseñanza de las matemáticas en España en el siglo XVIII. La escuela de Matemáticas de la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País*. Tesis doctoral inédita: Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

ARISTÓTELES (1998). *Metafísica. Introducción y notas de T. Calvo*. Madrid: Gredos

AZCÁRATE RISTORI, I. (1996). *Los jesuitas en la política educativa del ayuntamiento de Cádiz (1564-1767)*. Granada: Universidad de Granada, Facultad de Teología.

BENÍTEZ, J. M. (1998) En torno al método pedagógico jesuítico hasta 1773: fuentes y problemática. En HEVIÁ BALLINA, Agustín, *Memoria Ecclesiae XIII*. pp. 489-506.Oviedo

BISHOP, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Madrid: Paídos

CAPITÁN DÍAZ, A. (1991). *Historia de la educación en España. Tomo I. De los orígenes al reglamento general de instrucción pública (1821)*. Madrid: Dykinson.

CERDÁ, T. (1758). *Liciones de Mathematica, o Elementos Generales de Arithmetica y Algebra para el uso de la clase*. Tomos I y II. Barcelona: Francisco Suriá, Impresor de la real Academia de Buenas Letras de dicha Ciudad.

DESCARTES, R. (1981). *Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría. Prólogo, traducción y notas de G. Quintás Alonso*. Madrid: Ediciones Alfaguara.

EUCLIDES (1994). *Elementos. Libros V-IX. Traducción y notas de M. L. Puentes*. Madrid: Gredos.

FERNÁNDEZ, J. M. (1990). Los colegios jesuíticos valencianos: datos para su historia. *Estudis. Revista de Historia Moderna*, nº 16, pp. 193-213.

GARMA, S. (2002). La enseñanza de las matemáticas. En J. L. Peset (dir.): *Historia de la ciencia y de la técnica en la Corona de Castilla*. Tomo IV. Siglo XVIII.

Salamanca: Junta de Castilla y León, Consejería de educación y Cultura.

GONZÁLEZ MARÍ, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

HERNÁNDEZ, T. M. (1998). La pugna entre jesuitas y escolapios en Valencia por el control de la enseñanza secundaria (1737-1760). *Estudis. Revista de Historia Moderna*, nº 24, pp. 307-337

KLINE, M. (1972). *Pensamiento matemático. De la antigüedad a nuestros días.* Tomo I. Madrid: Alianza.

KRIPPENDORFF, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido*. Barcelona: Paídos.

LÓPEZ PIÑERO, J. M., GLICK, T. F., NAVARRO, V., y PORTELA E. (1986). *Diccionario histórico de la ciencia moderna en España*. Vol I. Barcelona: Península.

MAZ, A. (2000). *Tratamiento dado a los números negativos en libros de texto publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Granada: Universidad de Granada

MENÉNDEZ PELAYO, M. (1954). *La ciencia española*. Tomo III. Madrid: C.S.I.C.

PERALTA, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid: Nivela.

RUÍZ BERRÍO, J. (1997). El método histórico en la investigación histórico-educativa. En N. De Gabriel y A. Viñao (Eds.): *la Investigación Histórico-educativa.* Barcelona: Ronsel.

TOSCA, T. V. (1727). *Compendio Matemático*. Tomos I y II. Segunda edición corregida y enmendada. Madrid: Imprenta de Antonio Marín.

ULLOA, P. de (1706). *Elementos Mathematicos*. Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.

VERNET, J. (1998). *Historia de la ciencia española*. Barcelona: Alta Fulla.

WUSSING, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

Niveles de comprensión de conceptos inferenciales en el nivel de secundaria

ANTONIO MORENO
ANGUSTIAS VALLECILLOS
Universidad de Granada

Resumen:

En este trabajo describimos los niveles de comprensión de conceptos inferenciales básicos determinados mediante un estudio de casos basado en el marco teórico ERIE, Moreno (2003), realizado con la participación de alumnos de secundaria. El estudio de casos nos ha permitido mostrar que ERIE puede describir distintos niveles de aprendizaje de la inferencia estadística elemental y trazar perfiles de los alumnos que pueden ser útiles para evaluar su aprendizaje y mejorar la enseñanza del tema.

Abstract:

In this paper we describe the basic inferential concepts understanding levels determinate by a cases study based in the framework ERIE, Moreno (2003), carried out with secondary level students. This cases study has shown ERIE can describe different learning levels of elemental inferential statistics and trace students profiles that can be useful for assessing their learning and improve the teaching of the topic.

1. INTRODUCCIÓN

La formación estadística y probabilística de los ciudadanos del mundo moderno es una necesidad reconocida hoy día en los sistemas educativos para todos los niveles de enseñanza, no sólo para la educación superior, NCTM (2000), MEC (1990, 1992). En Andalucía, las últimas reformas curriculares para los niveles de primaria y secundaria, han incluido la inferencia estadística como novedad, Junta de Andalucía (1992; 1994; 1997; 2002). Los contenidos recomendados para la ESO, Junta de Andalucía (1992; 2002), se refieren a la obtención de datos y a los métodos para su análisis así como al acercamiento intuitivo a la representatividad de las muestras y a las afirmaciones que cabe extraer de su estudio. Para el caso del Bachillerato, Junta de Andalucía (1994; 1997), el currículo incluye el muestreo, los problemas relacionados con la elección de las muestras, las condiciones para su representatividad y el análisis de las conclusiones que cabe extraer de su estudio, así como la iniciación al muestreo y sus distintos tipos.

Esta nueva situación de la enseñanza de la estadística ha propiciado un florecimiento del campo de la investigación en Educación Estadística muy prometedor que está aportando información teórica y empírica acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes de todos los niveles de enseñanza muy útiles para informar la enseñanza y el aprendizaje en todos los niveles, Garfield y Ahlgren (1988), Konold (1991), Batanero y Serrano (1995). En el campo específico de la inferencia y en relación con su introducción en secundaria las referencias de investigación son muy escasas, dada la novedad del tema. En este ámbito se inscriben Moreno (2000), Moreno y Vallecillos (2001a; 2001b; 2002) y Vallecillos y Moreno (2002; 2003) que describen el aprendizaje de estudiantes de secundaria sobre algunos aspectos clave como los de población y muestra o los tipos de muestreo.

El estudio de casos que sintetizamos en este trabajo forma parte de un amplio trabajo de investigación teórico y empírico descrito en Moreno (2003). Éste se planteó con un doble objetivo: a) describir el conocimiento informal de los alumnos participantes sobre los conceptos inferenciales básicos y b) formular y validar un marco teórico para la instrucción y la evaluación de la estadística inferencial elemental. Este marco teórico, ERIE (acrónimo de Esquema de Razonamiento en Inferencia Estadística), está situado en el modelo de desarrollo cognitivo SOLO (Bigg y Collis, 1982; 1991) y en la línea del formulado por Jones y cols. (2000) para el razonamiento estadístico. Ha sido validado con la participación de estudiantes del nivel se secundaria. Algunos trabajos previos sobre el desarrollo del citado marco teórico son Vallecillos y Moreno (2002; 2003a; 2003b).

El marco teórico ERIE consta de cuatro constructos que son los siguientes: 'Población y muestra' (PM), 'Proceso de inferencia' (PI), 'Tamaño de la muestra' (TAM) y 'Tipos de muestreo' (TIM). En cada uno de los constructos anteriores hemos determinado cuatro niveles de razonamiento: Idiosincrásico (N1), De transición (N2), Cuantitativo (N3) y Analítico (N4) que constituyen un continuo. Por ejemplo, sobre el concepto de población las respuestas subjetivas o no centradas en el concepto se clasifican en el Nivel 1, las que se centran en una única característica para identificarla se clasifican en el Nivel 2, las que se centran en más de una característica se clasifican en el Nivel 3 y, finalmente, las que incluyen todas las características necesarias para describir la población y las relacionan adecuadamente se clasifican en el Nivel 4. La caracterización completa del ERIE formulado aparece en la Tabla 1, y su descripción más completa puede verse en Moreno (2003).

2. ESTUDIO DE CASOS

Una vez formulado el marco teórico ERIE en el que se establecen niveles jerárquicos para la estructura de las respuestas de los alumnos ante tareas que caracterizan el pensamiento estadístico inferencial, nos proponemos su validación. En primer lugar, mediante los dos estudios empíricos realizados, hemos podido comprobar que la caracterización de los constructos y niveles nos ha permitido describir el conocimiento de los participantes sobre la estadística inferencial elemental. Posteriormente, hemos realizado un estudio de casos, que describimos seguidamente.

2.1. Metodología

Las entrevistas realizadas se pueden clasificar como semiestructuradas pues, aunque disponíamos de un guión de entrevista, éste podía modificarse en función de las respuestas de los alumnos con la finalidad de aclararlas. A continuación se describen los tres elementos que la constituyen: a) los objetivos perseguidos; b) el instrumento de observación y c) el modo en que se realiza.

Tabla 1. Esquema de Razonamiento en Inferencia Estadística

Constructos	N1 Idiosincrásico	N2 De transición	N3 Cuantitativo	N4 Analítico
Población y muestra PM	Concepto de población usual. No define el concepto de población en términos estadísticos ni el de muestra. No identifica la población de estudio ni la muestra en la mayoría de los contextos. No reconoce la de variabilidad muestral en el proceso de muestreo. No construye el espacio muestral.	Concepto de población usual. Puede presentar dificultades en el uso del término población en sentido estadístico. El estudiante se centra en elementos simples al definir la muestra: una característica de la definición o un ejemplo. En algunas ocasiones pueden mencionar varios aspectos asociados con la definición de muestra, usualmente secuenciados, sin terminar de relacionar. Identifica la población centrándose en una única característica en la mayoría de los contextos. No identifica la muestra en la mayoría de los contextos. El alumno reconoce que habrá variación en las distintas muestras que se extraigan y acusará al azar de ello. Construcción del espacio muestral en poblaciones de tipo discreto. No sistematiza su construcción.	La población se describe usando más de un aspecto aunque no se ofrece una descripción completa de la población de estudio. Define el concepto de población en términos estadísticos. Describe la muestra en varios contextos. La descripción de la muestra hace referencia a todos los elementos requeridos para hacerlo de forma coordinada o menciona varios aspectos asociados con ella, usualmente secuenciados, sin terminar de relacionar. Reconoce la variabilidad muestral aunque no en todos los contextos y emplea criterios estadísticos para justificarla. Construye el espacio muestral en poblaciones de tipo discreto. Realiza esta tarea de forma sistemática.	Describe completamente la población. Refiere el concepto de población en términos estadísticos. Identifica la muestra. Describe el concepto de muestra refiriéndose a todos los elementos requeridos para identificarla de forma coordinada. Reconoce la variabilidad muestral y la justifica con criterios estadísticos. Conoce el concepto de espacio muestral y lo construye de forma sistemática.
Proceso de inferencia PI	El alumno aborda la tarea pero no la completa o la respuesta no tiene sentido. Las respuestas obedecen a expectativas personales sobre la composición de la población en la mayoría de los contextos. Manifiesta la concepción previa.	Respuestas condicionadas por un único aspecto: variabilidad (concepción determinista), sesgo de equiprobabilidad, naturaleza de la población estudiada. Manifiesta la concepción determinista.	Describe la composición de la población como similar a la de la muestra en la mayoría de los contextos. Criterios numéricos para su cálculo. Usa la concepción identidad.	No se puede asegurar la composición de la población a partir de una de sus muestras. Usa criterios numéricos y expresión formal. Esto en la mayoría de los contextos. Usa la concepción inferencial.
Tamaño de la muestra TAM	Indiferencia ante el tamaño de la muestra. La estimación se basa en criterios personales. Ausencia de criterio, en la mayoría de los contextos, para establecer un tamaño muestral adecuado.	Selección del tamaño muestral basado en aspectos poco relevantes como expectativas personales sobre la composición de la población o facilidad de cálculo. Criterio determinista sobre el proceso de muestreo. Eligen un tamaño muestral de entre los presentados y su elección se fundamenta en un único aspecto relevante en la mayoría de los contextos.	Reconoce la influencia del tamaño de la muestra en la estimación aunque las justificaciones de la relación entre ambas son insuficientes. Tiene un criterio para establecer un tamaño de muestra adecuado en cada tarea en la mayoría de los contextos.	Reconoce la influencia del tamaño de la muestra. Las respuestas emplean criterios estadísticos elaborados. Presenta criterios para analizar la adecuación del tamaño de la muestra en relación al tamaño de la población presentada.
Tipos de muestreo TIM	La elección del método de muestreo está sujeta a expectativas personales de respuesta irrelevantes con la tarea. No encuentra diferencias entre los muestreos aleatorios. No reconoce las fuentes de sesgos en los muestreos no aleatorios	Para la valoración de los tipos de muestreo utiliza algunas ideas estadísticas. Los métodos estadísticos no le parecen adecuados (afirmación determinista). No usa criterios estadísticos para optar por uno de entre diferentes muestreos aleatorios. No identifica los sesgos en los muestreos no aleatorios ni valora adecuadamente el muestreo aleatorio.	Reconoce los sesgos en el muestreo no aleatorio. No siempre identifica las fuentes reales de sesgos en los muestreos no aleatorios. Reconoce que los muestreos no aleatorios aportan más sesgos que los aleatorios. Encuentran diferencias entre los métodos aleatorios pero éstas no son siempre correctas.	Reconoce la posibilidad de que los datos sean sesgados en el muestreo no aleatorio. Identifican las fuentes de errores de los muestreos no aleatorios. Para realizar una encuesta prefieren los métodos aleatorios sobre los no aleatorios. Son conscientes del carácter aleatorio del muestreo aleatorio simple. Encuentran adecuadas diferencias entre distintos métodos aleatorios de muestreo.

2.1.1. Objetivos

Nos proponemos un doble objetivo: a) completar la información obtenida por medio de los cuestionarios escritos y b) validar inicialmente ERIE en un estudio de laboratorio. Describimos aquí la parte que se refiere al segundo objetivo perseguido. El análisis de las entrevistas nos permitirá situar a los grupos de alumnos (por cursos) en sus niveles de respuesta y a cada alumno en su nivel en cada constructo validando así los constructos y niveles y, globalmente, ERIE en su conjunto.

2.1.2. Guión de la entrevista

Para satisfacer los objetivos del estudio de casos, en la realización de las entrevistas hemos utilizado como guión los cuestionarios utilizados en el segundo estudio experimental (Moreno (2003)) realizado con anterioridad a éstas. De este modo profundizamos en el análisis de las respuestas aportadas por los sujetos y validamos la caracterización de ERIE. Son cinco partes que incluyen preguntas que se refieren a los cuatro núcleos conceptuales determinados, planteadas en tres contextos, concreto, narrativo y numérico. Sobre este cuestionario, completado por el alumno antes de realizar la entrevista, el investigador ha ido haciendo a lo largo del desarrollo de la misma una serie de preguntas orientativas que podían ser modificadas (añadiendo o eliminando) en función de las explicaciones aportadas por los estudiantes sobre sus respuestas al cuestionario.

2.1.3. Procedimiento de realización de la entrevista

Las entrevistas fueron realizadas personalmente por el investigador en Mayo de 2003 y el proceso constó de dos partes. En primer lugar, se convocó a los alumnos en grupos de tres y se les explicó el objetivo de la entrevista procurando crear un clima en el que el estudiante se sintiese relajado. A continuación se les proporcionó un cuestionario para su cumplimentación. Dispusieron para ello de una calculadora y del tiempo que consideraron necesario, entre una hora y hora y cuarto. Una vez cumplimentado el cuestionario, el investigador lo revisa y selecciona aquellas preguntas donde incidirá en la entrevista, que realizó a continuación.

Cada entrevista, grabada en audio y transcrita posteriormente, tuvo una duración en torno a 20 minutos procurando atender a la fatiga del entrevistado. En la realización de éstas se ha procurado, presentar cada cuestión en los términos, el lenguaje y la perspectiva de cada entrevistado y generar un clima de confianza con el mismo.

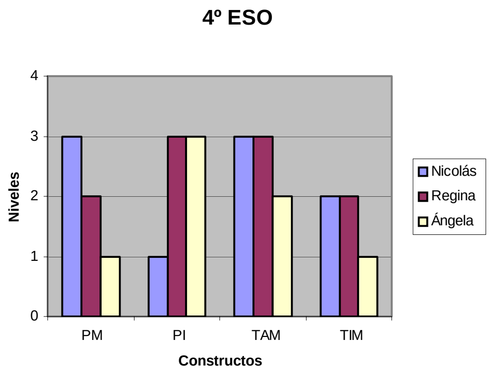
2.1.4. Descripción de la muestra

La muestra es intencional, esto es, ha sido tomada a juicio del investigador utilizando los criterios de selección siguientes: estudiantes que no tienen grandes dificultades con la asignatura de matemáticas, equilibrio entre géneros, de todos los cursos participantes de ESO y Bachillerato y que sean comunicativos para que proporcionen respuestas ricas.

Los alumnos entrevistados han sido finalmente ocho, tres de cada uno de los cursos 3º y 4º de ESO y dos de 2º de Bachillerato. No se han podido entrevistar alumnos de 1º de Bachillerato por razones ajenas a la investigación.

2.2. Resultados: Estructura de la respuesta de los alumnos

Los estudiantes de 4º de ESO entrevistados han sido Nicolás, Regina y Ángela. Las respuestas de Nicolás en los constructos PM y TAM se sitúan en el Nivel cuantitativo (N3), en PI en el Nivel idiosincrásico (N1) y en TIM en el Nivel de transición (N2). Las respuestas de Regina en los constructos PM y TIM se sitúan en el Nivel de transición (N2) mientras que en los otros dos se sitúan en el nivel cuantitativo. Ángela es la tercera entrevistada de 4º de ESO cuyas respuestas se sitúan en los constructos PM y TIM en el Nivel idiosincrásico (N1), en PI en el cuantitativo (N3) y en TAM en el de transición (N2). En el Gráfico 1 hemos representado sus respuestas.



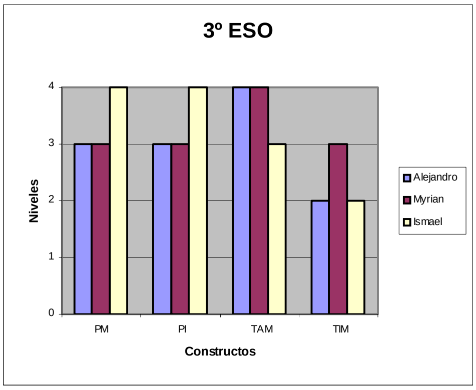


Gráfico 1: Niveles en 4º de ESO **Gráfico 2: Niveles en 3º de ESO**

Ningún estudiante de 4º de ESO da respuestas de Nivel analítico en ninguno de los constructos aunque, en la mayoría de los casos, se sitúan en los Niveles de transición y cuantitativo en al menos dos de ellos. Uno de ellos da respuestas clasificadas en el Nivel idiosincrásico en dos de los constructos.

Los tres estudiantes de 3º de ESO entrevistados son Alejandro, Myrian e Ismael. Las respuestas de Alejandro se sitúan en el Nivel cuantitativo en los constructos PM y PI y en los Niveles analítico y de transición en TAM y TIM, respectivamente. Myrian da respuestas clasificadas en el Nivel cuantitativo en los constructos PM, PI y TIM mientras que en TAM se sitúan en el Nivel analítico. Ismael da respuestas clasificadas en el Nivel analítico en los PM y PI, cuantitativo en TAM y de transición en TIM. En el gráfico 2 hemos representado sus respuestas.

Los alumnos de 3º de ESO han dado, globalmente, respuestas de mayor nivel que los de 4º, a pesar de tener uno año menos que ellos. Como vemos en el Gráfico 2, la mayoría ha dado respuestas de los dos niveles superiores en tres de los constructos determinados. Las respuestas de Nivel 1 corresponden al constructo TIM, que se refiere a los tipos de muestreo, en donde hemos encontrado mayores dificultades, en general, y concepciones erróneas básicas sobre el azar, etc.

Los dos estudiantes de 2º de Bachillerato entrevistados son Cristina y Jesús. Cristina da respuestas clasificadas en los Niveles de transición para los constructos PM y TIM y cuantitativo en PI y TAM, respectivamente. Las respuestas de Jesús se clasifican, sin embargo, en los Niveles idiosincrásico para PI y TIM y de transición para PM y TAM, respectivamente. A continuación podemos ver en el Gráfico 3 los datos correspondientes a estos alumnos.

Las respuestas de los alumnos de Bachillerato contrastan fuertemente con los resultados anteriores ya que no hemos encontrado ninguna respuesta de Nivel analítico y, además, la mayoría de ellas se encuentran en los dos primeros niveles, idiosincrásico y de transición. En el caso de estos alumnos es preciso buscar explicaciones adicionales de tipo curricular u otro que complementen la información obtenida hasta ahora.

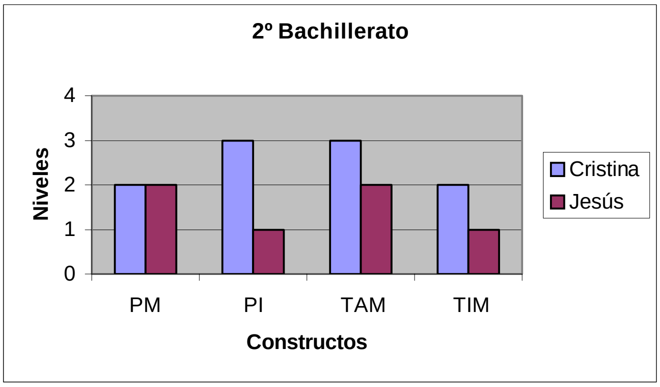


Gráfico 3: Niveles de respuesta en 2º de Bachillerato

En el Gráfico 4 se incluyen las respuestas de los ocho estudiantes entrevistados, todos los casos analizados.

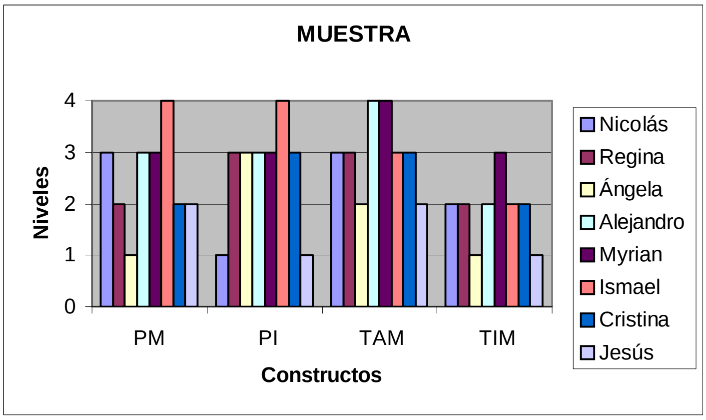


Gráfico 4: Niveles de respuesta de los alumnos de la muestra

Como podemos observar, en conjunto, la mayor parte de las respuestas de todos los alumnos de la muestra se sitúan en el Nivel cuantitativo, 40.6%, mientras que se sitúan en el Nivel analítico un 12.5%, en tres casos y tres constructos. Como el 40.6% de las respuestas se sitúan en el Nivel cuantitativo y el 31.25% en el de transición en total en estos dos niveles se agrupan el 71.8% de las respuestas de los alumnos entrevistados. Hay un único constructo, TIM, en el que no hemos encontrado ninguna respuesta de Nivel 4 que ha resultado, como hemos comentado anteriormente, dados los resultados de los análisis cuantitativos en los dos estudios empíricos realizados, ciertamente complejo para muchos estudiantes.

El predominio del nivel cuantitativo en el proceso de inferencia implica el predominio de la heurística de la representatividad. En el constructo tipos de muestreo y sesgos encontramos que el nivel dominante de los alumnos estudiados es el de transición lo que viene a indicar que este grupo de alumnos no posee criterios adquiridos de manera intuitiva para valorar las muestras obtenidas en distintos tipos de muestreo.

Nivel 1, idiosincrásico: los alumnos cuyas respuestas hemos incluido en el nivel idiosincrásico, se caracterizan por realizar inferencias y valorarlas empleando únicamente criterios subjetivos, esto es, por ignorar los conceptos y relaciones entre ellos imprescindibles para realizar correctamente las tareas.

Así Nicolás o Jesús, realizan sus inferencias utilizando concepciones previas que tienen su origen en sus propias referencias culturales:

- No utilizan el mismo modelo de razonamiento en cada contexto. El desconocimiento o la incomprensión de los conceptos estadísticos (aunque no existiera una relación adecuada entre ellos) hace imposible que los estudiantes que están en el nivel idiosincrásico puedan tener criterios para la elección de un tamaño adecuado de muestra para realizar inferencias apropiadas así como que, frente a varias muestras de distinto tamaño, el estudiante se muestre indiferente en la elección de una de ellas.
- Hace imposible el análisis de los sesgos introducidos por muestreos no aleatorios y la valoración adecuada de estos.
- Estos estudiantes se situarían en el modo icónico, donde el razonamiento es intuitivo y está regido por las creencias personales y los mitos. Para dar el paso al pensamiento declarativo, propio del modo simbólico concreto, estos alumnos necesitarán la ayuda de la enseñanza formal (Collis y Romberg, 1991, citado en Reading, 1996).

Nivel 2, de transición:

En el nivel de transición aparece ya el modo de conocimiento declarativo. En las respuestas de los alumnos clasificados en este nivel, (Nicolás, Regina, Alejandro, Cristina e Ismael en tipos de muestreo), aparecen ya algunos conceptos estadísticos de cierta complejidad como tamaño de la muestra, variabilidad, margen de error,… pero sin que se establezcan relaciones entre ellos.

Aquí se clasifican respuestas tanto del modo icónico como del simbólico concreto.

El análisis de las entrevistas ha permitido reconocer algunas de estas relaciones mal planteadas. En el nivel de transición no resulta sencillo concretar las tareas combinatorias y por esta razón no se construyen los espacios muestrales completos. Esta misma dificulta la encuentran los alumnos que razonan en modo icónico para ese constructo pero en este caso asimilan los casos raros con los imposibles. Hemos constatado que esta simplificación cuando se trata de valorar inferencias, conduce a considerar dos casos, el obtenido y otro, en términos que hemos encontrado en las entrevistas, 50% de que salga la misma muestra y 50% de que no.

Nivel 3, cuantitativo:

El desajuste entre el margen de error y el nivel de confianza supone la negación del proceso de muestreo y la opción por los censos. También condiciona a elegir como el tamaño muestral más adecuado el tamaño de la población.

A medida que se ajusta la relación entre el nivel de confianza y el margen de error el alumno comienza a admitir la posibilidad de realizar inferencias adecuadas con tamaños muestrales inferiores al tamaño de la población pero además se inicia en la valoración de la calidad de la información obtenida a partir de diversos tipos de muestreo. El estudiante se sumerge en el nivel cuantitativo de respuesta y en él aumenta la riqueza de elementos puestos en juego en el razonamiento estocástico: se reconoce la presencia de muestras sesgadas en muestreos no aleatorios, se intuye la mejora de la estimación con el aumento del tamaño muestral y comienzan a establecerse relaciones en las que interviene uno de los conceptos fundamentales, la variabilidad muestral.

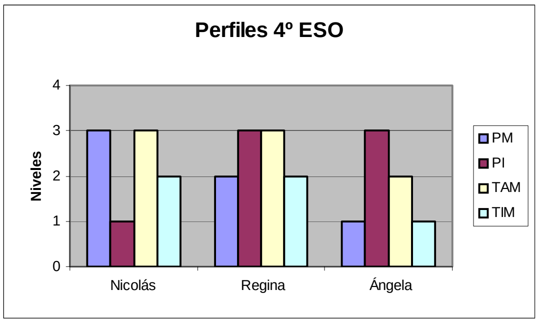
<u>Nivel 4, analítico:</u>

Tan sólo cuando los conceptos que se manejan, que el individuo gestiona, están plenamente relacionados y coherentemente ajustados el sujeto se incluye en el nivel analítico.

2.3. Perfiles y estabilidad de los alumnos entrevistados

Con el fin de estudiar mejor la validez del ERIE en cuanto a la caracterización del razonamiento en estadística inferencial de los estudiantes de secundaria hemos trazado, finalmente, el perfil de cada uno de los estudiantes entrevistados. Para cada uno de ellos, estudiamos la estabilidad de sus respuestas en los niveles fijados en cada constructo y en cada uno de ellos.

En 4º de ESO, Nicolás y Regina se sitúan en los niveles cuantitativo y de transición en tres/cuatro constructos mientras que Ángela lo hace en el cuantitativo e idiosincrásico. Ésta última podemos clasificarla como de razonamiento predominantemente idiosincrásico, Nicolás es predominantemente cuantitativo mientras que Regina está situada entre los niveles de transición y cuantitativo.



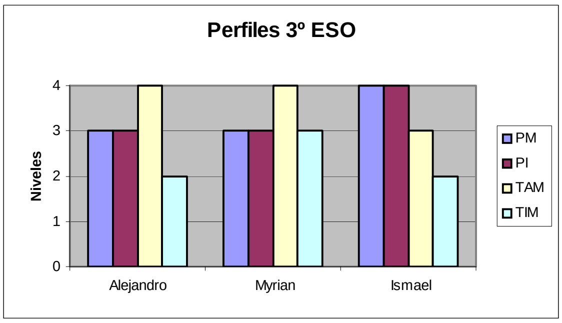


Gráfico 5: Perfiles de 4º de ESO **Gráfico 6: Perfiles de 3º de ESO**

Los tres alumnos de 3º de ESO se sitúan claramente entre los niveles cuantitativo y analítico. Sólo Alejandro e Ismael se sitúan en el nivel de transición en el caso del constructo que se refiere a los distintos tipos de muestreo. En Ismael predomina claramente el razonamiento analítico mientras que en los otros dos estudiantes predomina el cuantitativo.

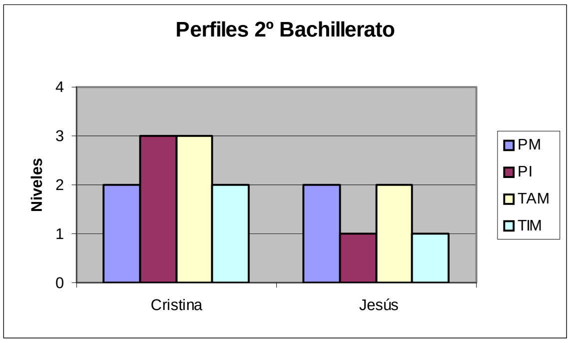


Gráfico 7: Perfiles de los alumnos de 2º de Bachillerato

Los estudiantes de 2º de Bachillerato se sitúan ambos entre los niveles de transición y cuantitativo, Cristina, y cuantitativo e idiosincrásico, Jesús. Cristina es predominantemente cuantitativa mientras que Jesús oscila entre los niveles idiosincrásico y de transición.

El perfil mas estable corresponde a los alumnos de 3º de ESO que se mantienen en el Nivel cuantitativo en los tres constructos PM, PI y TAM. Consiguen un menor nivel de estructuración de repuesta en el constructo TIM que ha resultado, también aquí, más difícil para los estudiantes. La mayor parte de los alumnos son estables en dos niveles y en dos o tres constructos. En ningún caso hemos encontrado respuestas de niveles distintos en cada uno de los constructos.

Como hemos podido observar, las repuestas de los alumnos entrevistados no se han ajustado a ningún 'patrón' claro de estabilidad que nos permita determinar niveles de respuesta que pudiéramos considerar como referencia para alumnos de este nivel de enseñanza. De momento no tenemos razones fundadas para aventurar posibles causas para este hecho que, incluso, puede no ser necesario. Por ahora sólo tenemos la evidencia de la necesidad de seguir investigando para poder validar ERIE y, posiblemente también, el marco teórico en el que se basa, SOLO.

3. CONCLUSIONES

El marco teórico ERIE nos ha resultado muy útil para analizar la estructura de las respuestas de los estudiantes a cuestiones sobre conceptos inferenciales elementales. ERIE nos ha permitido evaluar el conocimiento informal de los estudiantes sobre los cuatro constructos en que hemos articulado los contenidos de la estadística inferencial elemental. El estudio de casos realizado posteriormente nos ha permitido validar, en una primera fase, el marco ERIE. Afirmamos que se trata de una primera fase porque creemos que la verdadera prueba de fuego, y en consecuencia su validación definitiva, ha de llevarse a cabo en el campo de la instrucción formal y en las condiciones experimentales necesarias para ello. El marco ERIE construido incluye la caracterización de los cuatro niveles que incluyen estos dos modos de pensamiento para cada uno de los cuatro constructos teóricos fijados. Los resultados de las entrevistas realizadas posteriormente nos han permitido realizar una aplicación, en situación de laboratorio, del ERIE a estudiantes seleccionados y hemos podido comprobar que es posible situar a cada uno de los alumnos en su nivel en función del análisis de sus respuestas al cuestionario y al entrevistador.

Consideramos, por tanto, que ERIE puede ser válido para caracterizar el aprendizaje de la estadística inferencial elemental en el nivel de secundaria.

ERIE también nos permite evaluar de manera global el aprendizaje de la estadística inferencial. Además de situar al alumno en su estado de aprendizaje, el paso de un nivel a otro supone también un aprendizaje, luego podemos establecer las diferencias entre los niveles de estructuración de la respuesta en términos de aprendizaje, como el aumento en la capacidad para manejar más conceptos. Por ejemplo, relacionar el concepto de variabilidad muestral y el de tamaño muestral pero, además, relacionar éste con la variabilidad de la población y el tamaño de la población.

4. REFERENCIAS

BATANERO, C. y SERRANO, L. (1995). La aleatoriedad, su significados e implicaciones educativas. *Uno*, 5, 15-28.

BIGGS, J. B. y COLLIS, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

BIGGS, J. B. y COLLIS, K. F. (1991). Multimodal learning and intelligent behavior. En H. D. Rowe (Ed.): *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated Inc.

GARFIELD, J. y AHLGREN, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63.

JONES, G. A.; THORNTON, C. A.; LANGRALL, C. W.; MOONEY E. S.; PERRY, B. and PUTT, I. J. (2000). A Framework for Characterizing Children's Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 30(5), 269-309.

Junta de Andalucía (1992). Decreto 106/1992 de 9 de Junio (BOJA del 20) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la E.S.O. en Andalucía.

Junta de Andalucía (1994). Decreto 126/1994 de 7 de Junio (BOJA del 26 de Julio) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía.

Junta de Andalucía (1997). Currículo de Bachillerato en Andalucía.

Junta de Andalucía (2002). Decreto 148/2002, de 14 de Mayo, por el que se modifica el decreto 106/1992, de 9 de Junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía (ESO). (BOJA nº 75 de 27 de Junio).

KONOLD, C. (1991). Understanding Students' beliefs About Probability. En E. von Glaserfeld (Ed.): *Radical Constructivism in Mathematics Education*, (pp. 139-156). The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

M.E.C. (1990). Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo, (LOGSE, BOE de 4 de Octubre).

M.E.C. (1992). Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes al Bachillerato, (BOE 253).

MORENO, A. (2000). *Investigación y Enseñanza de la Estadística Inferencial en el nivel de secundaria*. Granada: El autor.

MORENO, A. (2003). *Estudio teórico y experimental sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos inferenciales en el nivel de secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

MORENO, A. y VALLECILLOS, A. (2001a). Influencia del nivel escolar y el contexto en el conocimiento informal de conceptos inferenciales. *Investigación en Educación Matemática. V Simposio de la SEIEM*, (pp. 187-196). Almería: Universidad de Almería.

MORENO, A. y VALLECILLOS, A. (2001b). Exploratory Study on Inferential' Concepts Learning in Secondary Level in Spain. In M. van der Heuvel (Ed.): *Proceedings of the 25th Conference of the PME,* (p. 343). The Netherlands: Freudenthal Institute and Utrecht University.

MORENO, A. y VALLECILLOS, A. (2002). Exploración de Heurísticas y Concepciones Iniciales sobre el Razonamiento Inferencial en Estudiantes de Secundaria. *Educación Matemática*, 14(1), 62-81.

NCTM. (2000). Principles and standards for schools mathematics. Reston, VA: NCTM.

VALLECILLOS, A. y MORENO, A. (2002). Framework for instruction and assessment on elementary inferential statistical thinking. *Proceeding of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. USA: John Wiley. CD ROM.

VALLECILLOS, A. y MORENO, A. (2003a). Initial conception about sampling types in secondary level students. *Bulletin of the International Statistical Institute, Contributed Papers,* Vol. LX, Book 2, (pp. 566-567). Berlin: ISI.

VALLECILLOS, A. y MORENO, A. (2003b). Esquema para la instrucción y la evaluación del razonamiento en estadística inferencial elemental. *Educación y Pedagogía*, Vol. XV, nº 35, 69-81.

La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica. Un estudio con profesores en formación

JOSÉ ORTIZ
Universidad de Carabobo. Venezuela

LUIS RICO
ENRIQUE CASTRO
Universidad de Granada. España

Resumen:

Se persigue determinar el conocimiento didáctico, derivado de la implementación de un programa de formación que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización matemática. En el estudio participaron diez profesores de matemáticas de secundaria en formación y se realizó desde una aproximación cualitativa. Los resultados revelan cambios y avances en el conocimiento didáctico de los participantes evidenciado en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico con la incorporación del proceso de modelización matemática y la calculadora gráfica.

Abstract:

It is persecuted to determine the didactic knowledge, derivative of the implementation of a formation program integrated, through linear algebra, the use of the graphic calculator and the mathematical modelling. Ten preservice mathematics teachers of secondary school participated in the study, and it was made from a qualitative approach. The results reveal changes and advances in the didactic knowledge of the participants demonstrated in the design of didactics activities of algebraic content with the incorporation of the process of mathematical modelización and the graphic calculator.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de esta investigación persigue analizar el conocimiento didáctico derivado de la implementación de un programa de formación que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y analizar el conocimiento didáctico de los futuros profesores derivado de la implementación del programa. A efecto del análisis curricular se partió de una estructura teórica soportada en las cuatro dimensiones siguientes: conceptual, cognitiva, formativa y social (Rico, 1997a, 1997b). Por otra parte, dicha teoría considera que el conocimiento didáctico de los tópicos matemáticos debe fundamentarse en los sistemas de representación (Janvier, 1987, Duval, 1995), la modelización (Niss, Blum & Huntley, 1991; Houston, Blum, Huntley & Neill, 1997; Ortiz, 2002), los errores y dificultades (Borassi, 1987), la fenomenología (Freudenthal, 1983), la historia de las matemáticas (Fauvel, 1991) y los materiales y recursos. Este estudio se llevó a cabo en el contexto de la Universidad de Granada, España, dentro de los planes de formación vigentes en el curso 2001-2002.

En esta investigación se ha optado por la utilización de la calculadora gráfica (CG) TI-92, la cual se incorpora como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El contenido matemático involucrado fue el álgebra lineal, el cual propicia una riqueza de aplicaciones importantes en la modelización de situaciones del mundo real, tal como lo plantean Harel (1998), Brunner, Coskey & Sheehan (1998) y Dorier (2000), entre otros.

La escogencia del álgebra lineal se apoya en el currículo diseñado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (1992). Ese documento establece que en el núcleo de Álgebra para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se debe contemplar la resolución de ecuaciones lineales y sistemas de dos ecuaciones mediante métodos diversos. Asimismo, se deben considerar aplicaciones de métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos y de la vida real. Dentro de la diversidad de situaciones que se resuelven con tratamiento algebraico, se destaca la importancia de aquellas cuya formulación implica la búsqueda de uno o dos datos.

La pertinencia de la investigación procede del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada, tomando en consideración que en la actualidad en dicho programa se aprecia escaso tratamiento de las nuevas tecnologías y la modelización matemática. Para realizar el estudio se implementó un programa que integra la modelización, la calculadora gráfica y el álgebra lineal en la elaboración de actividades didácticas.

Las cuestiones formuladas fueron las siguientes:

¿Qué conocimiento didáctico desarrollan los profesores en formación mediante el manejo e incorporación de la calculadora gráfica en tareas escolares, y de qué manera lo integran en su conocimiento profesional?.

¿Cuáles son los criterios que manejan los profesores en formación para el uso de la modelización matemática y de qué manera recurren a ella?

¿Qué potencialidades didácticas brinda el álgebra lineal para el establecimiento de vínculos y relaciones entre la calculadora y la modelización matemática, en la formación inicial del profesor?

METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló con diez sujetos, los cuales siguieron durante 30 horas (10 sesiones) la implementación de un programa de formación, mediante un curso-taller, cuyo diseño se sustentaba sobre la modelización y la calculadora gráfica como recurso en un contexto matemático de álgebra lineal. Los sujetos del estudio fueron profesores de matemáticas en formación, los cuales participaron de forma voluntaria, con base en criterios de ser potencial profesor de matemáticas y no estar en ejercicio docente.

Este trabajo se enmarca dentro de la metodología de estudio de caso. El foco de la investigación se centra en las producciones de los sujetos participantes en la implementación del programa.

En el estudio se consideran las producciones de los participantes en relación con el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la enseñanza del álgebra lineal, el manejo instrumental de la calculadora gráfica y su articulación con la modelización; así como, el empleo de estos organizadores para planificar tareas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, el conocimiento didáctico del profesor en formación.

El análisis de las producciones se efectuó tomando como criterio la identificación de tres momentos claves en el desarrollo del curso-taller: la primera sesión, la cuarta sesión y la décima sesión. Todo ello contrastado con las producciones de las demás sesiones del curso-taller.

Los aspectos que se consideraron para el análisis fueron: respecto a la modelización se identificó el desarrollo de habilidades para resolver problemas abiertos, la discusión y reflexión sobre los abordajes de las situaciones problema, la valoración crítica de cada parte de la actividad desarrollada, habilidades de comunicación oral y escrita y habilidades para trabajar en grupo, aspectos sugeridos por Galbraith, Haines and Izard (1998). Respecto al apoyo de la CG, como recurso didáctico, se analizó la utilización de los diversos sistemas de representación y sus conexiones entre ellos, con los conceptos matemáticos y con las situaciones planteadas en el diseño de actividades didácticas. También se tomó en cuenta el aprovechamiento de las posibilidades de cálculo, experimentación, visualización y contraste de resultados posibles de efectuar con el uso de la CG, de acuerdo a lo planteado por Kutzler (2000).

RESULTADOS

Estado de los profesores en formación en el momento inicial

El estado inicial de los futuros profesores se puede sintetizar en los siguientes aspectos generales:

1. Poseen una sólida formación disciplinar

2. Están abiertos al empleo de la CG por parte del profesor de matemáticas, sin embargo mantienen una posición moderada sobre el uso de la misma por parte de los alumnos.

3. Tienen relativa habilidad para proponer situaciones del entorno del alumno.

4. Conservan el esquema de conducción de la clase dominada por el profesor.

5. Poca iniciativa al momento de proponer actividades de evaluación.

Estado de los profesores en formación (PF) en el momento intermedio

El objetivo de la cuarta sesión fue modelizar situaciones en las cuales subyacen relaciones de linealidad que conllevan a la resolución de inecuaciones lineales.

Una de las situaciones problema propuestas en la cuarta sesión de implementación del programa fue la siguiente, relacionada con el ingreso laboral:

Ricardo tiene dos trabajos de tiempo parcial; en uno le pagan 7 euros por hora y en el otro 5 euros por hora. Debe ganar, cuando menos, 140 euros semanales para sufragar sus gastos escolares. Determinar las diversas formas en que puede programar el tiempo para alcanzar su meta.

Resolución directa sin usar CG

En este caso los profesores en formación identificados como PF4 y PF7 resolvieron el problema con pocos detalles. El participante PF4 consideró las variables x e y que denotan el número de horas en el trabajo que paga 7€ la hora y el número de horas en el trabajo que paga 5€ la hora respectivamente. Luego definió las funciones T_1 y T_2 por $T_1(x)=7x$ y $T_2(y)=5y$ y formuló el modelo de la situación planteada definido por la desigualdad $T_1(x)+T_2(y)\geq 140$. No se observó la consideración de condiciones o restricciones en la construcción del modelo. Tampoco se explicaron los detalles y la necesidad de introducir las funciones lineales T_1 y T_2. Finalmente no se resuelve el problema sino que se planteó la desigualdad $y > \frac{-7(x-20)}{5}$ y se afirmó tener "siempre partes del semiplano superior". Obviamente no se vislumbró una clarificación de los procedimientos señalados. Se podría decir que el diseño de la actividad no se estructuró para ser comprendido por alumnos de secundaria.

Resolución directa utilizando CG

En este caso tenemos el uso de la CG pero sin introducción previa a la visualización de la misma; es decir, se dejó que la CG "explicara" por sí misma. No se hizo interpretación ni se apreció su incorporación al proceso de modelización. Un ejemplo de este caso lo representan las producciones de los participantes PF5 y PF9. En lo correspondiente a PF5 planteó las inecuaciones $140<7x+5y$, $x+y<40$, definió las funciones $y=\frac{140-7x}{5}\equiv y3(x)$, $y = 40 - x \equiv y4(x)$ y finalmente hizo la representación (figura 1), sin dar detalles ni interpretaciones respecto a la situación problema.

El participante PF9 definió la función ingreso de Ricardo por $i(t_1,t_2)= 7t_1 +5t_2$ donde $t_1\equiv$tiempo en trabajo 1; $t_2\equiv$tiempo en trabajo 2. Luego escribió y presentó $i(t_1,t_2)\geq 140$ y en la calculadora hizo la representación mostrada en la figura 2.

En esta última producción se notó dominio técnico de la CG en la graficación de funciones pero no se aprovechó para hacer conclusiones acerca de las soluciones, lo cual pudo haber conducido a tomar en cuenta nuevas condiciones y el ajuste del modelo.

Figura 1

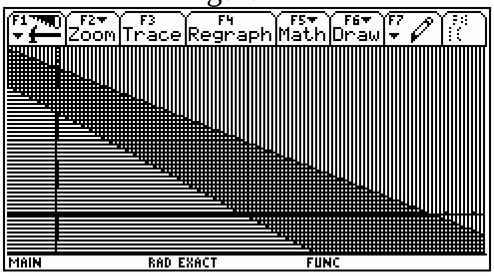
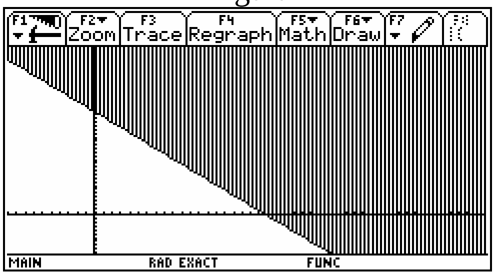


Figura 2



Resolución detallada utilizando CG

En este caso los profesores en formación intentaron explicar los detalles de sus razonamientos. Además incorporaron la CG en sus producciones y abordaron el proceso de modelización. Utilizaron la CG para despejar variables, tal como se observa en la figura 3. También se empleó la CG para realizar tablas como la mostrada en la figura 4, construida con la función $y(x) = \frac{-7(x-20)}{5}$. En el contexto algebraico definieron las variables a utilizar en la construcción del modelo, introdujeron ecuaciones e inecuaciones en dos variables y la interpretación de sus soluciones. Respecto del estudio de la situación problema se encontró que la mayoría de participantes en esta categoría resolvieron casos particulares.

Figura 3

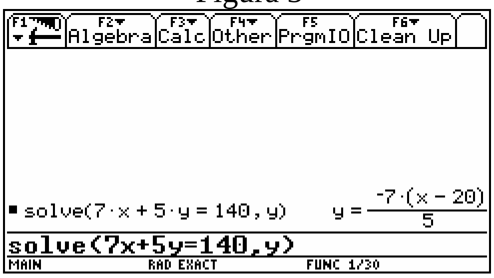
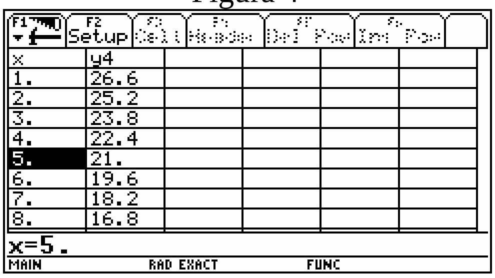


Figura 4



Desempeño de los profesores en formación (PF) en el momento final

El objetivo de la última sesión, fue diseñar una actividad didáctica de contenido algebraico para desarrollarla con alumnos de secundaria, según se muestra a continuación:

Supongamos un profesor de secundaria que necesita elaborar una actividad didáctica con la que mostrar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales. Para satisfacer este propósito te pedimos que describas (o propongas) una situación problema del mundo real que cumpla esa asignación.

Asumiendo que el profesor conoce el proceso de modelización y que utilizará la calculadora gráfica con sus estudiantes:

Enuncia al menos dos preguntas, cuya respuesta requiera el uso de la modelización y la calculadora gráfica;

Ordena la secuencia de las actividades (guión) a seguir por el profesor, para lograr su objetivo;

Sugiere al menos dos aspectos a evaluar (en los alumnos) e indica cómo los llevarías a cabo.

Es importante destacar que el enunciado de esta actividad fue idéntico al propuesto en la parte B de la sesión inicial.

En la primera cuestión, los profesores en formación, plantearon situaciones de la vida cotidiana, familiar, empresarial, comercial y del ámbito bélico. En general, los profesores en formación acudieron a diferentes ámbitos de interés para plantear las situaciones problema.

En cuanto a la segunda cuestión, las preguntas expuestas por los participantes podrían contribuir a desarrollar procesos de modelización donde se desarrollaran habilidades de comunicación oral y escrita, así como la criticidad e independencia de pensamiento de los alumnos.

Respecto a la tercera cuestión, en líneas generales los profesores en formación consideraron la secuencia siguiente:

1. Organizar los alumnos en grupos pequeños, 2. Planteamiento de la situación problema, 3. Formulación (y selección) del problema, 4. Identificación de variables, 5. Establecimiento de relaciones entre las variables (puede utilizarse la CG), 6. Construcción del modelo, 7. Representar el modelo utilizando varios sistemas de representación (con el apoyo de la CG), 8. Resolución del problema (matemático), 9. Interpretación de la (o las) solución (o soluciones), 10. Formulación de nuevas preguntas y 11. Planteamiento de nuevas situaciones a manera de ejemplo

Las propuestas de la cuarta cuestión, referida a la evaluación, sugieren que los profesores en formación consideraron la evaluación cómo búsqueda de información para el profesor. Para que este último lograra construir un marco general de sus alumnos y tomar decisiones en relación con las estrategias de enseñanza y el aprendizaje. Faltó considerar explícitamente la evaluación como fuente para contribuir a fortalecer en los alumnos sus capacidades intelectuales y aprovechar las posibles ventajas que le ofrece el contexto escolar.

LOGROS Y HALLAZGOS

Los profesores en formación plantearon situaciones del mundo real ajustadas a los niveles de la educación secundaria y cercanas al entorno del alumno. En cuanto al organizador materiales y recursos, se evidenció un dominio en el manejo técnico y didáctico de la CG, y de las opciones que ésta ofrece, otorgándole importancia tanto para el profesor como para el alumno. Se reveló una postura ante la enseñanza de las matemáticas que colocaba al alumno en un plano de sujeto activo, donde éste podría experimentar, conjeturar, formular, resolver, explicar, predecir y contrastar con los demás compañeros y con el profesor. Los profesores en formación recurrieron a diferentes sistemas de representación y sus interconexiones, lo cual reveló la búsqueda de alternativas para facilitar la comprensión en los alumnos. Exploraron formas de explicar el álgebra a los alumnos como mecanismos para favorecer la comprensión de la situación problema. Se puso en evidencia la aplicación del proceso de modelización, integrado a la CG, en todas sus fases para el diseño de la actividad didáctica de contenido algebraico solicitada, remarcándose el énfasis que mantuvieron en el uso de preguntas abiertas.

Las producciones de los participantes estuvieron referidas a: 1. La aplicación sistemática de la modelización en la resolución de problemas del mundo real, 2. El uso de la experimentación para la resolución de problemas, 3. La utilización de la calculadora gráfica en los momentos de abstracción y resolución correspondientes al proceso de modelización y 4. La utilización de las potencialidades de la calculadora gráfica con fines didácticos.

Respecto a la modelización, los profesores en formación propusieron problemas abiertos con el propósito de contribuir al desarrollo de la autonomía intelectual de los alumnos.

Por otra parte, respecto a la secuencia, en el momento inicial sólo se enfatiza en plantear la situación problema, formular el modelo, resolver, plantear otros ejemplos similares y comprobar resultados con la CG; mientras que en el momento final se considera el trabajo en grupo por parte de los alumnos, el planteamiento de situaciones y la selección y formulación de problemas, la construcción y representación múltiple del modelo (con el apoyo de la CG), interpretación de las soluciones y la formulación de nuevas preguntas. Esto revela avances en el conocimiento didáctico de los profesores en formación generados en la implementación del programa.

En lo relativo a la importancia del álgebra lineal para la enseñanza, los profesores en formación plantearon contextos que permitieran utilizar los conceptos algebraicos para la aplicación de la modelización y el reconocimiento de diferentes formas de enseñanza.

REFERENCIAS

BORASSI, R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the learning of mathematics*, *7*, 2-9.

BRUNNER, A., COSKEY, K. & SHEEHAN, S. (1998). Algebra and Technology. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. *Yearbook*. Reston: NCTM.

Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (1992). *Boletín Oficial Nº 56* (anexo II), Junio, 20. Sevilla: Autor.

DORIER, J. (Ed.) (2000).*On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

DUVAL, R. (1995). Semiosis et pensée humaine. Paris: Peter Lang.

FAUVEL, J. (Ed.) (1991). Special Issue on History in Mathematics Education. *For the learning of mathematics*, *11* (2).

FREUDENTHAL, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Strctures. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

GALBRAITH, P., HAINES, C. & IZARD, J. (1998). How do Students´ Attitudes to mathematics Influence the Modelling Activity? En P. Galbraith, W. Blum, G. Booker

& I.D. Huntley (Eds.), *Mathematical Modelling. Teaching and Assessment in a Technology-Rich World*. Chichester, UK: Horwood Publishing.

HAREL, G. (1998). Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching (or Vice Versa). *The American Mathematical Monthly*, 6. 497-507

HOUSTON S. K., BLUM, W., HUNTLEY, I. & NEIL, N.T. (1997): *Teaching and Learning Mathematical Modelling*. Chichester: Albion Mathematics and Applications Series

JANVIER, C. (Ed.) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

KUTZLER, B. (2000). The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education. 7* (1), 5-24.

NISS, M., BLUM, W. & HUNTLEY, I.(1991). *Teaching and Mathematical Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood limited

ORTIZ, J. (2002). *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación* (Tesis Doctoral). Granada, España: Universidad de Granada.

RICO, L. (1997a). Los organizadores del currículo de matemáticas. In L.Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Horsori.

RICO, L. (1997b). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. In L.Rico (Ed), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis

Modo de uso del conocimiento profesional en procesos de reflexión en la formación inicial de profesores de matemáticas[1]

María Peñas Troyano y Pablo Flores Martínez

Universidad de Granada

Resumen:

El objetivo de esta comunicación es describir una investigación que estamos llevando a cabo en la Universidad de Granada, en la que analizamos el proceso de reflexión que realizan los estudiantes de 5º de Matemáticas del curso 2002-2003 sobre cuestiones profesionales relativas a la enseñanza de las matemáticas, que les han surgido durante las prácticas de enseñanza. Para caracterizar la reflexión de los estudiantes nos basamos en una serie de dimensiones (ideas y creencias, autoridad, consideración del contexto, situaciones problemáticas y uso del conocimiento). En este documento tan sólo trataremos el modo en que los estudiantes usan el conocimiento profesional cuando tienen que impartir una clase sobre una cuestión profesional concreta (¿Cómo evaluar un ejercicio-examen?).

Palabras Claves: Formación Inicial de Profesores de Secundaria, Didáctica de la Matemática, Práctica reflexiva, Cuestiones Profesionales.

1. INTRODUCCIÓN

La reflexión sobre cuestiones profesionales puede resultar beneficiosa para afrontar las dudas que les surgen a los estudiantes durante su periodo de *Prácticas*, ya que los procesos de reflexión suponen la toma de conciencia por parte de los estudiantes de sus posiciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, lo que es un punto de partida para que los estudiantes profundicen en su práctica docente.

Nuestra investigación se realiza con estudiantes de 5º Curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada, de la especialidad de Metodología. En la asignatura Prácticas de Enseñanza que impartimos, los estudiantes trabajan sobre cuestiones surgidas durante el *practicum* en Institutos de Enseñanza Secundaria. El interés por este estudio surge de la necesidad observada por parte de los investigadores en formación de profesores de indagar en las cogniciones del profesor de matemáticas

[1] El presente trabajo ha sido realizado en el marco del Grupo de Investigación FQM-0126 del Plan Andaluz de Investigación, "Teoría y Métodos en Educación Matemática", del *Departamento de Didáctica de la Matemática* de la Universidad de Granada.

en el contexto profesional y que se amplia a la fase de aprender a enseñar (Cooney, 1999, 2001, Ázcarate, 1999, Llinares, 2002). Llinares (1991) comenta que es necesario “prestar mucha más atención en los cursos de formación al conocimiento y concepciones de los estudiantes para profesor y a la forma en qué se generan” (p. 15).

Para analizar la reflexión realizada por los estudiantes tomamos en consideración una serie de dimensiones: ideas, creencias, situaciones problemáticas, autoridad, consideración del contexto, y modo de uso del conocimiento (Peñas, 2002). En esta comunicación nos centraremos sólo en el modo de uso del conocimiento profesional por parte de nuestros estudiantes que analizamos atendiendo a la caracterización de Broudy (1964) utilizada por Eraut (1994) en sus trabajos sobre desarrollo profesional.

Comenzamos caracterizando el contexto de nuestra investigación (la fase posterior a las prácticas en Institutos de nuestros estudiantes) y posteriormente desarrollaremos brevemente el análisis realizado sobre la reflexión de un grupo de estudiantes (seis estudiantes trabajando sobre una cuestión profesional: ¿Cómo calificar un ejercicio?) en relación a una de las dimensiones utilizadas en nuestra investigación (modo de uso del conocimiento). El análisis de la relación que establecen nuestros estudiantes con el conocimiento presente en el proceso de reflexión, manifestado en el modo en que se usa por nuestros estudiantes con posterioridad en la elaboración de una clase con sus compañeros sobre la cuestión trabajada, nos permitirá observar la significatividad que le han concedido a dicho conocimiento. Cerraremos con unas conclusiones acerca de la reflexión de los estudiantes y el estado actual de la investigación.

2. CARACTERIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La asignatura Prácticas de Enseñanza es un taller de formación profesional cuyo momento principal es la experiencia de los estudiantes en los centros de enseñanza (*practicum*), pero que permite por su estructura preparar dichas prácticas y emplear éstas una vez finalizadas para debatir sobre la experiencia (Flores, 1998b). Tras las prácticas estos estudiantes comienzan un módulo formativo que tiene como inicio la detección de situaciones problemáticas vividas durante las mismas. Los estudiantes trabajan estas situaciones en grupos guiados por el formador. El proceso pretende que cada grupo de estudiantes reflexione sobre una cuestión profesional en un proceso que deberá concluir con la impartición de una clase a sus compañeros de la asignatura de Prácticas de Enseñanza sobre la cuestión seleccionada (Flores 1998b, Flores y Peñas, 2003).

En este módulo estamos llevando a cabo una investigación cuyo objetivo general es analizar y caracterizar el proceso de reflexión de los estudiantes. De acuerdo con las dimensiones establecidas en educación matemática para el constructo reflexión (Cooney, 1999), esto se concreta en describir el nivel de reflexión que alcanza un grupo de estudiantes durante las distintas fases del módulo de enseñanza, así como su posible evolución a lo largo del proceso, para lo cual vamos a identificar y caracterizar la reflexión atendiendo a las siguientes dimensiones: ideas, creencias, autoridad, situaciones problemáticas, contexto y *modo de uso del conocimiento* (Peñas, 2002).

En la actualidad la concepción del profesor como profesional reflexivo está tomando fuerza en numerosos trabajos sobre la formación de profesores de matemáticas, que toman como punto de partida una renovación de las ideas de Dewey (1989), a las cuales se le incorpora la noción de reflexión de Von Glasersfeld (1991) y la concepción de prácticos reflexivos de Schön (1983, 1987).

Según Atkinson y Claxton (2002) hay tres procesos principales que apuntalan la enseñanza: el *pensamiento intuitivo* que subyace bajo la acción y la toma de decisiones rápidas, el *pensamiento analítico* y objetivo que permite a los profesores planificar el aprendizaje, y el *pensamiento reflexivo* que es crucial para aprender de la experiencia y poder valorarla. El pensamiento intuitivo es característico de la experiencia y su producto es el conocimiento tácito que se hace evidente en la práctica, a la que sostiene. Sin embargo la práctica por sí sola es insuficiente y necesita tanto planificación como revisión. En la fase de planificación o preparación, el pensamiento racional hace uso de los conocimientos teóricos para elaborar un plan de lo que hay que hacer. En la fase de revisión, el pensamiento reflexivo nos permite aprender de la experiencia práctica en forma de lecciones concretas y contextualizadas dentro del oficio, que a su vez nos servirán de base para programaciones futuras.

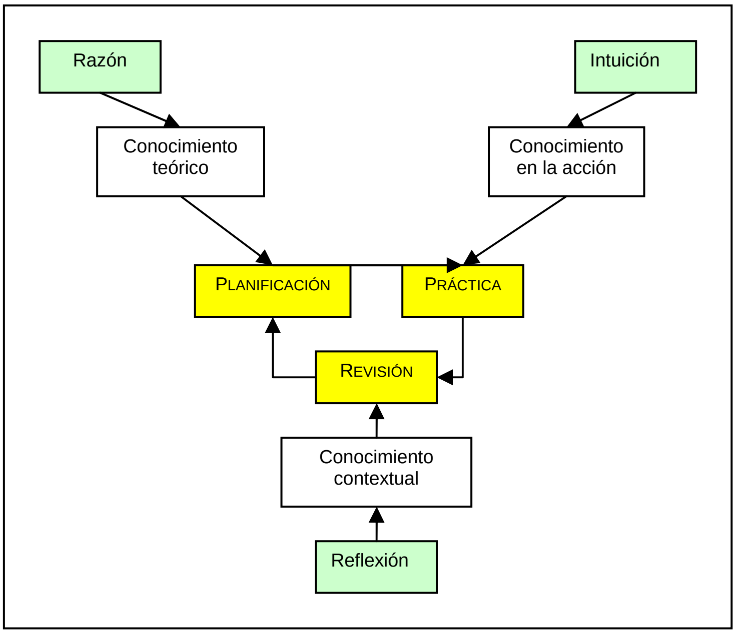


Figura 1. Los procesos de pensamiento de la enseñanza (Atkinson y Claxton, 2002)

En la formación de un profesor de matemáticas intervienen principalmente estos tres procesos que configuran otros tres tipos de conocimiento profesional: teóricos consensuados, prácticos del docente y la integración del profesor de ambos aspectos de una manera coherente a sus ideas acerca de la enseñanza y el aprendizaje que es lo que constituye el conocimiento práctico profesional. Los conocimientos teóricos consensuados permiten al profesor un conocimiento acerca del contenido a enseñar (matemáticas en nuestro caso), acerca de cómo enseñar y cómo se aprende ese contenido (didáctico del contenido), y qué contenidos deben enseñarse y bajo que supuestos (curricular) (Shulman, 1986). En el campo concreto del profesor de matemáticas Bromme (1994) propone una "topología" compuesta por los siguientes conocimientos: de las matemáticas como disciplina, de las matemáticas escolares, de la pedagogía y conocimiento pedagógico específico al contenido y la integración cognitiva desde diferentes disciplinas. Pero la práctica docente necesita además de otros tipos de conocimientos derivados de distintas situaciones (gestión del aula, interacción profesor-alumno, aprendizaje en grupo,…) que configuraran la problemática del aula. La integración de estos aspectos entendemos que deberá llevarse a cabo mediante un proceso de *reflexión* que nos permita preguntarnos sobre los principios que influyen en mi práctica docente y la coherencia de mi actuación en el aula con la intención de resolver las cuestiones que surgen en mi práctica diaria. Como dice Eraut (1994) el conocimiento profesional no puede ser caracterizado de una manera que sea independiente a cómo se aprende y cómo se usa que es la esencia de su naturaleza.

Las investigaciones presentadas son la base de nuestro trabajo porque nos permiten situar el pensamiento reflexivo dentro de una estructura cognitiva más amplia (tipo de pensamiento de Atkinson y Claxton, 2002), categorizar el tipo de conocimiento empleado en la reflexión de los estudiantes (Shulman, 1986; Bromme, 1994) y enmarcar el estudio del conocimiento profesional como un elemento a tener en cuenta en el desarrollo profesional del docente (Eraut, 1994) ya que se considera que éste está asociado a una mejora de las competencias profesionales lo que significa una asimilación de dicho conocimiento. Nuestra investigación a diferencia de las anteriores trabaja con estudiantes para profesor y no con docentes en ejercicio.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Al considerar como principal objetivo la comprensión de los fenómenos desde una concepción múltiple de la realidad, estando interrelacionados el investigador y el objeto de la investigación, esta investigación se realiza desde el paradigma cualitativo (Colás, 1998), con un carácter interpretativo (Gutiérrez, 1999). En nuestro trabajo la muestra es un grupo de seis estudiantes, del que hemos realizado un estudio de caso, lo que constituye uno de los métodos más característicos de este enfoque (Colás, 1998).

<table>
<tr><td rowspan="3">PROCESO FORMATIVO
(Secuenciación Temporal)</td><td colspan="4">PROCESO INVESTIGADOR</td></tr>
<tr><td colspan="2">INSTRUMENTOS</td><td rowspan="2">PROCEDIMIENTOS</td><td rowspan="2">VARIABLES</td></tr>
<tr><td>Derivados de las producciones de los estudiantes</td><td>Derivados de la observación participante</td></tr>
<tr><td>PRIMER SEMINARIO</td><td rowspan="2">Grabación de audio
Registro de las tareas
Pizarra de las sesiones</td><td rowspan="2">Anotaciones del Investigador
Diario del Investigador</td><td rowspan="5">Análisis de Contenido</td><td rowspan="5">Ideas
Creencias
Autoridad
Situaciones Problemáticas
Contexto
Modo de uso del conocimiento profesional</td></tr>
<tr><td>SEGUNDO SEMINARIO</td></tr>
<tr><td>CLASE</td><td>Grabación de audio</td><td>Rejilla de observación</td></tr>
<tr><td>MEMORIA</td><td colspan="2">Trabajo Final de los Estudiantes</td></tr>
<tr><td>CIERRE</td><td colspan="2">Cuestionario de Valoración del Módulo</td></tr>
</table>

Cuadro 1: Instrumentos de recogida de datos según el momento del proceso formativo.

La toma de datos para detectar el proceso de reflexión de los estudiantes se realiza durante un proceso de observación participante así como la recogida de sus producciones. Para llevar a cabo la necesaria triangulación (Cohen y Manion, 1989) hemos propuesto la presencia de varios observadores en algunos momentos del proceso, lo que genera una doble recogida de datos empleando dos instrumentos, la grabación en audio y parrillas de observación cumplimentadas por los observadores. Posteriormente se ha realizado un análisis de contenido de los documentos señalados. En el cuadro 1 se presentan los instrumentos de recogida de información diferenciados según su origen.

3. DESARROLLO Y ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA

La investigación está en curso, y pretende analizar la reflexión de varios grupos de estudiantes. En esta comunicación presentamos una parte del estudio de uno de los grupos, que se plantea como problemática para trabajar durante el módulo las dificultades de la acción de evaluar, que acaba concretándose en la siguiente cuestión: *¿Cómo calificar un ejercicio-examen?*. El grupo está constituido por seis estudiantes que llamaremos; Alicia, Beatriz, Carlos, Davinia, Esther y Fátima. Estos estudiantes sólo han tenido tres asignaturas de carácter didáctico durante sus estudios en la Facultad de Ciencias y tienen una concepción formal de la matemática (Flores, 1998a). En el siguiente apartado analizaremos el nivel de reflexión de nuestros estudiantes centrándonos en analizar de qué manera emplean el conocimiento profesional para afrontar la cuestión seleccionada. El estudio de la dimensión seleccionada para esta comunicación (*modo de uso del conocimiento)* no se realiza de manera aislada al resto de dimensiones de la investigación sino que unas influyen en las otras a pesar que para no confundir al lector nos ciñamos a los elementos que caracterizan de una manera más evidente dicha dimensión.

Tal como hemos señalado, para analizar la reflexión hemos grabado en audio los seminarios formativos en los que los estudiantes definen la cuestión profesional y preparan una clase para impartirla a sus compañeros, así como la clase que finalmente llevaron a cabo. Igualmente recogimos una serie de documentos en los que se reflejaba su diseño de clase y las opiniones sobre la misma. Posteriormente hemos realizado un análisis de contenido de estos documentos. Para ello hemos transcrito las grabaciones, con lo que hemos convertido todos los datos en documentos de texto. Estos escritos los hemos descompuesto en párrafos que encierren un desarrollo completo de ideas sobre las dimensiones que se van a analizar, con lo que estos párrafos constituyen las unidades de contenido. En esta comunicación sólo vamos a detenernos en una de las dimensiones, el modo en que los estudiantes emplean el conocimiento profesional (Eraut, 1994) para exponer la cuestión seleccionada y trabajada (*¿Cómo calificar un ejercicio?*) en una clase a sus compañeros.

Para conseguir analizar el modo en que usan los estudiantes el conocimiento profesional durante el proceso de reflexión utilizaremos la tipología de Broudy (1980, en Eraut, 1994) que distingue entre cuatro modos de uso de conocimiento: *Repetición, Aplicación, Interpretación y Asociación.* Aplicando esta tipología a la formación de profesores tendremos un modo de interpretar el uso del conocimiento por parte de los estudiantes que tome en consideración la complejidad de la enseñanza y lo imprevisible de las tareas que se plantean en ella, así como para considerar que el uso del conocimiento en la enseñanza no se reduce al simple juego de aplicar éste para que la práctica sea adecuada. La *repetición* de un conocimiento práctico es esencialmente ateórica y normalmente es criticada en los contextos que cambian constantemente, ya que esa reedición es inapropiada e inmoral (Eraut, 1994). La repetición domina una gran proporción del adiestramiento en la educación superior que se caracteriza por las similitudes entre el contexto en que el conocimiento se ha adquirido y en el que se ensaya y se usa. Normalmente, este conocimiento no requiere un proceso o reorganización por parte del usuario, y se presenta en un formato que difiere muy poco del recibido por el formador. El modo de *aplicación* se podría entender como una derivación del conocimiento práctico de la teoría para conseguir lo que se llama “teoría más molida” (Glasser y Strauss, 1967). Usar el conocimiento aplicándolo es tener más en cuenta el lugar donde se aplica o considerar los aspectos prácticos del conocimiento teórico que surge de manera inmediata de éste. Si una “aplicación” se ha ensayado o adiestrado entonces estaríamos ante una simple repetición. Pero cuando usamos el conocimiento en situaciones o circunstancias que difieren de las que inicialmente estaban previstas nos estaremos alejando de la repetición. La aplicación, implica trabajar con reglas o procedimientos, aunque ocasionalmente estos puedan ser inventados por uno mismo. En los contextos prácticos el conocimiento teórico tiene que ser adaptado para satisfacer las condiciones particulares de cada situación. Esto requiere más que la simple aplicación de la teoría. Las teorías tienen que ser *interpretadas* para ser usadas. El uso interpretativo del conocimiento, según Eraut (1994) tiene una parte menos clara que es lo que él llama el "juicio profesional". Pero el juicio no implica un buen uso del mismo. Sin embargo esto plantea nuevas preguntas: ¿Qué ocurre ante un número grande de interpretaciones? ¿Y si la interpretación no tiene relación con el conocimiento teórico? ¿Seleccionamos de entre las posibles interpretaciones aquellas según nuestra preferencia personal, la utilidad o bien los principios éticos? ¿Cómo aprendemos a interpretar el conocimiento teórico para su uso? El modo de uso interpretativo necesariamente implica una interacción entre la teoría y práctica. El uso de la teoría asociativa según Eraut (1994) no ha sido muy explorada en educación a pesar de la larga historia de la asociación como un concepto psicológico. Broudy llama semiconsciente e intuitivo, al uso del conocimiento de modo asociativo y sugiere que involucra a menudo metáforas e imágenes. Éstas no sólo derivan de la experiencia práctica sino que también sirven como portadoras de las ideas teóricas.

En nuestro contexto cuando el estudiante entra en contacto con el conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas selecciona en función de la significatividad que le atribuya, aunque a la vez da un valor en función de quien se lo suministre y el papel que espera desempeñar en el futuro inmediato. En el módulo formativo, el grupo de estudiantes tiene que dirigir una clase, por lo que tendrá que suministrar una información erudita a sus compañeros, y ésta debe venir reflejada en el conocimiento con el que va a interactuar. A la vez tiene que buscar respuestas a la cuestión que su grupo ha elegido. El grado en que el conocimiento profesional le ayude a satisfacer la expectativa de resolver la cuestión aumentará la sensación de significatividad de ese conocimiento. Pero también el grado en que se sientan capaces de repetir el conocimiento a sus compañeros como un conocimiento erudito les dará la sensación de superioridad que todo profesor debe guardar respecto a sus alumnos (aunque sean sus compañeros). Concederle mayor peso al papel erudito o de profundización se apreciará en el grado en que sean capaces de crear una argumentación bien fundamentada sobre la cuestión, esto es, que se base en relaciones, explícitas o implícitas, que estén en consonancia con las ideas y creencias que los estudiantes ponen de manifiesto durante los seminarios. Si el conocimiento profesional se queda en el papel erudito, los estudiantes se limitarán a *repetirlo* (Broudy). Cualquier avance en la tipología de Broudy constituirá una muestra de que el conocimiento ha adquirido un estatuto superior para los estudiantes.

MODO DE USO DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL

Los estudiantes seleccionaron la cuestión profesional que iban a estudiar en un seminario formativo, y recibieron y seleccionaron varios documentos para profundizar en la cuestión y diseñar la clase que iban a impartir a sus compañeros. Aunque durante los seminarios que han tenido con el formador se ha aludido a algunos términos del conocimiento profesional sobre evaluación en matemáticas, el análisis que hemos realizado de otras variables (como las ideas y creencias de los estudiantes, por ejemplo), nos ha decidido a analizar la relación que establecen con el conocimiento profesional cuando lo emplean para dirigir la clase que imparten a sus compañeros, que es un momento en que se ven impelidos a poner en juego tanto el conocimiento erudito, como a darle sentido para convencer a los demás.

Observando la clase que imparten los estudiantes podemos percibir el modo en que usan el conocimiento, para lo que vamos a atender a la tipología de Broudy (repetición, aplicación, interpretación y asociación) usada con posterioridad por Eraut (1994). A los estudiantes de este grupo se les suministra documentos teóricos sobre evaluación para profundizar en el tema. La siguiente tabla muestra la bibliografía suministrada:

Barberá, E. (1999 Evaluación de la enseñanza, evaluación del aprendizaje. Barcelona: Edebé Belmonte, M. (1993) La práctica de la evaluación en la enseñanza secundaria obligatoria. Bilbao: Ed. Mensajero Goring, P.A. (1971) Manual de mediciones y evaluación del rendimiento en los estudios. Buenos Aires: Kapelusz Thyne, M. (1976) Principios y técnicas de exámenes. Madrid: Anaya

Sin embargo, este conocimiento no aparece explícitamente en clase. La clase se convierte en una repetición de la situación vivida por los estudiantes durante las prácticas con la posterior reflexión y debate, similar al realizado por ellos mismos en el seminario. En el debate que surge en la clase con sus compañeros estos intentan mostrar las inquietudes y dudas que les surgieron durante el seminario utilizando para ello las ideas que aparecieron en éste y motivándolas mediante la aplicación del examen que les dio lugar al problema. El examen se descontextualiza para evitar la amplia casuística del contexto de una clase y se les da a los compañeros sin mas consigna que "consensuar unos criterios de evaluación para calificar el examen". El único conocimiento profesional que se les suministra a los compañeros es de carácter curricular (Bromme, 1994), y consiste en los criterios de evaluación de Bachillerato del curso correspondiente, donde aparece el tema de matrices, es decir:

"Utilizar el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices en situaciones reales en las que hay que transmitir información estructurada en forma de tablas o grafos. Transcribir un problema expresado en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlo utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas", (Real Decreto 3474/2000)

Criterios de evaluación para calificar este ejercicio. Calcula la inversa: A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Durante la realización de la tarea, los compañeros atienden a los usos habituales de las matrices que estudian en la Facultad, es decir, utilizar el lenguaje matricial de manera descontextualizada lo que les lleva a trabajar operaciones con matrices y resolución de ecuaciones. En consonancia con ello el examen que plantean a sus compañeros no tiene una relación clara con estos criterios de evaluación, si bien los estudiantes no parecen percibirlo. Podríamos decir que el conocimiento profesional de carácter matemático perdura en la fase de *repetición* (Broudy) del dominante en su formación, el de las asignaturas de Matemáticas.

Cuando en el seminario se plantea a los estudiantes que realicen un mapa conceptual sobre el tema de matrices (Figura 2), éste se desarrolla muy pormenorizadamente en lo referente al tipo de matrices, elementos de las matrices y operaciones con matrices. En cambio consideran tan sólo como aplicaciones de las matrices: la resolución de ecuaciones (sin indicar contextos), los movimientos geométricos y las aplicaciones lineales (cambio de base). En este sentido se pone de manifiesto un conocimiento matemático sobre el tema (Bromme, 1994) centrado en la operacionalidad de las matrices. Podemos decir que repiten el conocimiento sobre matrices que manejan en Álgebra Lineal, sin que aparezcan los criterios de evaluación curriculares. Por tanto el conocimiento sobre el currículo, eclipsado por el matemático formal, da lugar a la primera fase de la tipología de Broudy, la repetición.

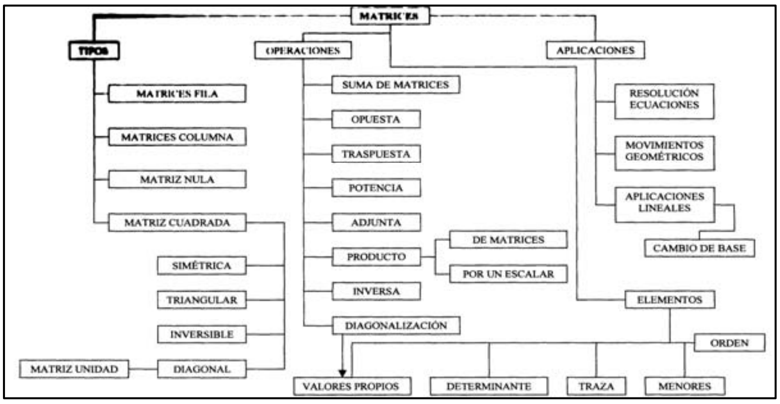
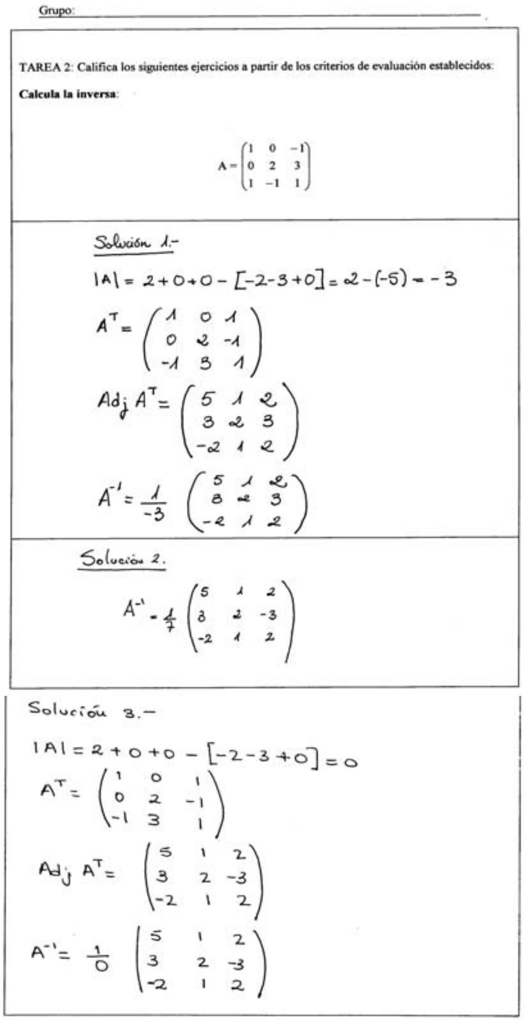


Figura 2. Mapa conceptual de los estudiantes sobre matrices.


Grupo:

TAREA 2: Califica los siguientes ejercicios a partir de los criterios de evaluación establecidos:

Calcula la inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución 1.-

$|A| = 2+0+0-[-2-3+0] = 2-(-5) = -3$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$Adj\, A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución 2.

$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución 3.-

$|A| = 2+0+0-[-2-3+0] = 0$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$Adj\, A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{0} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Los estudiantes a instancia del formador y tras el debate surgido durante los seminarios, sobre la diferencia entre calificar y evaluar, presentan a sus compañeros la definición que da la Real Academia de la Lengua de cada uno de esos temas, pero durante la clase la diferenciación no surge de manera natural pues sus compañeros parecen tener clara la diferencia entre ambos conceptos. Esto produce que los estudiantes que dirigen la clase promuevan una argumentación (conocimiento profesional pedagógico, Bromme, 1994) que en el contexto del seminario tenía sentido pero que no ha podido ser extrapolada a la situación de la clase.

Una de las tareas que los estudiantes proponen a sus compañeros es: “califica los siguientes ejercicios a partir de los criterios de evaluación establecidos”. Para ello les dan tres resoluciones incorrectas. En el propio ejercicio y en las soluciones se observa que los estudiantes intentan realizar una réplica lo más exacta posible del problema que se les planteó a ellos durante las prácticas. En la solución 1 al ejercicio que plantean a sus compañeros el alumno divide por cero (era su caso conflictivo) y todo lo demás lo hace bien, en la solución 2 se equivoca en un determinante y en un signo de la adjunta, y en la solución 3 da directamente la solución sin pasos intermedios (lo que refleja la problemática de algunos de los componentes del grupo sobre que es más importante el resultado o el proceso). Esta tarea reafirma el papel que otorgan al aprendizaje de las matrices donde la importancia reside en la operacionalidad de las mismas y no en su funcionalidad. Los errores presentados en los ejercicios se mantienen en el plano de lo anecdótico sin profundizar en por qué les concedemos tanta importancia a dichos errores en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La diferencia entre las distintas calificaciones de sus compañeros es la esperada por lo que se sienten satisfechos de esta replicabilidad al conseguir que sus compañeros pasen "exactamente" por las mismas experiencias que ellos.

En las conclusiones del grupo se manifiesta la complejidad del problema y el consenso que han logrado, siempre desde una perspectiva de las creencias de partida, que a lo sumo logran plasmarlas, con lo que se hacen explícitas, aunque en su formulación difícilmente se aprecia el conocimiento profesional trabajado. Estas conclusiones son las siguientes:

- *"los resultados de un examen son válidos en la medida en que están de acuerdo con el objetivo del examen"*
- *"los criterios de evaluación, aunque útiles a la hora de calificar un examen, no deben ser rígidos ya que no dan respuesta a todas las situaciones que se plantean"*
- *"un solo examen no es representativo de lo que el alumno sabe"*
- *"calificar es distinto que evaluación"*

En el trabajo memoria se vuelven a tratar una cuestión que se había planteado en el curso del primer seminario, en el que el formador había recurrido a las metáforas con la intención de diferenciar las ideas de evaluación formativa (profesor médico, diagnosticador y curador) y sumativa (profesor juez, sancionador, dictando sentencia). Por ello dejan una pregunta abierta para el debate con sus compañeros: ¿El profesor debe actuar cómo médico o cómo juez ante la evaluación? *"con la intención de que sus compañeros dieran sus opiniones sobre que era para ellos evaluar y calificar"*. Se diría que los estudiantes no se han sentido cómodos con esta metáfora de la evaluación pero creen que si el formador la empleó con ellos para motivar la discusión puede ser útil para motivar la discusión de sus compañeros. A pesar de que la experiencia con ellos no fue muy provechosa consideran que esta metáfora quizás si sea significativa en el contexto de una clase más numerosa y con mayor diversidad de opiniones. Aún así no consiguen profundizar en esta metáfora por no haberla trabajado con anterioridad, lo que refuerza su idea de que es necesario ensayar mejor el debate con los compañeros.

4. CONCLUSIONES.

Los análisis realizados hasta el momento sobre la actuación de los estudiantes y sus documentos nos muestran que en este grupo se emplea el conocimiento profesional básicamente mediante repetición de modelos ya conocidos, tanto para el conocimiento matemático (las matrices, lo que les permite elaborar un mapa conceptual), como para algún aspecto del conocimiento pedagógico tratado durante el seminario (errores de los alumnos y metáforas sobre la evaluación), y que los estudiantes han considerado importante para llevar a la clase con sus compañeros. Los intentos de aplicación de este conocimiento son más formales y aparentes que reales, ya que o bien no llegan a desarrollarlo (como en el caso de la alusión al currículo), o no son capaces de introducirlo en el argumento que desarrollan en su clase, por lo que pensamos que han prevalecido las ideas implícitas que tenían los estudiantes sobre la evaluación.

El proceso formativo que se está planteando se propone crear las condiciones para que el conocimiento profesional adquiera sentido para los estudiantes, al ayudarlos en la resolución de cuestiones profesionales que ellos mismos han seleccionado. Sin embargo el análisis sobre la relación que este grupo de estudiantes adquiere con el conocimiento nos lleva a percibir la fuerza de las relaciones con los conocimientos matemáticos sin haber logrado crear condiciones para que les sean significativas las otras componentes del conocimiento profesional. Ello nos anima a considerar en un todo las otras dimensiones de análisis que estamos considerando en la investigación, con objeto de analizar el grado en que se produce algún tipo de distanciamiento de las creencias implícitas, de fundamentación de las ideas, de reorganización de las relaciones entre ellas, en esencia, de actuación reflexiva. El análisis en profundidad de las diferentes dimensiones, así como de los diferentes grupos de estudiantes, nos dará una idea del grado de reflexión que es posible desarrollar en estos estudiantes en el período de tiempo que, en nuestro país, se va a desarrollar la formación profesional inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Esperamos con ello ayudar en el diseño de estos cursos de formación.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATKINSON, T. y CLAXTON, G. (Eds.) (2002) *El profesor intuitivo.* Barcelona: Octaedro

ÁZCARATE, P. (1999) El conocimiento profesional: Naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, vol. 8, pp. 111-137

BROMME, R. (1994) Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Scholz, R. Sträber y Winkelmann (Eds.) Didactics of mathematics as a scientific discipline (pp. 73-88) Dordrech: Kluwer

BROUDY, H. S., SMITH, B.O. y BURNETT, J. (1964) *Democracy and excellence in American Secondary Education.* Chicago: Rand McNally

COHEN, L. y MANION, L. (1989) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla

COLÁS, M.P. (1998) La metodología cualitativa. En Colás, P.; Buendía, L. *Investigación educativa.* (pp. 249-277) Sevilla: Ed. Alfar

COONEY, T.J. (1999) Conceptualizing teachers' ways of knowing. En *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38: 163-187.

COONEY, T.J. (2001) Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. En F-L Lin & T.J. Cooney (Eds.) *Making sense of mathematics teacher education*, pp. 9-31 Holanda: Kluwer Academic

DEWEY, J. (1933) *How we think. A restatement of the relation of reflective thinking to the Educative Process*. Massachusetts: D.C. Health. Publicado en castellano (1989) Cómo pensamos. Nueva exposición entre pensamiento reflexivo y proceso educativo. Barcelona: Ed. Paidós

ERAUT, M. (1994) *Developing Professional Knowledge and Competence.* London: The Falmer Press

FLORES, P. (1998a) *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.* Granada: Ed. Comares

FLORES, P. (1998b) *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada

FLORES, P. y PEÑAS, M. (2003) *Formación inicial de profesores de matemáticas reflexivos.* Revista Educación y Pedagogía, nº 35, pp. 93-117. Colombia: Universidad de Antioquia.

GUTIÉRREZ, J. (1999) El proceso de investigación cualitativa desde el enfoque interpretativo y de la investigación-acción. En Buendía, P.; González, D.; Gutiérrez, J. y Pegalajar, M.: *Modelos de análisis de la investigación educativa.* (pp. 11-64) Sevilla: Ed. Alfar

LLINARES, S. (1991) *La formación de profesores de matemáticas.* Sevilla: GID. Universidad de Sevilla.
LLINARES. S. (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. En Leder, G.C., Pehkonen, E. & Törner, G. (Eds.). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education.* (pp. 195-209). Dortrech, Kluwer.
PEÑAS, M. (2002) *Un estudio del proceso de reflexión sobre cuestiones profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas.* Granada: Universidad de Granada
SCHÖN, D. A. (1983) *The reflective practitioner*. Londres: Temple Smith. Publicado en castellano (1998) El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan. Barcelona: Paidós
SCHÖN, D.A. (1987) *Educating the reflective practioner.* San Francisco: Jossey-Bass. Publicado en castellano (1992) La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona: Ed. Paidós
SHULMAN (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching.E*ducational Researcher*, 15, (2) pp. 4-14.
VON GLASERSFELD (1991) Abstraction, representation and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. En L.P. Steffe (ed.): *Epistemological foundations of mathematical experience.* New York: Springer-Verlag (pp.45-67)

Una perspectiva didáctica en la iteración de funciones y el punto fijo

FLOR M. RODRÍGUEZ.

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca.
a164190@aida.usal.es

Resumen:

El presente escrito describe parte de un trabajo de investigación[1] en didáctica del análisis matemático, con el objeto de explorar las formas en que estudiantes universitarios de niveles avanzados hacen uso de recursos visuales para determinar, anticipadamente, convergencia de funciones iteradas en el marco de una particular interpretación del teorema del punto fijo.

Se parte del supuesto de que la visualización es una forma de desarrollar el pensamiento matemático, de tal manera que, el objeto didáctico radica en proporcionar al estudiante un medio para dirigirlo hacia el significado de convergencia a partir de situaciones del tipo $x_n = f(x_{n-1})$*. En general se pretende favorecer las acciones de enseñanza para generar aprendizajes más significativos.*

Abstract:

This paper describe a research in didactical of mathematical analysis, which the main aim is to explore the ways in which universities students of advanced grades use visuals recurs to decide, previously, concurrence of iterates functions in the frame of a particular interpretation of the point fixed theorem.

We part supposing that the visualization is a form to development the mathematical thinking, the didactical objective is provide to the student an environment for carrying toward the mean of concurrence from situations like $x_n = f(x_{n-1})$*. In general, the main goal is to assist actions on the teaching to generate more significant apprenticeship.*

Introducción

En didáctica, la sociedad evoluciona de acuerdo a sus necesidades, modificando sus formas de enseñanza y adecuándolas a los tiempos. Así por ejemplo en matemáticas la sociedad contemporánea busca mejores técnicas de enseñanza que favorezcan en los estudiantes un aprendizaje más efectivo de tal forma que éste sea capaz de usarlo y aplicarlo en contextos convenientes. La didáctica de la matemática es una disciplina que se encarga del estudio de fenómenos como el anterior, permitiendo la exploración de procesos propios en la

[1] Para detalles ver Rodríguez (2003).

construcción de conocimiento que son apoyados por los referentes cualitativos teóricos y empíricos de la misma disciplina. De aquí que, la investigación que se reporta surge de la convicción de que la investigación sobre fenómenos didácticos es una necesidad urgente, en virtud de que se quieren alcanzar logros tanto científicos como tecnológicos que hoy por hoy son prioritarios.

La investigación se llevo a cabo en varias etapas, enfocando la atención en la interacción implícita que existe entre los agentes inmediatos del medio escolar. Específicamente el estudio descansó sobre el tópico de las funciones recursivas analizando regularidades en el tratamiento de nociones como convergencia y divergencia desde una perspectiva dinámica, concentrando la atención en el teorema del punto fijo. En este sentido, se plantea la hipótesis de que a pesar del dominio de la noción de pendiente de una recta e "inclinación" de una curva que se tiene en las clases de cálculo diferencial e integral, no existe una sistematización de los contextos en los cuales se les puede vincular.

Se realizó el diseño de una secuencia de actividades cuyo objetivo fue priorizar la construcción de conocimiento en interacción con los actores didácticos (estudiante, profesor y saber) de tal manera que la predicción, como una práctica social, le permitiera a los estudiantes reconocer cuando una sucesión es convergente o no, mediados por fenómenos de visualización.

Como se observa, la investigación se ocupa de una problemática que plantean los aprendizajes ligados a conceptos matemáticos como convergencia, recursividad y visualización, con un tratamiento didáctico que se apoya tanto en la teoría de situaciones fundamentales adaptada a la matemática avanzada como en una aproximación que incorpora elementos epistemológicos, didácticos, cognitivos y sociológicos del saber matemático escolar.

El problema objeto de estudio

Desde la antigüedad se han favorecido los métodos "exactos" en detrimento a aquellos en que la aproximación resulte pertinente, sin embargo, algunas veces es necesario acudir a estos últimos para la resolución de ecuaciones no lineales que no pueden resolverse con métodos exactos, entre ellos están el de Newton, secantes, bipartición y aproximaciones sucesivas que tratan con funciones del tipo $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, es decir, con sucesiones recurrentes, y con ello se genera un proceso iterativo. La cuestión se centraliza entonces en:

¿Cómo los estudiantes podrían predecir la convergencia o divergencia de una sucesión recurrente utilizando estrategias de visualización?

Para contestar a la pregunta, la tecnología juega un rol substancial en el desarrollo de procesos de visualización dentro de la temática abordada, Devaney (1990) asegura que el proceso de *iteración* que pertenece a un aspecto de los sistemas dinámicos es imposible trabajar sólo con lápiz y papel, pero que es extremadamente fácil trabajar la iteración con calculadora u ordenador.

Como *objetivo* nos planteamos estudiar el papel que la visualización desempeña, situados al seno del análisis numérico, por parte de los estudiantes de la noción de convergencia de las funciones iteradas, con apoyo en una interpretación del teorema del punto fijo.

Una de las propiedades más importantes y más comunes para justificar los métodos iterativos es el Teorema del Punto Fijo de una Contracción (Porter, 1981). El teorema afirma que dada una función F, ésta tendrá un único punto fijo de convergencia, es decir, que habrá un valor de x tal que $F(x) = x.$

Teorema. Sea $F(x)$ una función continua definida en algún intervalo $\mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{b}$, tomando sus valores adentro del mismo intervalo, $\mathrm{a} \leq F(x) \leq \mathrm{b}.$ Supóngase que para alguna constante $\mathrm{K} < 1$ se tiene,

$$| F(x) - F(y) | \leq \mathrm{K} \, | x - y |$$

para todo x, y en este intervalo. Entonces F tiene un único punto fijo $a.$

Este punto fijo se puede calcular como el límite,

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n$$

donde,

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

empezando con cualquier punto x_0 entre a y b como el valor inicial de la iteración.

Estudiando detalladamente el teorema se puede deducir el siguiente resultado:

Corolario. Si $F(x)$ es continuamente diferenciable en algún abierto que contenga al punto fijo $\xi,$ y si $|F'(\xi)| < 1,$ entonces existe un $\varepsilon > 0$ de modo que la iteración de punto fijo con $F(x)$ converge siempre que $|x_o - \xi| \leq \varepsilon.$ Para algún x_0 en al abierto.

Observemos que para predecir la convergencia es suficiente la condición $|F'(\xi)| < 1,$ sin embargo, esta propiedad se utiliza hasta la práctica del cálculo del punto de convergencia, sin dar explicación del por qué es así, motivo por el que enfatizamos en la condición de diferenciabilidad planteada en el corolario de tal forma que el estudiante visualice la condición en un contexto gráfico aplicándola a la predicción que realice de convergencia o no – convergencia de alguna sucesión.

Soportes teóricos y aspectos metodológicos

La principal problemática se fundamenta en la ausencia de significado de los conceptos elementales matemáticos y en el dominio de éstos en el nivel medio superior y superior, los cuales subyacen para el aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados. De aquí que, los estudiantes no están familiarizados con los conceptos básicos como para dominarlos y darles uso en el tratamiento de conceptos matemáticos avanzados y en este sentido, se considera un concepto elemental y básico el de derivada de una función, el cual se sabe lo es en el nivel superior para estudiantes que llevan estudios a fines con matemáticas. Éste se reporta débil en algunas investigaciones, por ejemplo Mirón (2000) reporta que existe ausencia de significado del concepto de derivada y para un robustecimiento de tal noción plantea la hipótesis de que es en el contexto interactivo donde el estudiante será capaz de reconstruir significados de la derivada a partir de la identificación de patrones gráficos.

Al respeto del punto fijo, Sierpinska (1994) reporta que hay dificultad sobre tal noción cuando se les pide a los estudiantes obtener el punto fijo de funciones a trozos. Por lo tanto, se plantea la existencia de la ausencia de significado sobre el papel que juega la derivada en el teorema del punto fijo de una contracción.

Acotando la problemática se decidió encauzar la atención en un problema 'viable' para reconocer cómo la visualización es una forma de predecir resultados matemáticos. Particularmente sostenemos que la "inclinación" de una curva es un medio para predecir la convergencia o divergencia de una sucesión que proviene de una función iterada. Y aunque en los teoremas y ejemplos de los textos escolares, lo anterior se explicita ya sea con la condición de Lipschitz o con el criterio de la derivada analíticamente, no se pone suficiente énfasis en la visualización de tales condiciones. De este modo, la hipótesis de investigación radica en la proposición:

Aunque los estudiantes dominan las técnicas[2] *para decidir convergencia o divergencia de una iteración, algunos no acuden sistemáticamente a la "inclinación de la gráfica" como un elemento visual en la práctica escolar.*

Se considera que la visualización es un factor importante que podría generar heurísticas para el desarrollo de prácticas escolares (Davis, 1993; Hodgson, 1996; Zimmerman y Cunningham, 1991; Bosquez, 1994; López, 1994). En particular, se asume que la visualización permite establecer vínculos sobre el contexto analítico y el contexto gráfico, de tal forma que se reformule el papel implícito que juega la pendiente de la recta tangente en el teorema del punto fijo. La visualización es una parte esencial de la inteligencia humana, y por lo tanto el desarrollo visual que ocurre a partir de una aproximación fenomenológica para el aprendizaje de las matemáticas puede dar al estudiante un mejor entendimiento de los contenidos matemáticos. (Cantoral y Montiel, 2001)

Justo por considerar a la visualización generatriz de conocimiento con base en la práctica de predecir, se considera que el estudiante puede ser constructor de su propio conocimiento, por lo que necesariamente se creó la necesidad de generar interacciones entre estudiante, investigador y saber, y en este sentido la aproximación epistemológica[3] ayudó a interpretar los fenómenos suscitados en el desarrollo de la investigación. Asimismo la Teoría de Situaciones Didácticas[4] sustentó la hipótesis consolidando y relacionando los portentos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular, en el tópico antes referido.

El vínculo entre la problemática planteada y los soportes teóricos, se establece debido a que la aproximación socioepistemológica sostiene que las actividades y prácticas sociales son las que producen conocimiento. En este sentido, la predicción como práctica social será una propiedad para determinar con base en la visualización, la concurrencia de una sucesión

[2] Estás técnicas son aquellas del tipo algebraico que se enseñan habitualmente en el curso de cálculo a estudiantes de bachillerato y en análisis matemático a estudiantes de primeros cursos en la licenciatura de matemáticas. La conjetura radica del lado de los sistemas dinámicos, dando pie a heurísticas del contexto gráfico como una aproximación a la predicción de convergencia.

[3] La Aproximación Socioepistemológica asume que el fenómeno educativo es de naturaleza eminentemente social. Para detalles ver Cantoral, R. et al (2000)

Aproximación teórica en desarrollo por investigadores del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

[4] Para detalles ver Brousseau, G. (1986)

iterada. Aunado a la teoría de situaciones didácticas, se establecen las relaciones humanas pertinentes en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, para que el alumno construya su conocimiento mediado de sus propias experiencias y de sus interacciones con el entorno como factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios.

Al respecto de la metodología seguida, la secuencia de actividades fue diseñada con base en la ingeniería didáctica.[5] En esencia se contemplaron las siguientes fases que considera Farfán (1997):

- Un *análisis preliminar* de la situación a abordar involucrando tres componentes: la componente *didáctica*; la componente *epistemológica*; y la componente *cognitiva*.
- El diseño de la ingeniería didáctica y la elección de variables a ponerse en juego.
- La puesta en escena y *análisis de resultados*.

Las fases vinculan con las dimensiones en la construcción de conocimiento que establece la aproximación teórica antes referida, a saber, las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Puntualmente las dimensiones se consideraron de la siguiente manera:

Dimensión didáctica. Acerca del estado de la enseñanza. Se consideró el análisis de algunos textos que atienden en uno de sus particulares al teorema del punto fijo de una contracción, se analizó un curso específico de sistemas dinámicos.

Dimensión epistemológica. Explicación del devenir del contenido matemático en juego.

Dimensión cognitiva. Asociada a las características cognitivas de la población a la cual se dirige la enseñanza. Aplicación y análisis de una secuencia de actividades preliminar, con el objeto de conocer cuáles son dichas características y acotar las variables de control del diseño de actividades.

Dimensión social. Referente a la construcción social del conocimiento, correspondiente a una epistemología en su organización social.

El diseño didáctico

Por lo general los estudiantes tienen dificultad para comprender la esencia del Análisis Numérico debido a que es una asignatura que tiene características propias que se diferencian de otras materias dictadas en la carrera de matemáticas; en efecto, en él no existen siempre verdades aplicables a todas las situaciones y la pertinencia o no de utilizar distintas herramientas para resolver un problema depende fuertemente del contexto en el cual se va a utilizar. Esto implica que deben desarrollarse otras habilidades para resolver los problemas, heurísticas diferentes a las que el alumno esta acostumbrado.

Cabe mencionar que la población a la que se aplicó consistió de 17 estudiantes del 9º semestre de la carrera de matemáticas[6], que cursó la materia de sistemas dinámicos un semestre anterior. Se analizaron los contenidos que trabajaron y se hizo retroalimentación cuando se creyó necesario.

El objetivo general del diseño de una situación de aprendizaje fue intervenir en la reconstrucción del significado del teorema del punto fijo, por lo que se pensó en un diseño

[5] Para detalles ver Artigue, M. (1995)
[6] Estudiantes de la carrera de matemáticas de la Universidad Autónoma de Veracruz, México.

adaptable al proceso de convergencia cuando éste es tratado a partir de funciones iteradas tal y como se plantea en dicho teorema.

Se estimó que la puesta en escena constara de 4 etapas: con la primera etapa, se da cuenta de las dificultades presenciadas en lo que punto fijo se refiere (la investigación de Sierpinska (1994) es el modelo base para llevar a cabo esta primera etapa); en la segunda y tercera etapa se realizaron actividades con la tecnología[7] en lo que a nosotros conviene, es decir, suministraremos un importante recurso para observar el comportamiento del método numérico en la iteración con sus correspondientes interpretaciones geométricas y analíticas, abasteciendo la ventaja de poder realizar distintas experiencias en un tiempo relativamente corto y abarcando la mayor cantidad de designios; y en la cuarta etapa se abordó la temática en cuestión para validar y recapitular desde nuestra perspectiva hacia el tema, explicitando contenidos analíticos y visuales.

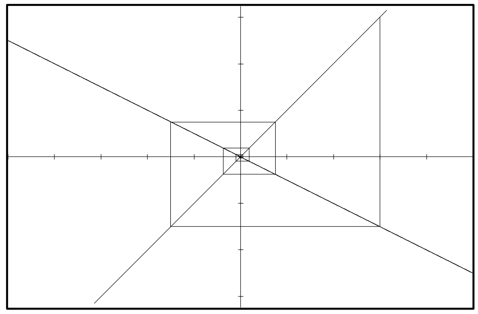
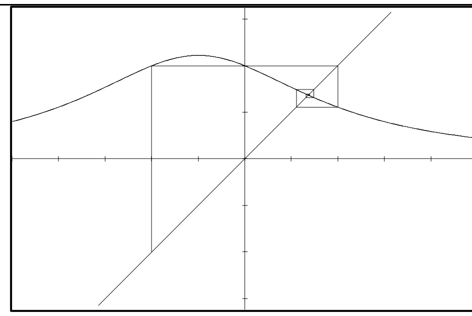
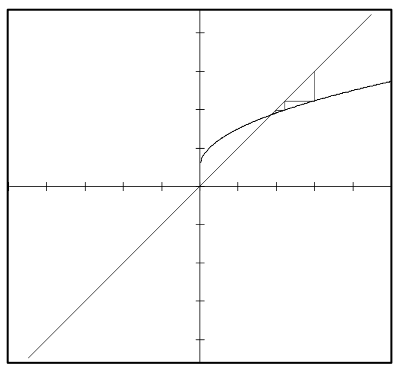
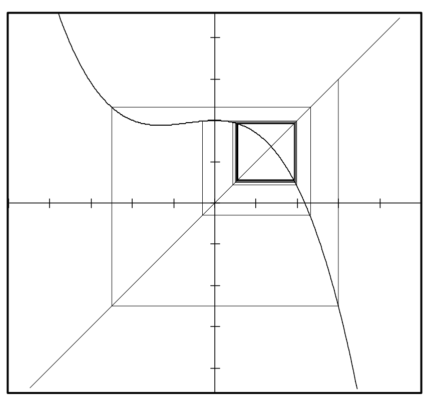
Como he mencionado se pretende que el estudiante sea capaz de dar sentido al significado que en el contexto gráfico y numérico se asigna a los procesos recursivos y el papel que toma la dimensión de la derivada en ambos. De aquí que, se diseñaron tres hojas de trabajo para llevar a cabo la implantación de la secuencia de actividades.

El primer bloque, tuvo como objetivo el conocer las nociones previas del estudiante respecto del punto fijo, convergencia y derivada. El segundo bloque tuvo como objetivo establecer un desequilibrio cognitivo de tal forma que el estudiante asigne sentido a la propiedad de la pendiente de una curva en el teorema del punto fijo, con la pretensión de que el estudiante trabajara con las nociones precedentes desde la perspectiva de herramienta, es decir, se plantea una **situación de acción** en la cual el estudiante conviene explorar el contenido matemático referente a sus nociones previas. La expectativa va en el sentido de que sean ellos mismos los que descubran la intención planteada a partir de una **situación de formulación**, en la cual, se incite al estudiante a la revelación explícita del contenido en la primera situación, con ello entonces, se establece una **situación de validación** en la que el estudiante viablemente tratará de dar significado propio al objeto matemático en cuestión. Por último, en el tercer bloque el objetivo radicó de manera sistémica en que el estudiante reconociera la **propiedad de predicción**, más concretamente se buscó que el estudiante establezca las relaciones entre magnitud de la derivada y la forma de la gráfica.

A continuación se muestra una de las actividades fundamentales para validar una efectiva apropiación de conocimiento.

Instrucción:
Haz corresponder correctamente en una terna las siguientes gráficas iterativas con su respectiva función iteración y el tipo de punto fijo correspondiente. Explica el criterio que adoptaste para hacerlo.

[7] Específicamente se trabajó con calculadoras con capacidad gráfica.

1. $x_n = \dfrac{(20 - 2x_{n-1}^2 - x_{n-1}^3)}{10}$	2. 	3. PUNTO FIJO ATRACTOR
4. $x_n = \sqrt{x}_{n-1} + 0.5$	5. 	6. PUNTO FIJO REPULSOR
7. $x_n = -\dfrac{x_{n-1}}{2}$	8. 	9. PUNTO FIJO REPULSOR
10. $x_n = \left[\dfrac{20}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} + 10} \right]$	11 	12. PUNTO FIJO ATRACTOR

En efecto, se pudo constatar en algunos casos el reconocimiento sistémico de la propiedad de predicción y más concretamente se observó que algunos estudiantes lograron establecer relaciones de la magnitud de la derivada y la forma de la gráfica, sin embargo, estos casos fueron minoría. Los argumentos que surgieron validan cierto patrón de comportamiento en el reconocimiento de la existencia del punto fijo, de aquí que a pesar de la amplia red de información que se les proporcionó a los estudiantes sobre la pendiente de una recta, sucesiones convergentes y punto fijo, la relación entre estudiante y saber está por debajo de un consenso en la decodificación de diversos contextos interactivos, es decir, que sistemáticamente no se aprueba la correspondencia entre dichos contextos.

Conclusión

Como se mencionó, a partir del objetivo planteado, sostenemos en particular que, la visualización es un medio para predecir la convergencia de una sucesión que proviene de una función iterada, y aunque en los teoremas y ejemplos de los textos escolares, lo anterior se explicita ya sea con la condición de Lipschitz o con el criterio de la derivada, no se pone suficiente énfasis en la visualización de tales condiciones. Justo aquí, es dónde se debate sobre el obstaculizar el desarrollo de la visualización por parte del estudiante, ya que, con base en al análisis se puede constatar que la visualización es un fenómeno que radica en todo momento de acción, formulación y validación de un saber matemático.

En la experiencia didáctica, se reflexionó sobre los procesos que de alguna manera obstaculizan al estudiante a desarrollar su capacidad de visualización, y se observó que tales obstáculos no sólo se deben a que en la enseñanza tradicional no se procede alguna práctica que la enfatice, sino también se deben al contexto en el cual los estudiantes estén situados.

Con base en el análisis de las dimensiones en la construcción de conocimiento se observó que aunque se haya trabajado en diversos contextos (gráfico, algebraico y numérico) la condición de derivabilidad para decisión de convergencia o divergencia de una sucesión, se ve debilitada en el momento de enfrentarse a casos en los cuales no hay una función "amable" en el sentido de ser derivada, asimismo se ve debilitada cuando el contexto no les permite concluir de manera formal algún proceso de razonamiento, esto es, que en efecto los argumentos que nos presentan son válidos bajo la codificación que utilizan en su medio, pero fuera de ello, a pesar de visualizar cada consecuencia con base en sus formalizaciones, ellos mismos reflejan la limitación para seguir a sus respuestas "intuitivas" basadas en su propia visualización.

Consecuente de la recolección de datos y de su análisis, se concluye que, el predominio de recurrir a la forma en cómo se les enseñó el teorema del punto fijo es una *invariante* que los estudiantes reflejan en su discurso argumentativo, lo que da lugar a limitaciones en el desarrollo de procesos visuales como un medio para predecir la convergencia o divergencia de funciones iteradas.

Se observaron algunos fenómenos didácticos que se presentan en el ámbito escolar, se constató en los estudiantes que:

- Existen tres tipos de noción de punto fijo: refiriéndolo como la intersección de la recta identidad con una curva (gráficamente), como el punto estático que una función al ser iterada establece, y como la solución de un sistema lineal de ecuaciones.
- La noción de convergencia y divergencia, se ven favorecidas por el contexto en el cual se está trabajando. Es decir, los argumentos en sus respuestas reflejan nociones de aproximación, tanto numéricamente como gráficamente.

- El concepto de derivada, se registra visualmente como la recta tangente a una curva en algún punto y no propiamente como una magnitud.

La última observación nos permitió reafirmar una vez más la no – utilización de la derivada como un ente sistemático en diversos contextos. De tal forma que ‘en efecto’ aunque los estudiantes dominaron técnicas para decidir convergencia de funciones iteradas, el uso sistemático de la derivada se ve truncado bajo los conocimientos habituales que se tienen de la noción.

Se infiere que a pesar de existir una serie de dificultades y obstáculos en el uso sistemático de los conceptos matemáticos, específicamente el de la derivada de una curva, las acciones, formulaciones y validación de su aplicación (con base en el diseño de la secuencia de actividades), exige de heurísticas y procesos de visualización que constantemente se observaron persistentes en la solución de actividades y sin embargo se vieron debilitadas al dar un resultado propio de evaluación, es decir, señalamos que la predicción que se generó en las actividades de validación no descarta a la visualización como un medio para la toma de sus decisiones, lo cual nos hace reflexionar en verla como un fenómeno que podría estimular el pensamiento matemático en las prácticas educativas.

Referencias

ARTIGUE, M. et al. (1995) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica. SA de CV.

BOSQUEZ, E. (1994) *Visualización en las Ecuaciones Diferenciales*. Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN. México.

BROUSSEAU, G. (1986) “Fondements et méthodes de la didáctique” en *Recherches en Didactique des Mathematiques* $7_{2.}$ pp. 33- 115

CANTORAL, R. et al. (2000) *Desarrollo del pensamiento matemático.* Trillas. México.

CANTORAL, R. y MONTIEL, G. (2001) *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice – Hall.

DAVIS, P. (1993) “Visual theorems”. *Educational Studies in Mathematics* 24, pp 333-344.

DEVANEY, R. (1990) *Chaos, fractals, and Dynamics. Computer experiments in mathematics*. Department of Mathematics. Boston University. Boston, Massachussets. Addison – Wesley Publishing Company

FARFÁN, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica, SA de CV.

HODGSON, T. (1996) “Students’ Ability to Visualiza Set Expresions: An Initial Investigation”. *Educational Studies in Mathematics* 30, pp 159-178.

LÓPEZ, L. (1994) *Desarrollo de la Visualización Matemática Tridimensional de Curvas Paramétricas.* Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN. México.

MIRÓN, H. (2000) *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones de f→f' en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas*. Tesis doctoral. Cinvestav – IPN. México. DF.

PORTER, M. (1981) *Introducción a los métodos numéricos*. 2º Coloquio del Departamento de matemáticas. Cinvestav- IPN. Oaxtepec, Morelos.

RODRÍGUEZ, F. M. (2003) *Convergencia, recursividad y visualización.* Tesis de maestría. Cinvestav – IPN. México, DF.

SIERPINSKA, A. (1994) *Understanding in mathematics.*

ZIMMERMANN, W. y CUNNINGHAM, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America, Notes No. 19.