SEXTO SIMPOSIO
DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA
DE INVESTIGACIÓN EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Comité Científico:
Coordinador:
Lorenzo Blanco Nieto
Vocales
Salvador Llinares Ciscar
Tomás Ortega del Rincón
Enrique de la Torre Fernández
Encarnación Castro Martínez
Pilar Orús Báguena

Comité Organizador:
Director:
Jesús Murillo Ramón
Vocales:
Petra Mª Arnal Gil
José Mª Gairín Sallán
Rafael Escolano Vizcarra
José Fco. Martín Olarte

ACTAS
DEL VI SIMPOSIO
DE LA SEIEM

Sociedad Española de Investigación
en Educación Matemática

Logroño, 11 – 14 de septiembre de 2002

Editores: *Jesús Murillo, Petra Mª Arnal, Rafael Escolano,*
José Mª Gairín, Lorenzo Blanco.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
1992-2002/DÉCIMO ANIVERSARIO

Sexto Simposio de la Sociedad Española de Investigación
en Educación Matemática

COMITÉ EDITORIAL:
J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J.M. Gairín y L. Blanco

DISEÑO DE LA PORTADA:
David Guirao

IMPRIME:
Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza

ISBN: 84-95301-69-5
Depósito legal:

Financiado con cargo a las actividades del 10º Aniversario de la creación
de la Universidad de La Rioja.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Seminario de Investigación I: *Modelización de la actividad matemática y didáctica.*

En este capítulo se presentan las tres ponencias correspondientes al Seminario de Investigación I.

INVESTIGACIÓN EN EL AULA. LAS DECISIONES CONDICIONAN LAS INTERACCIONES

Sara Scaglia, *Universidad Nacional del Litoral (Argentina)*

Moisés Coriat, *Universidad de Granada*

RESUMEN:

Este trabajo enmarca y describe algunas interacciones entre *alumnos/ investigador/docente* generadas durante el desarrollo de una investigación en didáctica de la matemática.

Toda investigación supone la toma de decisiones que atañen a diversos aspectos relacionados con el problema, los objetivos de la investigación y los resultados que se obtienen durante su desarrollo. Se pondrá de manifiesto que estas decisiones, que definen en buena medida la coherencia de la investigación, deben tomarse en todas las etapas de la investigación, desde su inicio hasta el momento de escribir la memoria.

1. Introducción

En este trabajo reflexionamos sobre algunas decisiones tomadas durante una investigación en didáctica de la matemática, que han generado determinados tipos de interacciones entre el investigador, los alumnos y el docente.

El propósito central de la investigación es caracterizar obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la recta (Scaglia, 2000). Tiene una orientación cognitiva, dado que describe y analiza las interpretaciones de los sujetos sobre la biyección números reales / puntos de la recta. Las interacciones con los alumnos tienen la finalidad de identificar conflictos cognitivos que surjan durante la realización de tareas relacionadas con la asignación de números reales a puntos de la recta.

En primer lugar presentamos en esquema el diseño de la investigación. En segundo lugar describimos las decisiones tomadas relacionadas con la selección de los sujetos, incluyendo las justificaciones en cada caso. Posteriormente describimos algunos elementos que atañen a las interacciones entre la investigadora, los alumnos y el docente a cargo del curso.

2. Diseño de la investigación

El diseño escogido, a partir del propósito central de la investigación, incluye la utilización alternativa de métodos empíricos y no empíricos (Fernández Cano, 1995).

En un estudio no empírico se incluye la búsqueda y el análisis de bibliografía en torno a diferentes constructos teóricos esenciales para la investigación (las nociones de obstáculo epistemológico y de conflicto cognitivo). Además, se aborda el estudio de contenidos matemáticos específicos: sistema de números reales y la representación de números en la recta. La descripción desde un punto de vista matemático y escolar del sistema **R** y la descripción de la representación de números en la recta proporcionan elementos para diseñar situaciones adecuadas que se incluirán en los instrumentos de un estudio empírico.

El estudio empírico consiste en la elaboración y administración de diferentes instrumentos a alumnos de Bachillerato y primer curso universitario con la finalidad de estudiar la posible manifestación de conflictos durante el desarrollo de tareas de representación de números en la recta.

Finalmente, el segundo estudio teórico conecta los conflictos detectados y los obstáculos epistemológicos. (Ver Figura 1.)

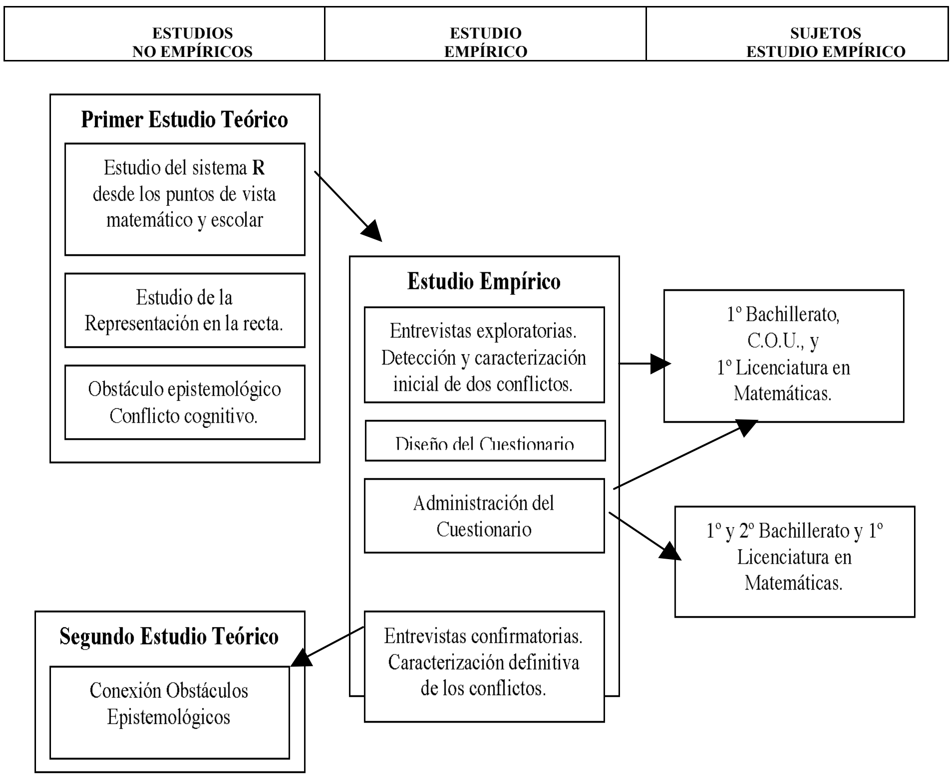


Figura 1: Estudios que componen la investigación

El orden en que se administran los instrumentos (entrevista exploratoria → cuestionario → entrevista confirmatoria) justifica la racionalidad del estudio empírico. En la entrevista exploratoria se detectan dos conflictos:

Conflicto 1: La dificultad para admitir el cierre de un proceso infinito sugerido por las infinitas cifras decimales de la representación posicional de algunos números constructibles. Se trata de la dificultad observada en algunos sujetos en aceptar que a un número constructible con infinitas cifras decimales le corresponda un punto determinado de la recta.

Conflicto 2: La falta de distinción en las argumentaciones de los alumnos entre el objeto ideal (punto geométrico) y el objeto físico (la marca efectuada con lápiz sobre el papel). Se trata de las dudas suscitadas en algunos sujetos al valorar un dibujo en el papel, que tienen su origen en afirmaciones que pertenecen al mundo matemático ideal.

Estos conflictos deben confirmarse, y una indagación con los mismos sujetos no permite generalizar a otros individuos. El cuestionario permite desarrollar modos sistemáticos de atribuir conflictos a sujetos y seleccionar a quienes, deseablemente, no cometen errores fundamentales, para que éstos no dificulten la emergencia del conflicto.[1]

La selección de sujetos se ha realizado, y la atribución de conflictos no ha sido completamente acertada, porque se han dado varios casos de no confirmación. Sin embargo, estos casos han sido explicados sensatamente, utilizando el constructo teórico escogido, la noción de conflicto cognitivo.

El orden en que se administran los instrumentos, por otra parte, proporciona una medida de la validez del estudio empírico. Se trata del uso de tres métodos de recogida de datos que constituye una triangulación (Cohen y Manion, 1990).

Desde un punto de vista puramente metodológico, las entrevistas en la investigación constituyen un instrumento en los que la validez está amenazada por diversos factores: actitudes y opiniones del entrevistador, tendencia a buscar contestaciones que apoyen sus nociones preconcebidas, percepciones erróneas por parte del entrevistador de lo

[1] El procedimiento seguido se describe en la memoria citada, Scaglia (2000).

que dice el entrevistado y malentendidos por parte del entrevistado de lo que se le está preguntando (Cohen y Manion, 1990). El cuestionario posterior a las entrevistas exploratorias proporciona un medio para evaluar si las ideas que los alumnos han manifestado en las entrevistas se observan también en respuestas escritas (correspondientes a alumnos diferentes), en las que el investigador no puede ejercer influencia más allá de las cuestiones propuestas.

En la siguiente sección incluimos las decisiones tomadas en relación con la selección de sujetos para la administración del cuestionario y de las entrevistas.

3. Selección de los sujetos

La realización de una investigación en educación matemática supone la concatenación de una serie de decisiones que debe tomar el investigador: comenzando con el propio tema de investigación, pasando por el tipo de estudio a desarrollar, la edad o el nivel de los alumnos (si es el caso), y las cuestiones específicas que se abordarán en el estudio. En Rico (2001) se describen diversos aspectos a considerar durante la definición del problema de investigación. Este investigador afirma que "la elección e identificación del problema de investigación es la primera dificultad que encuentra el doctorando en Didáctica de la Matemática" (p. 183). Sostiene que en esta etapa, "el trabajo del doctorando requiere de un esfuerzo intelectual considerable, que pasa por el trabajo personal de lectura y revisión críticas, pero también por un trabajo en el seminario donde irá presentando los sucesivos intentos de expresión del problema" (p. 182).

El enunciado del problema de investigación determinará el tipo de estudio a realizar y el diseño metodológico. En nuestro caso, estamos interesados en la identificación de conflictos cognitivos en los alumnos, que conduzcan a la caracterización de obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la recta. Así, resulta indispensable trabajar con alumnos de determinados niveles educativos, con objeto de obtener datos empíricos (producciones escritas o grabaciones en audio y video) con los que realizaremos nuestro estudio.

Surge entonces una primera decisión, que está íntimamente ligada con las características del problema a investigar y las del contenido sobre el que versa.[2]

El trabajo con los alumnos puede adoptar, al menos, dos modalidades diferentes. Por un lado, un estudio del tipo investigación / acción, que supone desarrollar una secuencia didáctica con los alumnos, elaborada a partir de una serie de supuestos planteados en la investigación. Este enfoque proporciona abundante y variada información, recogida a partir de registros en audio y en vídeo, apuntes de los alumnos, registros y observaciones del investigador, entre otros. Por otro lado, los datos empíricos pueden obtenerse a partir de una serie de encuentros aislados con los alumnos. Durante estos encuentros (entrevistas individuales o cuestionarios escritos, por ejemplo), los alumnos deberán abordar las tareas elaboradas por el investigador, en función de las finalidades de la investigación. El material de estudio, en este caso, será las respuestas escritas u orales de los alumnos, estas últimas grabadas en audio o en vídeo.

En la investigación que nos ocupa, optamos por esta última modalidad. La asignación de números a puntos de la recta se plantea durante el estudio de los sistemas numéricos en distintos momentos de la escolaridad obligatoria. Independientemente de nuestro interés por estudiar las interpretaciones de los alumnos de la biyección números reales / puntos de la recta, durante la enseñanza de los sistemas numéricos se recurre a la representación en la recta de modo ocasional, y es poco común que se destinen clases completas para esta actividad.

La elección del nivel del sistema educativo con el que se va a trabajar está determinada por el tema de investigación.[3] Para el caso que nos ocupa, y teniendo en cuenta que la introducción de los números reales está contemplada en el diseño curricular en 1º de Bachillerato, decidimos trabajar con alumnos de Bachillerato y con alumnos de 1º año

[2] Como veremos, esta decisión también depende de las circunstancias por las que atraviesa el investigador. Por ejemplo, si está o no a cargo de un curso o si dispone o no de la posibilidad de trabajar en un curso determinado, a lo largo de cierto período de tiempo.
[3] Sin embargo, no descartamos la posibilidad de que se decida en primer lugar el nivel escolar con el que se desea trabajar, y que se elija posteriormente el contenido a estudiar, en función de que se desarrolle en el nivel considerado.

de Licenciatura en Matemáticas. La decisión de trabajar con alumnos de tres cursos diferentes (1º y 2º de Bachillerato y 1º de Universidad) responde al interés de comparar las interpretaciones de alumnos de edades diferentes. Con respecto a la elección de la carrera Licenciatura en Matemáticas y no cualquier otra, responde, por un lado, a la necesidad de delimitar la muestra, y por otro lado, a un doble especial interés: estos han elegido las Matemáticas como carrera y conocen la axiomática de **R**.

Debe advertirse que, en nuestro caso, no fue objeto de decisión el lugar de estudio y el currículo seguido. Durante un tiempo acariciamos la posibilidad de cotejar respuestas obtenidas en Granada (España) y en Santa Fe (Argentina), pero finalmente desistimos de este propósito, por lo que no tuvimos que decidir ni sobre el lugar (Granada) ni sobre el currículo (Bachillerato LOGSE).

Seleccionados la modalidad y las edades y niveles educativos hacia los que estará dirigida la investigación, el investigador deberá seleccionar los alumnos a los que se administrará las entrevistas y/o cuestionarios.

Tratándose de una investigación cualitativa, en nuestro caso no se persigue la finalidad de generalizar resultados, sino la de realizar una descripción profunda (Bisquerra, 1989). Por esta razón la búsqueda de cursos queda acotada por las decisiones referidas a la edad y el nivel escolar, y no es necesario un estudio más cuidadoso como el que exigiría la selección de una muestra representativa.

Considerando el hecho de que una investigación habitualmente se realiza en el ámbito de una comunidad o de un equipo de investigación, se ve favorecida la posibilidad de contar con alumnos o cursos que coincidan con la edad de los sujetos requeridos en el diseño de la investigación. En el seno de un grupo de trabajo es más sencillo contar alumnos o cursos a cargo de los integrantes del grupo que proveerán al investigador de los recursos humanos necesarios para la investigación. Sin embargo, no siempre es sencillo conseguir a los sujetos de estudio, y el investigador debe tener en cuenta esta posible dificultad durante el diseño de su trabajo.

En nuestra investigación, las gestiones necesarias para conseguir los cursos que participarían quedaron prácticamente en manos del Director, quien apeló a sus amistades personales que accedieron generosamente a la posibilidad de que sus alumnos fuesen entrevistados.[4]

El acceso a algunos alumnos o a un curso completo por parte del investigador es esencial en una investigación. La intervención en el transcurso habitual de las clases de un profesor puede ocasionarle a éste retrasos y seguramente afectará al cronograma realizado. Por esta razón, el investigador debe permanentemente ser consciente de que la visita ocasional que realiza a un curso determinado debe planificarse cuidadosamente, para aprovechar al máximo el precioso tiempo cedido por el profesor.

Una vez que el investigador ha acordado con los profesores de cada curso la disponibilidad de los alumnos, llega el momento de aplicar los instrumentos planificados en el diseño de la investigación.

En nuestro caso, el estudio empírico comienza con la realización de entrevistas exploratorias, que tienen como objetivo general recabar información sobre posibles dificultades de los alumnos durante la representación de números reales en la recta. La información obtenida se utilizará posteriormente en el diseño de los ítems del cuestionario. El muestreo ha sido accidental (León y Montero, 1999).

A partir de los resultados de estas entrevistas, se diseña un cuestionario que tiene como objetivo proporcionar situaciones que permitan detectar en los sujetos afirmaciones relacionadas con los conflictos cognitivos observados durante el estudio de las entrevistas exploratorias.

El interés del cuestionario, tal como se argumenta en la sección anterior, es validar los resultados de las entrevistas exploratorias. Se trata de averiguar si entre las respuestas de alumnos diferentes a los entrevistados, se observan argumentos que estén relacionados con alguno

[4] Conviene tener en cuenta que la amistad sólo permite un primer encuentro con el Profesor o Profesora. Por lo general, es necesario explicar cuidadosamente la investigación, así como lo que se pretende trabajar con sus alumnos.

de los dos conflictos. Por esta razón, no existen criterios específicos a la hora de seleccionar a los alumnos para el cuestionario, salvo que correspondan a los niveles escolares indicados.

Para las entrevistas confirmatorias, en cambio, con las que se espera confirmar la interpretación de las respuestas del cuestionario en relación con la presencia o ausencia de conflicto, el muestreo ha sido a propósito (León y Montero, 1999). Los alumnos entrevistados fueron seleccionados a partir de sus respuestas al cuestionario.

Cuando en una investigación los resultados obtenidos durante la aplicación de un determinado instrumento condicionan la selección de los sujetos con los que proseguirá el estudio empírico (como en nuestro caso), el tiempo transcurrido entre la aplicación de uno y otro es un elemento que puede influir en los resultados del trabajo. En nuestra investigación, el cuestionario se administró durante el mes de septiembre de 1999, y las entrevistas confirmatorias se realizaron entre los meses de enero y febrero de 2000. Debido a que se buscaban específicamente respuestas relacionadas con los conflictos mencionados, no hubo especial dificultad en seleccionar a los alumnos para las entrevistas confirmatorias. Sin embargo, no siempre resulta sencillo seleccionar a los alumnos con los que proseguir el estudio.

Una vez realizadas las entrevistas confirmatorias, finalizan las interacciones con alumnos en nuestra investigación. El trabajo pendiente consiste en el estudio de los resultados de las últimas entrevistas, y la interpretación de todos los resultados del estudio empírico en términos de la noción de obstáculo epistemológico.

4. Espacios físicos

Los cuestionarios, destinados a grupos completos de los niveles mencionados, se administraron durante las horas de clase en las aulas correspondientes a cada grupo.

En cambio, las entrevistas individuales requieren de un espacio físico adecuado, suficientemente iluminado y, en lo posible, aislado de ruidos que perturben la correcta audición y grabación.

En general, no es común que una institución disponga de un espacio físico para que los profesores–investigadores, o los investigadores desarrollen actividades extracurriculares con los alumnos. La investigación que estamos describiendo no ha sido una excepción. Los profesores de los cursos a los que pertenecían los alumnos entrevistados fueron los encargados de gestionar en cada establecimiento la búsqueda de una habitación para que se pudieran llevar a cabo las entrevistas.

Las entrevistas exploratorias y confirmatorias se realizaron en tres Institutos de Educación Secundaria de la ciudad de Granada y en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

En uno de los centros, la primera entrevista y la mitad de la segunda se realizaron en un pequeño salón que se destina a reuniones entre profesores y padres. Ubicado en una zona aledaña al pasillo de entrada principal del Instituto, durante los momentos de cambio y/o finalización de hora de clase, el ruido exterior impedía una correcta audición. Las entrevistas restantes se realizaron en el Laboratorio de Ciencias, un pequeño salón muy bien iluminado y apartado de ruidos exteriores.

En otro centro las entrevistas se realizaron en un aula desocupada. Dado su emplazamiento cercano a la calle y probablemente a la ubicación de la cámara de vídeo (junto a una ventana), la grabación en vídeo es apenas audible. No obstante, la grabación en audio es audible porque el aparato se situó en el mismo pupitre que ocupaba la persona entrevistada.

En el tercer centro se utilizó el salón correspondiente al departamento de Matemáticas del Instituto, recinto bien iluminado y aislado de ruidos.

En la Facultad de Matemática las entrevistas se realizaron en un despacho del Departamento de Didáctica de la Matemática del centro. Consiste en un salón pequeño, bien iluminado y aislado del ruido exterior.

La posibilidad de contar con un espacio adecuado para la realización de las distintas actividades suele constituir un problema para el investigador, y esta dificultad se acrecienta cuando se trata de investigaciones pioneras en un establecimiento determinado.

5. Interacciones entre los sujetos de estudio y el investigador

Durante la administración de los instrumentos de una investigación, se requiere de los sujetos dos condiciones básicas que en cierta medida determinarán la riqueza[5] de sus producciones:

- Una implicación activa en las tareas propuestas.

- El convencimiento de que sus respuestas no serán motivo de calificación por parte del profesor o profesora de la asignatura.

La primera condición asegura (al menos en parte) que las producciones del sujeto proporcionan información confiable respecto de su interpretación del tema o contenido en estudio. De este modo, la ausencia de información, por ejemplo, estará originada por el desconocimiento del alumno, y no por falta de interés en responder. La segunda condición aleja el peligro de que los sujetos acoten o abrevien sus respuestas por el temor de cometer errores. A partir de estas consideraciones, durante la administración de los instrumentos del estudio empírico, en nuestra investigación se tomaba la precaución de proporcionar información a los sujetos referida a:

- El objetivo general de la investigación. Se trata de explicar que se está llevando adelante una investigación con el fin de

[5] El término 'riqueza' no alude a la calidad de sus producciones matemáticas, sino a que las respuestas de los sujetos describan lo más fielmente posible sus interpretaciones de los conceptos matemáticos implicados, sean o no adecuadas desde el punto de vista matemático.

estudiar las respuestas de los estudiantes durante actividades relacionadas con la representación de números en la recta.

- El hecho de que sus respuestas no van a ser evaluadas o calificadas. Incluso se aclaraba que el profesor del curso no tendría acceso a sus respuestas.

- El hecho de que los datos personales aportados permanecerán en el anonimato.

La identificación de cada sujeto era especialmente necesaria durante la administración del cuestionario, porque posteriormente deberían seleccionarse los sujetos para las entrevistas confirmatorias. Por esa razón, decidimos dividir la primera página del cuestionario en dos partes, tal como se muestra en la Figura 2.

Primera parte

Código: 8451
Fecha: ***Edad:*** ***Sexo***: *Masculino, Femenino*
Curso: **Grupo**: **Modalidad**:
¿Piensas continuar estudios universitarios?: Sí. No. No sabe.
Carrera:
Última nota Matemáticas:

Segunda parte

Nombre y apellido:	
Curso:	
Instituto:	
Código:	8 | 4 | 5 | 1

Figura 2. La primera página del cuestionario administrado

Cada cuestionario se identifica con un código. Una vez que los alumnos entregan el cuestionario, se separan las dos partes. La primera queda en manos de la investigadora, junto con las respuestas de los alumnos, y la segunda en manos del profesor del curso. De este modo, una vez seleccionados los alumnos que serían entrevistados, la investigadora indica al profesor o profesora del curso los códigos de los alumnos, sin conocer el nombre de cada uno. Por su parte, el profesor desconocía las respuestas de los alumnos al cuestionario.

Los alumnos fueron informados antes de iniciar el cuestionario sobre este procedimiento. El mismo no condujo a los resultados esperados en todos los cursos. Mientras que en algunos funcionó tal como estaba planificado, en otros cursos ocurrieron accidentes inesperados, como por ejemplo la pérdida por parte de un profesor del sobre que contenía los papelitos con los datos de los alumnos. En este caso, el profesor identificó a los alumnos a partir de la letra en el cuestionario, y después los propios alumnos corroboraron en cada caso la autoría de los cuestionarios. Evidentemente, se respetó la condición de "no evaluación" del cuestionario por parte del Profesor.

Durante la realización de las entrevistas, en primer lugar cabe destacar la predisposición positiva de los sujetos. Si bien al principio se mostraban cohibidos por la cámara de vídeo, en cuanto aumentaba la concentración en las tareas se despreocupaban por su presencia. Esto es posible observarlo en todos los sujetos sin excepción.

Otro rasgo a destacar es la riqueza de los comentarios de los sujetos. Se observa que en la elaboración de las repuestas apelan no sólo a los conocimientos obtenidos en el sistema educativo, sino que también se intuye una implicación profunda que supone acudir a intuiciones y creencias personales. Esto último se evidencia en los fragmentos de entrevista en los que los sujetos desarrollan razonamientos en los que incluso detectan e intentan superar sus propias contradicciones.

En segundo lugar, cabe una reflexión respecto del aprendizaje de la entrevistadora-investigadora. Algunas de las dificultades detectadas en la gestión de la entrevista son cuestiones destacadas en la bibliografía consultada con fines metodológicos (Measor, 1985; Goetz y LeCompte, 1988; Babbie, 1990; Azcárate, 1998). Las dificultades percibidas en las primeras entrevistas requirieron un esfuerzo para superarlas gradualmente: la dificultad inicial en reemplazar el papel de docente por el de entrevistador, el exceso inicial de comentarios en la explicación de las preguntas y la poca insistencia inicial hacia el entrevistado para que describa en voz alta los procedimientos o ideas empleados en las respuestas.

6. Comentarios finales

El desarrollo de una investigación supone una sucesión de decisiones. La calidad del trabajo dependerá muchas veces de disponer de la claridad necesaria para mantener la coherencia entre los objetivos planteados y el desarrollo de la investigación.

Cuando llega el momento de elaborar la memoria de la investigación, surge la necesidad de tomar nuevas determinaciones. ¿Cuánta información debe incluirse? ¿Hasta qué punto es preciso separar la investigación propiamente dicha de su historia? Seguramente habrá diferentes opiniones, y los argumentos enfrentados sean razonablemente convincentes.

En nuestro caso, decidimos incluir toda la información relacionada con las decisiones tomadas, las modificaciones efectuadas sobre el diseño original y las razones por las que se efectuaron dichas modificaciones.

En cuanto a las gestiones realizadas en las instituciones educativas, casi todo se incluyó en la memoria: desde las razones para seleccionar a los sujetos de estudio, pasando por las características de los recintos en los que se efectuaron las entrevistas, hasta las dificultades que debieron superarse durante su realización. Pensamos que la posibilidad de replicar los hallazgos radica en gran parte en la descripción minuciosa de los instrumentos utilizados y de las condiciones de su aplicación.

Referencias bibliográficas

Azcárate C. (1998): "La entrevista en investigaciones de didáctica de las matemá-ticas. Análisis de algunas experiencias próximas". *Acta II Seminario de la S.E.I.E.M.* Pendiente de publicación.

Babbie E. (1990): *Survey Research Methods*. Belmont: Wadsworth Publishing Company.

Bisquerra, R. (1989): *Métodos de Investigación Educativa. Guía Práctica*. Barcelona: Ediciones Ceac.

Cohen, L. y Manion, L. (1990): *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Fernández Cano, A. (1995): "Metodologías de la Investigación en Educación Matemática". En Luis Berenguer, et al. (eds.): *Investigación en el Aula de Matemá-ticas*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Dto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Goetz J.P. y LeCompte M.D. (1988): *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

León O. y Montero I. (1999): *Diseño de Investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.

Measor L. (1985): "Interviewing: a Strategy in Qualitative Research". En R. Burgess (ed.): *Strategies of Educational Research.* Basingstoke: The Falmer Press.

Rico, L. (2001): "Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática". En P. Gómez y L. Rico (eds.): *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Granada: Editorial Universidad de Granada, pp. 179 – 193.

Scaglia, S. (2000): *Dos conflictos al representar números reales en la recta.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada.

UNA ACTIVIDAD MATEMÁTICA ORGANIZADA EN EL MARCO DE LOS MODELOS TEÓRICOS LOCALES: RAZÓN Y PROPORCIÓN EN LA ESCUELA PRIMARIA

Alejandro Fernández Lajusticia y Luis Puig Espinosa,
Universitat de València

RESUMEN:

El trabajo que presentamos como ejemplo de una actividad matemática organizada en el marco de los Modelos Teóricos Locales versa sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad en los cuatro últimos cursos de la Escuela Primaria, así como de las actuaciones que tienen alumnos de esos cursos al resolver tareas en las que están involucrados dichos conceptos. En este artículo hablaremos, de forma breve, sobre los Modelos Teóricos

Locales y desarrollaremos un amplio panorama de la investigación, a partir de un esquema general.

ABSTRACT:

The work we present here is an example of a mathematical activity organized by Local Theoretical Models. The research deals with the teaching and learning of the concepts of ratio, proportion and proportionality at the primary School level (grades 3d to 6th), and student's performances when solving tasks where such concepts are involved. A brief account is also presented of Local Theoretical Models as a methodological and theoretical framework for research in Mathematics Education, and we will try to develop a wide survey of this research, based on the general scheme of this type of research.

1.Modelos teóricos locales

Entendemos que la didáctica de la matemática es una actividad matemática que no puede quedarse en un proyecto de estudio sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de la matemática, sino que en ella hemos de considerar también el saber matemático que aprendices y enseñantes desarrollan conjuntamente, así como el uso de los sistemas matemáticos de signos que se utilizan en el intercambio de mensajes –entre aprendices y enseñantes. Esta consideración nos lleva a la necesidad de modelizar el estudio sobre fenómenos didácticos locales para someterlos a experimentación y poder desarrollar situaciones de enseñanza, tanto dentro del laboratorio como en el aula.

En este sentido utilizamos el marco teórico y metodológico que, para la observación experimental en didáctica de la matemática, Eugenio Filloy denominó Modelos Teóricos Locales. Dicho marco responde a un estilo de investigación que él inició hace ya años y cuya descripción más detallada puede encontrarse en Filloy y cols. (1999). Los estudios de este estilo parten de una toma de partido teórica por no utilizar teorías generales de la enseñanza, el aprendizaje o la comunicación; por el contrario, se trata de elaborar modelos teóricos locales para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña en el sistema educativo unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos, y sólo se pretende que esos modelos sean adecuados para los fenómenos objetos de estudio.

Entonces para poder observar experimentalmente los fenómenos que aparecen alrededor de una problemática concreta –en nuestro ejemplo la enseñanza y el aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad en la escuela primaria– hay que tener un marco teórico que nos permita interpretar tales fenómenos y proponer nuevas observaciones que pongan en evidencia las relaciones que hay entre los distintos componentes que entran en juego. Ahora bien, aunque el ámbito de validez de los modelos no se pretende que vaya más allá de los fenómenos observados, la descripción de los fenómenos que el modelo procura es profunda, compleja y minuciosa, y, para ello, es preciso que los modelos teóricos locales contemplen cuatro componentes interrelacionados:

1) El componente de competencia del Modelo Teórico Local o, de forma abreviada, el Modelo de competencia (formal, si es el caso).

2) El componente de actuación del Modelo Teórico Local o Modelo de actuación (que, si hacemos la hipótesis de que las actuaciones las podemos describir en términos de procesos cognitivos, podemos denominar Modelo de cognición).

3) El componente de enseñanza del Modelo Teórico Local, o, Modelo de enseñanza.

4) Finalmente, el componente de comunicación del Modelo Teórico Local o Modelo de comunicación.

Para nuestro caso, hemos de observar simultáneamente en la investigación los procesos de pensamiento de los alumnos en sus actuaciones al resolver tareas de razón y proporción (componente de actuación), el intercambio de mensajes (su descodificación y emisión) en relación con dichas tareas (componente de comunicación), y el uso de los lenguajes empleados para el diseño de los textos matemáticos o secuencias didácticas –enunciados y respuestas– pertinentes para el proceso enseñanza/aprendizaje (componente de enseñanza).

Además para que al menos el observador/investigador disponga de un componente formal que le permita reseñar las situaciones observadas y descodificar los mensajes que se producen en el intercambio de mensajes (alumnos en el cuestionario y alumnos–investigador en las entrevistas clínicas), hemos desarrollado en el trabajo un estudio de pura fenomenología (en el sentido de Freudenthal, 1983) de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad.

2. El esquema general de la investigación

Ya hemos dicho que la elaboración de modelos teóricos locales nos proporciona un marco teórico y metodológico de la investigación. Desde el punto de vista teórico caracteriza el tipo de investigación, su alcance y su fundamento (ver Filloy y cols., 1999, para una discusión detallada de este aspecto). Desde el punto de vista metodológico, la noción de Modelo Teórico Local conlleva una determinada manera de organizar la investigación que es coherente con ella. Las distintas etapas del trabajo de investigación pueden observarse conjuntamente mediante el diagrama de flujo de la figura 1.

Una característica del diagrama de una investigación organizada por la idea de la elaboración de Modelos Teóricos Locales es que aquel es recurrente. Partiendo del cuadro de la problemática, el diagrama comienza con la elaboración de un Modelo Teórico Local y termina con la expresión de los resultados de la investigación en términos de los componentes del Modelo Teórico Local inicial y, por tanto, con la elaboración de un nuevo Modelo Teórico Local, que, por tanto, está listo para ser el comienzo de una nueva investigación.

ESQUEMA DEL DISEÑO Y DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

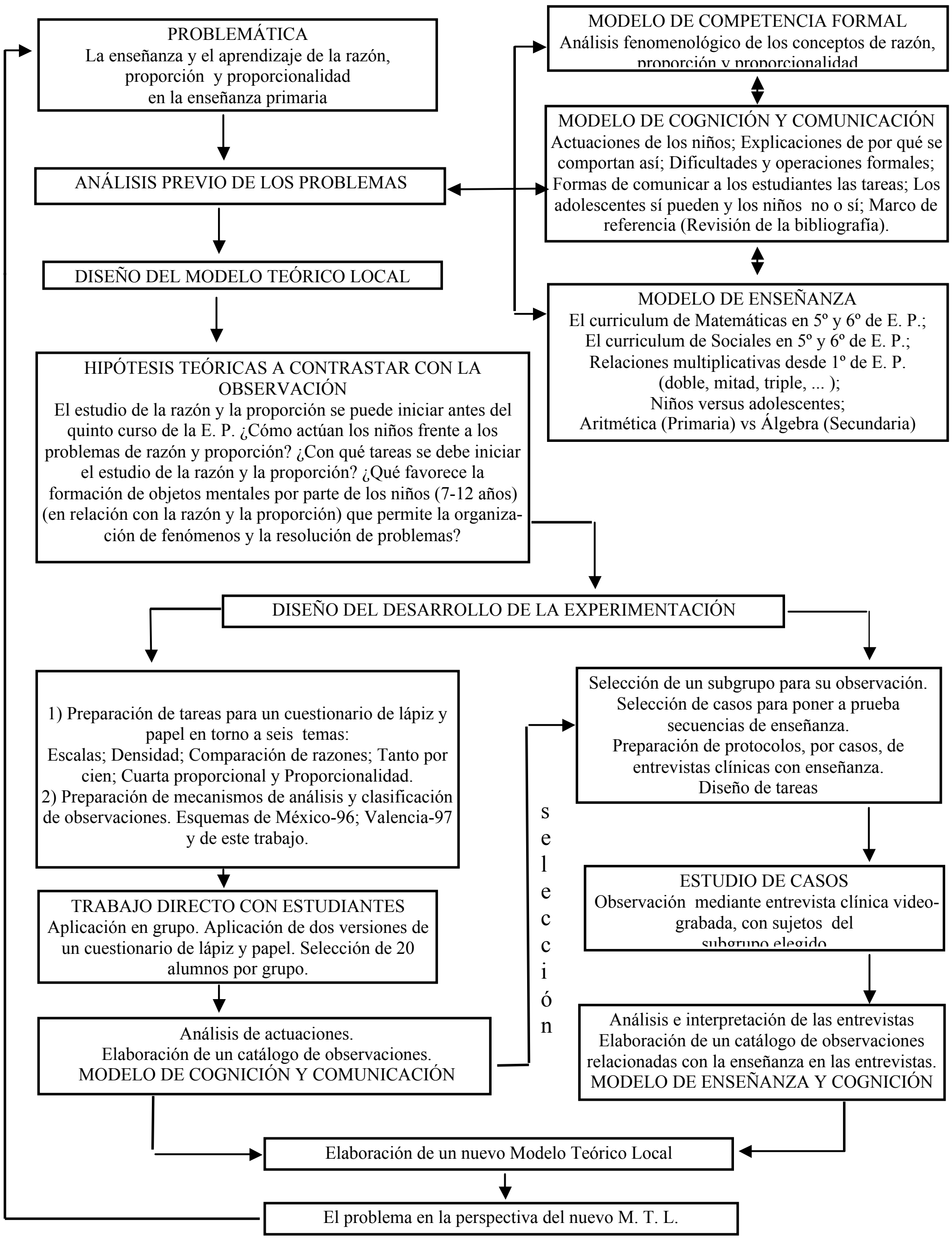


Figura 1

A continuación, siguiendo el diagrama, desarrollaremos las distintas etapas del trabajo, lo cual proporcionará al lector una visión general de la investigación.

3. El modelo teórico local inicial

Para ubicar la problemática de la enseñanza de la razón y la proporción en la enseñanza primaria nos fijamos en dos de los diseños curriculares que en el momento de realización del trabajo de investigación estaban vigentes en el estado español: el de la Generalitat Valenciana (1990) y el del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 1989) para los territorios que en el momento de su redacción no tenían competencias plenas en materia de educación.

Para elaborar cada uno de los componentes del Modelo Teórico Local inicial con el cual se analiza la problemática, las fuentes son distintas.

El componente de competencia formal lo elaboramos mediante un análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. El punto de partida es el análisis fenomenológico que Freudenthal (1983) hace en el capítulo sexto sobre razón y proporcionalidad, enriquecido con las aportaciones de uno de nosotros (Puig, 1997) a dicho análisis fenomenológico y de Vergnaud en su trabajo sobre estructuras multiplicativas de (1983), especialmente con los esquemas que en él desarrolla. En este análisis fenomenológico desarrollamos una modelización matemática de las distintas clases de problemas en los que interviene la razón (exposiciones, composiciones y constructos, en terminología de Freudenthal, 1983) mediante esquemas funcionales. Esta modelización nos permite decidir sobre la mayor o menor complejidad de cada uno de ellos y, por tanto, de la mayor o menor dificultad que esperamos que tengan los alumnos al resolverlos, a los efectos de la elaboración de secuencias didácticas. Es plausible suponer que los problemas de exposiciones sean los más sencillos y los de constructos los más complejos (ver el capítulo primero de Fernández, 2001 o el trabajo de Fernández y Puig, 2002).

En este análisis fenomenológico identificamos como precursores de los conceptos de razón y proporción los siguientes:

–Las comparaciones cualitativas, como precursores de las comparaciones cuantitativas.

–La normalización o tipificación, a través del uso de expresiones como: “por cada” o “de cada”, o de la unificación de referentes, que permite a los alumnos la percepción de algunas razones y favorece la comparación de éstas.

–La relativización de las comparaciones, a través del uso de expresiones como: “relativamente…”, “en relación con”, “con respecto a” y “si se compara con”.

–La visualización de algunas situaciones, mediante el cambio de representación, que favorece la comprensión de las razones involucradas en ellas y, por tanto, su utilización o su comparación.

Básicamente los componentes de cognición y comunicación del MTL que intervienen en el análisis están fundamentados en un marco de referencia que se elabora mediante una revisión de la bibliografía sobre el tema. Dicha revisión, organizada atendiendo a tres aspectos –los problemas, las actuaciones de los alumnos y las variables que afectan a las actuaciones de los alumnos–, nos permitió tener una descripción y una explicación de las actuaciones esperadas de los alumnos al resolver tareas en las que esté involucrada la razón.

La parte del componente de comunicación en este MTL inicial se ciñe únicamente a la forma en la que se presentan a los alumnos las tareas.

El componente de enseñanza está presente de dos maneras. Por un lado, tomamos en cuenta los dos diseños curriculares citados anteriormente (no sólo en el área de Matemáticas) en la parte de la enseñanza obligatoria que corresponde a la primaria y primer ciclo de la secundaria –alumnos de 6 a 14 años– y los libros de texto de primaria –área de matemáticas y área de sociales– de las dos editoriales más usadas en los colegios donde se realizó parte de la experimentación. Esto nos proporcionó un conocimiento de la enseñanza pretendida por las intenciones curriculares, que tuvimos en cuenta en el estudio de las actuaciones de grupos de alumnos del sistema. Por otro lado, la interrelación con el componente formal (el análisis fenomenológico) nos permitió hacer hipótesis sobre determinados objetos mentales precursores en la constitución de los objetos mentales de razón, proporción y proporcionalidad, lo que nos condujo al diseño de secuencias de enseñanza en las que estos precursores eran el objeto central. Estas secuencias de enseñanza fueron las que utilizamos posteriormente en una parte de la fase experimental de la investigación: el estudio de casos.

4. Hipótesis teóricas que hay que contrastar con la observación

Con el análisis de la problemática a través del Modelo Teórico Local considerado anteriormente, desde cada uno de los componentes y con sus interrelaciones, en el trabajo se propone una hipótesis teórica que hay que contrastar con las observaciones empíricas que se realicen en la experimentación.

La hipótesis es la siguiente: *El estudio de la razón, la proporción y la proporcionalidad se puede iniciar en los primeros niveles de la enseñanza primaria.*

Para contrastar empíricamente esta hipótesis es necesario:

Identificar las tareas con las que se debe iniciar el estudio de la razón, la proporción y la proporcionalidad.

Identificar cómo actúan los niños al enfrentarse con problemas de razón y proporción.

Identificar aquello que favorece la formación de objetos mentales por parte de los niños (8-12 años), relacionados con los conceptos de razón y proporción, que permite la organización de los fenómenos y la resolución de problemas en los que están involucrados estos conceptos.

5. Desarrollo de la experimentación

El desarrollo de la experimentación tiene dos partes, que en el diagrama están en dos columnas: la columna de la izquierda describe el estudio de grupos de alumnos en su ambiente natural de la escuela y la columna de la derecha el estudio de casos seleccionados.

La fase experimental desarrollada en el trabajo se llevó a cabo a través de las siguientes etapas:

–la elaboración y aplicación de un cuestionario de lápiz y papel;

–el análisis de las actuaciones de los alumnos que completan el cuestionario;

–la selección de un subgrupo de alumnos para su observación mediante entrevistas clínicas con enseñanza;

–la preparación de protocolos para las entrevistas;

–la realización de entrevistas clínicas con enseñanza video-grabadas;

–el análisis e interpretación de las entrevistas.

6. Preparación y aplicación de la prueba de lápiz y papel

Para la elaboración de un primer instrumento de observación, preparamos un cuestionario de lápiz y papel en dos versiones; una para alumnos del segundo ciclo de la enseñanza primaria (8–10 años) y otra para alumnos del tercer ciclo (10–12 años). Las tareas que forman parte de las dos versiones del cuestionario las diseñamos en torno a seis temas: “Escalas”, “Densidad”, “Comparación de razones”, “Tanto por cien”, “Cuarta proporcional” y “Proporcionalidad”.

Para el análisis de actuaciones, la selección de alumnos para su observación mediante entrevista y la elaboración de protocolos de entrevista con enseñanza, se agruparon las tareas, tanto en una versión del cuestionario como en la otra, en cuatro bloques: “Escalas”, "Densidad", "Comparación de razones y tanto por cien" y "Valor perdido y proporcionalidad". El cambio de denominación de cuarta proporcional a valor perdido se debe a que los problemas diseñados en relación con la cuarta proporcional son de valor perdido.

Estos cuestionarios fueron presentados para su resolución, en su aula y horario normal de clase, a todos los alumnos de cuatro cursos del Colegio Público de Prácticas de Valencia en el mes de mayo de 1998 (3ºB; 4ºB; 5ºB y 6ºB). Las características y datos generales de cada uno de ellos se pueden ver en los Anexos que recogen las respuestas de los niños al cuestionario (ver Anexos: 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 en Fernández, 2001) y de forma resumida en la tabla 1.

CURSO	Número alumnos	Edad media	Fecha	Hora de inicio	Primera entrega	Última entrega	Tiempo medio
3º B	20	8 a. 11 m.	12-5-98	9h 10m	9h 45m	10h 35m	1h 1m
4º B	20	9 a. 11 m.	14-5-98	9h 10m	9h 43m	10h 55m	1h 9m
5º B	20	10 a. 11 m.	13-5-98	9h 10m	9h 51m	10h 17m	0h 53m
6º B	20	11 a. 9 m.	15-5-98	9h 10m	9h 45m	10h 36m	0h 58m

Tabla 1

7. El análisis y clasificación de actuaciones

Para la preparación y elaboración de un modelo de análisis y clasificación de actuaciones, partimos del modelo de interpretación de comportamientos construido en los estudios mexicanos sobre razón y proporción que se realizaron en el periodo 1993-96 bajo la dirección de la doctora Olimpia Figueras (ver los trabajos de Gómez, 1996, Jiménez de la Rosa, 1996, y Muñoz, 1996) y de las ampliaciones y modificaciones que del mismo se realizaron en la investigación que se llevó a cabo en la Universidad de Valencia en el curso 1996-97 (ver el trabajo de Fernández et al., 1998).

A la vista de algunas actuaciones de alumnos que nos aparecieron en esa investigación, y que no podíamos clasificar de forma adecuada, fue necesario incorporar en el estudio ampliaciones y modificaciones a los modelos elaborados en los trabajos anteriores con el fin de poder analizar y clasificar todas las actuaciones que se habían observado en él.

El modelo de clasificación utilizado y el análisis pormenorizado de las actuaciones de los alumnos y sus resultados pueden verse en el capítulo segundo, en el anexo 2 y en el capítulo quinto de Fernández (2001), respectivamente.

8. Selección de un subgrupo para su observación

Para el estudio de casos mediante entrevistas clínicas con enseñanza, comenzamos por seleccionar un subgrupo de alumnos, utilizando para ello el análisis de las actuaciones desarrollado en el estudio de grupo. Para la elección del subgrupo tuvimos en cuenta básicamente dos aspectos:

– Que estuvieran en el último curso del ciclo de enseñanza (alumnos de cuarto curso o de sexto curso).

– Que su actuación al responder el cuestionario estuviera caracterizada por el desarrollo de alguna estrategia errónea directamente relacionada con el tema del bloque de tareas del cuestionario sobre el cual se iba a realizar la entrevista con enseñanza.

Además tuvimos en cuenta el índice de actuaciones satisfactorias de cada uno de los alumnos elegidos –a ser posible que estuviera alrededor del cincuenta por cien–, y también las actuaciones de cada uno de los elegidos al resolver las otras tareas del cuestionario que están relacionadas con el tema del bloque de tareas sobre el cual se iba a construir el protocolo de la entrevista con enseñanza, en particular, con la estrategia errónea por la cual se le había elegido.

Como decidimos realizar dos entrevistas por cada uno de los bloques de tareas del cuestionario, una con alumnos de segundo ciclo y otra con alumnos de tercer ciclo, en total ocho entrevistas, el número mínimo de alumnos que había que elegir era de ocho. Sin embargo, con el fin de cubrir eventuales dificultades, elegimos tres estudiantes con las características anteriores para cada uno de los casos que queríamos estudiar y resultó un subgrupo de veinticuatro alumnos, de los que finalmente entrevistamos a ocho.

9. Preparación de las entrevistas con enseñanza y el estudio de casos

Denominamos protocolo de entrevista con enseñanza al conjunto de instrucciones que se dan para que el entrevistador siga la entrevista. Éste se estructura mediante un organigrama que permite al entrevistador saber las tareas que le va a proponer al entrevistado en función de sus actuaciones (ver la figura 2).

El conjunto de tareas organizadas de esta manera constituye una secuencia de enseñanza y el conjunto de todas las secuencias de enseñanza es un Modelo de Enseñanza para experimentar con el grupo de alumnos escogido para la observación.

Preparamos ocho protocolos de entrevista con enseñanza: dos por cada uno de los bloques de tareas que hemos mencionado para la preparación del cuestionario. De ellos, cuatro para entrevistar a cuatro alumnos del segundo ciclo (cuarto curso), uno por cada bloque, y los otros cuatro para entrevistar a cuatro alumnos del tercer ciclo (sexto curso), también uno por cada bloque. Estos protocolos nos permitieron desarrollar un estudio de casos mediante la realización de entrevistas individuales video-grabadas que posibilitó recoger una serie de observaciones relacionadas con las actuaciones de los entrevistados –componente de actuación– y con la enseñanza.

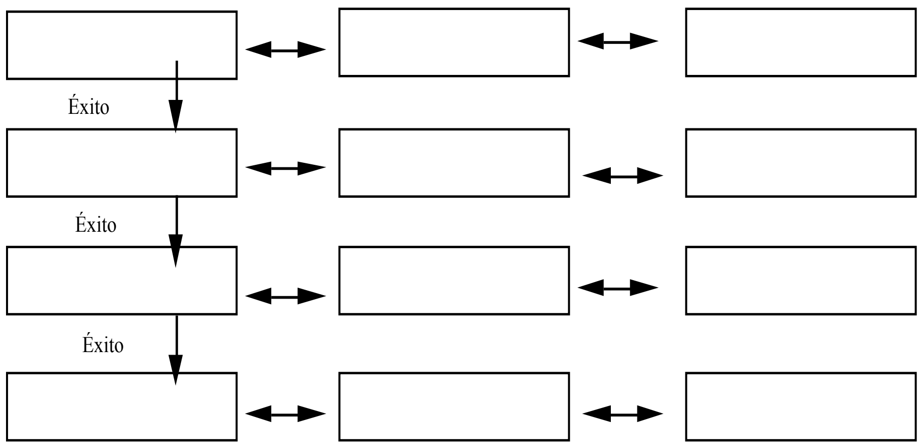


Figura 2. Organigrama vacío de un protocolo de entrevista

Todas las secuencias didácticas las diseñamos a partir de un problema inicial directamente relacionado con el tema y las desarrollamos en dos direcciones. La estructura de esas secuencias didácticas está representada en los distintos organigramas que figuran en el capítulo cuarto de Fernández (2001). Todas ellas se caracterizan porque a partir del problema inicial diseñamos una serie de tareas, de menor a mayor dificultad, que conforma un sentido vertical de avance gradual de la enseñanza y, después, a partir de cada uno de estos problemas, diseñamos nuevas series de problemas, de mayor a menor dificultad, que conforman las distintas líneas horizontales de la estructura de la secuencia didáctica. A cada una de estas líneas la hemos llamado "nivel del protocolo".

Los problemas de las series están encadenados de manera que había que proponérselos a los alumnos, unos u otros, en función de las actuaciones –clasificadas según el modelo (ver capítulo segundo de Fernández, 2001)– que desarrollaran al resolverlos, y que, en caso de sucesivos fracasos, conducían a tareas de enseñanza directamente relacionadas con los precursores determinados en el análisis fenomenológico.

El desarrollo de la entrevista a un alumno siguiendo el organigrama del protocolo es de la siguiente forma:

Si un alumno tiene una actuación satisfactoria al resolver el primer problema de un nivel, se le propone el primer problema del siguiente nivel, que es del mismo tema del bloque temático de tareas de la secuencia didáctica, pero de mayor dificultad.

Si al resolverlo tiene una actuación no satisfactoria, se le propone un problema del mismo tipo que el que no ha resuelto satisfactoriamente, es decir, del mismo nivel, pero más sencillo. Pero, si de nuevo tiene dificultades al resolver este último, se le propone otro aún más sencillo o se le plantea alguna pregunta en la que se introduzca el término ‘relativamente’ o que esté normalizada. Esto último se hace siguiendo la indicación de Freudenthal (1983) que considera que el uso del término ‘relativamente’ y de preguntas ‘normalizadas’ favorece la formación de objetos mentales que nosotros hemos denominado precursores de los conceptos de razón y proporción. Finalmente, cuando el alumno tiene una actuación satisfactoria al resolver un problema o una pregunta de un nivel, se recorre el camino horizontal en sentido contrario siguiendo las flechas del organigrama.

En resumen, la secuencia didáctica de la entrevista con enseñanza se estructura de manera que permite avanzar en varias direcciones dependiendo de las competencias de un alumno particular. La organización de una enseñanza que se desarrolle con una estructura como la que se resume en los organigramas posibilita, por un lado, llegar a situaciones sencillas en las cuales se centra la atención del alumno en aspectos muy elementales de la razón o la proporción y, por otro lado, ir introduciendo situaciones más elaboradas en las que se requiere establecer o identificar diversas relaciones más complejas asociadas a la razón y a la proporción.

8. Análisis e interpretación de las entrevistas

El análisis e interpretación de las ocho entrevistas realizadas nos permitió la elaboración de dos conjuntos: uno, de observaciones relacionadas con el modelo de enseñanza utilizado para el diseño de las entrevistas con enseñanza, y, otro, de observaciones sobre las actuaciones que tienen los entrevistados al resolver las tareas que se le van proponiendo durante la entrevista, es decir, relacionadas con el componente de actuación que tuvimos en cuenta para la elaboración del instrumento de análisis y clasificación de actuaciones.

9. Conclusiones

El punto de vista de los Modelos Teóricos Locales nos ha permitido organizar la actividad matemática en relación con un fenómeno didáctico concreto: la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción en alumnos de 8 a 12 años. En el desarrollo de dicha actividad hemos encontrado 'modelos' que pueden utilizarse en futuras experimentaciones o en el aula.

En el componente formal de la actividad matemática desarrollada, el análisis fenomenológico nos ha permitido obtener una modelización matemática de las tres clases de fenómenos en los que está involucrada la razón o la proporción: exposiciones, composiciones y constructos. Estos 'modelos' –esquemas o diagramas funcionales– nos permiten estimar la mayor o menor complejidad que subyace en cada una de ellas y, a partir de dichos 'modelos', es plausible suponer que los problemas en los que hay que comparar dos exposiciones serán más sencillos que los problemas en los que hay que comparar dos composiciones y que los problemas en contextos geométricos donde se utilicen los □-constructos serán los más difíciles.

En el componente de actuación hemos elaborado un modelo de análisis y clasificación de actuaciones (ver el capítulo segundo de Fernández, 2001), que es una herramienta que permite examinar y categorizar las actuaciones de los alumnos al resolver tareas o problemas en los que está involucrada la razón, la proporción o la proporcionalidad.

En el componente de enseñanza hemos diseñado ocho protocolos de entrevista con enseñanza mediante organigramas o modelos que permiten al entrevistador saber las tareas que le va a proponer al entrevistado en función de sus actuaciones. El conjunto de tareas de cada protocolo constituyen una secuencia de enseñanza y el conjunto de todas las secuencias de enseñanza es un Modelo de Enseñanza (experimentado con alumnos de segundo y tercer ciclos de primaria en entrevistas clínicas) para el estudio del fenómeno didáctico mencionado anteriormente.

Referencias bibliográficas

Fernández, A., Gómez, B., Figueras, O., Margarit, J., Puig, L., Monzó, O. y Ruiz, E. (1998). *Estudio en la escuela primaria sobre competencias vinculadas a la razón y la proporción*. Documento interno. Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral. Universitat de València.

Fernández, A. y Puig. L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 5,* 397-416.

Filloy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel.

Generalitat Valenciana. (1990a). *Diseño Curricular. Enseñanza Primaria*. Colección Diseños curriculares de la Comunidad Valenciana. Valencia: Conselleria de Cultura, Educació i Ciència.

Generalitat Valenciana. (1990b). *Diseño Curricular. Secundaria Obligatoria*. *Área de Matemáticas*. Colección Diseños curriculares de la Comunidad Valenciana. Valencia: Conselleria de Cultura, Educació i Ciència.

Gómez, H. (1996). *Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF.

Jiménez de la Rosa, E. (1996). *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF.

M. E. C. (1989a). *Diseño Curricular Base. Educación Primaria*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

M. E. C. (1989b). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria*, *I y II*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Muñoz, E. (1996). *Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Barcelona: ICE/Horsori.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematic Concepts and Processes* (págs. 127-174). New York: Academic Press.

EL CASO DEL DESARROLLO PROFESIONAL DE UNA MAESTRA[1]

José Carrillo y Nuria Climent, *Universidad de Huelva.*

RESUMEN:

El objeto de esta investigación es el desarrollo profesional de una maestra experta, que lleva a cabo un proceso de reflexión-acción sobre su práctica. Se ha enfocado su desarrollo en función de su conocimiento profesional, concepciones y reflexión sobre su práctica. Se han aplicado y desarrollado instrumentos propios de la investigación cualitativa y se ha valorado especialmente la visión de la propia maestra sobre su desarrollo, y cómo esta visión y sus concepciones han influido en él. Han emergido una serie de regularidades en el proceso que han permitido organizar los resultados en torno a ellas.

[1] Corresponde a la tesis de Nuria Climent, dirigida por J. Carrillo y L. Blanco, que se prevé defender en septiembre de 2002.

ABSTRACT:

The focus of this research is an experimented teacher's professional development. She carries out a process of reflection-action on her practice. Her development has been seen in terms of her professional knowledge, conceptions and reflection on her practice. Proper instruments of qualitative research have been applied and developed. The teacher's perspective on her development has been specially valued, and how this perspective and her conceptions have influenced it. Some regularities have emerged from the process. They have allowed us to organise the results according to them.

1. Motivación, contextualización, foco de atención

Como formadores de profesores, nos preocupan los referentes de su formación, uno de los cuales es el conocimiento profesional para la enseñanza de la matemática. Interesa profundizar en qué se aprende de la práctica y, más aún, qué se puede aprender de ella, lo que relaciona el contenido con la naturaleza del conocimiento profesional.

También interesa qué se aprende de la práctica en relación con el propio conocimiento profesional que se posee. Sobre todo nos interesaba en un principio lo relativo al conocimiento de contenido, por las carencias que suelen tener los maestros, su actitud hacia ese conocimiento y hacia su ampliación (en formación inicial y permanente). ¿Qué se aprende de la práctica respecto del conocimiento de contenido y cómo este conocimiento condiciona ese aprendizaje? Nos interesaba para la revisión de nuestra propia postura al respecto (en la formación de maestros), dada la variedad de posicionamientos y realidades sobre esta cuestión en el marco de la didáctica de la matemática en nuestro país (ver Carrillo y Climent, 1999).

Nos situamos, por tanto, en el terreno del desarrollo profesional (del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática). La iniciación en el curso académico 1999/2000 de un proyecto de investigación colaborativa con un grupo de maestras de Primaria[2], nos ofreció el contexto para acercarnos al estudio de dicho desarrollo. Nos hemos centrado en una de las maestras del grupo y en los términos en que se produce su desarrollo. Esta maestra (I), desde casi los comienzos del proyecto, se implicó especialmente en el cambio de su práctica lectiva, llevando a cabo un proceso de puesta en práctica de lo que ella consideraba la enseñanza de la matemática "desde la perspectiva de la resolución de problemas".

2. Objeto de estudio y objetivos

Podemos resumir el objeto de estudio de esta investigación como: el desarrollo que se produce en una maestra implicada en un proceso de reflexión y modificación de su práctica (en el contexto de una investigación colaborativa sobre la resolución de problemas en el aula de matemáticas); siendo el objetivo fundamental caracterizar dicho desarrollo, incluyendo

en qué términos se produce y cuál es su percepción y concepciones sobre él;

y cómo se ha producido y por qué lo ha hecho en esos términos.

Este objetivo se concreta en:

- *Identificar los aspectos de su conocimiento y su práctica que definen su desarrollo; describir los cambios que se observan en esos aspectos.*

- *Describir su proceso de reflexión y modificación de su práctica; cómo se produce y cómo parece relacionarse con su desarrollo.*

- *Detectar sus concepciones sobre su desarrollo (en qué términos y cómo considera que debe producirse), su posible modificación y su relación con el propio desarrollo producido. Obtener*

[2] *Desarrollo Profesional a través de la Investigación Colaborativa sobre Resolución de Problemas*, financiado por la Consejería de Educación de la J. de Andalucía (convocatoria BOJA 48, 24 de abril).

asimismo su percepción de su desarrollo y cómo esta percepción lo alimenta.

- *Extraer rasgos de la interpretación de esta maestra de la resolución de problemas en el aula de matemáticas y cómo incide esta interpretación en su desarrollo.*

3. Marco teórico

Para analizar el desarrollo profesional de una maestra conviene precisar qué se entiende por desarrollo profesional (del profesor respecto de la enseñanza de la matemática).

La mejora, crecimiento, desarrollo o cambio profesional (empleando algunos de los términos usados en las investigaciones) se describe en torno a distintos aspectos, fundamentalmente respecto del conocimiento, concepciones y práctica del profesor.

Algunas investigaciones toman como referencia el acercamiento de las concepciones y prácticas del profesor a un modelo dado (Putnam y Borko, 2000; Schifter y Simon, 1992). Otras añaden la ampliación del conocimiento del profesor en relación con ciertos rasgos de su conocimiento sobre la materia y su enseñanza y aprendizaje (Franke et al., 1998).

En otros trabajos se enfatizan aspectos más globales de la labor profesional, en los que entran en juego de manera integrada sus concepciones, conocimiento y prácticas. En la caracterización de Cooney (1998) el referente es un práctico reflexivo que adapta su actuación al contexto (lo que se asocia a la permeabilidad de sus concepciones). Para Krainer (1999) un aspecto fundamental es la mejora de la comprensión de la práctica. La actuación en la práctica y su comprensión se potencian mutuamente: *Una mejor comprensión de las propias creencias, conocimiento, acciones, y reflexiones permite una mejora de la práctica, que a su vez se torna en una mejor comprensión así como en la visión de nuevos retos que son el punto de partida de nuevos intereses para comprender mejor...* (p. 26). El conocimiento profesional no es concebido aquí como herramienta para comprender, sino que la comprensión es conocimiento.

Azcárate (1999a) y Santos (2001) identifican la práctica profesional de los profesores con un proceso de resolución de problemas profesionales (vinculado directamente con la construcción del conocimiento profesional), con lo que su desarrollo estaría en relación con su capacidad para formular y resolver estos problemas[3].

Nosotros consideramos la comprensión de la práctica como referente del desarrollo profesional. Asociamos este desarrollo a una toma en consideración progresiva de la complejidad de dicha práctica y del aprendizaje de los alumnos, y el análisis de ella y actuación considerando cada vez más elementos y adaptándola al aprendizaje de los alumnos concretos. Un proceso de aprendizaje continuo como profesional reflexivo y crítico de su práctica.

Los aspectos clave en esa complejización de la visión y actuación del profesor serían sus concepciones, su conocimiento profesional, su práctica docente y su reflexión sobre dicha práctica.

La reflexión sobre la práctica es contemplada como medio y referente del desarrollo profesional, entendiendo la reflexión como consideración activa, persistente y cuidadosa de toda creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de los fundamentos que la sostienen y las conclusiones a las que conduce (Dewey, 1933, p.9). A través de esta reflexión el profesor toma conciencia de sus concepciones y aspectos que caracterizan su propia práctica (haciéndolos explícitos de tal modo que puedan ser objeto de escrutinio crítico, Schön, 1983, 1987), mejorando su comprensión de la práctica y de sí mismo en relación con ésta.

Keiny (1994) sitúa el desarrollo profesional (entendido como un proceso de cambio conceptual) en dos contextos interdependientes: uno social y teórico (un grupo donde los profesores puedan expresar e intercambiar sus ideas y reconstruir su conocimiento pedagógico) y otro

[3] Ponte (2002) amplía este referente, situando el desarrollo profesional en dos campos *profundamente interrelacionados: (i) el crecimiento del conocimiento y la competencia profesional, habilitando al profesor a resolver problemas complejos en una variedad de dominios*, y *(ii) la formación y consolidación de la identidad profesional* de éste.

práctico, la práctica cotidiana del profesor, donde puede experimentar sus nuevas ideas y reflexionar sobre (o en) su experiencia. En nuestro trabajo nos centramos en el segundo contexto (aunque aportamos algunas explicaciones sobre el primero).

Schön liga la reflexión a la acción y a la comprensión de la acción. Una situación única e incierta llega a ser comprendida a través del intento de cambiarla y cambiada a través del intento de comprenderla (1998, p. 126). Diferencia la reflexión sobre la acción (a posteriori) y la reflexión sobre la reflexión sobre la acción, de la reflexión en la acción (en el transcurso de la propia acción). Otros autores, sin embargo, cuestionan la viabilidad de la reflexión en la acción. Eraut (1995) considera que dadas las limitaciones de tiempo (sobre todo en lo que se refiere a la interacción directa en el aula), es difícil que la reflexión constituya parte de esa acción. En la enseñanza la mayoría de la reflexión es sobre la acción y para la acción (cuyo propósito es incidir sobre la acción). Jaworski (1994), por su parte, declara haber encontrado evidencias de que un hábito de reflexión sobre la acción lleva a la reflexión en la acción.

Esta autora (1998) se cuestiona asimismo hasta qué punto la actividad reflexiva de los profesores toma en consideración la propia matemática y su enseñanza y aprendizaje.

Para Llinares (1996) aprender a enseñar (referido a la formación inicial) es una *web* de conocimiento de la materia, conocimiento de contenido pedagógico, creencias epistemológicas y contexto. Evidencia con estudiantes para maestro cómo se relaciona el conocimiento de matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática con sus creencias. La mejora del conocimiento y el cambio en las creencias parecen interactuar. También Putnam et al. (1992) ponen de relieve esa relación con profesores en ejercicio, y, lo que es de especial interés para nuestro estudio, cómo ambas conforman el modo en que los profesores se enfrentan al cambio de su práctica.

El conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de la matemática incluye lo que un profesor *sabe* y lo que *sabe hacer* (respecto de la enseñanza de la matemática). En relación con su naturaleza nos interesa especialmente su relación con la práctica, y en concreto la práctica (y la reflexión sobre la práctica) como generadora de éste. Algunas caracterizaciones del conocimiento profesional enfatizan la práctica como fuente de aprendizaje profesional (Clandinin y Conelly, 1988; Elbaz, 1983). Azcárate (1999b) diferencia el conocimiento profesional del profesor (*que se activa y elabora durante su propia intervención en la práctica*) del conocimiento experiencial. El primero no proviene *de la simple actuación, de un saber-hacer irreflexivo o inconsciente*, sino de la *praxis, una acción fundamentada y transformadora* (pp.114-115). De este modo se liga la construcción del conocimiento profesional a la práctica reflexiva, coincidiendo con Ponte et al. (1998): *el conocimiento profesional se basa sobre todo en la experiencia y en la reflexión sobre la experiencia* (p. 44). El énfasis de la práctica como generadora del conocimiento profesional no conlleva la negación de la necesidad de poseer un marco teórico que permita interpretar y reflexionar sobre la experiencia.

Respecto del contenido del conocimiento profesional, nuestro trabajo se centra en el más específico de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En ese sentido hemos focalizado en el conocimiento de contenido y el conocimiento didáctico del contenido. El primero, entendido como los hechos, conceptos y procedimientos matemáticos, las relaciones entre éstos y los significados y principios subyacentes (*conocimiento de matemáticas*), así como el conjunto de reglas, de "normas de sintaxis" de las matemáticas (*conocimiento sobre matemáticas*) (Ball, 1990a) (incluyendo conocimiento conceptual, sobre las propias normas de sintaxis, y conocimiento procedimental, saber hacer matemáticas). El segundo, el conocimiento relativo al aprendizaje y la enseñanza de los contenidos matemáticos, incluyendo el conocimiento de modos de representación más adecuados para facilitar su comprensión y el conocimiento de las características del aprendizaje de los contenidos (Shulman, 1986; Blanco et al., 1995).

Las concepciones se entienden en la línea de los trabajos de Carrillo y Contreras, quienes trabajan conjuntamente creencias y concepciones bajo este último término, aunque son conscientes de la diferenciación conceptual entre ambos (refiriéndose las creencias a verdades personales con componente evaluativa y afectiva fuertes – Pajares, 1992-, mientras que las concepciones son los esquemas subyacentes organizadores de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva – Ponte, 1994).

Dentro de estas concepciones diferenciamos su visión de la matemática escolar. Los resultados de algunas investigaciones (Ball, 1990b; Thompson, 1992; Santos, 1994; Serrazina, 1998) apoyan la hipótesis de que especialmente en el caso de los maestros la matemática se identifica con la matemática escolar. Por ello, nos hemos fijado en las concepciones sobre qué es, cómo es y qué finalidad atribuyen a la matemática escolar y en qué medida se produce la identificación entre ésta y la matemática como disciplina.

Nos han servido de referentes principales los trabajos de Kuhs y Ball (1986), Thompson (1991 y 1992), Ernest (1989 y 1991) y Carrillo (1998), así como, específicamente respecto de las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Primaria, los de Warren y Nisbet (2000), Grant et al (1998), Llinares y Sánchez (1990), Llinares (1991), Serrazina (1998) y Wilson y Goldenberg (1998).

Finalmente, el propio transcurso del estudio de caso pone de manifiesto la importancia de las concepciones de I respecto del desarrollo profesional, pareciendo tener implicaciones sobre dicho proceso. Un aspecto fundamental de estas concepciones se encuentra en dónde sitúa la autoridad respecto de su desarrollo y su valoración del mismo (para Cooney, 1998, la noción de autoridad es central en la conceptualización de ser reflexivo y adaptativo al contexto). Por último, su visión de la práctica como fuente de aprendizaje, esto es su *problematización de la práctica* (Jaworski, 1996) nos informa de las vías de desarrollo que concibe y su papel en éste. Esta problematización de la práctica está relacionada con su reflexión sobre la misma.

En relación con los referentes citados, han sido foco de atención en nuestro trabajo la mejora de la comprensión de la práctica y de sí mismo en relación con ésta, de qué modo una reflexión sobre la acción continuada lleva a una práctica reflexiva, cómo sus concepciones (sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y sobre la matemática escolar) conforman y caracterizan su desarrollo. Además, nos ha parecido especialmente relevante estudiar de qué modo la reflexión de I sobre su práctica se centra y profundiza en aspectos de la matemática y su enseñanza y aprendizaje; cómo su conocimiento profesional, concepciones y actitudes al respecto potencian y limitan esa centralidad; y la potencialidad de la práctica reflexiva como fuente de aprendizaje de aspectos de su conocimiento profesional más específicos de la matemática. Esta reflexión sobre la práctica abarca la reflexión sobre situaciones de aula concretas y sobre su práctica en general. Finalmente, de su visión del desarrollo y su relación con el desarrollo que se observa nos hemos fijado en dónde sitúa la autoridad en el mismo y qué vías percibe (en particular la práctica como vía de desarrollo).

4. Caracterización metodológica

Hemos pretendido hacer un seguimiento pormenorizado del proceso de desarrollo de I mediante la distribución de los datos a lo largo del periodo observado (sobre todo durante el curso 1999/2000) y la variedad de los métodos empleados para su recogida[4], aprovechando su diversa idiosincrasia y el distinto tipo de información que aportan, desde instrumentos que suponen su introspección (como el diario), a la observación externa de su actuación en el aula.

Nuestra intención es generar conocimiento desde una perspectiva inductiva, en lugar de contrastar o verificar una teoría previa. Nos situamos, pues, en el descubrimiento frente a la verificación (la distinción más fundamental que Reichardt y Cook, 1995, atribuyen a los paradigmas cualitativo y cuantitativo). Ahora bien, nuestra inducción parte en algunos casos de unas hipótesis teóricas previas.

[4] Observaciones de aula, artefactos sobre su práctica y su reflexión sobre ella, entrevistas y declaraciones y cuestionarios sobre el conocimiento profesional deseable que considera debe tener un maestro para la enseñanza de la matemática y sobre sus concepciones respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la materia.

Hemos realizado un análisis de contenido (Bardin, 1986). Hemos partido de algunos focos previos y otros han surgido del propio análisis. En último caso, hemos considerado como focos aquellos aspectos del conocimiento (incluyendo concepciones) y práctica profesional de I que parecían explicar su desarrollo. En el mismo sentido, los instrumentos de análisis de los que nos hemos valido han emergido en distinto grado del análisis. En el caso del estudio de las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, hemos partido de un instrumento de análisis (construido teóricamente, adaptando el de Carrillo, 1998, respecto de las concepciones del profesor de matemáticas de Secundaria, al caso del maestro de Primaria)[5]. También en el caso del estudio del tratamiento de la resolución de problemas en el aula, hemos hecho uso de un esquema existente (Carrillo, 1995)[6], si bien en este caso su utilización ha surgido como necesaria durante el transcurso del propio estudio[7]. Finalmente, en lo que se refiere a su visión de su desarrollo y su reflexión sobre la práctica, tanto los focos de atención como las categorías de análisis han surgido durante el estudio (en la interfaz entre la teoría y los datos).

Respecto de otros aspectos de su conocimiento profesional (fundamentalmente respecto de su conocimiento de contenido y didáctico del contenido) y de su interpretación de la resolución de problemas y la enseñanza de la matemática en relación con ésta, no hemos realizado el análisis con unas categorías tan claras como para poder hablar, de instrumentos de segundo orden (análisis). Los referentes teóricos de los mismos han sido los que nos han dirigido (de un modo más general), dado el interés de estos aspectos en nuestro trabajo (no por sí mismos sino en relación con cómo inciden en su desarrollo).

[5] Tabla CEAM (concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática). Distingue cuatro tendencias didácticas y está organizada por categorías e indicadores.

[6] Establece un hipotético proceso de mejora del tratamiento de la resolución de problemas por parte del profesor en el aula, desde los ejercicios hasta los problemas empleando heurísticos y enfatizando la reflexión.

[7] La atención sobre la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática no ha sido un foco de interés previo de esta investigación. Ha surgido del papel que toma en el desarrollo del caso que nos ocupa, por la importancia que atribuye I a la "enseñanza de la matemática desde la perspectiva de resolución de problemas" y cómo le sirve de referente en su desarrollo. El interés que tiene, no obstante, no es hacer una descripción y análisis detallados de sus concepciones y enseñanza en relación con la resolución de problemas, por lo que no hemos recurrido a instrumentos como el de Contreras (1999).

Durante la recogida de datos hemos realizado un análisis seleccionando unidades de información y asignándoles indicadores de los instrumentos de análisis o categorías disponibles, a la vez que generando nuevas categorías. Este análisis no se ha llevado a cabo con la totalidad de los datos pues conforme se ha ido realizando (y se iba avanzando en la recogida de información), hemos visto más adecuado un análisis más libre de dichos indicadores. En este análisis (que coincide con el análisis final, realizado en la fase última de la recogida de datos y de manera intensiva tras su recogida), hemos tenido las categorías de análisis como referente pero no hemos realizado asignaciones directas a indicadores. Hemos intentado extraer de las unidades de información explicaciones más finas, más relaciones y mantener una actitud más abierta a la comprensión de la situación. La realización de este análisis final se ha materializado en la confección de informes de cada episodio de información considerado[8]. En estos informes hemos intentado plasmar y justificar todo lo que nos sugerían los datos en función del marco teórico y de lo analizado previamente. De este modo, lo que aporta ese episodio en concreto está contextualizado en los otros episodios. Estos informes han sufrido varias revisiones y constituyen parte del análisis de los datos y su presentación.

A través de la elaboración de los informes anteriores hemos ido extrayendo los aspectos clave del problema (los que organizaban nuestra comprensión del mismo, los aspectos que para nosotros definen el desarrollo observado). El informe final del caso ha sido organizado en torno a esos aspectos.

Situamos la finalidad de nuestra investigación en comprender el proceso de desarrollo de I. Nos referimos a construir nuestra propia interpretación del suceso a partir de lo que consideramos se pone de manifiesto en las actuaciones, declaraciones y documentos que I produce. Esta interpretación ha intentado nutrirse también de las interpretaciones de I. Así, *los significados inmediatos y locales de las acciones, según se define desde el punto de vista de los actores*, esencia del enfoque

[8] Denominamos *episodio de información* a cada segmento de información identificable por un tipo de instrumento de recogida de información y un día concreto (correspondiente a una sesión del proyecto de investigación colaborativa o una ficha del diario, por ejemplo).

interpretativo de la investigación para Erickson (1989, p. 196), han interesado en nuestro trabajo.

Si atendemos a los criterios que Latorre et al. (1997) diferencian para clasificar una investigación educativa, podemos decir que ésta es una investigación *básica* (tiene un fin más teórico que de aplicación directa), *longitudinal*, *descriptiva-explicativa* (su intención es tanto ofrecer una descripción del proceso de desarrollo de I como explicaciones del mismo, de los aspectos que lo definen y sus relaciones), *cualitativa*, *idiográfica* y *orientada al descubrimiento*.

Tomando en consideración las dimensiones diferenciadas por Goetz y Lecompte (1988), estaríamos ante una investigación *inductiva* (intentamos descubrir una teoría que explique los datos, no encontrar datos que corroboren una teoría), *generativa* (trata de descubrir constructos y proposiciones a partir de los datos, no probar proposiciones ya formuladas), *constructiva* (las categorías y unidades de análisis surgen del propio análisis) y *subjetiva* (las categorías de análisis no son externas al caso estudiado).

5. Los focos del análisis y la organización de los resultados

A lo largo del análisis de la información van surgiendo los aspectos que parecen describir el desarrollo profesional que se observa en I (los que se muestran más relevantes). En el análisis de los episodios vamos vislumbrando su importancia y haciendo uso de ellos como organizadores. Responden a un diálogo teoría-diseño de instrumentos de análisis-análisis y nos permiten describir lo que se observa en los episodios respecto del desarrollo de I y compararlos.

ORGANIZADORES	**DESCRIPCIÓN**
Puesta en práctica de la perspectiva de RP y su valoración	Cambios que introduce en su práctica, valoración de éstos y de la perspectiva de resolución de problemas para la enseñanza de la matemática. Cómo entiende la RP, para qué sirve, qué entiende por problema y tratamiento de la RP en el aula (esquema de Carrillo, 1995).
Reflexión sobre la práctica	En qué se centra, qué tipo de conclusiones extrae, reflexión en/sobre/para la acción... (categorías de análisis de la reflexión sobre la práctica).
CEAM	*Metodología, concepción del aprendizaje, papel del alumno y papel del maestro* (instrumento CEAM).
Visión de la matemática escolar[9]	Qué y cómo es, cuál es su finalidad, cuál es su orientación (categoría correspondiente del instrumento CEAM).
CDC	Aspectos que se ponen de manifiesto (conocimiento, carencias y toma de conciencia o adquisición) y su percepción de éste.
Intervención en la gestión currículo[10]	Cómo se observa y declara que interviene en la planificación y en la actuación.
Conocimiento de Contenido	Aspectos que se ponen de manifiesto (conocimiento, carencias y toma de conciencia o adquisición) y su percepción de éste.
Visión del DP	Motivación, vías de desarrollo, aspectos que ve necesario abordar y su percepción de su desarrollo (categorías de análisis de la visión del DP).

[RP=resolución de problemas, CDC=conocimiento didáctico del contenido, DP=desarrollo profesional]

[9] Formaría parte de sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática pero hemos querido separarla por la importancia que le atribuimos en el desarrollo de I (se destaca su progresión en esta visión respecto del resto de sus CEAM, que permanecen más constantes).
[10] Se relaciona con su conocimiento didáctico del contenido en la acción. Como en el caso de la visión de la matemática escolar hemos querido diferenciarlo por la relevancia que toma en el desarrollo de I.

Estos organizadores se han mostrado útiles tanto para dirigir el análisis, como para estructurar los resultados. Estos resultados se han dividido en:

- una descripción general del proceso de reflexión y modificación de la práctica,
- una descripción del desarrollo profesional observado, diferenciando:
- aspectos que lo definen (los organizadores mencionados, salvo el último),
- su visión del desarrollo profesional,
- algunas explicaciones sobre cómo y por qué se produce dicho desarrollo.

6. Algunos resultados y conclusiones

Mostramos algunos resultados relativos a su visión del desarrollo, relacionándolos con aspectos que lo definen. Resaltamos la relación entre los dominios diferenciados en la descripción del desarrollo observado. Las limitaciones en la extensión de este artículo obligan a una concisión extrema, ya que hemos sido más explícitos en los apartados anteriores, pues manifiestan el foco de atención y los constructos teóricos utilizados.

El principal detonante de cambios en sus concepciones es su percepción del conocimiento de contenido que se requiere para trabajar desde la perspectiva de resolución de problemas. Esto le lleva a establecer relaciones entre el conocimiento de contenido matemático del maestro y su conocimiento y actuación respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la materia. Su cambio de valoración respecto de sus necesidades de conocimiento de contenido matemático y las repercusiones sobre su enseñanza de estas carencias modifican su perspectiva de qué aspectos considerar en su desarrollo, si bien no parece que modifique su “imagen realista” (lo que considera viable) de su desarrollo próximo.

Afirma que se necesita conocimiento de contenido para: saber el *para qué* desde el punto de vista de la estructura de la materia y de los contenidos escolares en su conjunto de modo que el maestro pueda captar la estructura del currículo y las relaciones entre los contenidos; saber cuáles son los preconceptos matemáticos adecuados para trabajar; trabajarlo de manera relacionada; *usar el libro de texto de forma crítica*, *poder aprovechar mejor las actividades propuestas*.

La observación de su desarrollo ha confirmado sus percepciones. Podemos destacar una progresión en la gestión del currículo y su relación con el libro de texto, llegando a emplearlo con capacidad como para criticar y modificar actividades y contenidos, aunque no su estructura conceptual.

Considera que se necesita más conocimiento de contenido para abordar la enseñanza de la matemática desde la perspectiva de resolución de problemas (*al yo querer poner en práctica eso... antes yo no me daba cuenta, ahora sí que me doy cuenta de mis carencias, respecto al conocimiento de matemáticas*). Antes no pensaba que necesitara tanto ese conocimiento.

A pesar de la percepción de estas limitaciones, no incorpora el abordaje de su conocimiento de contenido en su desarrollo profesional próximo. Desde una perspectiva "realista" de su desarrollo profesional (a medio plazo), no contempla su ampliación de conocimiento de contenido: no es lo único que hay que enseñar, no tiene interés por ello, no tiene tiempo:

> ***I:*** [...] [referido en principio a la adquisición de conocimiento *sobre* matemáticas] *Mi única curiosidad es enseñar mejor a los niños de lo que me enseñaron a mí, pero me he encontrado en el camino mi falta de conocimiento de matemáticas. Si no tengo tiempo, ¿cómo lo voy a sacar de donde no tengo? Si me gustara, a lo mejor le sacaría tiempo. No tengo experiencia como estudiante de haber hecho eso.*

Variadas son las conclusiones que pueden extraerse de un trabajo como éste. El desarrollo de esta investigación posee conexiones con el desarrollo profesional de los investigadores, en los campos de la docencia y la investigación. También se relaciona, por el propio contenido, con el desarrollo profesional de I y con la otra maestra participante en el proyecto de investigación colaborativa.

Un análisis en profundidad habría merecido el papel del proyecto de investigación colaborativa en el desarrollo profesional de sus participantes. Indagar sobre el realismo de una investigación colaborativa, el papel de las interacciones, el rol de los investigadores, queda abierto. Aquí sólo se han expuesto algunos detalles.

La excelente predisposición de I, su gran complicidad con los investigadores, han hecho posible acercarnos y comprender mejor los procesos de desarrollo profesional, en general, y de reflexión sobre la práctica, en particular. Su ambivalente relación con el conocimiento matemático ha imprimido aún más realismo a su caso, y nos hace reflexionar sobre la orientación de las materias de nuestra área en la formación inicial de maestros.

Por otro lado, hemos vivido un proceso de formación permanente enormemente rico, donde se ha puesto de manifiesto la idoneidad de los proyectos de investigación colaborativa y los procesos de reflexión-acción como contextos de desarrollo profesional. La inmersión en las clases de la maestra y las discusiones con ella nos han aportado sugerentes ideas de cara a la formación inicial de maestros. Nuestra visión de lo que debe constituir el conocimiento profesional de un maestro y, sobre todo, del proceso de construcción de dicho conocimiento es ahora más sólida y compleja.

Finalmente, nos gustaría resaltar que los indicadores de los instrumentos de segundo orden nos han servido para enfocar el análisis, para orientar la investigación, para no perdernos en un mar de información. Pero no nos hemos quedado en ese análisis, que podríamos llamar *micro*, sino que hemos desenfocado el punto para, alejándonos, enfocar la zona, lo que nos ha permitido aportar informes relacionados de aspectos pertenecientes a dichos indicadores y, más aún, informes de aspectos difíciles de encuadrar o definir como indicadores. Ese ir y venir de lo local a lo general es una conclusión metodológica que consideramos relevante para la práctica de la investigación.

Referencias

Azcárate, P. (1999a) Los Ámbitos de Investigación Profesional (A.I.P.) como organizadores del curriculum del profesor. *Actas PROFMAT99*. Portimao (Portugal), 121-134.

Azcárate, P. (1999b) El conocimiento profesional: Naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, 8, 111-138.

Ball, D.L. (1990a) The mathematical understanding that prospective teacher bring to teacher education *Elementary School Journal,* 90, 446-449.

Ball, D.L. (1990b) Breaking with experience in learning to teach mathematics: the role of a preservice methods course. *For the learning of mathematics*, 10(2), 10-16.

Bardin, L. (1986) *El análisis de contenido.* Madrid: Akal.

Blanco, L. et al. (1995) Conocimiento Didáctico del Contenido de Ciencias y Matemáticas y Formación de Profesores *Revista de Educación,* 307, 427-446.

Carrillo, J. (1995) La resolución de problemas matemáticos: cómo abordar su evaluación. *Investigación en la escuela*, nº 25, 79-86.

Carrillo, J. (1998) *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J. y Climent, N. (1999) *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Clandinin, D.J. y Conelly, F.M. (1988) Conocimiento práctico personal de los profesores: imagen y unidad narrativa. En Villar, L.M. (ed) *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores.* Alcoy: Marfil.

Contreras, L.C. (1999) *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cooney, T. (1998) Conceptualizing the professional development of teachers. Selección de Conferencias del ICME 8, 101-117. Sevilla: España.

Dewey, J. (1933) How we think. London: D.C. Heath and Co.

Eraut, M. (1995) Schön shock: A case for reframing reflection-in-action? Teachers and Teaching: Theory and Practice, 1(1), 9-22.

Erickson, F. (1989) Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En Wittrock, M.C. (ed) *La investigación de la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación*. Barcelona: Paidós Educador-M.E.C.

Ernest, P. (1989) The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En Keitel, C. et al. (eds) Mathematics, Education and Society. Science and Technology Education. Document Series 35. Paris: UNESCO, 99-101.

Ernest, P. (1991) *The philosophy of mathematics education.* London: The Falmer Press.

Franke, M.L. et al. (1998) Understanding teachers' self-sustaining, generative change in the context of professional development. *Teaching and Teacher Education*, 14(1), 67-80.

Goetz, J.P. y LeCompte, M.D. (1988) *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Grant, T.J. et al. (1998) Observing and teaching reform-minded lessons: What do teachers see? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(2), 217-236.

Jaworski, B. (1994) *Investigating Mathematics Teaching. A constructivist Enquiry*. London: The Falmer Press.

Jaworski, B. (1996) A study of teachers inquiry into the processes of mathematics teaching. En Puig, L. & Gutiérrez, Á. (eds) *Proceedings of the XX PME*, vol. 3, 129-136. Valencia: España.

Jaworski, B. (1998) Mathematics teacher research: Process, practice and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 3-31.

Keiny, S. (1994) Teachers' Professional Development as a Process of Conceptual Change. En Carlgren, I. et al. (eds) *Research on teachers' thinking and practice*. London: The Falmer Press.

Krainer, K. (1999) Teacher education and investigations into teacher education: A conference as a learning environment. En Krainer, K. et al. (eds) *European Research in Mathematics Education I.III. On Research in Mathematics Teacher Education*. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik. Osnabrück, Alemania. Cap.1, pp. 13-39.

Kuhs, T. y Ball, D.L. (1986) Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills and disposition (Research Memo). Lansing, MI: Michingan State University, Centre of Teacher Education.

Latorre, A. et al. (1997) Bases metodológicas de la Investigación Educativa. Barcelona: Hurtado Ediciones.

Llinares, S. (1991) *La Formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.

Llinares, S. (1996) Improving knowledge, professional growth and monitoring the development of mathematics teachers: A necessary integrating of theoretical frameworks. En Puig, L. & Gutiérrez, Á. (eds) *Proceedings of the XX PME*, Addenda, 23-31. Valencia: España

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1990) Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. *Aula,* 8, 165-180.

Pajares, M.F. (1992) Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a messy Construct. Review of Educational Research, 62(3), 307-332.

Ponte, J.P. (1994) Mathematics teachers' profesional knowledge. En Ponte, J.P. & Matos, J.F. (eds) Proceedings of the 18th International

Conference for the Psychology of Mathematics Education. Lisboa: Universidad de Lisboa. Pp. 195- 210.

Ponte, J.P. et al. (1998) O trabalho do professor numa aula de investigaçao matemática. Quadrante, 7(2), 41-69.

Ponte, J.P. (2002) Perspectivas teóricas sobre o desenvolvimento profissional. *Seminario Investigar con profesores: Desarrollo e Identidad Profesional.* Huelva. Documento inédito.

Putnam, R.T. et al. (1992) Teaching mathematics for understanding: Discussing case studies of four fith-grade teachers *The Elementary School Journal*, 93(2), 213-228.

Putnam, R.T. y Borko, H. (2000) El aprendizaje del profesor: Implicaciones de las nuevas perspectivas de la cognición. En Biddle, B.J. et al. (comps.) La enseñanza y los profesores, I. La profesión de enseñar. Barcelona: Paidós. (Traducción al castellano del International Handbook of Teachers and Teaching. 1997. Dordrecht (Holanda): Kluwer Academic Publishers).

Reichardt, C.S. y Cook, T.D. (1995) Hacia una superación del enfrentamiento entre los métodos cualitativos y los cuantitativos. En Cook, T.D. y Reichardt, C.S. (eds) *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata, 25-58.

Santos, L. (2001) A prática lectiva como actividad de resoluçao de problemas: Um estudo com tres professoras do ensino secundário. *Actas XII Seminario de Investigaçao em Educaçao Matemática*, 57-77. Vila Real (Portugal).

Santos, V.M. (1994) An analysis of teacher candidates' reflections about their understanding of rational numbers. En Ponte, J.P. & Matos, J.F. (eds) *Proceedings of the XVIII PME Conference*, vol. 4, 201-208. Lisboa (Portugal): Univ. de Lisboa.

Schifter, D. y Simon, M. (1992) Assessing teachers' development of a constructivist view of mathematics learning. *Teaching and Teacher education*, 8(2), 187-197.

Schön, D.A. (1983) *The Reflective Practitioner*. Londres: Temple Smith. (Traducción al castellano: 1998. *El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan.* Barcelona: Paidós).

Schön, D.A. (1987) Educating the Reflective Practitioner. Oxford, UK: Jossey-Bass.

Serrazina, L. (1998). *Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. Lisboa: Associaçao de Professores de Matemática.

Shulman, L.S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Thompson, A.G. (1991) The development of teachers' conceptions of mathematics teaching. Proceedings of the 13th annual meeting of the PME-NA, 8-14.

Thompson, A.G. (1992) Teacher's Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. En Grouws, D.A. (ed). *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*. New York: McMillan.

Warren, E. y Nisbet, S. (2000) Factors in primary school teachers' beliefs about mathematics and teaching and learning mathematics. MERGA23 Proceedings, 632-639.

Wilson, M. y Goldenberg, M.P. (1998) Some Conceptions are Difficult to Change: One Middle School Mathematics Teacher's Struggle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(3), 269-293.

DEBATE DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I

Tomás Ortega del Rincón, *Universidad de Valladolid*

Una vez concluidas las intervenciones de los tres ponentes del primer Seminario de Investigación (Dr. Moisés Coriat –U. Granada-, Dr. Alejandro Fernández –U.Valencia- y José Carrillo -U. Huelva-), la réplica a sus informes, presentada por la Dra. Joana Brocardo, y la contrarréplica de los ponentes que siguió a la exposición de la Dra. Brocardo, comienza el debate propiamente dicho. en el que intervienen los asistentes presentes en la sala. Éste es moderado por la Dra. Encarna Castro y de las intervenciones de los asistentes destacan las siguientes:

La primera intervención corre a cargo del Dr. Cesar Sáez, que tras reconocer la calidad de las ponencias y elogiar el trabajo de réplica, señalando la dificultad implícita del mismo por tratarse de tres informes de investigación muy diferentes, afirma que se comienza enseñando Matemáticas siguiendo el discurso matemático, que las teorías generales de enseñanza-aprendizaje ayudan a descubrir las dificultades asociadas al proceso, y que las propias Matemáticas tienen elementos que se pueden aplicar para atajar esas dificultades. Su intervención se centra en la enseñanza-aprendizaje del concepto de densidad, como peso por unidad de volumen, y pregunta hasta que punto las interferencias debida al conocimiento generalizado de la Sociedad pueden influir en las dificultades asociadas al proceso de enseñanza-aprendizaje de ese concepto. Después se refiere a la probabilidad como razón entre el número de casos favorables y casos posibles, y opina que no se puede enseñar este concepto sin que antes no se haya iniciado a los alumnos en el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción.

Toma la palabra el Dr. A. Fernández y comenta que en su trabajo de investigación sólo se han estudiado problemas de densidad de población, entre otras razones, porque el concepto de área es más fácil que el de volumen. Por otra parte, en cuanto al concepto de probabilidad, se reconoce que hay autores que presentan la probabilidad como una introducción al concepto de proporción, pero que en su tesis no se ha abordado este tipo de problemática. Comenta que en la investigación realizada se ha trabajado con problemas de comparación de proporciones, en los que figuran cuatro proporciones sobre las que se formulaban preguntas de tipo cualitativo. Así, por ejemplo, en enunciados de problemas sobre juegos escolares en los que compiten dos equipos y en los que se va variando tanto el número de jugadores como la superficie del campo se formulas preguntas de tipo cualitativo considerando situaciones con más jugadores y mayor superficie, más jugadores y menor superficie, menos jugadores y mayor superficie, y menos jugadores y menor superficie. También se consideraban situaciones de razonamiento directo, dando paso a otras de razonamiento inverso.

C. Sáez pregunta por el tipo de alumnado e indica que quizás los alumnos de primer ciclo de Educación Primaria sean demasiado jóvenes para tener en cuenta sus respuestas y A. Fernández corrobora esta conjetura afirmando que en las primeras investigaciones que realizaron sí que trabajaron con niños del primer ciclo, pero que, posteriormente, dejaron de trabajar con este alumnado, ya que para que pudieran responder con éxito, de alguna forma, el enunciado de los problemas ya contenía la solución y, entonces, el número de respuestas correctas era muy superior a las que se obtenían en alumnos mayores y, por tanto, ellos entendían que estaban contaminadas.

CAPÍTULO 2

Seminario de Investigación II: *Métodos y esquemas de análisis.*

En este capítulo de las Actas se presentan las tres ponencias correspondientes al Seminario de Investigación II y la réplica correspondiente llevada a cabo por Leonor Santos del Departamento de Educação de la Faculdade de Ciências de Universidade de Lisboa

MÉTODOS ALTERNATIVOS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: LA OBSERVACIÓN

Mª del Carmen Chamorro Plaza, *Universidad Complutense de Madrid*

RESUMEN:

En el presente artículo se exploran y examinan las funciones que la observación didáctica puede jugar en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Se analiza cómo la observación puede ser usada como parte de la validación interna de una ingeniería didáctica, mediante la confrontación de los análisis a priori y a posteriori. En la segunda parte, se profundiza en el uso de la observación dentro de la formación permanente e inicial del profesorado, valorando su papel en tanto que metodología idónea para el aprendizaje de la Didáctica de las Matemáticas.

1. Necesidad y naturaleza de la observación didáctica.

Es difícil concebir una ciencia que no cuente entre sus métodos con la observación, si bien lo que se observa es muy variado de una ciencia a otra: fenómenos de la naturaleza, el efecto de ciertas sustancias sobre los organismos vivos, el comportamiento humano, etc. Parece pues necesario, fijar desde el primer momento el objeto y la naturaleza de la observación didáctica.

Si nos atenemos al sentido más primitivo del término observación, ésta se limita a una constatación pura y simple de un hecho producido de manera natural, en tanto que la experimentación supone la introducción por parte de quien la realiza, de circunstancias, variables o condiciones capaces de producir un cierto fenómeno.

Ciertas ciencias, como la Astronomía o la Astrofísica representan, por razones obvias, el ejemplo más claro del trabajo de observación, pero la mayoría de las ciencias pasan poco a poco de la observación a la experimentación, en la medida en que los fenómenos a observar son, no sólo observados, sino planificados, modificados y provocados, cuidadosamente, con rigor, y de acuerdo con cierta vigilancia epistemológica y ética, que constituye lo que habitualmente denominamos métodos experimentales.

En estas primeras líneas ha aparecido ya la palabra fenómeno, y es que la Didáctica de las Matemáticas se va ocupar, entre otras cosas, del estudio de los fenómenos propios y característicos de la enseñanza de las matemáticas, fenómenos que vienen determinados, incluso por cada contenido concreto, y que se producen con cierta regularidad siempre que se dan unas circunstancias determinadas. La detección de estos fenómenos, con vistas a su análisis y tratamiento posterior, es a nuestro juicio uno de los campos de investigación más interesantes de la Didáctica de las Matemáticas, pero esta detección y determinación requiere el establecimiento de una metodología específica.

Desde otro punto de vista, una disciplina que como la Didáctica de las Matemáticas aspira a considerarse ciencia, debe someter sus previsiones y sus resultados a la contingencia, y ello supone necesariamente la observación de los actores del aprendizaje en su medio, - la clase-, la definición precisa del corpus de observables (concepciones, errores, saberes invisibles, obstáculos, papel de las variables didácticas, estrategias de los alumnos, etc.), y los métodos de recogida e interpretación de las observaciones.

2. De la naturaleza de los observables.

Toda observación debe ir precedida de las siguientes preguntas: ¿para qué observar?, ¿qué observar?, ¿cómo observar?, preguntas unidas de manera inseparable. El *para qué* va a determinar el *qué,* y el qué va a determinar el *cómo*.

2.1. ¿Para qué observar?

¿Por qué y para qué la didáctica debe interesarse por la observación de las prácticas de enseñanza? Si bien no se ha dado una respuesta explícita a esta pregunta, ni se ha teorizado hasta ahora sobre ello, es evidente que cada vez hay más trabajos de investigación, ya sea en la línea de la investigación-acción o dentro de otras corrientes, que consideran la descripción científica de las prácticas de los enseñantes como pieza clave dentro de su investigación, y empieza a tomar peso la idea de que los trabajos en esta línea proporcionarán a la didáctica nuevos elementos esenciales para su desarrollo como disciplina científica.

Si bien la observación puede ser usada con muchas finalidades, vamos a centrarnos en dos de las a nuestro juicio, más fructíferas en el trabajo en Didáctica de las Matemáticas:

- la observación como herramienta de investigación y útil de modelización del enseñante en el sistema didáctico.
- la observación como herramienta en la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas.

En cualquiera de los dos casos, se hace necesario, desde el principio, preguntarse: *"¿Cómo puede plantearse el problema de la observación didáctica de la clase en términos compatibles con las prácticas científicas?"*[1]

Desde la perspectiva de la Didáctica fundamental, no puede olvidarse que el sistema didáctico constituye un todo, por lo que si bien la observación puede recaer sobre subsistemas o polos concretos, los resultados de la observación deben ser interpretados en relación a todo el sistema y no de manera aislada, sin conexión con los distintos subsistemas.

En particular, la clase puede ser considerada como un sistema, sistema que tiene incluso una memoria y una historia, por lo que ciertos aspectos sólo pueden ser observados a medio y largo plazo, y por tanto las observaciones puntuales corren el riesgo de esconder aspectos importantes del sistema, lo que plantea ya la primera decisión técnica a tomar: qué periodo de tiempo observar, cómo descomponer los tiempos de observación (sesión de clase, temas, complementar la observación de la clase con otros datos, etc.), la conveniencia de observar elementos relacionados con la clase en lugar de entrar en la clase (observación indirecta), etc.

Por otra parte, la observación de este sistema va a depender estrechamente de la teoría con la que se determinen y lean los observables, pues lo que para una teoría es un hecho relevante digno de ser observado y analizado, puede no ser identificado como pertinente por otras teorías. Es decir, que los observables son, en definitiva, un constructo de cada teoría, y cuando el observador no posee ninguna, lo que recoge son los constructos de la institución, lo que la institución quiere que veamos. *"Y no hay evidentemente ninguna razón para que los constructos institucionales sean pertinentes en la problemática del observador. Y es precisamente a partir de esta problemática, y de la teoría en la que ésta se explicita (y se instrumenta), como el observador*

[1] Chevallard, Y.(1992): *L'Observation didactique: Remarques liminaires*, Actes de l'université d'automme des IUFM du Sud-Est, Grasse, .

encontrará el punto de apoyo que le permita escapar a la subyugación institucional: o al menos controlar sus efectos."[2]

En la relación didáctica, las interacciones del alumno con el medio[3], generadoras del aprendizaje, se muestran a través de ciertos comportamientos observables del alumno (p.e. saber resolver un problema o una tarea, dar un tipo de respuesta), y estos comportamientos son característicos de ése conocimiento. De hecho, lo que interesa al investigador son las interacciones que se producen entre las distintas componentes del sistema didáctico, por ello, la observación de clases aparece como un medio privilegiado del que se sirve el investigador en didáctica para confrontar lo que pasa en la realidad con la construcción de la teoría, y gracias a la cual pueden ponerse de relieve los fenómenos didácticos que tienen lugar en la clase.

En cuanto a la utilidad de la observación en la formación profesional de los futuros profesores, el acuerdo es prácticamente unánime. Pero la simple constatación de hechos que caracteriza las observaciones espontáneas o naturalistas, no se corresponde con el estado actual, en tanto que ciencia, de la Didáctica de las Matemáticas, por lo que la pertinencia de la observación en la formación profesional va a residir en la explotación e interpretación que de ella se haga, lo que requiere un diseño y un planteamiento riguroso de la misma.

2.2. ¿Qué observar?

Para que la observación sea fructífera debe estar inspirada por un problema que se quiere estudiar, un fenómeno que se quiere desvelar o un hecho didáctico que se quiere modelizar, debe estar guiada por una idea, en definitiva, por una problemática de investigación, y por ello, necesita enmarcarse dentro de una teoría que permita a posteriori la interpretación de los resultados de la observación.

---

[2] Chevallard, Y.: Op. cit.

[3] Nos referimos, evidentemente, a la noción de medio matemático a la que se refiere Brousseau, es decir, a la confrontación del alumno con un conjunto de situaciones generadoras del conocimiento matemático objeto de aprendizaje.

Una observación no es fortuita, tiene lugar en el seno de una problemática planteada por el investigador o por el observador. Los distintos aspectos de esta problemática son los que determinan, a la vez, lo que es observable y será observado, y la lectura que se hace de esa observación.

En función de lo anterior el objeto de la observación puede variar. Así, si un investigador desea poner a prueba y validar una ingeniería didáctica que ha diseñado para la enseñanza de un concepto concreto, está obligado a hacer una observación directa de las sesiones en las que se va pasar la ingeniería, con las variantes de observar más de una clase, más de una escuela, varios maestros, etc., debe por tanto observar las clases por medio de grabaciones en vídeo y audio, y no puede sustituir esta observación por el análisis de protocolos, entrevistas individuales, estudio de manuales o encuestas. Hay informaciones que sólo pueden ser obtenidas de esta forma, y por ello en algunos casos la observación sobre el terreno no puede reemplazarse..

Sin embargo, puede ocurrir que nuestro objeto de estudio requiera extraer datos de la clase que pueden obtenerse sin necesidad de *poner los pies en ella*. [4]. Una falsa ilusión del investigador principiante es la de encontrar en la observación directa de la clase la respuesta a todas sus preguntas, cuando la realidad muestra que muchos de los datos que se obtienen no son pertinentes en relación con el problema a estudiar, y que otros no pueden ser recogidos, por lo que todo investigador debería estar en guardia sobre los beneficios omnipotentes de la observación de clases. Los beneficios de la observación no residen tanto en su contenido como en la explotación e interpretación que de ella se haga en el marco de la teoría.

[4]Chevallard, en su obra sobre la evaluación Chevallard, Y. y Feldmann, S.(1986): *Pour une analyse didactique de l'évaluation*, IREM de Marseille., tomando como información las calificaciones medias de una clase y la desviación típica a lo largo del año proporcionadas por el profesor, unido a sus comentarios sobre estas notas, muestra cómo estos datos aportan una gran información que permite reconstruir la historia de la clase en tanto que sistema.

No obstante lo anterior, la observación didáctica puede permitir, en ciertos casos, responder a preguntas que se hace la investigación o que aparecen a lo largo de la misma.

2.3. ¿Cómo observar?

La respuesta a esta pregunta tiene mucho que ver con la respuesta a otra ya enunciada: ¿Cómo puede plantearse el problema de la observación didáctica de la clase en términos compatibles con las prácticas científicas?

El informe elaborado de una observación puede ser correcto o erróneo, su interpretación puede ser buena o mala, y ello con independencia de la calidad de la observación, y es que es realmente difícil saber qué reglas aplicar para hacer una buena interpretación de una buena observación.

La problemática del investigador actúa como un filtro epistémico sobre el campo de los observables, reteniendo sólo aquellos que tienen que ver con el problema planteado, lo que nos lleva directamente a considerar la deontología del investigador y las precauciones a tomar para evitar sesgos e interpretaciones interesadas.

En todo caso, quien observa debe tener claro desde qué papel lo hace, experto, investigador, formador, agente innovador, etc., lo que a veces no es fácil dado que se pasa constantemente de una posición a otra, y además, una misma observación admite distintas finalidades posibles.

Todo investigador es susceptible de ser imprudente, de ser demasiado rápido, in extremis, de faltar a la sinceridad[5] (R. Droz), por lo que parece necesario tomar ciertas precauciones, sobre todo de tipo metodológico que aseguren el control de la situación.

[5] Droz, R (1980).: *Observations sur l'observation*, , Avignon, Groupe Dupont.

Ya Friedrich[6] (citado por Droz) enumeraba un amplio espectro de los posibles efectos distorsionadores que pueden modificar la calidad de la observación:

- *efecto de halo*: el observador identifica ciertas características positivas en el observado, y tiende a atribuirle otras no observadas.
- *efecto de generosidad*: el observador tiende a atribuir características positivas al observado.
- *efecto de regresión* hacia la media: el observador no observa actitudes extremas sino actitudes medias.
- *efecto de coherencia lógica*: el observador desea que un conjunto de características observadas se organicen en un todo armonioso y pasa por alto los elementos divergentes.
- *efecto de la primera impresión*: ésta puede modular la lectura de todas las características posteriormente identificadas.
- *efecto de contacto*: el observador tiende a especificar las características observadas en relación con la imagen que tiene de sí mismo, bien en congruencia o en contraste.
- *efecto de espera* del observador en relación con el observado, y de éste con la situación.
- *Confusión entre las características generales y las momentáneas o aisladas.*

Todo lo anterior requiere que se tomen todas las precauciones posibles, que exista un contrato claro entre el investigador y el profesor observado, en el que no haya dudas sobre el papel que cada uno debe interpretar y respetar, así como la responsabilidad de las decisiones que se adopten.

[6] Friedrich, W (1971).: Methoden der marxistisch-leninistischen Sozialforschung, Berlín, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,.

3. La observación en el marco de la ingeniería didáctica.

El didacta va a enfrentarse al problema de la construcción del conocimiento matemático de los alumnos, y por tanto al problema de la elaboración o análisis de la génesis del conocimiento. Uno de sus trabajos va a ser el diseño de lo que se ha venido conociendo desde 1980 con el término de **ingeniería didáctica**.

Vergnaud señala, que *"la organización de una situación didáctica en un proyecto colectivo de investigación para la clase, supone la consideración a la vez de las funciones epistemológicas de un concepto, de la significación social de los dominios de experiencia a los que hace referencia, el juego de papeles entre los actores de la situación didáctica, los resortes del juego, del contrato y de la transposición".*[7]

"El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por el maestro-ingeniero para realizar un proyecto de aprendizaje para una cierta población de alumnos."[8]

La elaboración de situaciones para la construcción de un concepto dado va a requerir necesariamente un cambio de temporalidad que tenga en cuenta la existencia de dos tiempos, no homomorfos, y por tanto la necesidad de articular el tiempo didáctico y el tiempo de aprendizaje.

La actividad del enseñante pasa por reorganizar el saber a efectos de una presentación didáctica, proponiendo frente a la epistemología histórica, una epistemología artificial, construyendo lo que se ha denominado una **génesis artificial del saber.**

Históricamente, la ingeniería didáctica tiene su origen en la necesidad interna que tiene la investigación en Didáctica de las Matemáticas para acceder al control y observación de determinados

[7] Vergnaud, G (1991): " La théorie des champs conceptuels", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10. 2/3, Grenoble, La Pensée Sauvage, p.157.

[8] Douady, R. (1992): *L'ingénierie didactique*, Cahier de DIDIREM nº 19, Paris, Université de Paris VII, p.2.

fenómenos de enseñanza específicos de un conocimiento matemático dado.

La ingeniería didáctica puede entenderse como una metodología propia de la investigación en didáctica, basada en un esquema de experimentación de las realizaciones didácticas en clase, muy alejada de la metodología experimental, que ha sido hasta hace poco la dominante epistemológicamente.

Como señala Chevallard: *"paradójicamente, el punto de partida de la ingeniería didáctica no es la necesidad de satisfacer demandas sociales de nuevas técnicas para enseñar y aprender matemáticas. Dicha satisfacción no podía existir porque, por razones culturales, a las instituciones (docentes y no docentes) les cuesta mucho reconocer sus propias necesidades didácticas, es decir, sus necesidades de técnicas de estudio. La imposibilidad de dicho reconocimiento está estrechamente relacionado con la peyoración cultural hacia lo didáctico, que banaliza las actividades sociales de enseñanza y aprendizaje, en el sentido de que hace impensable que estas actividades puedan proceder de un saber técnico (y, en consecuencia, tecnológico y teórico): reconocer una necesidad didáctica- es decir de técnicas didácticas- supone reconocer la existencia de un problema didáctico (o de un campo de problemas didácticos) que debe ser resuelto ya sea por la institución misma, o apelando a una segunda instancia, ¡y lo didáctico es por sí mismo no problemático!"*[9]

3.1. La metodología de la ingeniería didáctica.

La ingeniería didáctica se diferencia de otras metodologías de investigación fundamentalmente por los criterios de validación que utiliza, bien alejados de las clásicas comparaciones de resultados entre grupos experimentales y testigo, estando por el contrario, más próxima del estudio de casos, y fundamentando su validez de manera interna, a través de la confrontación entre el **análisis a priori** y el **análisis a posteriori**.

[9] Chevallard, Y (1991).: 'La ingeniería didáctica de los sistemas de formación y algunas nociones afines", Curso impartido en el Seminars de Didàctica de les Matemàtiques del Departament de Matemàtiques de la UAB, enero de 1991.

Los objetivos de investigación de las ingenierías didácticas pueden ser muy variados, destacando el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto determinado, la elaboración de génesis artificiales de un saber concreto o estudios de tipo transversal (por ejemplo, la resolución de problemas, el aprendizaje de la demostración, el debate científico, etc.). Se acostumbra también, a hablar de micro y macro-ingenierías; el primer término hace referencia a estudios de tipo local, de amplitud limitada, en tanto que el segundo se refiere a procesos de varios años de duración, que pueden englobar varios conceptos relacionados entre sí, que se interesan por ejemplo por la articulación de distintos conocimientos o estrategias globales de aprendizaje.

La teoría didáctica general constituye un apoyo imprescindible para el diseño de ingenierías didácticas. Así, por ejemplo, un estudio previo del campo conceptual que englobe la noción en cuestión parece necesario, tanto para no perder aspectos importantes del concepto como para no limitar su potencial riqueza, Entre las distintas fases de la metodología de ingeniería didáctica, M. Artigue[10] señala las siguientes:

1. Análisis previos.

2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería.

3. Experimentación en el aula de las situaciones didácticas.

4. Análisis a posteriori y evaluación.

La fase de análisis previos comprende:

- análisis epistemológicos del concepto objeto de la ingeniería,
- el análisis de la enseñanza usual y sus efectos,
- el análisis de las concepciones de los alumnos, las dificultades y obstáculos ligados a su evolución,
- el análisis de las limitaciones y condicionamientos del marco en las que se va a situar la realización didáctica efectiva, atendiendo

[10] Artigue, M (1990).: "Ingénierie didactique", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9.3, Grenoble, La Pensée Sauvage, p.p.281-307.

a la dimensión epistemológica (características del saber en juego), cognitiva (características cognitivas de aquellos a los que se dirige la ingeniería) y didáctica (características del funcionamiento del sistema de enseñanza),

- la determinación de objetivos de la investigación.

En la segunda fase de análisis a priori, el investigador va a actuar sobre las variables, fijando aquellas que considera pertinentes en relación con el problema de estudio. Se distinguen dos tipos de variables, las de tipo macrodidáctico, que afectan a elecciones de carácter general y a la organización de la ingeniería, y las microdidácticas o locales, ligadas a la organización de las distintas sesiones y al contenido objeto de la ingeniería.

El análisis a priori pretende, entre otras cosas, controlar el sentido a través de la concepción de situaciones didácticas apropiadas, determinando en qué forma las distintas elecciones efectuadas, a través de las variables, permiten controlar, tanto la actividad del alumno como el sentido que construyen. Hay una parte del análisis a priori que es de tipo descriptivo, incluye las elecciones locales y su relación con las elecciones de tipo global, pero la parte más importante es la de tipo predictivo, centrada en el análisis de las situaciones, sus características a-didácticas, el desafío que estas situaciones representan para el alumno, las posibilidades de acción, elección, decisión, control y validación de las que estos disponen una vez conseguida la devolución. Hay también una previsión de los comportamientos posibles del alumno, así como un análisis de en qué forma estos comportamientos esperados suponen la adquisición de los conocimientos buscados por la situación.

El análisis a priori es, por tanto, esencialmente a-didáctico, pero debe prever las relaciones entre lo a-didáctico y lo didáctico, situando al profesor y determinando su papel dentro de las situaciones.

La fase de experimentación, aunque clásica, debe llevarse a la práctica con determinadas cautelas, prestando especial atención a la metodología de observación.

El análisis a posteriori se halla ligado a la validación, de tipo interno, que surgirá de la confrontación entre lo esperado en el análisis a priori y lo sucedido en la experimentación. Se trata de analizar los datos recogidos durante la experimentación: crónicas, observaciones, videos, transcripciones, entrevistas individuales, ejercicios, cuestionarios, etc., confrontándolos a las previsiones del análisis a priori, fundando la validación no en aspectos estadísticos de medida de desviaciones entre grupo control y testigo, como hace el método experimental clásico, sino en la validación o no de las hipótesis enunciadas en al análisis a priori. La confrontación entre los dos análisis es a menudo difícil, y ello porque requiere de una descripción muy pormenorizada y costosa, que permita hacer después un análisis en términos de validación de las hipótesis que han sido confirmadas o rechazadas en la experimentación, proponiendo después modificaciones de las ingenierías iniciales.

La ingeniería didáctica ha colaborado de forma decisiva en el desarrollo de la didáctica, al poner de manifiesto fenómenos que permanecían ocultos y escapaban a la observación *naturalista* de las clase, entre otros: la necesidad y carácter de la institucionalización, la existencia de la memoria didáctica, el uso de la ostensión, la existencia de objetos didácticamente invisibles, y muy especialmente el problema de la obsolescencia y reproducción de las situaciones didácticas.

Ya hemos visto que una ingeniería didáctica puede diseñarse con dos finalidades muy distintas. Una, la más natural, supone la construcción de una génesis artificial del saber con fines de enseñanza e investigación. El investigador, después de haber realizado un estudio epistemológico del concepto a enseñar, de haber analizado los factores genéticos, la transposición didáctica, y toda la literatura relativa a errores y obstáculos, diseña, dentro del marco teórico de la Teoría de Situaciones[11], una ingeniería didáctica que va a someter a prueba usando la validación interna, consistente en confrontar los análisis a priori y a posteriori[12]. La experimentación de esta ingeniería en el curso o cursos previstos, es una parte importante que debe prepararse con cuidado, y que

[11] Brousseau, G (1998).: La Théorie des Situations didactiques, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[12] Para ampliar la información sobre en qué consisten los análisis a priori y a posterior, puede consultarse Chamorro, M.C (1997).: *Estudio de las situaciones de enseñanza de ka medida en la escuela elemental*, Tesis doctoral microfilmada, Madrid, UNED.

va precedida de múltiples reuniones con los profesores que habrán de poner en práctica las sesiones, y con los que es necesario acordar un contrato claro.

La organización material de la observación: quién y qué se observará, constituir los equipos de observadores y cronistas, confeccionar las pautas de lo que se desea observar en particular, es un trabajo penoso pero necesario si se quiere sacar partido a una experimentación que, además de ser irrepetible la mayoría de las veces, es siempre muy costosa en tiempo y esfuerzo.

Las pautas dadas a los observadores deben ser claras sobre las cosas a observar, y deben guardar relación con las previsiones hechas en el análisis a priori, que deberán confirmarse o desestimarse tras la experimentación. Así, deben observarse las estrategias utilizadas por los alumnos, el paso de unas a otras, las rupturas del contrato didáctico, las fases a-didácticas o didácticas de las situaciones, el funcionamiento de las fases de acción, formulación, validación e institucionalización que se haya previsto, etc.

La explotación de los datos extraídos de la observación es imprescindible para realizar el análisis a posteriori y la eventual validación de la ingeniería, y deben constituir un mosaico amplio que permita, de alguna manera, reconstituir lo acaecido en la clase (notas de los observadores de cada grupo, crónicas de la sesión, trabajos escritos de los alumnos, grabaciones en vídeo, transcripciones de protocolos, etc). Debe permitir responder a una lista de preguntas, planteadas previamente, sobre los efectos esperados o no de las lecciones observadas, confirmar o desestimar, hechos e hipótesis formulados antes de la observación.

Las precauciones deontológicas hacen necesario respetar al máximo la independencia entre el sistema de investigación y el sistema didáctico, por lo que el investigador debe permanecer al margen de determinadas tareas, para así garantizar su independencia.

Otras veces, la ingeniería didáctica se diseña como un recurso de fenomenotecnia y responde a cuestiones como las siguientes: ¿cómo poner en evidencia fenómenos didácticos?¿cómo identificar los elementos de regularidad o variación en las prácticas observadas?. Se trata de provocar, para así poder elucidarlos y estudiarlos mejor, fenómenos didácticos que o bien han sido previstos en la teoría, o han sido detectados casualmente a lo largo de otras observaciones.

Este es el ejemplo más claro de cómo el objeto de la investigación determina el contenido de la observación.

4. La observación didáctica como herramienta en la formación de los profesores

Durante mucho tiempo se actuó en la formación inicial sobre el presupuesto, implícito e ingenuo, de que los gestos profesionales podían ser aprendidos observando a otros profesionales; ahora sabemos bien que una clase esconde una gran complejidad, y que hay un gran número de variables que entran en juego, por lo que la gestión de una clase de matemáticas requiere controlar muchos conocimientos, no sólo matemáticos, lo que desborda con mucho las posibilidades de un principiante de observar y comprender la totalidad de lo que está ocurriendo en la clase. Por otra parte, un profesor en formación inicial no dispone de los instrumentos metodológicos necesarios para recoger y analizar los aspectos pertinentes de una observación de clase, creer lo contrario sería caer en la ilusión de la falsa transparencia tan frecuente en la enseñanza, por lo que el uso de la observación en la formación podría ser de nula utilidad si no se organiza y estructura.

Es evidente que lo que se ve en una clase depende de lo que se sabe y de lo que no se sabe, y que en una observación naturalista, a veces, lo que llama la atención no es lo más significativo[13], por lo que los estudiantes se quedan habitualmente en la superficie, sin que puedan abarcar todos los aspectos de lo que realmente está ocurriendo.

[13] Ver Douady, R. y Robert, A. (1992): *Quelques réflexions sur l'observation en classe en formation professionnelle initiale des futurs enseignants,* Actes de la COPIRELEM, Pau-Nice.

Todo lo anterior justifica que se haga un estudio de las condiciones que debería reunir una observación para ser formativa.

4.1. Las funciones de la observación de clases.

La experiencia que un estudiante para profesor tiene de la escuela, se haya circunscrita y muy condicionada por su propia experiencia como alumno, lo que evidentemente no le proporciona una visión objetiva y general. Por otra parte, los saberes matemáticos que se usan en la escuela aparecen muy desligados de los saberes sabios[14] recibidos por el alumno con anterioridad, por lo que a menudo hay que hacer todo una análisis epistemológico de los saberes matemáticos que están en juego en una situación didáctica. A esto hay que añadir, como contenido formativo, un saber didáctico que proporcione al futuro profesor herramientas de análisis y control de sus acciones en clase.

Pero junto a los saberes matemáticos y didácticos, aparece lo que algunos autores han llamado el tercer saber, el conocimiento profesional, conocimiento ligado a la práctica y que forma parte de los saberes-hacer del oficio de profesor, saberes sobre los que el acuerdo no es tan general como en los saberes matemático y didáctico, entre otras cosas por su carácter menos cerrado y más en evolución que los anteriores.

La mayoría de las acciones formativas pretenden proporcionar al futuro profesor un modelo que le sea útil en la acción, tratando además de comunicar la concepción que ellos tienen de la enseñanza. Y para ello, según han mostrado Houdement y Kuzniak[15] utilizan fundamentalmente cuatro estrategias:

estrategias culturales, basadas en la transmisión del saber, y que no cuestionan su puesta en funcionamiento en la clase por parte del futuro profesor. Buscan sobre todo aumentar los conocimientos matemáticos del formado.

[14] Usamos aquí la terminología acuñada por Y. Chevallard en su conocida obra de La Transposition Didactique, y con el mismo sentido.
[15] Houdement, C y Kuzniak, A (1996).: Autour des strategies utilisée pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, 16.3,, La Pensée Sauvage, Grenoble.

estrategias basadas en mostrar cómo hacer. Buscan la transmisión de un modelo a través de la mera observación de clases, tratando de hacer imitar una práctica.

estrategias basadas en la homología. El formador practica un modelo que el formado deberá después trasponer a la escuela, y enseña según la concepción que él tiene de cómo debe enseñarse en la escuela.

estrategias basadas en la transposición. Se distinguen de las anteriores por el distanciamiento teórico que supone el análisis didáctico que se hace de los modos de transposición. Proponen la transmisión de saberes pero siempre en el contexto de la práctica de la clase, tomando en consideración dos niveles distintos de transposición: según se trate de niño de la escuela o del estudiante para profesor.

En todas las estrategias, a excepción de la culturalista, la observación de clases tiene su razón de ser, si bien la explotación que de ella se haga va a estar en función de la concepción que el formador tenga de cuál debe ser su trabajo, pero es indudable que se trata de una potente herramienta de formación.

La observación, tal y como nosotros la concebimos, va a permitir al alumno mirar la realidad escolar de una clase de matemáticas desde una perspectiva distinta, entre otras cosas, gracias a los conceptos proporcionados por la didáctica, que van a mostrarse, con motivo de la observación, herramientas de gran utilidad práctica, ayudando a instalar en la mente de los futuros profesores la necesidad de fundar sus prácticas profesionales sobre contenidos didácticos, objetivo que nos parece de gran importancia en la formación inicial.

El formador debe llevar a cabo el trabajo necesario para ayudar al alumno a franquear la barrera que separa los conocimientos teóricos de distinto tipo, matemáticos, pedagógicos, didácticos, y la práctica profesional.

La habitual dificultad de compatibilizar teoría y práctica, la distancia existente entre el curso de didáctica y la realidad de la clase, pueden disminuir gracias a la observación.

4.2. La observación y la didactificación de la didáctica.

Los contenidos didácticos no son directamente asimilados por los profesores en formación, por lo que es necesario hacer una reflexión sobre cómo enseñamos en formación inicial la Didáctica de las Matemáticas.

Entre los objetivos, aceptables por la mayoría de los didactas, que se pretende lograr en la enseñanza de la Didáctica de la Matemáticas señalamos los siguientes:

- Sensibilizar al alumno hacia el funcionamiento del sistema educativo y cuestiones relativas al aprendizaje de las matemáticas: concepciones, errores, preconceptos, fracaso escolar, etc.. En particular, concienciar al alumno de la complejidad de las acciones de enseñanza de las matemáticas.
- Permitir al alumno vivir un cierto estilo de aprendizaje de las matemáticas basado en presupuestos constructivistas, para ayudarle, entre otras cosas, a desprenderse de los esquemas escolares de los que es prisionero.
- Proporcionar al alumno elementos de base necesarios para el análisis didáctico, que permitan resituar y redefinir los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y el comportamiento de los alumnos en matemáticas.
- Hacer evolucionar las concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas y las formas de acceder a ellas.

Sería, sin embargo, engañoso, pensar que una formación teórica podría lograr los objetivos citados: sin experiencia profesional las cuestiones de didáctica, e incluso epistemología, no pueden tener sentido pleno; una iniciación teórica no puede dar lugar a un verdadero saber ni a la adquisición de competencias profesionales, puede, incluso, dar una falsa idea de la manera en que las cosas se plantean realmente. La afirmación anterior hace que la observación didáctica se sitúe en una posición relevante para lo que podríamos llamar una preprofesionalización[16] del alumno.

En la línea de buscar una construcción significativa de la didáctica por parte del alumno, hay que indagar no sólo qué contenidos transponer y en que orden, sino la manera de hacer surgir los conocimientos didácticos a partir de actividades expresamente diseñadas; y es en este ámbito, en el que la observación programada y dirigida puede ser de enorme utilidad, por ello, la observación puede ser una herramienta importante en la investigación metadidáctica, y comprobar hasta qué punto su uso colabora de manera eficaz en la consecución de los objetivos antes enumerados.

La observación debe contribuir a la formación, pero para ello debe estar integrada en un proceso más completo y estar bien preparada, pudiéndose desarrollar en varios tiempos. Lo razonable sería comenzar por observaciones más superficiales, de sensibilización, hasta llegar a otras medianamente preparadas en las que haya una iniciación a un cuestionamiento sistemático de ciertos aspectos: naturaleza de las actividades, uso del tiempo, errores, etc..

Las primeras observaciones, de sensibilización, pueden tener como objeto el descubrimiento de la complejidad de la profesión, desmontando la idea, bastante extendida entre los principiantes, de que para enseñar, lo que se necesita es dominar los saberes en juego y ser claro en las explicaciones. Sirven de motivación, y hacen comprender la necesidad de una formación didáctica que ayude a dar respuesta a los numerosos interrogantes que se suscitan.

Tras una primera aproximación a los conceptos de base de la didáctica, los alumnos disponen ya, tanto de herramientas como de un lenguaje más preciso con el que reformular las cuestiones relativas al

[16] Entendemos por preprofesionalización una formación que permita al estudiante verificar su interés por la profesión, confrontando su proyecto, y bien convertirse en profesor o abandonar.

binomio enseñanza-aprendizaje. Las observaciones de clase pueden entonces, tener como función ilustrar y dar un sentido más vivo, al menos parcialmente, a los conceptos didácticos anteriormente abordados, lo que dará lugar a la formulación de nuevas cuestiones y a aumentar, a los ojos de los alumnos, la importancia de los hechos didácticos. Las observaciones pueden limitarse a objetivos precisos, temas de trabajo, o formulación de hipótesis. Por ejemplo:

- estudiar una u otra elección en la transposición didáctica y sus consecuencias,
- estudiar y discutir el análisis a priori de una secuencia y localizar los momentos claves a lo largo de la observación,
- formular en términos de contrato los comportamientos observados y ver en ellos, de manera más clara, lo que el profesor espera de los alumnos,
- constatar el papel de ciertas variables didácticas,
- comparar distintas elecciones de gestión de la situación, fundamentalmente el comportamiento de los alumnos y del profesor en la resolución de problemas,
- trabajar sobre el error y su tratamiento.

Cada estudiante, o grupo de estudiantes podría trabajar la observación centrándose en un tema, y produciendo un documento escrito que podría ser debatido por la clase.

La observación puede jugar, también, un papel importante de cara a concienciar al futuro profesor de la necesidad de reorganizar y completar sus conocimientos matemáticos a efectos de ser enseñados. Este efecto se obtiene con más facilidad cuando se hace un análisis de los procedimientos y errores de los alumnos, basándose en resultados de investigación, y se localizan a lo largo de las observaciones de clases.

Una observación guiada ha debido ser preparada con anterioridad, comenzando por ejemplo con el estudio y resolución matemática de la situación o progresión que será observada, resolución que no es evidente para todos los futuros profesores, y que va a facilitar la localización e interpretación de los errores cometidos por los alumnos observados. El estudio de los cuestionarios oficiales: ciclo, contenidos, objetivos, conocimientos previos, etc. ha debido hacerse también previamente.

En un segundo tiempo, se parte de una ingeniería previamente diseñada por los expertos y que ha sido experimentada en el nivel correspondiente[17]. Es posible comenzar, como hemos dicho, haciendo un estudio del problema matemático que se plantea, de los objetivos que se pretenden, para pasar después al análisis a priori de la situación, partiendo, por el momento, sólo del texto escrito que describe la situación.

Este análisis a priori que va a versar sobre cuestiones didácticas va a dar la oportunidad, ya sea de introducir conceptos básicos: noción de contrato didáctico, devolución, variable didáctica, estrategia de base, situación a-didáctica, etc, o de someterlos a revisión, viendo si el alumno es capaz de identificarlos y usarlos en la práctica. En este análisis deben poder hacerse ciertas conjeturas sobre el comportamiento esperado de los alumnos, la gestión de la clase por el maestro, los errores de los alumnos, o la aparición de fenómenos de enseñanza. Tiene cierta importancia que el futuro profesor haga una estimación del tiempo que se invertirá en las diferentes fases de enseñanza, pues ésta es uno de las mayores dificultades que tienen los profesores novatos, estiman mal las dificultades que el niño va a encontrar y el tiempo que se va a necesitar para el desarrollo de las actividades.

Se pasa, después, a la observación propiamente dicha, visionando el material videográfico. Esta parte, además de ser la más grata para el futuro profesor, permite dotar de verosimilitud a todo el proceso, lo que tiene gran importancia. No hay que olvidar que la concepción que los alumnos tienen de la enseñanza de las matemáticas se halla muy ligada a su experiencia como alumnos de la escuela elemental, por lo la

[17] En nuestro caso, hemos usado sendas ingenierías para la enseñanza de la longitud y la superficie que ya habíamos experimentado en el C.O.R.E.M. de Burdeos, y que forman parte de nuestro trabajo de tesis doctoral. Dichas ingenierías han sido puestas en práctica de nuevo en los cursos 2000-2001 y 2001-2002 en el C.P. Pablo Picasso de Fuenlabrada (Madrid), y se dispone de mucho material filmado, ejercicios de los alumnos, etc. Otras comunidades de didactas como la francesa, disponen de trabajos de macroingenierías realizadas por ERMEL y publicadas por el INRP que son de gran calidad y utilidad.

confrontación entre sus concepciones iniciales sobre la enseñanza y lo que se les propone es un choque, y hay muchos alumnos que desearían, pero se ven incapaces de llevarla adelante, una enseñanza de las matemáticas más motivadora y viva, en la creencia de que ello no es posible.

ENTREVISTAS CLÍNICAS INDIVIDUALES A ESCOLARES DE 3 A 6 AÑOS. UNA MODELIZACIÓN DE LAS COMPETENCIAS ORDINALES EN EDUCACIÓN INFANTIL.

Catalina Fernández Escalona, *Universidad de Málaga.*

1. Introducción.

Nos situamos en Educación Infantil en la línea de Pensamiento Numérico, con un trabajo que pretende describir y explicar el desarrollo real del conocimiento lógico-ordinal de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años, con su consecuente repercusión en el aula.

Cuando afrontamos una investigación en Educación Matemática, nos planteamos los procedimientos y técnicas metodológicas apropiadas para tal fin. Estos planteamientos pasan por el análisis y revisión de investigaciones afines.

Al analizar los antecedentes, tenemos una primera justificación metodológica a la hora de proceder con estudios empíricos con niños de corta edad (3-6 años). Manifiestan que las entrevistas clínicas individualizadas, y sobre la base de un material concreto, son pruebas adecuadas para ese tipo de estudios, que han de ser, por tanto, cualitativos y con una muestra reducida de niños (Bliss, 1987; Blanco y Prieto 2000).

Con niños de Educación Infantil se hace más adecuado un método clínico, esencialmente individual, cualitativo y no estandarizado (Claparède, 1976; Vinh-Bang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974, Ortiz 1997) en detrimento de otros de observación pura y pruebas de rendimiento. El método empírico que vamos a seguir tiene la siguiente forma:

> *Niño y experimentador actúan y hablan sobre una situación concreta. Según las acciones individuales de los niños, las observaciones y las respuestas a preguntas, el experimentador puede modificar la situación concreta, ofrecer sugerencias o pedir explicaciones (Piaget y Apostel 1986; Bermejo y Lago 1991; Sophian, 1995, Ortiz, 2001).*

En el caso que nos ocupa, hemos considerado conveniente usar ese método clínico a lo largo de los estudios empíricos realizados, haciéndose efectivo mediante entrevistas clínicas individuales con niños de 3 a 6 años.

Hemos de decir que han sido varias las metodologías utilizadas para desarrollar la investigación. Usando un método teórico de investigación como es el Análisis Didáctico, de la secuencia numérica, y realizando un Estudio Cualitativo Exploratorio con entrevistas clínicas individuales a niños de 3 a 6 años, se determina un **MODELO EVOLUTIVO DE COMPETENCIAS ORDINALES** que consta de 6 estados de conocimiento y es susceptible de una validación empírica. Dicha validación constituye el segundo Estudio Empírico Cualitativo basado, al igual que el primero, en entrevistas clínicas individuales.

En lo que sigue, delimitamos algunos aspectos previos para poder comprender la importancia y el alcance real de las entrevistas realizadas para situarlas en el lugar correspondiente aludiendo a los diversos métodos utilizados y dándoles la verdadera dimensión científica.

En segundo lugar se atiende al diseño y desarrollo, con los máximos detalles posibles, tanto para la configuración del estudio exploratorio como para el estudio que valida el modelo.

Finalmente, reseñamos las consecuencias, para la actuación en el aula, derivadas del modelo evolutivo creado con el sustento de las entrevistas clínicas individuales con escolares de 3 a 6 años.

2. Localización de las entrevistas en una investigación de competencias ordinales en Educación Infantil.

Situándonos en el marco matemático conceptual de las relaciones asimétricas biunívocas y las relaciones asimétricas transitivas, y tras realizar el análisis de investigaciones previas[1] con relación a la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años tenemos lo siguiente:

- Definición del problema de investigación: **Un estudio que pretende explicar y describir el desarrollo de las relaciones lógicas-ordinales de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años.**
- Metodología a seguir: *Entrevistas clínicas individuales* con una muestra reducida de niños y sobre un material concreto que reúna las condiciones necesarias para trabajar los esquemas lógicos ordinales subyacentes a la secuencia numérica.

El desarrollo de las relaciones lógicas ordinales se explica y describe en el MODELO EVOLUTIVO DE COMPETENCIAS ORDINALES. A dicho modelo se ha llegado mediante:

- Análisis didáctico. Método teórico de investigación basado en el metaanálisis cualitativo y búsqueda en distintos campos científicos (González, 1995). Los distintos campos

[1] Piaget, J.; Szeminska, A. (1964), Schaeffer, B., Eggleston, V.H. y Scott, J.L. (1974)., Gelman, R. y Gallistel, C.R. (1978), Brainerd, C. J.; Gordon, L. L.(1994) Hartnett, P.; Gelman, R. (1998). y así hasta un total de 26 trabajos. Para más información ver Fernández, C. (2002), págs. 27-34.

analizados fueron: Epistemología del Número Natural (Dedekind, R. (1988); Helmholtz, (1945); Peano, J. (1979); Russell, B. (1982); Piaget. J. (1985)), Didáctica del Número Natural (Freudenthal, H. (1983) y (1991); Dienes, Z.P. (1970)), Procesamiento de la Información (Brainerd, C. J.y Gordon, L. L.(1994), Fuson, K. (1988); Gelman, R. y Gallistel, C.R. (1978); Manzi,-A y Winters,-L (1996)), Seriación Operatoria. (Piaget, J.e Inhelder, B. (1976), Piaget, J.y Szeminska, A. (1982)). Estos campos aportaran, respectivamente, un análisis de la secuencia numérica como: componente del número natural, parte curricular en Educación Matemática, componente del conteo, una serie en el sentido piagetiano.

- Estudio exploratorio cualitativo basado en entrevistas clínicas semiestructuradas a niños de 3 a 6 años. Para agrupar las respuestas verbales del estudio exploratorio, hemos usado un proceso de codificación y clasificación de respuestas en cada una de las tres tareas presentadas, atendiendo a tres parámetros claros que se dan en cada una de ellas:
  - ✓ Construcción del instrumento secuencial,
  - ✓ Uso del instrumento construido para localizar posiciones ordinales,
  - ✓ Uso del instrumento para localizar posiciones lógicas ordinales

Una vez creado el modelo mediante el análisis didáctico y el estudio empírico exploratorio, éste es susceptible de una validación empírica. Para ello:

- Se diseña una prueba adaptada al modelo y que, por consiguiente, consta de seis tareas, cada una de ellas conlleva los mismos esquemas lógicos matemáticos que se dan en los estados del modelo

- <u>Estudio empírico cualitativo</u> realizado mediante *entrevistas clínica individuales* sobre la base de cada una de las tareas diseñadas en la prueba.

Por tanto, las entrevistas clínicas individuales en escolares de Educación Infantil, desarrollan un papel fundamental en investigaciones cualitativas en Educación matemática en un paradigma interpretativo y no meramente descriptivo.

3. Entrevistas para la creación de un modelo

En aras al problema de investigación planteado en cuanto a la pretensión de estudiar la evolución de las relaciones lógicas-ordinales, creemos necesario realizar un estudio exploratorio de carácter cualitativo basado en la observación de los comportamientos individuales, de un grupo reducido de niños seleccionados al azar, ante situaciones ordinales.

La prueba, cuya construcción y características se exponen en apartados sucesivos, consta de tres tareas bien diferenciadas: a) aplicar una alternancia a los elementos de una serie dada, b) contar los elementos de la serie, c) realizar la correspondencia serial entre la alternancia y la secuencia numérica.

La serie en cuestión es una escalera con 10 peldaños, la alternancia es colocar pan en un escalón sí y en otro no, y la correspondencia serial referida es: *1-sí, 2-no, 3-sí, 4-no, 5-sí, 6-no, 7-sí, 8-no, 9-sí, 10-no.* Todas las tareas se han intercalado en la entrevista de manera que cada una de ellas puede aparecer en distintas partes de la misma según se vaya desarrollando con cada niño.

El objetivo de la entrevista es ver como se manifiestan los niños ante la relación lógico ordinal de "siguiente inmediato" que se da entre dos términos consecutivos de la secuencia numérica mediante la comparación que se presenta entre ellos a través de la relación establecida por una correspondencia serial dada (Alternancia/Secuencia numérica). En esta correspondencia la alternancia tiene un papel fundamental: se usa como instrumento de comparación de los elementos de la otra serie; además tiene otra finalidad: es una herramienta de análisis para el niño ya que se sustituye el acto de recitar intuitivamente toda la secuencia (de manera global) por una cierta reflexión sobre cada uno de sus términos particulares.

Aunque la alternancia va dirigida, fundamentalmente, al establecimiento de la relación lógica ordinal "siguiente inmediato" ya que únicamente los elementos consecutivos presentan la relación asimétrica de la serie, en la entrevista tratamos también el resto de las relaciones lógicas-ordinales, pero por la propia estructura de la misma (al considerar la alternancia) están siempre generadas por el "siguiente inmediato".

En lo que sigue de este apartado, trataremos, de forma breve, el desarrollo del estudio exploratorio.

3.1. Diseño

Propósito del estudio exploratorio

- Construir un instrumento para detectar diferencias en las competencias lógicas ordinales en niños de 3 a 6 años
- Aportar nuevos elementos que junto con el análisis Didáctico nos permita realizar un modelo teórico y diseñar una entrevista con tareas que posibiliten:
    - ✓ Obtener evidencia empírica en la que los niños manifiesten relaciones lógicas ordinales entre los elementos de una serie.
    - ✓ Establecer una escalabilidad entre las categorías de respuestas que manifiesten la pertinencia e idoneidad de un modelo de desarrollo de las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica.

Metodología

1. Alternancia. Al niño se le muestra una escalera con 10 peldaños, de 25 centímetros. de largo por 20 centímetros de alto aproximadamente, debe realizar y describir una alternancia (colocar pan en un escalón sí y en otro no). Al alumno se le muestra dos peldaños consecutivos, sin percibir la alternancia, y sabiendo lo que ocurre en el primero de ellos debe anticipar lo que sucederá en el siguiente inmediato. El procedimiento se repite con peldaños distintos. También se pide la comparación de dos peldaños cualesquiera.

Se pretende obtener información sobre los conocimientos y competencias del alumno ante la necesidad de establecer relaciones lógicas-ordinales no numéricas.

2. Contar. El niño debe contar los escalones, determinar una posición ordinal cualquiera mediante el número correspondiente y determinar una posición ordinal a partir de otra dada como dato.

Se pretende recoger información acerca de hasta qué punto el recitado correcto de la secuencia numérica es condición suficiente para que el niño sea capaz de establecer las relaciones lógicas ordinales necesarias para resolver un problema ordinal.

3. Secuencia numérica/Alternancia. El niño debe realizar la correspondencia serial entre la secuencia numérica y la alternancia, describirla y determinar para cada posición las características definidas por la correspondencia serial. También debe anticipar qué ocurrirá en un escalón conociendo lo que ocurre en otro dado como dato, pero en este caso el dato que se da es numérico y el niño debe responder igualmente con una posición numérica de la secuencia describiéndola mediante la alternancia.

La información se refiere aquí a la capacidad de los alumnos de establecer la relación lógica de siguiente inmediato entre dos elementos consecutivos de la escalera mediante la comparación que se presenta entre ellos a través de la relación establecida por la correspondencia serial dada.

Elección y distribución de la muestra

El centro es un colegio público urbano de una ciudad de unos cuarenta mil habitantes. Está ubicado en un barrio que muy bien puede representar a uno cualquiera de esta ciudad, y en el que no existe conflictos sociales ni de marginación.

El criterio viene dado por una distribución por edades dentro de cada año de nacimiento.

Una vez que la investigadora ha sido presentado a los niños por sus maestras correspondientes, éstos se ofrecieron voluntarios para realizar la entrevista y entre ellos fue elegida la siguiente composición de la muestra: 8 niños de 3 años, 8 niños de 4 años, 11 niños de 5 años

Materiales

- Una escalera con 10 escalones. Los peldaños son independientes unos de otros. Cada uno de ellos tiene unos 25 centímetros de largo, el primero tiene un centímetro de ancho por uno de alto, siendo estas dimensiones para el segundo de 2x2, para el tercero 3x3 y así sucesivamente hasta el décimo.
- Un osito de peluche de unos 6 centímetros de alto. Al osito se le pueden doblar las piernas y se puede sentar en cualquier peldaño de la escalera.
- Trocitos de pan para colocar en los lugares correspondientes de la escalera.
- Un paño de tela para ocultar la parte de la escalera en la que está colocado el pan

Actividades

<u>Tarea 1. Alternancia: A.</u>

- *Descripción*. La tarea consiste, concretamente, en que los niños tienen que colocar pan en un escalón sí y en otro no, bajo la consigna: "el osito come pan en un escalón sí y en otro no". Una vez que los niños han realizado la alternancia se cubre el pan para que reconstruya la correspondencia serial.
- *Objetivo*. El aspecto básico que se pretende explorar es el uso y representación mental de un encadenamiento aditivo de la relación lógica ordinal de *"siguiente inmediato"* en una situación prenuméricas sencilla donde la secuencia empleada es una alternancia.

- **Desarrollo de la entrevista.**

Fase 1A. El investigador explica que el osito come pan en un escalón sí y en otro no. El niño debe colocarlo en el escalón correspondiente; con lo cual debe confeccionar por sí mismo la serie y tomar conciencia del principio de esa “ordenación”; se trataría de un proceso sintético y constructivo.

Fase 2A. Una vez realizada la correspondencia serial, el investigador insiste para que la describa. Se oculta el pan, el niño debe describir la correspondencia en esta nueva situación; con ello, manifestaría una representación mental de la alternancia y su criterio; además el hecho de ocultar el pan tendría otra función: se trataría de poner al alcance del niño un sistema de autocorrección.

Fase 3A. El investigador señala una posición ordinal y pregunta sobre lo que ahí ocurre “el osito está sentado en este escalón, ¿ahí come?”. Sabiendo lo que ocurre en una posición ordinal determinada, el investigador pregunta sobre lo que ocurrirá en el siguiente inmediato: “Si el osito está sentado aquí y sí come ¿qué ocurre en este otro? (Señala el siguiente inmediato)” Con ello pasamos de lo global a lo particular.

- **Aspectos a considerar.**
- Comprobar si el niño comprende el criterio de una serie sencilla como es la alternancia, primeramente, bajo una percepción global para pasar, posteriormente, a una representación mental de la misma.
- Comprobar si el niño establece relaciones lógicas-ordinales prenuméricas al comparar (frente a la acción de etiquetar) dos elementos consecutivos en la escalera, usando como instrumento de comparación una alternancia en una correspondencia serial.

- Averiguar qué tipo de relaciones lógicas-ordinales establece.
- Estrategias seguidas para establecer las relaciones.
- Averiguar qué tipo de sistematización se da en las respuestas de cada niño.

Tarea 2. Contar: C

- *Descripción*. La tarea consiste en que los niños tienen que contar una escalera con 10 peldaños. Una vez que los niños han contado han de responder sobre algunas cuestiones referentes a las posiciones ordinales de los escalones.
- *Objetivo*. El aspecto básico que se pretende explorar es el conteo y su evolución en cuanto al uso por parte del niño como herramienta para determinar un número ordinal en una serie.
- **Desarrollo de la entrevista.**

  Fase 1C. El investigador relata al niño que al osito le gusta mucho contar, por eso cuando sube la escalera siempre cuenta los escalones. El niño debe contarlos.

  Fase 2C. Una vez contado, el investigador coloca al osito en un escalón determinado y el niño tiene que determinar el número correspondiente al peldaño (número correspondiente en la correspondencia serial que se establece cuando se cuentan los escalones).

  Fase 3C. Sabiendo el número correspondiente al escalón donde está sentado el osito, el investigador puede preguntar por el siguiente inmediato, cualquier siguiente, anterior inmediato o cualquier anterior.

- **Aspectos a considerar.**
- Observar si los niños aplican correctamente la acción de contar sin cometer errores respecto a los principios del conteo.
- Comprobar si el niño usa la secuencia numérica como herramienta para determinar una posición ordinal.

- Averiguar qué tipo de estrategias usan los niños para determinar una posición ordinal teniendo como referencia a otra dada como dato.

Tarea 3. Secuencia Numérica/Alternancia: S/A.

- *Descripción*. La tarea consiste en que los niños tienen que realizar la correspondencia serial entre la alternancia *sí-no* y los términos de la secuencia numérica aplicada a los peldaños de la escalera. Una vez que los niños han realizado dicha correspondencia han de responder algunas cuestiones abiertas referentes a la descripción ordinal dada por ella (correspondencia serial) sobre cada uno de los elementos de la serie (escalera), viendo los que matizan y los que no.
- *Objetivo*. Con esta tarea pretendemos explorar, fundamentalmente, cuándo y cómo adquiere el niño la relación lógica de *siguiente inmediato* que se da entre dos términos consecutivos de la secuencia numérica mediante la *comparación* que se presenta entre ellos a través de la relación establecida por la correspondencia serial dada. Además pretendemos ver si aparece un razonamiento inductivo o conato.
- **Desarrollo de la entrevista.**

  Fase 1S/A. El investigador relata al niño que al osito le gusta mucho contar y también comer pan, por eso se inventa un juego, cuando sube la escalera siempre cuenta los escalones y dice si come o no come entonces va diciendo: “en el 1-sí como, en el 2- no como,…”. Pide al niño que continúe. Aparecería un razonamiento inductivo con la secuencia a partir de dos términos. Una vez realizada la correspondencia serial, el investigador insiste para que la describa. Se oculta el pan, el niño debe describir la correspondencia en esta nueva situación en la que la alternancia se deja de percibir.

Fase 2S/A. El investigador señala una posición ordinal y pregunta sobre lo que ahí ocurre. El niño tiene que determinar el número correspondiente al peldaño y si come o no come: "el osito está sentado en este escalón, ¿qué número es?, ¿ahí come?".

Fase 3S/A. Sabiendo el número correspondiente al escalón donde está sentado el osito y si come o no come en dicho número, el investigador puede preguntar por el siguiente inmediato, cualquier siguiente, anterior inmediato o cualquier anterior: "el osito está sentado en este escalón que es el número *a* y aquí sabemos que sí come ¿qué ocurre en *b*?"

- **Aspectos a considerar**
- Averiguar si el niño es capaz de aplicar un razonamiento inductivo con la secuencia numérica y la alternancia a partir de dos términos.
- Comprobar si el niño ha adquirido la relación comparativa entre los términos sucesivos de la secuencia numérica, relación que se establece mediante la alternancia.
- Averiguar qué tipo de estrategias usan los niños para determinar la citada relación comparativa. Estas estrategias estarán evaluadas en cuanto a las relaciones lógicas ordinales entre los términos numéricos establecidas.
- Averiguar si las estrategias permanecen o cambian los procedimientos cuando se parte de un dato, k-l en el que k toma los valores de 1 a 10 y l es sí ó no, en lugar de empezar por 1-sí.

3.2. Análisis cualitativo de datos

El procedimiento para llevar a cabo análisis cualitativo en cada una de las tareas queda sistematizado en los siguientes puntos:

1. *Categorización de respuestas*. Para cada una de las tareas propuestas se ha realizado, a su vez, una categorización en tres bloques:

1K. Construcción del instrumento secuencial

2K. Determinación de una posición ordinal con el instrumento construido en 1K

3K. Determinación de una posición lógica ordinal[2] con el instrumento construido.

K toma, sucesivamente, los valores A, C y S/A. Para cada uno de los bloques de cada tarea se ha realizado una clasificación de respuestas que hemos codificado de esta forma:

iK0. No entienden nada

iK1 Responden al azar

iK2 Dan la respuesta correcta mediante ensayo y error

iK3. Dan la respuesta correcta y la justifican mediante relaciones lógicas ordinales.

Con i variando de 0 a 3.

2. *Escalabilidad de respuestas*. Dada la categorización de las mismas en cada una de las tareas, se establece una escalabilidad entre la respuesta más evolucionada en la que el niño, además de dar la respuesta correcta, la justifica aplicando alguna relación lógica ordinal; y la menos evolucionada en la que no entiende nada.

3. *Determinación de niveles*. Dado que las respuestas presentan un escalonamiento y que cada una de las tareas están divididas en distintos bloques, podemos realizar combinaciones de respuestas de los distintos bloques y con ello establecer niveles evolutivos en cada una de las tareas.

La tabla 3.1 esquematiza todas las respuestas de los niños entrevistados según las categorías y codificación señaladas anteriormente

[2] Llamamos posición lógica ordinal a una posición ordinal que se determina a partir de otra dada como dato.

	1A				2A				3A				1C				2C				3C				1S/A				2S/A				3S/A			
	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Pab. 3,1	■				■				■					■			■				■				■				■				■			
Lou. 3,3	■				■				■				■				■				■				■				■				■			
Mar. 3,3			■				■				■					■		■				■					■			■				■		
Sal. 3,4			■				■				■					■		■				■					■			■				■		
Luc. 3,9		■				■				■				■				■				■			■				■				■			
Ir. 3,9			■				■				■				■			■				■				■				■			■			
Mi. 3,10		■			■				■					■				■				■			■				■				■			
Nu. 3,11				■				■				■				■				■				■				■				■				■
Fr. 4,0				■				■				■				■				■				■				■				■				■
Adr., 4,1	■				■				■				■				■				■				■				■				■			
An. 4,3			■				■			■				■				■				■				■				■				■		
Beg. 4,6	■				■				■							■		■				■			■				■				■			
Pat. 4,6			■				■				■					■				■				■			■				■				■	
Nar. 4,8			■				■				■					■			■				■				■				■			■		
Sal. 4,11				■			■				■					■				■				■			■				■				■	
Ver. 4,11				■				■				■				■				■				■				■				■				■
Jav. 5,0				■			■				■					■				■			■				■				■				■	
Esp. 5,2				■				■				■				■				■				■				■				■				■
Non. 5,2				■				■				■				■				■				■				■				■				■
Cri. 5,5				■			■				■					■				■			■					■			■				■	
Is. 5,6				■				■				■				■				■				■				■				■				■
Clar. 5,7				■				■				■				■				■				■				■				■				■
Ari. 5,7				■				■				■				■				■				■				■			■				■	
Ant. 5,9				■			■				■					■				■			■				■				■				■	
Mar. 5,9				■			■				■					■				■			■				■				■				■	
Par.5,11				■			■				■					■				■			■				■				■				■	
Mab.5,11				■				■				■				■				■				■				■				■				■

Analizando la tabla de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, obtenemos lo siguiente:

- A los tres años se da una mayor dispersión en todos los bloques de respuestas
- A los cuatro años y medio aparece una regularización en las respuestas concernientes a la tarea de conteo, hecho que unifica las respuestas en las demás tareas.
- A los cinco años las respuestas de los niños tienden a una acumulación en la tabla hacia las columnas que representan las más evolucionadas.
- En cada una de las tareas hay mayor dispersión en las respuestas a medida que avanzamos hacia la derecha, ello significa que la construcción del instrumento secuencial no es condición suficiente para la resolución de problemas lógicos ordinales.
- Las columnas correspondientes a los bloques de la tercera tarea presentan mayor dispersión en las respuestas con respecto a las dos tareas anteriores, ello manifiesta la dificultad añadida al considerar la correspondencia serial como instrumento secuencial.

En definitiva, las respuestas tienden a la no-dispersión que se da en la parte de arriba de la tabla hasta llegar a Pat (4,6). Dentro de esta no-dispersión de respuestas vemos como las correspondientes a las actividades de la tarea 2: Contar, obtienen una mayor homogeneización[3]con respecto a las otras dos. En particular si comparamos las respuestas del segundo bloque de esta tarea (columna 2C) con la correspondiente a la Alternancia (2A) vemos como la primera está totalmente concentrada en una única columna mientras que la segunda se distribuye en dos. A partir de ello obtenemos la siguiente conclusión importante desde el punto de vista evolutivo:

> *"A partir de los cuatro años y medio los niños tienen un dominio del conteo[4] que les permite determinar posiciones ordinales y lógicas-ordinales"*

[3] Se concentra mayor número de respuestas en la misma columna (la de puntuación 3).
[4] Denominamos *dominio de conteo* al uso de éste en la determinación de posiciones ordinales y lógicas-ordinales.

El conteo es determinante en la homogeneización de los otros bloques de actividades, ello quiere decir que cuando se da el dominio del conteo empieza la homogeneización en el resto de tareas y con ello se llega al dominio de alternancia y al de Secuencia Numérica/Alternancia, entendiendo ésto como la generalización del dominio del conteo, sólo que en cada caso se coge como instrumento secuencial (ó sucesión de siguientes) la alternancia, secuencia numérica, ó correspondencia serial entre ambas.

La dispersión de respuestas presente antes de los cuatro años y medio, manifiesta que los niños están construyendo esquemas mentales secuenciales (relaciones lógicas ordinales) que se manifiestan más claramente en series no numéricas como la alternancia antes que en la propia secuencia numérica, y es que no han alcanzado, aún, el dominio del conteo que es el determinante de las dos clases de niños. Ello justifica el que los niños de tres años respondan mejor a las cuestiones sobre siguiente ó siguiente inmediato usando la alternancia como instrumento secuencial que a las mismas cuestiones pero con el conteo como instrumento.

Estas consideraciones revelan diferencias en las competencias lógicas ordinales en niños de 3 a 6 años. Se apunta hacia una evolución marcada por la permanencia de algunas características del conocimiento lógico-ordinal de la secuencia numérica y, al mismo tiempo, por la aparición de otras nuevas al pasar de una fase de una tarea dada (alternancia, contar, secuencia numérica/alternancia) a otra y de unas edades a las siguientes.

4. Modelo evolutivo de competencias ordinales

La opción que hemos elegido para la exposición del modelo teórico es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación así como por las competencias teóricas que le corresponden desde un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal.

Estado I. Etiquetaje.

En el inicio de las primeras nociones ordinales, el niño no está aún en disposición de interpretar una secuencia desde el punto de vista lógico-ordinal.

Teniendo en cuenta el subsistema lingüístico relativo a la seriación (Sinclair de Zwart, 1978), el niño pasa por tres fases previas hasta alcanzar la "serie comparativa en un sentido" y culminar con la "serie comparativa en los dos sentidos"; dichas fases consisten en asignar un término a cada elemento de la serie[5] para diferenciarlos pero no para compararlos.

Por consiguiente, establecemos que la primera aproximación para alcanzar las relaciones lógicas ordinales en cualquier serie es la diferenciación de sus elementos, para lo cual se debe indicar, bien de manera motora con el señalamiento, ó bien mediante el lenguaje con una etiqueta ó palabra, cada elemento de la serie; es decir, a cada elemento le corresponde un único señalamiento o ser etiquetado una sola vez. Los niños que hacen un gesto rasante para describir la serie estarán por debajo de este estado.

Estado II. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando esquemas infralógicos.

Una vez diferenciados los términos de una serie mediante el etiquetaje podemos aplicar una interpretación espacial ó temporal de la misma y manifestar con ello los primeros esquemas comparativos entre los términos de la serie.

Según Piaget (1981), la construcción del espacio matemático, por parte del niño, comienza en los aspectos topológicos, para pasar, posteriormente, a los proyectivos y euclídeos. Uno de estos aspectos es el *orden de los puntos sobre una línea*, el cual hace posible la construcción de referencias ordinales: al lado de, para adelante ó para atrás, que se transfieren a las series. De este modo, al indicar que un elemento está al lado del otro estaremos indicando el "siguiente inmediato", y la cuestión

[5] Estos términos son de tipo dicotómico, como por ejemplo grande-pequeño, en la fase *dicotómica*; ó tricotómico: grande-mediano-pequeño en la fase *tricotómica* ó todos distintos para cada uno de los elementos de la serie en la fase de *etiquetaje*.

de cómo se comparan dos términos cualesquiera no consecutivos se resuelve con las relaciones “hacia delante” ó “hacia atrás” tomando como referencia uno de los términos a comparar que de esta forma se convierte en “primer y último elemento” al dividir la línea de puntos en dos clases: todos los que están delante y todos los que están detrás.

Asimismo, el orden lineal espacial es considerado por muchos autores como una noción primitiva para la comparación ordinal de los números:

> “La idea de orden de los puntos sobre una recta es una de las nociones geométricas primitivas. Es un modelo matemático de la concepción intuitiva de comparación de números enteros” (Dieudonné, J. 1989, p. 194).

Por consiguiente, establecemos que el primer soporte intuitivo-espacial del que el niño dispone para organizar e interpretar una realidad ordinal está relacionado con el concepto de línea y, en particular, con el concepto de orden topológico de un conjunto finito de puntos pertenecientes a una línea (conjunto que debe contener al menos tres puntos).

Análogamente, el orden temporal, como conocimiento igualmente infralógico (según taxonomía piagetiana), constituye un soporte intuitivo importante de referencias ordinales que se transfieren a las series.

Estado III. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando la alternancia como instrumento secuencial.

Se utiliza una secuencia para etiquetar los elementos de una serie. Dicha secuencia es la que permite el estudio de la comparación ordinal entre los elementos de la misma.

En el estado anterior la secuencia que se usaba como instrumento de etiquetación y comparación era la línea topológica en la que no era necesaria la verbalización ni el conocimiento memorístico. En este estado es necesario que el niño aplique esquemas secuenciales y relaciones lógicas ordinales tales como:

- ✓ *Encadenamiento aditivo* para la construcción de la alternancia que se usa como instrumento, basados en esquemas infralógicos temporales: “y después, y después, …”
- ✓ *Correspondencia serial entre orden lineal y alternancia*

- ✓ *Cada elemento ocupa un lugar determinado*: se empieza a caracterizar cada elemento de la serie como único al compararlo con el anterior inmediato y el siguiente inmediato.

En la alternancia, las relaciones ordinales entre elementos consecutivos se manifiestan mediante una dicotomía, y esto, evolutivamente hablando, son conceptos primarios según: clasificación conceptual de Stegmüller (1970), la génesis de la clasificación de Piaget e Inhelder (1976), el lenguaje subyacente a la seriación de Sinclair-Zwart (1978), entre otros.

Al aparecer en primer lugar la dicotomía se favorece la descripción de la serie por alternancia. Pero además, usando la alternancia como instrumento secuencial, se puede llegar a lo más alto teniendo en cuenta las ideas evolutivas de los autores citados anteriormente:

a) *Etiquetación*: cuando se etiqueta a cada uno de los términos de la serie con un sí ó un no.

b) *Serie comparativa en un sentido*: se manifiesta cuando el niño tiene que describir lo que ocurre en una posición dada, es decir determinar una posición ordinal a través de la alternancia empezando por el primer elemento. Esto corresponde, según nuestro análisis lógico-matemático de la secuencia, a que la alternancia (identificada como un instrumento secuencial) es una sucesión de siguientes que empieza en el primer elemento.

c) *Serie comparativa en los dos sentidos*: se alcanza cuando el niño determina una posición lógica ordinal usando la alternancia, es decir, llega a determinar una posición ordinal a partir de otra dada como dato usando la alternancia como instrumento secuencial. Según el estudio realizado en el análisis didáctico de la estructura lógica de seriación, los esquemas lógicos matemáticos que se manifiestan son (entre otros):

- ✓ *Tramo finito en la sucesión de siguientes*: esquemas de primero y último
- ✓ *Cada elemento ocupa un lugar determinado*: el *sí* siempre está entre dos *noes*.
- ✓ *Comparativa en dos sentidos*: Un término cualquiera es anterior a uno y posterior a otro. Un término cualquiera de la clase de los *síes* es anterior y posterior de un *no*.

Según el estudio exploratorio, a los tres años los niños empiezan a aplicar esquemas lógicos-matemáticos propios de este estado.

<u>Estado IV</u>. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando el conteo como instrumento de comparación.

Se utiliza la acción de contar para la comparación lógica-ordinal entre los elementos de la serie.

En el estado anterior la secuencia que se usaba como instrumento de etiquetación y comparación era la alternancia en la que el esquema lógico-matemático subyacente era la dicotomía, mientras que en este estado es necesario que el niño disponga de una secuencia estable y convencional (principio de orden estable según Gelman y Gallistel, 1978) y del principio de correspondencia uno a uno de la acción de contar.

Además de aplicar los mismos esquemas secuenciales que en el estado anterior (cambiando el instrumento secuencial), será necesario que el niño aplique esquemas secuenciales y relaciones lógicas ordinales propias del conteo tales como:

- ✓ *Relación antisimétrica*: alude a la comparación a través de la terminología ordinal de dos términos cualesquiera de la serie usando el isomorfismo con el orden secuencial de la secuencia numérica que se establece en la acción de contar. Por lo tanto, con la acción de contar se establece una relación de orden total, que además es orden completo y buena ordenación, entre los elementos de la serie.

- ✓ *Todo elemento es primero y último:* el elemento contado es tratado simultáneamente como primero y último: primero de los que quedan por contar y último de los que ya han sido contados.

Con el dominio del conteo se da:

a) *Etiquetación*: cuando se etiqueta a cada uno de los elementos de la serie con un término numérico.

b) *Serie comparativa en un sentido*: se manifiesta cuando el niño tiene que describir lo que ocurre en una posición dada, es decir determinar una posición ordinal a través del conteo empezando por el primer elemento Esto corresponde, según nuestro análisis lógico-matemático de la secuencia, a que es una sucesión de siguientes que empieza por uno

c) *Serie comparativa en los dos sentidos*: se alcanza cuando el niño determina una posición lógica ordinal usando el conteo. Siguiendo el estudio realizado en el análisis didáctico de la estructura lógica de seriación, los esquemas lógicos matemáticos que se manifiestan son:

    - ✓ *La sucesión de siguientes es una caracteristica que se mantiene ante cualquier división realizada en la secuencia numérica*: el que un término sea el siguiente de otro es independiente del término elegido para el inicio.

    - ✓ *Esquemas acumulativos del conteo: Al contar a partir de un término a, dado como dato, para localizar otra posición ordinal b, establecemos, paso a paso, el esquema acumulativo siguiente: "Un término al ser enumerado, pasa de ser siguiente de uno dado a ser el primero de una nueva división de la secuencia a partir del cuál se puede empezar a contar"*

Según el estudio exploratorio, a los cuatro años y medio los niños manifiestan esquemas lógicos-matemáticos propios de este estado.

Estado V. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica usando la alternancia como instrumento de comparación.

Se relacionan[6] dos términos cualquiera de la secuencia numérica a la que se ha sometido, previamente, a una correspondencia serial con la alternancia.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|
sí	no	sí	no	sí	no	sí	no	sí	no

En los estados anteriores se comparaban dos elementos de una serie lineal discreta usando como instrumento de comparación la alternancia (Estado III) o el conteo (Estado IV). Pues bien, en este estado se sustituye la serie lineal por la secuencia numérica y tratamos de comparar[7] sus términos a través de la alternancia.

Desde el punto de vista evolutivo este estado es posterior a los anteriores según los resultados del estudio exploratorio.

En este estado el niño aplicaría esquemas secuenciales y relaciones lógicas ordinales tales como:

- ✓ *Primer y último elemento*: se dan las relaciones inversas *"anterior"* y *"posterior"* mediante un método sistemático de construir la secuencia numérica vía la correspondencia serial.
- ✓ *Generación de series*: cogiendo los correspondientes a los *síes* se da la secuencia "contar de dos en dos empezando por uno", es decir la *serie de los impares;* y tomando los correspondientes a los *noes* se genera la *serie de los pares.*

El dominio de la correspondencia serial Secuencia Numérica/Alternancia supone:

---

[6] Relaciones lógicas-ordinales

[7] El término "comparar" se debe entender como el establecimiento de relaciones lógicas ordinales.

a) *Etiquetación*: cuando se etiqueta a cada uno de los elementos numéricos con un término de la alternancia

b) *Serie comparativa en un sentido*: se manifiesta cuando el niño tiene que describir lo que ocurre, respecto a la alternancia, en una posición numérica. Aquí el niño establece la correspondencia serial de manera "global" empezando desde uno. No tiene en cuenta, explícitamente, las relaciones lógicas ordinales como la de siguiente inmediato, es decir, no manifiesta que el homólogo de un número respecto a la alternancia es complementario a los homólogos correspondientes al anterior y siguiente inmediatos.

c) *Serie comparativa en los dos sentidos*: se alcanza cuando el niño determina una posición lógica ordinal de la secuencia numérica usando la correspondencia serial dada.

La correspondencia serial conduce a la comparación ordinal entre dos términos cualesquiera de la secuencia numérica a través de la relación establecida por la alternancia, las relaciones dejarían de estar sometidas a la *conexión rígida* de la comparación en un sentido y, ello, permitiría la conservación de dichas relaciones establecidas en la descripción de la correspondencia serial en la particularización de sus elementos; en este sentido, el siguiente inmediato adquiere su significado según la alternancia, o mejor dicho, el siguiente inmediato se traduce en "si en a-sí entonces en a^+-no" desde que se descompone la correspondencia serial para examinar las relaciones lógicas ordinales de un elemento particular con su siguiente inmediato ó con cualquier siguiente.

Según el estudio exploratorio, a los cinco años los niños aplican esquemas lógicos-matemáticos propios de este estado.

Estado VI. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica.

Se relacionan ordinalmente dos términos cualquiera de la secuencia numérica, en ella cada término puede ser considerado en sí mismo en cuanto a sus relaciones lógicas-ordinales con todos los demás.

En este estado los niños alcanzan la *sistematización de la secuencia numérica* según la estructura lógica de seriación, y actúan sobre ella con estrategias ligadas a la estructura serial (seriación cíclica y doble); todo ello hace que los niños sean capaces de razonar ordinalmente sobre la secuencia numérica, tienen un dominio de la misma lo que permite:

- ✓ Contar de n en n
- ✓ Solucionar ordinalmente a+b con el llamado *recuento progresivo*
- ✓ Solucionar ordinalmente a-b con el llamado *recuento regresivo*
- ✓ Estar en disposición de interpretar las tablas de multiplicar como correspondencias seriales entre los términos de la secuencia numérica y las series generadas a partir de ella como contar de n en n.
- ✓ Afrontar toda la aritmética a partir del dominio ordinal de la secuencia numérica.

Dado que este estado se puede identificar con el *Bloque Numérico* del Modelo Teórico de Desarrollo del Razonamiento Inductivo Numérico (Ortiz Comas, A. 1997), podemos indicar que los niños lo alcanzarían alrededor de los siete años.

5. Validación empírica del modelo.

Para la validación empírica del modelo se diseñó una prueba que consta de 6 tareas, cada una de ellas asociada a cada uno de los estados, de tal manera que manifestasen los esquemas lógicos matemáticos propios de cada uno de ellos.

El diseño del estudio empírico cualitativo fue el siguiente:

Metodología

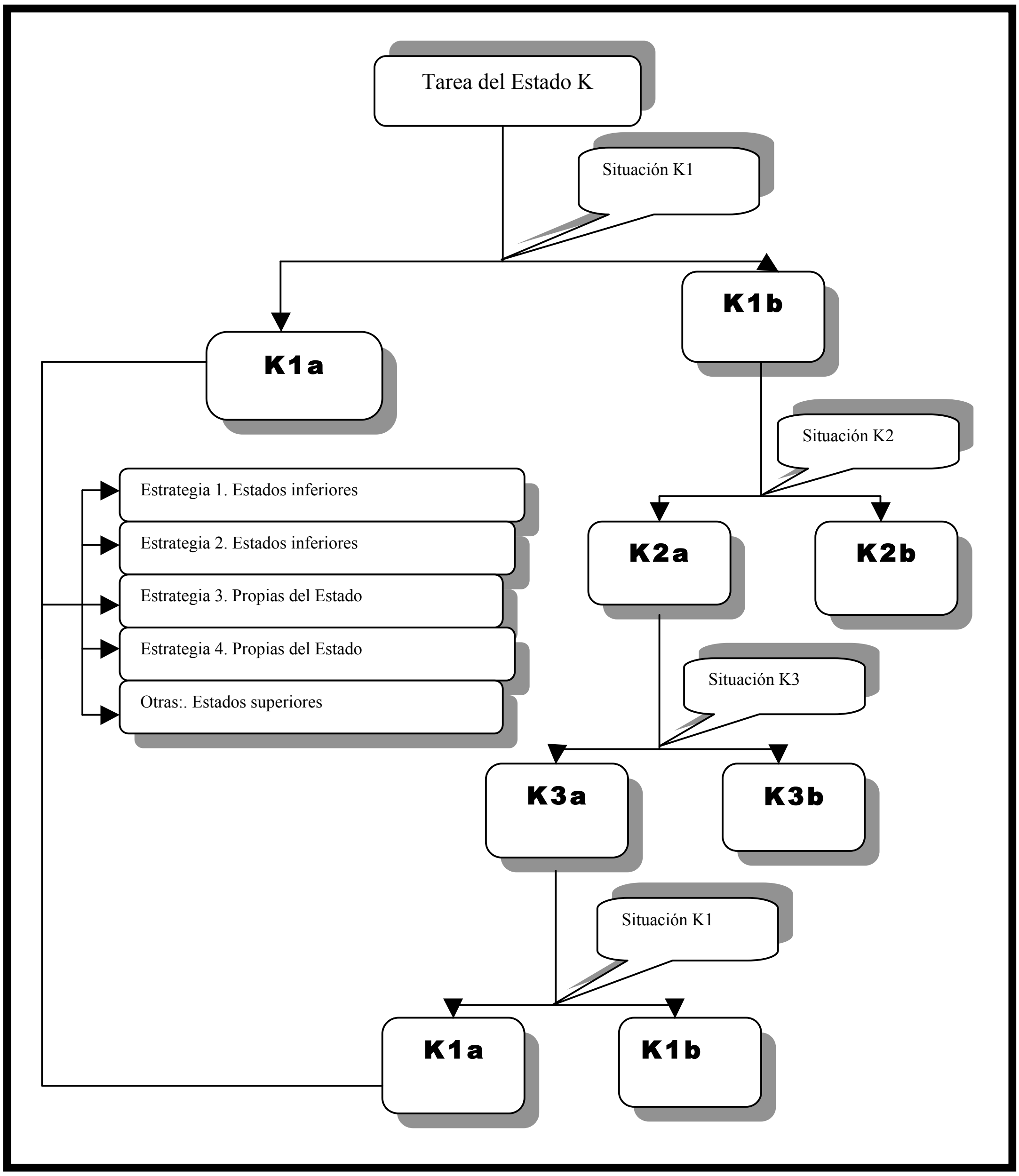
Se trata de una investigación empírica cualitativa basada en la recogida de información mediante una entrevista clínica semiestructurada y en el análisis cualitativo de los resultados.

En principio, a cada alumno entrevistado se le propone la realización de seis tareas, una por cada estado del modelo teórico, compuesta, a su vez, cada una de ellas por varias situaciones. Todas tienen en común el material manipulativo y concreto que sirve como soporte a la entrevista.

En el transcurso de la entrevista se provoca, intencionadamente, la interacción constante entre el entrevistador y el entrevistado, dependiendo el desarrollo de la misma de las respuestas de cada sujeto.

Las seis tareas de la prueba presentan una jerarquización de menor a mayor dificultad en cuanto que los esquemas lógicos matemáticos implicados para su resolución sean más o menos evolucionados. Por ello, cuando un niño no realiza dos tareas consecutivas no se le pasa la siguiente.

Cada una de las tareas consta de tres situaciones, así para la tarea asociada al Estado K, las situaciones serían K1, K2 y K3. Para el desarrollo de la entrevista, en cada una de las tareas, se sigue el esquema de la figura 1 en el que queda sistematizado el desarrollo de la prueba.



Tarea del Estado K
Situación K1
K1a
K1b
Situación K2
Estrategia 1. Estados inferiores
Estrategia 2. Estados inferiores
Estrategia 3. Propias del Estado
Estrategia 4. Propias del Estado
Otras:. Estados superiores
K2a
K2b
Situación K3
K3a
K3b
Situación K1
K1a
K1b

Elección y distribución de la muestra

Participaron 47 escolares, de los cuales 22 fueron niños y 25 niñas. Para la obtención de la muestra se eligieron cinco centros escolares con las siguientes características: dos centros de la capital, uno público y otro privado, tres centros de la provincia: dos urbanos, uno público y otro privado, y uno público rural. Con todo ello la composición de la muestra viene dada en la siguiente tabla:

	Centros de Málaga capital		Centros de la provincia			
			Urbano		Rural	Total
	Público	Privado	Público	Privado	Público	
Clase de 3 años	3	3	3	3	3	15
Clase de 4 años	3	3	3	4	3	16
Clase de 5 años	3	3	4	3	3	16
Total	9	9	10	10	9	47

Materiales

El material empleado en esta prueba consta de:

- Una escalera con 10 escalones. Los peldaños son todos iguales, están unidos unos a otros constituyendo una escalera en bloque. El ancho de cada uno de ellos es de 4 cm. El primer peldaño tiene 1 cm. de alto y esta dimensión es la que se mantiene constante al pasar de un escalón a otro, por ello la escalera tiene una altura total de 10 cm.
- 10 Piolínes, cada uno de ellos mide 4 cm de alto y están pegados a una base circular de unos 3 cm de diámetro para poderlos colocar en los pesldaños de la escalera.

- Trocitos de pan para colocar en los lugares correspondientes de la escalera.
- Dos tabiques de 14 cm. de alto; ambos tiene en la base marcas de los escalones para apoyarlos en la escalera. Uno de ellos tiene tres marcas y se colocaría sobre los peldaños 1, 2 y 3, y el otro tiene 4 marcas para tapar el tramo de escalera 7-10.

Diseño de las entrevistas. Descripción de las actividades desarrolladas

Tareas.

Las tareas consisten en lo siguiente:

1. *Etiquetaje*. Se trata de colocar pan en todos y cada uno de los escalones siguiendo el orden de sucesión de la escalera
2. *Relaciones lógicas ordinales usando esquemas infralógicos*. Se trata de determinar qué pan comerá después de uno dado cuando se sube. Igual para el sentido descendente.
3. *Relaciones lógicas ordinales versus alternancia como instrumento secuencial.* El niño tiene que averiguar el lugar donde comerá pan el Piolín teniendo otro como dato y usando la alternancia como instrumento secuencial
4. *Relaciones lógicas ordinales versus conteo como instrumento comparativo*. El niño a partir de una posición ordinal debe localizar una lógica ordinal a través del conteo.
5. *Relaciones lógicas ordinales en la secuencia numérica versus alternancia como instrumento comparativo*. Sabiendo que los piolínes comen pan en un escalón sí y en otro no, el niño debe determinar el siguiente número a uno dado en el que sí come.

6. *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica*. El niño debe averiguar en cualquier término de la secuencia numérica (los números dados son menores que 100) si el pajarito va a comer o no, y a partir de un término dado el niño debe continuar diciendo los números en los que sí come.

Objetivo

Con estas tareas se pretende estudiar la evolución de las relaciones lógicas ordinales desde los esquemas infralógicos hasta las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica pasando por relaciones prenuméricas sencillas como es la alternancia.

Desarrollo de la entrevista

La forma de proceder en las entrevistas para todas y cada una de las tareas asociadas a los estados del modelo evolutivo teórico es la siguiente:

> *Para cada uno de los estados su tarea asociada*[8] *conlleva, a su vez tres situaciones. Para la situación K1 (primera de la tarea K) se ha realizado una clasificación de respuestas atendiendo a que el niño realizara o no la actividad. Si la realiza correctamente se analiza el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces pasa a realizar la situación K2 (segunda de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasa a realizar la situación K3 (tercera de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasa a realizar nuevamente la situación K1 (primera de la tarea K). Si la realiza correctamente se analiza el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces se da por finalizada la tarea.*

[8] La tarea asociada al estado K la denominamos tarea K, K varía de I a VI.

Aspectos a considerar

Pretendemos lo siguiente:

- Comprobar si el niño es capaz de diferenciar los elementos de una serie mediante un etiquetaje sencillo. Relacionarlo con los puntos siguientes
- Comprobar si el niño establece relaciones lógicas-ordinales prenuméricas e infralógicas al comparar (frente a la acción de etiquetar) dos elementos consecutivos en la escalera, usando como instrumento de comparación el orden topológico. Relacionarlo con los demás puntos de este apartado
- Averiguar si el niño establece relaciones lógicas-ordinales prenuméricas al comparar dos elementos consecutivos en la escalera, usando como instrumento de comparación una alternancia en una correspondencia serial. Ver qué ocurre con los demás puntos de este apartado.
- Estudiar las relaciones lógicas ordinales numéricas usando el conteo como instrumento comparativo y ponerlo en relación con el resto de puntos que estamos considerando.
- Averiguar si el niño establece relaciones lógicas-ordinales en la secuencia numérica al comparar dos números consecutivos, usando como instrumento de comparación una alternancia en una correspondencia serial, y todo ello en función del resto de los puntos.
- Estudiar las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica teniendo en cuenta todos los puntos anteriores.

Análisis de respuestas y conclusiones

Atendiendo a la sistematización de las tareas presentadas en la figura 1, obtenemos las siguientes tablas de respuestas de cada uno de los niños entrevistados.

		ESTADO I				ESTADO II				ESTADO III				ESTADO IV				ESTADO V				ESTADOVI			
		1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1
Ro. 3,4	a	4				3																			
	b																								
Ju. 3,11	a	4				4				2				3							2				
	b																								
An. 4,2	a	4				4							2	3											
	b																								
Ja. 4,6	a	3				4				1				3											
	b																								
Ma. 4,11	a	4				4				2				3											
	b																								
Je. 4,11	a	4				5				4				5				4							
	b																								
Ol. 5,3	a	4				4				2				2											
	b																								
Em. 5,4	a	4				5				5				5				5				5			
	b																								
Al. 5,8	a	4				5				5				5				4							
	b																								
El. 6,2	a	4				5				3				3				3							
	b																								

Tabla 5.1. Distribución de respuestas de cada niño del colegio concertado provincial urbano, R, por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los estado

		ESTADO I				ESTADO II				ESTADO III				ESTADO IV				ESTADO V				ESTADO VI			
		1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1
Al. 3,4	**a**	4							2																
	b																								
Mar. 3,11	**a**				4	1																			
	b																								
Ju. 4,2	**a**	4				5				3				3				2							
	b																								
Ra. 4,4	**a**	4				4																			
	b																								
Al. 5,1	**a**	3				2																			
	b																								
Ma. 5,1	**a**	4				4																			
	b																								
Ma. 5,5	**a**	4				5				3							3								
	b																								
Pa. 5,8	**a**	4							4				1	3											
	b																								
Ma. 5,8	**a**	4				5				4				5				4				5			
	b																								
Nu. 6,3	**a**	4				5				4				5				4							
	b																								

Tabla 5.2. Distribución de respuestas de cada niño del colegio M, por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los estados

		ESTADO I				ESTADO II				ESTADO III				ESTADO IV				ESTADO V				ESTADO VI			
		1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1
An. 3,5	a	4				1																			
	b																								
Ro. 3,6	a				1				1																
	b																								
Fe. 3,11	a	1				3							1				1								
	b																								
Ad. 4,8	a	4				3																			
	b																								
Su. 4,10	a	4				2				2				3											
	b																								
Ed. 4,11	a	4				4							4	5							4				5
	b																								
Lu. 5,4	a	4				4				3				4				2							
	b																								
Na. 5,7	a	4				4				4				4				2							
	b																								
Pa. 5,9	a	4				4							3				3								
	b																								

Tabla 5.3. Distribución de respuestas de cada niño de la Escuela Infantil C, por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los estados

		ESTADO I				ESTADO II				ESTADO III				ESTADO IV				ESTADO V				ESTADO VI			
		1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1
No. 3,6	a	2							1																
	b																								
Ke. 3,9	a	4				3																			
	b																								
Jo. 3,10	a				4				1																
	b																								
Ma. 4,4	a	4				3				1							3								
	b																								
Li. 4,4	a	4				3																			
	b																								
Ru. 4,10	a	4				3							1				3								
	b																								
Ju. 5,4	a	4				3				2				4							2				
	b																								
Lo. 5,7	a	4				3							2				1								
	b																								
In 6,2	a	4				3																			
	b																								

Tabla 5.4. Distribución de respuestas de cada niño del colegio público de Málaga capital, B, por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los estados

		ESTADO I				ESTADO II				ESTADO III				ESTADO IV				ESTADO V				ESTADO VI			
		1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1
Ma. 3,5	a	1				1																			
	b																								
Ju. 3,9	a	2																							
	b																								
Ma. 3,11	a	4				3																			
	b																								
Da. 4,4	a	4				1																			
	b																								
Jo. 4,4	a	4																							
	b																								
Lo. 4,7	a	4				3				3															
	b																								
Ci 5,8	a	4				4				4				3				2							
	b																								
Sa. 5,8	a	4				3				1				2				1							
	b																								
Pa. 5,10	a	4				3																			
	b																								

Tabla 5.5. Distribución de respuestas de cada niño del colegio público rural provincial H, por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los estados

Del análisis de las tablas tenemos que los estados I y II son superados por la mayoría de los niños con estrategias mayores ó iguales que ***3*** con respecto a la segunda tarea y con estrategias mayores o iguales que ***4*** respecto a la primera. Para estos casos, se entiende que los niños son capaces de diferenciar los elementos de una serie (la escalera) al tener que etiquetarlos siguiendo el orden de sucesión de los peldaños (esto es lo que significa que los niños resuelvan la tarea I con la estrategia ***4***). Por otra parte, el niño es capaz de comparar dos elementos consecutivos de la escalera mediante la relación infralógica de orden topológico "estar al lado de" cuando resuelve la tarea asociada al estado

II con una estrategia mayor o igual a **3**. Nos encontramos sólo con tres niños capaces de superar la tarea asociada al estado VI y además lo hacen con la estrategia **5**.

A mediada que nos movemos, en las tablas, de izquierda a derecha según las columnas de los estados, observamos cómo se van dando una mayor dispersión en la respuesta, ello muestra que los esquemas lógico matemáticos de los estados irían de menor a mayor dificultad.

Por otra parte, si observamos las tablas de arriba hacia abajo, vemos como las respuestas tienden a concentrarse en la primera columna dentro de cada estado, o bien terminan por aparecer los números de estrategias indicadores de que han superado con éxito la tarea del estado. Por tanto es un conocimiento que evoluciona con la edad.

Pretendemos determinar los perfiles de los niños que conforman una categoría determinada atendiendo a que en la prueba, del estudio empírico cualitativo que estamos realizando, hayan sido capaces de realizar o no la tarea asociada a un estado k del modelo evolutivo. Para ello consideraremos las tablas siguientes

	I	II	III	IV	V	VI
Ro. 3,4						
Ju. 3,11						
An. 4,2						
Ja. 4,6						
Ma. 4,11						
Je. 4,11						
Ol. 5,3						
Em. 5,4						
Al. 5,8						
El. 6,2						

Tabla 5.6. Distribución de respuestas por tareas asociadas a los estados de los niños del colegio privado urbano R.

	I	II	III	IV	V	VI
Al. 3,4						
Mar. 3,11						
Ju. 4,2						
Ra. 4,4						
Al. 5,1						
Ma. 5,1						
Ma. 5,5						
Pa. 5,8						
Ma. 5,8						
Nu. 6,3						

Tabla 5.7. Distribución de respuestas por tareas asociadas a los estados de los niños del colegio público urbano M.

	I	II	III	IV	V	VI
An. 3,5						
Ro. 3,61						
Fe. 3,11						
Ad. 4,8						
Su. 4,10						
Ed. 4,11						
Lu. 5,4						
Na. 5,7						
Pa. 5,9						

Tabla 5.8. Distribución de respuestas por tareas asociadas a los estados de los niños del colegio privado de la capital C.

	I	II	III	IV	V	VI
No. 3,6						
Ke. 3,9						
Jo. 3,10						
Ma. 4,4						
Li. 4,4						
Ru. 4,10						
Ju. 5,4						
Lo. 5,7						
In. 6,2						

Tabla 5.9. Distribución de respuestas por tareas asociadas a los estados de los niños del colegio público de la capital B.

	I	II	III	IV	V	VI
Ma. 3,5						
Ju. 3,9						
Ma. 3,11						
Da. 4,4						
Jo. 4,4						
Lo. 4,7						
Ci. 5,8						
Sa. 5,8						
Pa. 5,10						

Tabla 5.10. Distribución de respuestas por tareas asociadas a los estados de los niños del colegio público, provincial, rural H.

De la observación de las tablas podemos decir que todos los niños que han realizado con éxito la tarea asociada al Estado K del modelo evolutivo, realizan correctamente todas las tareas asociadas a estados inferiores.

Por tanto, podemos concluir lo siguiente:

> *Los niños de 3 a 6 años se pueden categorizar en 6 niveles evolutivos de competencias ordinales. Un niño cualquiera estará en un nivel determinado K si es capaz de realizar con éxito tareas propias del estado K del modelo evolutivo de competencias ordinales aquí definido.*

6. Aplicabilidad de los resultados

- Los resultados obtenidos posibilitan una adaptación curricular a las posibilidades reales de los niños de Educación Infantil, con unos curriculums adecuados a los niveles del conocimiento lógico ordinal de la secuencia numérica.

- La investigación plantea un reto a los maestros de Educación Infantil: conseguir en sus alumnos la integración de las habilidades y rutinas presentes en la acción de contar en estrategias que manifiesten algún tipo de relación lógica ordinal entre los términos numéricos.

- El que un niño sepa contar no está garantizado que se encuentre en el nivel IV ó más, ello significa que debemos ser cautos a la hora de presentar conocimientos numéricos a los niños para su aprendizaje.

- Los maestros pueden utilizar los niveles del conocimiento lógico ordinal para obtener una información del estado en competencias ordinales de sus alumnos como indicador de sus potencialidades en actividades numéricas.

- La entrevista clínica individual con escolares de 3 a 6 años constituye un método útil para analizar los esquemas lógicos matemáticos que los niños aplican en el desarrollo de una tarea.

Referencias

Bermejo, V.; Lago, M. O. (1991). Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos. Madrid. C.I.D.E.

Blanco A.; Prieto, T. (2000). Diseños de entrevistas. Curso de Doctorado. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de la Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.

Bliss, J. (1987). La entrevista. Documento del curso sobre "Métodos de investigación en didáctica de las ciencias experimentales (1)", curso 86/87. Universidad de Málaga.

Brainerd, C. J.; Gordon, L. L.(1994). Development of Verbatim and Gist Memory for Numbers. Developmental Psychology, v30 n2 p163-77.

Claparède, E. (1976). Prefacio en, J. Piaget, Le Langage et la pensèe chez l'enfant, 9ªed. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Dedekind, R. (1988). Was sind und was sollen die Zahlen? Brunswick. Trad. inglesa: Berman en R. Dedekind, Essays on the theory of numbers. Chicago, 1901.

Dienes, Z.P. (1970). La construcción de las matemáticas. Barcelona. Vicens Vives.

Dieudonne,J. (1989). En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy. Madrid. Alianza Universal.

Fernández, C. (2002). Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica: en niños de 3 a 6 años. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. Servicio de Publicaciones.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phonomenology of Mathematical Structures. Dordrecht. D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). Revisting Mathematics Education. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Fuson, K. (1988). Children´s counting and concepts of number. Nueva York. Spriger-Verlag.

Gelman, R. y Gallistel, C.R. (1978). The child´s understanding of number. Cambridge, Massachusetts. Hardvard University Press.

González, J.L. (1995). El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Hartnettt, P.; Gelman, R. (1998). Early Understanding of numbers: paths or barriers to the construction of new understandings?. Learning and Instruction. Vol 8, Nº 4, p. 341-374.

Helmholtz, (1945). Las etapas de la Filosofía Matemática. Buenos Aires. Lautaru. (Versión original: Zahlen und hessen erkennt nissthroretisch betranchet. En Brunschvicg. 1887).

Inhelder, B., Sinclair, H. Y Bovet, M. (1974). Apprentissage et structures de la connaissance. Paris. Presses Universitaires de France, p. 33-43.

Manzi,-A; Winters,-L (1996). Mental Rotation and Sequential Ordering in Preschoolers. EDRS Price - MF01/PC01 Plus Postage

Ortiz, A. (1997). Razonamiento Inductivo Numérico, un Estudio en Educación Primaria. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ortiz, A. (2001). Entrevistas semiestructuradas. Una aplicación en Educación Primaria. Actas II Simposio de la SEIEM. Universidad Pública de Navarra.

Peano, J. (1979). Los Principios de la Aritmética. Clásicos El Basilisco. Oviedo. Pentalfa.

Piaget, J.; Inhelder, B. (1976).- Génesis de las estructuras lógicas elementales: clasificaciones y seriaciones. Buenos Aires. Guadalupe

Piaget, J.; Szeminska, A. (1964). Le Gènese du Nombre chez L´enfant. Editions Delachaucx et Niestlé. Neuchatel. (Traducción castellana de

Sara Vassallo: Génesis del número en el niño. Buenos Aires. Guadalupe. 1982)

Piaget. J. (1981). La toma de conciencia. Madrid. Morata.

Piaget. J. (1985). La Psicología de la Inteligencia. Barcelona. Grijalbo.

Piaget. J.; Apostel, L., y otros (1986). Construcción y validación de las teorías científicas. Contribución de la epistemología genética. Barcelona. Piados Studio

Russell, B. (1982). Los Principios de la Matemática. Madrid. Espasa Calpe. (Versión original es de 1903).

Schaeffer, B., Eggleston, V.H. y Scott, J.L. (1974). Number development in young children. Cognitive Psychology, 6, p. 357-379.

Sinclair De Zwart, H. (1978).- Adquisición del lenguaje y desarrollo de la mente. Barcelona. Oikos-Tau, S. A.

Sophian, C. (1995). Representation and Reasoning in Early Numerical Development: Counting, Conservation, and Comparisons between Sets. Child Development, v66 n2 p559-577

Stegmüller, W. (1970). Teoría y Experiencia. Barcelona. Ariel.

Vinh-Bang. (1966). La mèthode clinique et la recherché en psychologie de l’enfant. Psychologie et èpistemologie gènétique : thèmes piagètiens, Paris, Dunod, p. 67-81.

METODOLOGÍA DE UNA INVESTIGACIÓN SOBRE MÉTODOS DE ENSEÑANZA DE PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

Alicia Bruno, *Universidad de La Laguna*

RESUMEN:

Se presenta la metodología de una investigación de aula en la que se contrastan dos métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. Se estudian: el "método redactar", en el que los alumnos redactan los problemas, aprenden a distinguir sus estructuras y resuelven problemas escritos por sus compañeros; y el "método resolver", en el que los alumnos practican de forma sistemática problemas aditivos en una secuencia dada, marcada por el orden de dificultad de los problemas. El conocimiento adquirido por estos alumnos se contrastó con el de otros grupos de alumnos que aprendieron los números negativos con su libro de texto y resolvieron problemas aditivos como aplicación de las reglas operatorias (grupos control). La metodología de investigación fue mixta (cuantitativa y cualitativa): por un lado, se realizó un tratamiento estadístico para contrastar la efectividad de los métodos en cuanto al éxito de resolución de los problemas y, por otro, se hizo un estudio cualitativo de determinadas aspectos del método redactar.

ABSTRACT:

We present the methodology of investigation used in a classroom study, in which different learning methods of additive problems with negative numbers are contrasted. We call these methods in the following way: (1) writing method, in which the students write the problems, learn to distinguish their structures and solve problems that have been written by their partners; (2) solving method, in which the students practice in a systematic way additive problems in a given sequence, according to the level of difficulty of the problems. The knowledge acquired by these students was contrasted with the one obtained by other groups of students who learnt the negative numbers with the textbook and solved additive problems applying the operational rules at the end of the theme. These groups are called control groups. We have used a mixed methodology of investigation (quantitative and qualitative); on the one hand, it was realized a statistical treatment to contrast the effectiveness of the methods in the success of solving problems; on the other hand, we have made a qualitative study of certain aspects of the writing method.

1. Introducción

En la presente ponencia nuestro interés se centra en la metodología de investigación seguida en un estudio sobre la resolución de problemas aditivos con números negativos. El estudio toma los datos directamente del aula y es precisamente en esta parte donde nos detendremos, en concreto en el diseño de la investigación, la recogida de la información y el análisis de los datos (se puede encontrar mayor información de la investigación en Bruno, 2000 y Bruno y Espinel, 2002). Sin embargo, consideramos necesario situar el fundamento teórico de nuestros trabajos, lo que se presenta brevemente, pero que puede verse con mayor detalle en Bruno y Martinón (1999).

Gran parte de los trabajos publicados en educación sobre los números negativos presentan modelos para tratar las operaciones que son válidos sólo para los números enteros (Z). Pensamos que la enseñanza de los números negativos y sus operaciones no puede realizarse desconectada del conocimiento previo de los estudiantes sobre los números y del que adquirirán más adelante. Por ello, entre las formas de abordar la enseñanza de los negativos entendemos que las más adecuadas serían las que propiciaran la conexión entre los distintos sistemas numéricos.

Lo que los alumnos conocen sobre los números cubre aspectos diferentes, como ideas abstractas, representaciones gráficas o situaciones reales... La noción de *campo conceptual* (Vergnaud, 1990) nos resultó útil como marco en el que situar estas ideas. Se entiende como *campo conceptual* al conjunto formado por las situaciones que se corresponden con una idea, así como por los conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. Así, Vergnaud habla de *campo conceptual aditivo* o *campo conceptual multiplicativo*. Sin embargo, el conocimiento numérico es más amplio, y en cierta forma se sitúa en el *campo conceptual numérico* (González, 1995) en el que se incluyen también los aspectos curriculares.

Para reflexionar sobre los elementos del campo conceptual que rodean al concepto de número, distinguimos tres *dimensiones* del conocimiento numérico (adaptadas de los trabajos de Sasaki, 1993 y Peled, 1991). (1) La *dimensión abstracta* (conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y a las formas de escritura de los números, reglas operatorias); (2) la *dimensión de recta* (representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma); (3) la *dimensión contextual* (situaciones concretas en las que se usan los números, aplicaciones o problemas). La dimensión de recta podría ampliarse para incluir otras representaciones, pero nos restringimos a la recta por ser una representación común a todos los sistemas numéricos, lo que propicia la conexión entre ellos.

El tratamiento de las tres dimensiones adquiere mayor importancia en la enseñanza cuando se favorece la traducción del conocimiento entre ellas. Normalmente, en la enseñanza numérica se enfatizan determinadas traducciones y otras se tratan parcialmente.

Las investigaciones sobre los números negativos dan resultados sobre cada una de las dimensiones, e incluso, algunas se refieren a traducciones de conocimiento entre dimensiones. Sin embargo, muchos de los resultados se han obtenidos sin analizar el tipo de instrucción que recibieron los alumnos sobre este tema (Vergnaud and Durand, 1976; Peled, 1991; Küchemann, 1981). En otros trabajos se ha controlado el tipo de enseñanza recibida por los alumnos (Liebeck, 1990; Lytle, 1994), pero no han contemplado el estudio de las tres dimensiones de conocimiento al mismo tiempo.

Nos situamos en una enseñanza-aprendizaje de los números que abarque al menos el estudio de las tres dimensiones de conocimiento numérico y que promueva las traducciones entre ellas. Si en la introducción de los números negativos abandonamos la dimensión contextual (como suele ocurrir en algunas propuestas curriculares) significa otorgarles un carácter diferente, quizás más abstracto. Sin embargo, esto no suele ocurrir en el estudio de los números positivos en el que los alumnos conocen múltiples situaciones en las que emplearlos. No parece razonable olvidar la dimensión contextual al introducir los negativos, sobre todo cuando se pueden emplear situaciones similares a las de los números positivos. Similar razonamiento puede seguirse con la recta.

2. La resolución de problemas aditivos con números negativos

El foco de interés de este trabajo es la resolución de problemas aditivos con números negativos. Nos situamos entonces en la dimensión contextual, sin embargo, la resolución de los mismos lleva a la relación con las otras dimensiones, con la abstracta al plantear las operaciones que resuelven el problema y con la recta al representar las situaciones.

A continuación, presentamos la terminología que sobre estos problemas usaremos en este trabajo, tomada de Bruno y Martinón (1997a) y adaptada de Vergnaud (1982), aunque otras posibles clasificaciones pueden encontrarse en Socas (1997) y González (1997).

En primer lugar, diferenciamos entre *historias aditivas simples* y *problemas aditivos simples,* como lo hacen Rudnitsky *et al.* (1995). Una *historia aditiva simple* es una situación numérica que se describe con una adición $a+b=c$. Por ejemplo, "La temperatura por la mañana en la ciudad era de 7 grados sobre cero y a lo largo del día bajó 10 grados. La temperatura por la noche era de 3 grados bajo cero".

Cada historia aditiva cuyo esquema es $a+b=c$, da lugar a tres problemas aditivos simples, según cual de las tres cantidades anteriores se convierta en incógnita. Diremos que los problemas son de incógnita 1, 2 ó 3 según que la incógnita sea a, b ó c, respectivamente y los denotaremos por i1, i2, i3.

En segundo lugar, distinguimos entre diversos usos de los números:

estados (*e*), que expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud, asociada a un sujeto en un instante ("debo 2");

variaciones (*v*), que expresan el cambio de un estado con el paso del tiempo ("perdí 2");

comparaciones (*c*), que expresan la diferencia entre dos estados ("tengo 2 más que tú").

La consideración de esos tres usos de los números da lugar a diferentes *estructuras* de historias y de problemas. En este trabajo se han utilizado las estructuras más usuales en la enseñanza

Combinación de estados:

estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total, e + e = e

"Pedro tiene 3 euros y debe 15 euros. ¿Cuál es su situación económica total?"

Variación de un estado:

estado inicial + variación = estado final, e + v = e

"Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?"

Comparación de estados:

estado menor + comparación = estado mayor, e + c = e

"Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?"

Combinación de variaciones sucesiva:

variación 1ª + variación 2ª = variación total, v+v=v.

"La temperatura bajó 11 grados y luego subió 5 grados. ¿Cómo varió la temperatura con respecto a la que hacía antes de moverse?"

Diferentes investigaciones han estudiado la resolución de estos problemas por parte de alumnos de primaria o secundaria (Verganud y Durand 1976; Verganud, 1982; Marthe, 1979; Bell, 1986; Bruno y Martinón, 1997b). Estas investigaciones, de corte muy diferentes unas de otras han estudiado, en otros aspectos: (a) la *dificultad* de los problemas; (b) los *tipos de representaciones* (esquemas, recta numérica); (c) los *procedimientos y estrategias de resolución*.

De los resultados de las investigaciones destacamos las conclusiones de Bell (1986) en las que indicaba que la estructura es determinante en la dificultad de los problemas, con más influencia que el contexto. Lo que llevó a Bell a recomendar una enseñanza que ayude a los alumnos a diferenciar las estructuras de los problemas. En Bruno y Martinón (1997b) comprobamos que, aunque el tipo de estructura influye en el éxito de la resolución, es la posición de la incógnita el factor que presenta más dificultades para los alumnos. A partir de esto, nos planteamos desarrollar una metodología de enseñanza que se centrara en que los alumnos distinguieran los problemas según la estructura y la posición de la incógnita.

Rudnitsky *et al.* (1995) contrastaron dos métodos de enseñanza de los problemas aditivos de *combinación de estados, variación de un estado* y *comparación de estados,* con números positivos y con alumnos de primaria. Un método de enseñanza consistió en que los alumnos realizaron prácticas continuas y sistemáticas de resolución de problemas aditivos con números positivos. En el segundo método los alumnos redactaron las historias y los problemas que posteriormente intercambiaron con sus compañeros para resolverlos. El conocimiento sobre los problemas aditivos adquiridos por estos alumnos se contrastó con el de otros grupos de alumnos (grupos control), sobre el que no ejercieron ninguna influencia. Los alumnos contestaron a unas pruebas escritas sobre problemas aditivos inmediatamente después de finalizada la instrucción en el aula y a otras pruebas varios meses después. Los resultados indicaron que los alumnos que siguieron la metodología de redactar los problemas obtuvieron mejores resultados que los otros grupos de alumnos en la prueba realizada varios meses después de terminada la experiencia en el aula.

Nos planteamos si una conclusión similar podría establecerse también para los números negativos, es decir, si una metodología de enseñanza en la que los alumnos escriben los problemas aditivos y aprenden a clasificarlos según sus estructuras, ayuda en la comprensión de la situación y lleva a mayor éxito en la resolución. *A priori*, no podemos decir que sea cierto porque la edad de los alumnos es distinta y por que la problemática con los números negativos es diferente, debido a que un mismo problema se pueden resolver con diferentes operaciones de suma y resta, a lo que se añade también los aspectos formales que rigen el cálculo con estos números. Por ello, realizamos una investigación que en su base coincide con la de Rudnitsky *et al.*, aunque con algunas matizaciones, que explicamos con más detalle en el apartado siguiente.

3. Objetivos de la investigación

Hablaremos de dos *métodos de enseñanza* de los problemas aditivos:

Método redactar: los alumnos redactan enunciados de historias y luego de problemas, aprenden a distinguir sus estructuras, los intercambian con sus compañeros y los resuelven.

Método resolver: los alumnos practican de forma sistemática una amplia variedad de problemas, que se les proponen secuenciados en orden de dificultad, según la posición de la incógnita (ver tabla 7).

Además, contamos con unos grupos de alumnos (grupos *control*) sobre los que no ejercimos ninguna influencia metodológica, que siguieron el tema por su libro de texto, estudiaron las reglas operatorias de los números negativos y posteriormente, practicaron la resolución de problemas aditivos sin poner énfasis en una secuencia según su dificultad y sin distinguir las estructuras.

Apoyándonos en los resultados de Rudnisky *et al.*, nos planteamos los siguientes objetivos de investigación:

1. *Analizar si el método redactar consigue mejores resultados en la resolución de problemas aditivos con números negativos que los métodos resolver y los grupos control, con alumnos de 13-14 años.*
2. *Estudiar las diferencias o semejanzas entre los métodos en la resolución de problemas, en cuanto a la dificultad de los problemas y a las estrategias de resolución.*
3. *Analizar el método redactar: problemas que escribieron los alumnos, implicaciones para el profesor, dificultades que puede presentar para los alumnos.*

Existen tres diferencias fundamentales con respecto a la investigación de Rudnitsky *et al.*: (1) los problemas se resuelven con números negativos; (2) se estudian los problemas con estructura v+v=v; (3) añadimos los dos últimos objetivos de investigación:

4. Los institutos, el profesorado y el alumnado

Las preguntas de investigación llevan a una intervención en el aula, en ella son fundamentales los centros, el profesorado y el alumnado que participa. Resulta complejo en ocasiones la búsqueda, coordinación e implicación del profesorado o de los centros. Es muy difícil controlar a la perfección estas variables, básicamente, porque la realidad la impone el profesorado que está dispuesto a participar, el cual está integrado en un centro determinado y con unos alumnos concretos que condicionan la experiencia. Hay aspectos que pueden controlarse, pero no todos. Por ejemplo, en nuestro caso, la profesora P5 (ver tabla 1) fue elegida como profesora de los grupos control por haber mostrado en las entrevistas previas cierto recelo a cambiar su forma de tratar los números negativos, aludiendo a problemas de tiempo y a sentirse satisfecha con su manera de enfocarlos con sus alumnos.

La investigación se realizó con alumnos de segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria en Tenerife, alumnos de 13-14 años de edad. La razón que nos llevó a elegir este nivel fue que los alumnos habían tenido en el curso anterior una introducción a los números negativos, que continuaba durante ese segundo curso, por lo que el contenido a trabajar formaba parte de la programación. En cada centro se esperó al momento en que estaba programado el estudio de los números negativos. Antes de comenzar la investigación y según explicación de los profesores, todos los alumnos que participaron en la experiencia estaban iniciados en la suma y la resta de números negativos.

Participaron 9 grupos de alumnos, 4 institutos y 5 profesores; en la tabla 1 se resume la información referente al método de enseñanza, grupos, alumnos, profesores e institutos participantes.

Con los profesores que participaron se tuvieron reuniones previas al desarrollo del trabajo en el aula, con el fin de discutir las características del método y las actividades que iban a seguir y de analizar los posibles problemas metodológicos que podrían surgir, bajo su perspectiva y con el conocimiento de sus alumnos, su centro y su programación. El principal trabajo con los profesores fue la reflexión sobre las estructuras de los problemas. En este sentido, al igual que nos había ocurrido en otras investigaciones, los profesores suelen trabajar con problemas aditivos, pero no conocen, en ocasiones, la sistemática de su clasificación.

Método de enseñanza	Redactar			Resolver			Grupos control		
Grupos	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Número de alumnos por método	57			74			55		
Número de alumnos por grupo	17	17	23	30	22	22	19	20	16
Profesores	P1	P1	P2	P2	P3	P4	P5	P5	P5
Institutos	I1	I1	I1	I1	I2	I3	I4	I4	I4

Tabla 1. Distribución de los grupos en los métodos

5. Fases de la investigación, recogida de la información y análisis de los datos

En una primera fase, los investigadores diseñaron la investigación, redactaron secuenciaron y temporalizaron las actividades que iban a seguir los alumnos en los métodos *redactar* y *resolver*.

En ambos métodos, la experiencia se desarrolló en 10 horas de su horario habitual de matemáticas (2 horas semanales, durante cinco semanas). El primer día se realizó una prueba *inicial* que contenía 9 problemas aditivos con números negativos y el día 10 una prueba *final* con el mismo número de problemas y con iguales estructuras y posición de la incógnita, aunque con diferentes contextos. Cuatro meses más tarde de finalizada la experiencia se pasó una prueba de *retención*, del mismo tipo de las dos pruebas anteriores. Los alumnos trabajaron en parejas estables, siempre que fue posible, esto es, cuando no se producía una ausencia a clase de su compañero.

En los grupos *control* no se preparó material curricular específico ni se temporalizaron las actividades por parte de los investigadores. Los alumnos siguieron las actividades propuestas por su profesor y su libro de texto, en el cual había problemas aditivos al final del tema. Sin embargo, se proporcionó a la profesora de dichos grupos los problemas aditivos que iban a seguir los alumnos del método *resolver*, con vistas a que ampliara el conjunto de problemas tratados en su libro de texto. En resumen, estos grupos de alumnos, aprendieron las reglas operatorias de los números negativos y practicaron problemas aditivos sin seguir una secuencia concreta de los mismos y también resolvieron las pruebas *inicial*, *final* y de *retención*.

Los datos que se utilizan para presentar los resultados se refieren a las pruebas escritas, los problemas que redactaron los alumnos del método redactar y las observaciones de aula que hicieron todos los profesores que participaron en la experiencia.

Pruebas escritas

En la tabla 2 se recogen las características de los problemas en las tres pruebas, se destaca la estructura del problema, el contexto y la operación que resuelve el problema, Puede observarse que lo que permaneció similar en todas las pruebas fue la estructura y la posición de la incógnita.

En las pruebas se puntuó cada problema con 1 ó 0, según que el resultado estuviese bien o mal. Con lo cual, la calificación de las pruebas oscilan entre 0 y 9. Se puntuó con un 1 las soluciones correctas obtenidas a partir de cálculos con números negativos o con números positivos y también las obtenidas a partir de una representación gráfica (básicamente, la recta).

	Prueba *inicial*	Prueba *final*	Prueba *de retención*
eee i3	Dinero (-650)+(+1700)=+1050	Dinero (-1650)+(+3700)= +2050	Dinero (+22000)+(-31000)=-9000
eve i3	Cronología (-580)+(+79)= -501	Temperatura (-16)+(+5)=-11	Ascensor (+6)+(-8) = -2
vvv i3	Carretera (-6)+(+9)=+3	Autobús (+6)+(-15)=-9	Temperatura (+9)+(-12) = -3
ece i3	Nivel del mar (-11)+(-4)= -15	Carretera (-7)+(-6) = -13	Cronología (-235)+(+27) = -208
eee i2	Dinero (-43000)-(-13000)=-30000	Dinero (-23000)-(-6000)=-17000	Dinero (-43000)-(-13000)=-30000
eve i2	Temperatura +47-(-5) = +52	Cronología (-56)-(-123) = 67	Nivel del mar (-5)-(-13) = 8
vvv i2	Nivel del mar (-400)-(+300) = -700	Ascensor (-4)-(+7) = -11	Autobús +5-(-12) = +17
ece i2	Ascensor (-3)-(+5) = -8	Nivel del mar (-4)-(+11) = -15	Carretera (-6)-(+7) = -13
eve i1	Ascensor (-3)-(-8) = +5	Carretera (-6)-(-10) = +4	Temperatura (-3)-(-10) = +7

Tabla 2. Esquema de los problemas de las pruebas escritas

Con las tres pruebas (*inicial*, *final* y de *retención*) se realizó:

- un estudio estadístico descriptivo de las variables de interés para nuestra investigación: dificultad de los problemas y estrategias de resolución;

- una ANCOVA para verificar si había diferencias significativas entre los métodos y los grupos control.

Para el análisis de los datos se han utilizado los paquetes estadísticos Systat y SPSS.

Problemas escritos por los alumnos del método redactar

En el método *redactar* los profesores recogieron las historias y los problemas escritos por los alumnos. Se analizaron estos textos teniendo en cuenta como los alumnos los:

- clasificaron,

- redactaron

- resolvieron,

- aspectos de lenguaje (contextos utilizados, expresión de las situaciones: estados, variaciones y comparaciones).

Observaciones de aula

Los diferentes profesores anotaron las observaciones de clase destacando en ellas las incidencias del aula. Se les indicó que observaran las dificultades del método, en cuanto a la viabilidad del mismo, los comentarios de los estudiantes que consideraran relevantes, especialmente las dificultades y las preguntas que manifestaran en la escritura y/o resolución de los problemas y por último, las incidencias del aula en cuanto al comportamiento y la participación de los alumnos. Estas anotaciones sirvieron para elaborar las conclusiones sobre las características del método redactar.

6. Enseñanza del método redactar

En el método redactar los alumnos aprendieron a distinguir las estructuras de los problemas aditivos y que reflexionaron cómo cambia la operación que resuelve el problema en función del dato que se pide. Para trabajar la clasificación de los problemas con los alumnos cambiamos su denominación (explicada en el apartado 2) por otra más cercana a ellos, en concreto, los problemas de *combinación de estados* los denominamos problemas de *Todo junto*; los de *variación de un estado* problemas de *Algo Ocurre*; los de *comparación de estados* problemas de *Compara* y los de *combinación de variaciones sucesivas* problemas de *Dos Cambios*.

La secuencia seguida en los diez días de trabajo en el aula del método redactar se distribuyeron de la forma que se indica en la tabla 4. Salvo en determinados momentos, el material con el que trabajamos en clase fue la producción de problemas de los alumnos, que se recogía al finalizar cada sesión de clase.

Actividades de clase	Observaciones
Día 1: *Prueba inicial*	
Día 2 *Presentación de historias de números positivos*	La profesora presenta historias de las cuatro estructuras con números positivos y se debate sobre las diferencias entre ellas, y se acuerdan sus nombres: *Algo ocurre, Todo junto, Compara y Dos cambios*. Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y debaten sobre las clasificaciones.
Día 3 *Presentación de historias de números negativos*	La profesora presenta historias de las cuatro estructuras con números negativos y se debate su clasificación (ver tabla 5). Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten las clasificaciones.
Día 4 *Escribir historias*	Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten las clasificaciones.
Días 5 y 6 *Escribir historias y sus problemas correspondientes*	La profesora presenta una historia y sus correspondientes problemas. Los alumnos escriben los problemas que surgen a partir de una historia creada por ellos, los resuelven y los intercambian con los compañeros. Algunos de los problemas se escogen para ser discutidos con toda la clase.
Día 7, 8 y 9 *Escribir historias y sus problemas según una estructura indicada*	Redactan historias con una estructura indicada previamente por la profesora, resolviendo los correspondientes problemas e intercambiándolos con los compañeros.
Día 10 *Prueba final*	

Tabla 3. Secuencia de enseñanza del método redactar

Obsérvese que escribir historias/problemas y discutir sus estructuras implica dedicar más tiempo y atención a comprender la situación problemática. También el pasar de la historia a los problemas centra la atención en cómo cambian los problemas y su resolución en función de la incógnita.

Se plantearon momentos de debate, eligiendo alguno de los problemas redactados por los estudiantes con el fin de analizarlo, clasificarlo y resolverlo con toda la clase. Se procuró elegir problemas que tuvieran errores de redacción con el fin de que los compañeros aportaran sus modificaciones. También en los momentos de debate se les pedía explicaciones de cómo resolvían los problemas, lo que nos sirvió para ratificar determinadas dificultades de los problemas.

Todo junto (e + e = e)

Julián está haciendo cuentas para comprarse un ordenador; para ello, repasa como está su situación económica en los bancos donde tiene ingresado el dinero. Pide los extractos de sus cuentas bancarias y observa que en el banco Nova tiene 125367 pesetas y en el banco Universal debe 237550 pesetas. Julián concluye que debe 112183 pesetas, por lo que decide dejar la compra del ordenador para más adelante.

Algo ocurre (e + v = e)

Un soldado vigila una muralla. La muralla tiene una puerta en su centro, 0. El soldado estaba 16 metros a la izquierda de la puerta cuando oyó un ruido que provenía del lado derecho de la muralla. Caminó hacia la derecha 35 metros y se paró al comprobar que había sido una falsa alarma. En ese momento decidió sentarse a descansar, miró hacia la puerta y comprobó que estaba a 19 metros por el lado derecho de la misma.

Dos cambios (v + v = v)

Ana normalmente regresa a casa desde el instituto en guagua y siempre suele estar bastante llena. Un día que viajaba en la guagua, agobiada por la cantidad de gente que iba en ella, pensó: "¡si no cabe nadie más…! ¿cómo puede pararse en esta parada?". Contó el número de personas que subían y bajaban en esa parada y comprobó que bajaron 13 personas y luego subieron 7. "¡Uf!, el número de personas ha descendido en 6 con respecto a las que viajábamos antes de esta parada", pensó Ana más tranquila.

Compara (e + c = e)
Roberto es un hombre de negocios que viaja a distintos países. Hoy se encuentra en Roma, donde ha trabajado muy duro en un día agradable. De hecho, observó en un termómetro que la temperatura era de 21 grados sobre cero. Ahora está haciendo su maleta porque mañana se marcha a París. No sabe qué ropa coger, por lo que va a mirar en un periódico la temperatura de París en ese día. Decide coger su ropa de abrigo al calcular que en París tuvieron ese día 24 grados menos que en Roma, ya que la temperatura en París había sido de 3 grados bajo cero.

Tabla 4. Ejemplos de historias presentadas a los alumnos del método redactar

7. Enseñanza del método resolver

El trabajo en el aula con los alumnos del método *resolver* se desarrolló de la forma que indica la tabla 5:

Actividades de clase	Observaciones
Día 1. *Prueba inicial.*	
Días 2 a 9 *Resolver problemas*	Los alumnos resolvieron 30 problemas aditivos con distintos contextos y con las estructuras, posiciones de la incógnita y secuencia que se indican en la tabla 7. Se comenzó con los problemas de la primera columna y se terminó con los problemas de la última columna de la tabla. Se comenzó con problemas de incógnita 3, para después introducir problemas de otras incógnitas.
Día 10 *Prueba final.*	

Tabla 5. Secuencia de enseñanza del método resolver

En el método *resolver* también se incide en las diferentes estructuras y posiciones de la incógnita de los problemas, pero no de forma explícita, como sí se hace en el método *redactar*.

	Días 2-9					
e+e =e	i3	i3, i2	i2		i2	i3
e+v=e	i3, i3	i1	i2, i3	i1	i1, i2	i1, i2
v+v=v	i3	i3	i2	i2, i2	i3	i2
e+c=e	i3	i3	i2	i2, i3	i2	i2

Tabla 7. Tipos de problemas y secuencia de los problemas del método resolver

El material que se preparó fue la secuencia de problemas que se entregó fotocopiado a cada alumno y que se recogió una vez finalizada la instrucción en el aula.

8. Resultados

Aunque no es objetivo de esta ponencia se exponen brevemente algunos de los resultados obtenidos.

El estudio estadístico mostró que los *métodos redactar* y *resolver* dieron lugar a mejores resultados que los grupos *control*. Es decir, que un trabajo sistemático de los problemas aditivos con números negativos, como fue el de los *métodos redactar* y *resolver*, produjo mejores resultados en la resolución de los mismos por parte de estudiantes de secundaria. Mientras que la estrategia de resolver problemas al final del tema, como aplicación de las reglas estudiadas previamente, seguida por los grupos *control*, no resultó eficaz.

Los resultados del *método redactar* no fueron tan óptimos como los obtenidos por Rudnitsky *et al.* con números positivos. El método *resolver* obtuvo resultados más altos que el método *redactar*, aunque las diferencias entre ellos no presentó significatividad estadística, siendo los resultados muy próximos.

El estudio descriptivo de las pruebas sirvió para analizar regularidades en todos los grupos de alumnos, con independencia de la enseñanza recibida, que ratifican conclusiones de otras investigaciones previas. Así se ha comprobado que los problemas de incógnita 2 son más difíciles que los de incógnita 3, el contexto cronología se muestra especialmente complejo para los estudiantes, el uso de la recta depende del contexto y el uso de la recta está determinado por la instrucción.

El análisis de los problemas escritos por los alumnos del método *redactar* y las observaciones de aula mostraron que los estudiantes pueden tener dificultades iniciales en la escritura de las historias, las cuales pueden ser solventadas con cierta facilidad. La clasificación de los problemas se hace de forma correcta por parte de muchos estudiantes y se observó que los alumnos utilizan contextos diferentes que los que aparecen en los textos, normalmente asociados a aspectos negativos (destrucción, muerte...).

El método *redactar* puede ser una alternativa de enseñanza, pero no solucionó las dificultades que tienen para los alumnos estos problemas. El método precisa de más tiempo que otros métodos y quizás con una enseñanza prolongada a lo largo de un curso escolar, y no concentrada en un período corto de tiempo, se consigan mejores resultados.

9. Reflexiones finales

Una vez finalizado el estudio nos preguntamos, como investigadores que deseamos seguir progresando, si realmente ha sido eficaz plantear la investigación con los objetivos y el diseño con los que se ha hecho. La investigación aspiraba a conocer un poco más sobre la enseñanza de los problemas aditivos con números negativos, sabemos que obtener resultados definitivos sobre métodos de enseñanza es muy complejo. Las diferentes investigaciones parecen demostrar que no hay métodos ideales, sino métodos más adecuados para desarrollar o favorecer cierto tipo de conocimiento o de actitudes.

El estudio realizado se ha basado en un método mixto de investigación, cuantitativo, al contrastar los métodos y cualitativo al analizar el *método redactar*. Cada tipo de datos aporta información distinta. Así, el estudio estadístico nos ha permitido ver que los *método resolver* y *redactar* son viables en cuanto a su efectividad, en contraste con los grupo *control*. Sin embargo, un método de enseñanza no siempre puede medirse en término de respuestas correctas o incorrectas, y hay muchos factores que el estudio estadístico que hemos planteado ha dejado por fuera. El análisis de los problemas escritos por los estudiantes y las observaciones de aula han aportado cierta información sobre la posibilidad real de seguir el *método redactar*. Sin embargo, nos ha faltado analizar de forma rigurosa la realidad del aula en el resto de los grupos la cual hubiese aportado información importante.

Desde nuestro punto de vista la investigación se hubiese mejorado realizando entrevistas a los alumnos de los diferentes grupos para contrastar si el tipo de conocimiento adquirido varía de una metodología a otra. Es decir, si con el *método redactar* se consiguen mejoras en otros aspectos del conocimiento matemático: ¿se comprende mejor la operación que se plantea para resolver el problema o se escribe una operación porque se sabe de antemano cuál es el resultado del problema? Otra cuestión que nos planteamos es si el *método redactar* consigue fomentar otras actitudes como detenerse a reflexionar sobre el enunciado y/o no responder de forma mecánica. Las condiciones están, pero nos se ha sistematizado la toma de datos para ver si esto se ha producido.

Otro hecho que hubiese mejorado la investigación es el haberla realizado el primer curso en que los alumnos trabajan los números negativos, con el fin de controlar mejor el conocimiento previo de los estudiantes.

Sobre la recogida de información, las propias características del *método redactar* facilita la toma de información en el aula, ya que implica una actividad constante por parte de los estudiantes y una mayor verbalización de sus ideas. En contra tiene el que no se puede predecir de antemano lo que va a ocurrir en el aula, ya que el material con el que se trabaja cada día es la producción de los alumnos.

Este tipo de reflexiones, que suelen hacer los investigadores al finalizar cualquier estudio, no suelen plasmarse en los informes de investigación, agradezco por tanto a la SEIEM la posibilidad de debatir sobre estos aspectos.

Referencias

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias, 4(3),* 199-208.

Bruno, A. (2000). Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *EMA, Investigación e innovación en educación matemática, 5(3),* 236-251.

Bruno, A. (2001). Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. En Contreras, L.C.; Carrillo, J.; Climent, N: Sierra, M. (eds.). *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp, 119-130). Universidad de Huelva Publicaciones, Huelva.

Bruno, A.; Espinel, C. (2002). Problemas aditivos con números negativos: estudio sobre tres métodos de enseñanza con alumnos de nivel medio básico. Aceptado en *Educación Matemática*.

Bruno, A.; Martinón, A. (1997a). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática, 9 (1),* 33-46.

Bruno, A.; Martinón, A. (1997b). Procedimientos de resolución de problemas aditivos de números negativos. *Enseñanza de las Ciencias, 15 (2),* 249-258.

Bruno, A.; Martinón, A. (1999). The teaching of numerical extensions: the case of negative numbers. *International Journal in Mathematic Education Science and Technology, 30(6),* 789-809.

González, J.L. (1995). *Los números enteros relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

González, J.L. (1997). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global. En Rico, L. y Sierra, M. (eds.) *Actas de la Primer Simposio de la SEIEM*, (pp 77-105). Universidad de Salamanca. Salamanca

Liebeck, P. (1990). Scores and forfeits-an intuitive model for integer arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 221-239.

Lytle, P. (1994). Investigation of a model on neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction. *Proceedings XVIII PME,* 192-199. Lisboa.

Küchemann, D. E. (1981). Positive and negative number. En Hart,K. (ed.) *Children's Understanding of Mathematics: 11-16,* John Murray. Londres, pp. 82-87.

Marthe, P. (1979). Additive problems and directed numbers. *Proceedings of the III PME*, 153-157. Warwick.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers. *Proceedings of the XV PME*, 145-152.

Rudnitsky, A.; Etheredge, S.; Freeman, J.M.; Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. *Journal for Research in Mathematics Education, 26 (5),* 467-486.

Sasaki, (1993). The constructing meanings by social interaction in mathematical teaching. *Proceedings of the XVII PME,* 2, 262-268. University of Tsukuba. Japón.

Socas, M.M.; Hernández, J. Noda, A. (1997). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En Rico, L. y Sierra, M. (eds.) *Actas de la Primer Simposio de la SEIEM,* (pp 46-62). Universidad de Salamanca. Salamanca

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (eds.)_*Addition and subtraction: A cognitive perspective*. LEA. New Jersey.

Vergnaud,G.; Durand,C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie, 36,* 28-43.

A INVESTIGAÇÃO E OS SEUS IMPLÍCITOS: CONTRIBUTOS PARA UMA DISCUSSÃO

Leonor Santos, *Universidade de Lisboa*

As três comunicações apresentadas – Alicia Bruno, Catalina Fernandéz Escalona e Maria del Cármen Chamorro Plaza – são de natureza diferente. Duas delas apresentam estudos realizados e a terceira aborda um possível método de investigação. Contudo, em todas elas o enfoque incide nos aspectos metodológicos. Assim, este comentário, que está confinado a esta área, é organizado em duas partes. A primeira procura deslocar a reflexão sobre as metodologias de investigação para os paradigmas que lhe estão subjacentes e uma segunda parte que coloca algumas questões a cada uma das autoras no sentido de contribuir para a discussão dos trabalhos apresentados.

Paradigmas de investigação

Em grande parte dos estudos que se realizam, é habitual encontrar-se a referência aos termos "investigação quantitativa" ou "investigação qualitativa". Em nosso entender, esta terminologia, embora bastante comum, corre o risco de ambiguidade, podendo levar a pensar que o fulcro da questão assenta não nos pressupostos teóricos, crenças e formas de ver o mundo por parte do investigador, mas tão-somente no tipo de tratamento dos dados. Assim, propomo-nos discutir as diferentes abordagens metodológicas através dos paradigmas que lhe estão subjacentes.

Um paradigma é aquilo que nos permite olhar o mundo e identificar o que nele é, para nós, importante (Bogdan e Biklen, 1982). Ou ainda, é um conjunto de crenças básicas que tratam de princípios elementares ou do foro mais profundo. Representa a visão do mundo que cada um tem, da sua natureza e do lugar que cada sujeito ocupa nesse mundo (Guba e Lincoln, 1994). As crenças dizem respeito a um conjunto de pressupostos básicos sobre a natureza das coisas que enformam o nosso pensamento e que admitimos como verdadeiros. Embora possam ser mais ou menos justificadas, não é possível, em última instância, comprovar ou refutar a sua veracidade.

Guba e Lincoln (1994) propõe-nos uma análise comparativa entre diferentes paradigmas de investigação, assente em três grupos de questões relativas, respectivamente, a aspectos ontológicos, epistemológicos e metodológicos. Embora constituindo três campos de análise distintos, eles estão interrelacionados, isto é, são interdependentes. Por outras palavras, a forma como nos posicionamos face a um grupo de questões de um dos campos de análise influencia e determina a resposta a dar às questões de outro campo.

As questões ontológicas dizem respeito à forma como encaramos a realidade e o que consideramos possível saber sobre essa mesma realidade. De acordo com o paradigma considerado, esta realidade poderá ser vista como objectiva e existindo independentemente do Homem (corrente do realismo), sendo o objectivo da investigação procurar conhecê-la, embora o possa sempre fazer apenas de forma limitada, ou, no extremo oposto, reconhece-se a existência de múltiplas realidades situadas, resultante da construção humana (corrente do relativismo), acessível através da investigação.

As questões epistemológicas discutem a natureza da relação entre o que se sabe ou se pode vir a saber e o que é possível saber-se. Por outras palavras, problematizam à volta da objectividade versus subjectividade, quer no sentido que se atribui a estes termos, quer na importância que eles possam tomar. A posição tomada quanto à forma como se perspectiva a natureza da realidade tem necessariamente que trazer implicações às questões epistemológicas. Assim, se assumirmos que existe uma realidade exterior ao Homem é natural que, desde que se garanta a objectividade, os resultados obtidos através da investigação são verdadeiros. Pelo contrário, numa perspectiva relativista, os resultados são também construções humanas, logo subjectivos. O mundo real é uma construção de actores sociais que, em cada momento e espaço, constroem o significado social dos acontecimentos e fenómenos do presente e reinterpretam o passado. Nesta perspectiva não faz sentido falar na dualidade objectividade versus subjectividade uma vez que a interpretação é uma actividade humana por excelência que permite à pessoa conhecer-se a si própria e aos outros (Schwandt, 1994).

Por último, as questões metodológicas, mais do que discutir os métodos, devem em primeiro lugar incidir, segundo Guba e Lincoln (1994), sobre o modo de proceder do investigador de forma a chegar aos conhecimentos que acredita ser possível obter. Mais uma vez, a resposta a esta questão está interrelacionada com as opções tomadas anteriormente. Por exemplo, se acreditamos numa realidade única e objectiva, seja expressa através de dados quantitativos ou qualitativos, todas as variáveis que forem consideradas como perturbadoras do fenómeno em estudo deverão ser controladas, de forma a se aceder a essa realidade. Assim, em termos metodológicos, no que respeita aos objectivos do estudo, a perspectiva relativista dirige-se sobretudo a questões de conteúdo, mais do que de processo, e "o objectivo primordial da investigação centra-se no significado humano da vida social e na sua clarificação e exposição por parte do investigador" (Erickson, 1989, p. 196). Opondo-se a uma perspectiva realista, que pressupõe uma causalidade temporal, estabelecendo uma relação de causa (antecedente) e efeito (consequente), a perspectiva relativista valoriza a compreensão e a explicação. Sem ter por objectivo a previsão, através da verificação de leis ou a generalização de hipóteses, pretende desenvolver e aprofundar o conhecimento de uma dada situação num dado contexto. Em vez de se ter, à partida, um conjunto de hipóteses a testar, procura-se compreender o comportamento dos participantes no seu próprio contexto (Bogdan e Biklen, 1982).

Tomando como ponto de partida este modelo de análise comparativa entre paradigmas, discutiremos, de seguida, alguns aspectos dele decorrentes.

<u>Relação entre o paradigma e o objecto de estudo</u>: Se tomarmos por base este modelo que estabelece diversas distinções entre paradigmas, é possível repensar a relação entre a abordagem de investigação escolhida num dado estudo e aquilo que ele pretende estudar. Diversos autores (por ex. Patton, 1980; Reichardt e Cook, 1979) defendem que a escolha do paradigma de investigação é determinada pelas características do objecto de estudo. Questionamos, contudo, até que ponto tal é de facto verdade. A relação causa-efeito parece-nos, no mínimo, questionável. Até que ponto o próprio problema do estudo não é já ele determinado pelo paradigma do investigador? É o paradigma que modela o problema ou é o problema que modela o paradigma? Como questionam Strauss e Corbin (1990), como se explica que investigadores que têm um dado paradigma são sempre levados a formular questões de um certo tipo? Até que ponto as crenças do investigador não modelam desde logo as questões que para si são relevantes e dignas de estudo?

A questão essencial, em nosso entender, não é tanto discutir o que vem em primeiro lugar, mas sim encontrar uma forte consistência entre o paradigma e o problema do estudo. Note-se contudo que o mesmo problema pode ser ajustado a diferentes métodos, caso o paradigma seja sujeito a uma categorização mais fina. Por outras palavras, é possível identificar na literatura diversos métodos que se encaixam num mesmo paradigma. É por exemplo, o caso do interpretativo, que inclui o interaccionismo simbólico, a antropologia interpretativa e o construtivismo social (Schwandt, 1994).

A construção de teoria: Esta problemática está directamente relacionada com a questão já antiga sobre a construção da teoria. Duas ordens de questões poderão ser avançadas. Por um lado, as dimensões indutiva e dedutiva e as suas implicações no papel da teoria na investigação. Por outro, a noção de generalização.

Os métodos indutivo e dedutivo são reconhecidos como métodos legítimos de criação de teoria, desde há largos séculos. No entanto, quando falamos em investigação, o papel que esta desempenha na teorização varia de acordo com a perspectiva encarada pelo investigador. Usando o método dedutivo, o investigador procura dados empíricos que se ajustem à teoria. Pelo contrário, numa abordagem indutiva, começa-se por um conjunto empírico de dados e procura-se encontrar uma teoria que se lhe ajuste (Goetz e LeCompte, 1984). Através de sucessivas análises de fenómenos semelhantes e distintos vai-se construindo uma teoria que explique o que se vai estudando. Este estudo segue uma via essencialmente indutiva.

Vejamos em seguida a questão da generalização. Quando a investigação segue uma perspectiva realista, os métodos usados estão consonantes com os métodos tradicionalmente reconhecidos como científicos. Duas dimensões podem então estar presentes. Por um lado, pode seguir-se uma lógica de verificação, consonante no geral com uma abordagem dedutiva. Formulam-se hipóteses ou proposições a partir de uma dada teoria e procura-se saber se são aplicáveis a novos conjuntos de dados. Por outro lado, procura-se igualmente aplicar um processo de generalização, isto é, através de um processo que respeita um conjunto de normas (nomeadamente a representatividade da amostra, construída de forma aleatória), passa-se do particular para o geral. Neste caso, segue-se uma lógica indutiva.

Ao introduzirem-se outras formas e paradigmas em investigação, a construção de teoria é de imediato problematizada. Pode mesmo dizer-se que durante anos esta foi uma questão delicada. Torna-se necessário, então, alterar o sentido a atribuir à generalização. Considera-se que cada estudo dentro da mesma área contribui para um acumular de conhecimentos que aos poucos vão tornando a teoria mais consistente e credível. É o método indutivo que está subjacente e passa-se a considerar como essencial a possibilidade de se estabelecer comparações entre diferentes estudos. Para que tal seja possível, é necessário uma clara descrição dos objectos do estudo, dos métodos de investigação usados e das categorias de análise (Goetz e LeCompte, 1984).

Um contributo neste sentido é também dado pela Teoria Ancorada nos Dados (*Grounded Theory*). Este modelo propõe a investigação e a construção de teoria como duas partes do mesmo processo. Atribuindo grande importância à análise e à atitude sistemática de questionamento por parte do investigador, procura ir-se criando sucessivos níveis de abstracção que vão dar origem à teoria. No dizer dos seus autores, o grau de receptividade desta proposta foi para além das suas expectativas (Strausss e Corbin, 1994). Tal facto vem de certa forma reforçar a ideia de que a questão referente à construção de teoria feita a partir de investigações de cunho interpretativo não se encontra ainda totalmente resolvida.

O papel do investigador: Numa perspectiva realista, o investigador deverá ser neutro, ser capaz de se colocar de um ponto de vista exterior como observador da realidade e em nada a influenciar. Pelo contrário, numa perspectiva relativista, aceita-se que não há a possibilidade de se estabelecer uma separação nítida entre o investigador e aquilo que ele vai estudar. Toda a investigação é vista como apresentando necessariamente marcas de quem a realizou, muito embora mais do que falar em objectividade ou subjectividade, faz sobretudo sentido falar em intersubjectividade, resultante da interacção que se estabelece entre o investigador e os participantes no estudo.

Diversos autores indicam a necessidade de se levarem a cabo diligências para que as interpretações realizadas num dado estudo de cunho interpretativo possam ser consideradas como credíveis. Por um lado, o investigador deve explicitar, no início do estudo, as suas expectativas e convicções de forma a tornar claros e compreensíveis os seus efeitos em interpretações subsequentes (Denzin, 1989). Por outro, sugere-se desenvolver a "triangulação" (Erikson, 1989; Ludke e André, 1986; Reichardt e Cook, 1979), isto é, a confrontação de informação obtida a partir de fontes distintas. Por outro ainda, envolver os participantes no estudo no processo de interpretação e análise dos dados (Goetz e LeCompte, 1984).

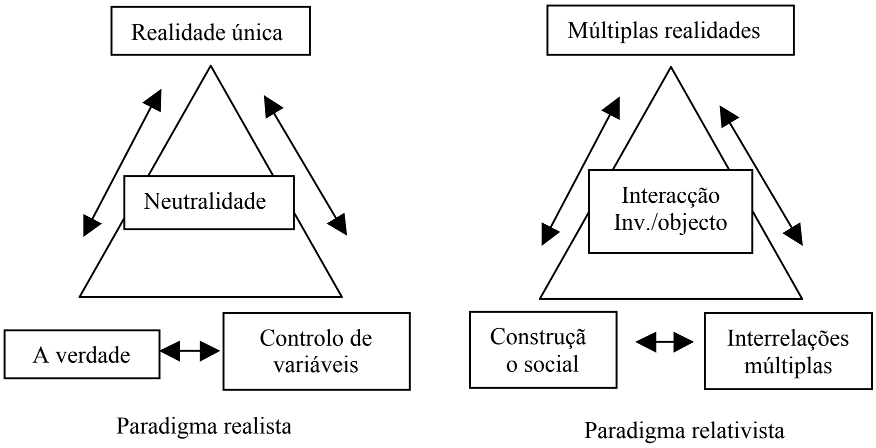


Fig. 1: Características básicas de paradigmas alternativos de investigação

As questões de ética: Por último, gostaríamos ainda de salientar que o desenvolvimento de estudos que seguem um paradigma de investigação de cunho relativista trazem para primeiro plano as questões de ordem ética. Note-se que não são questões que se levantam apenas neste tipo de estudos, mas são reforçadas pelo facto do investigador ter uma relação muito próxima com os participantes no estudo. Estas questões podem abarcar diversos aspectos, que procuramos em seguida enunciar e discutir.

O primeiro deles diz respeito ao "consentimento informado" dado pelos participantes envolvidos no estudo (Fontana e Frey, 1994; Punch, 1994). Este consentimento deve resultar de uma informação clara por parte do investigador quanto aos objectivos a que se propõe e os processos que pensa utilizar. Por outras palavras, as regras do jogo devem ser claras e, em última instância, negociadas. Deste princípio decorre de imediato que não faz qualquer sentido usar-se ao longo do desenvolvimento do estudo processos de recolha de dados que não sejam do conhecimento dos participantes e não tenham merecido o seu consentimento prévio. Caso, por exemplo, do recurso à gravação áudio de entrevistas.

Um segundo aspecto relaciona-se com os cuidados a ter no que respeita possíveis implicações para os participantes decorrentes da publicação do estudo, sejam elas situações embaraçosas ou sanções de qualquer tipo. Os limites da acessibilidade devem assim ser discutidos e negociados. Esta questão está igualmente associada à decisão de estabelecer até que ponto devemos entrar na vida privada dos participantes no estudo. O facto da pessoa aceitar participar numa investigação não equivale a autorizar a invasão da sua privacidade (Stake, 1994). Segundo Adler e Adler (1994), a invasão da privacidade pode tomar duas formas distintas: invadir espaços privados, não acessíveis ao público em geral, ou apresentar-se a si próprio como membro da comunidade de forma a ter acesso a esse espaço.

Um processo usualmente utilizado para minimizar os riscos enunciados é o recurso ao anonimato, feito através do uso de pseudónimos. Mas quando as sociedades onde esses participantes se movem são pequenas, caso da comunidade dos educadores e de professores de Matemática em Portugal, a possibilidade de identificação é muito grande. Assim, em nosso entender, não basta usar designações artificiais, é igualmente necessário garantir que aquilo que é publicado é reconhecido pelo próprio como característico de si e não pertencente ao nível do seu foro íntimo. De forma a ser possível garantir este aspecto é imprescindível que as pessoas envolvidas no estudo conheçam em primeira-mão o conteúdo final do estudo, antes deste ser publicado.

Outro aspecto igualmente delicado pode colocar-se quanto às motivações dos participantes no estudo. Não nos parece desejável que uma pessoa aceite participar numa investigação apenas identificando vantagens para o investigador. Todo o estudo deste tipo pede normalmente um acréscimo de trabalho e de disponibilidade de tempo que não é compatível pensar fazer-se em nome de outrem. Cabe assim ao investigador fazer sentir às pessoas envolvidas as vantagens que poderá advir da sua participação no estudo.

Por último, e agora no que respeita aos estudos sobre professores uma nova questão ética se levanta. Toda a investigação que segue uma perspectiva relativista procura a compreensão e a apreensão dos significados dos fenómenos. Não cabe ao investigador tomar juízos de valor sobre o objecto de estudo. Não é esse o seu propósito. Há, no entanto, um certo risco em que se pode cair neste tipo de abordagem, tanto porque o investigador tem ele próprio as suas concepções sobre o que é ensinar e aprender, como os professores muitas vezes encaram o investigador como alguém que, por ter um conhecimento mais sustentado na teoria, lhes pode vir a resolver os seus próprios problemas. Este conflito de papéis pode ser, contudo, resolvido se, por um lado, os objectivos do estudo forem claros para ambas as partes e, por outro, o investigador estiver atento a este risco, controlando as atitudes que o poderão levar as situações favorecedoras de juízos de valor. Por outras palavras, o investigador não deve assumir uma postura exterior avaliativa, mas sim procurar interpretar e compreender os seus significados.

Podemos assim concluir que, no que respeita a atitude ética na investigação, como investigadores que trabalham no terreno, "devemos desenvolver uma responsabilidade moral e bom senso para como os sujeitos do estudo em primeiro lugar, com o próprio estudo, em segundo, e só por último, com nós próprios" (Fontana e Frey, 1994, p. 372).

A concluir esta primeira parte, gostaríamos de afirmar que, ao contrário de que Kuhn (1975) defendia, numa ciência madura podem coexistir numa mesma época vários paradigmas. Tal é o que acontece nas Ciências da Educação, e na Educação matemática em particular, não por ser uma ciência num estado pré-paradigmático, mas antes dada a diversidade e complexidade dos seus objectos de estudo (Shulman, 1989). Reconhece-se que diversos paradigmas de investigação são legítimos e que cada um deles permite contribuir com distintos resultados. Todos eles têm vantagens e limitações, "não tendo nenhum deles a exclusividade das respostas correctas" (Filstead, 1979, p. 42).

Algumas questões para discussão

1. O trabalho de Alice Bruno apresentado procura "confrontar diversos métodos de ensino de problemas aditivos com números negativos" (p. 1). Segundo é afirmado no ponto 9, "o estudo realizado baseou-se num método mixto de investigação, quantitativo, no confronto entre os métodos, e qualitativo, na análise do método redactar" (p. 15). Tomando em conta o modelo atrás apresentado, pergunta-se: em que paradigma se reconhece a autora? Os termos qualitativos e quantitativos são aqui utilizados para referir a natureza e o tipo de tratamento de dados ou em termos de método de investigação? Como encara a forma como o seu trabalho contribui para a construção de teoria?

A autora, ainda na página 9, chama a atenção para que "as diferentes investigações parecem apontar que não há métodos ideais, senão métodos mais adequados para desenvolver ou favorecer certo tipo de conhecimentos e de atitudes". Contudo, se lermos o primeiro objectivo do estudo – "analisar se o método redactar consegue melhores resultados na resolução de problemas aditivos com números negativos do que os métodos resolver e do grupo de controle, com alunos dos 13-14 anos de idade" (p. 6) –, está ou não a pressupor a possibilidade de um método ser melhor que outros para a generalidade dos alunos? Por outras palavras, até que ponto a diversidade nos métodos e raciocínios de aprendizagem actualmente defendido pelas correntes cognitivas da aprendizagem (por ex. Bruner, 1968; Meirieu, 1988) que valorizam não a normalização do ensino, mas antes pelo contrário, a diferenciação pedagógica, são ou não perfilhadas pela investigadora? Qual o referencial teórico donde parte a autora no que respeita às teorias de aprendizagem?

2. O trabalho de Catalina Escalona tem uma engenharia metodológica elaborada muito interessante. Começa por, numa primeira fase, realizar um estudo qualitativo exploratório, a fim de determinar o que chama "um modelo evolutivo de competências ordinais". Em seguida, vai validar o seu modelo recorrendo a um estudo empírico qualitativo. Quer na primeira fase, quer na segunda, recorre a entrevistas clínicas individualizadas com suporte em material concreto elaborado para este fim. Algumas das opções seguidas contudo não são, a nosso ver, suficientemente justificadas para a compreensão total por parte do leitor das razões que levaram a investigadora a seguir este design. Por exemplo:

- Por que se optou por realizar entrevistas clínicas, isto é, em local não natural do trabalho da criança?

- Por que se optou por realizar entrevistas exclusivamente individuais?

- Por que se considerou mais adequado a interacção entre o investigador e a criança, em todos os momentos da entrevista como se afirma na página 17 "provoca-se intencionalmente a interacção constante entre o entrevistador e o entrevistado"?

- Na primeira fase do estudo as crianças seleccionadas foram as que se ofereceram voluntariamente a partir de um grupo dado (p. 5). Ignora-se como foram seleccionadas as 47 crianças para a validação do modelo. Também se ofereceram voluntariamente? Como é que esta variável é equacionada pela investigadora?

- Não é claro se o entrevistador foi sempre a mesma pessoa ou foi da responsabilidade de uma equipa de pessoas? Caso se tenha verificado a segunda hipótese, como se procedeu para garantir a homogeneidade possível de comportamentos?

- Até que ponto o facto de não se passar à tarefa seguinte, no caso da criança não resolver correctamente a tarefa anterior hierarquicamente ordenada por grau de dificuldade (p. 17), permite validar o modelo construído?

3. Maria del Cármen Chamorro Plaza apresenta-nos um artigo em que desenvolve a observação como um método importante a ser utilizado na área da Didáctica da Matemática, quer na investigação, quer na formação inicial e contínua de professores. Embora estando em total sintonia com a sua proposta, a leitura do seu texto levantou-me algumas questões que passarei a colocar.

Afirma-se na página 6 que "… a interpretação pode ser boa ou má". Partindo do pressuposto que o observador está de boa fé e é honesto, pergunto a quem cabe decidir da qualidade da interpretação? Mais adiante, apresenta-se uma lista de possíveis efeitos de distorção que podem por em causa a qualidade da observação. Mas nada se diz como se pode contornar estes riscos e quais as medidas e métodos a desenvolver, para além de se afirmar já na página 7 que "se requer que se tomem todas as precauções possíveis, que exista um contrato claro entre o investigador e o professor observado, e que não haja dúvidas sobre o papel que cada um deve desenvolver". Estas duas últimas medidas prendem-se a meu ver sobretudo com as questões de ética que este método inevitavelmente levanta e que este artigo pouca importância dá. A este propósito é ainda de chamar a atenção que quando se observa a prática lectiva do professor um risco adicional é acrescentado. Trata-se de o investigador tomar ou ser solicitado a tomar indevidamente juízos de valor como já foi anteriormente referido. Assim, pergunta-se se não será de dar maior visibilidade às questões de ética estreitamente relacionadas com este método?

O papel da observação didáctica na formação inicial de professores está bastante desenvolvida e é mesmo apresentado um processo possível a implementar. Tal contudo já não se poderá dizer sobre a formação contínua de professores. Como vê a autora a engenharia a construir para este fim?

Vários autores defendem actualmente a pertinência do desenvolvimento da investigação na prática profissional do professor (Alarcão, 2001; Lytle e Cochran-Smith, 1990; Ponte, 2002). Sendo a investigação um processo de construção de conhecimento, a investigação sobre a prática realizada pelos próprios práticos é decisiva não só para o desenvolvimento do corpo de saberes sobre a prática, fornecida por uma visão de dentro da escola, como igualmente no seu próprio desenvolvimento profissional. Tendo por base fundamental a sala de aula, a actividade investigativa poderá ser desenvolvida pelo professor, marcada essencialmente pela observação sistemática e por uma actividade inquiridora e fundamentada. Esta perspectiva tem contudo levantado algumas críticas, assentes numa discussão epistemológica da natureza do conhecimento, que contrapõe o conhecimento teórico e formal do prático e situacional. Qual a posição desta autora face a esta problemática? Como a observação pode ou não constituir ainda um método de investigação do professor sobre a sua prática?

Referências

Adler, P. e Adler, P. (1994). Observational techniques. In Norman Dezin e Yvonna Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In B. P. Campos (Ed.), *Formação professional de professores no ensino superior* (Vol. I). Porto: Porto Editora.

Bodgan, R. e Biklen, S. (1982). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Bruner, J. (1968). Processes of cognitive growth: infancy. USA: Clark University Press.

Lytle, S. L. e Cochran-Smith, M. (1990). Learning from teacher research: A working typology. *Teachers College Records*, 92(1), 83-103.

Denzin, N. (1989). *Interpretive interaccionism*. Newbury Park: Sage.

Erickson, F. (1989). Métodos Cualitativos de Investigación sobre la Ensenanza. In M. Wittrock (Ed.), *La Investigación de la Ensenanza, II. Métodos Cualitativos y de Observación.* Madrid: Ediciones Padiós Ibérica. (trabalho original em inglês, publicado em 1896).

Filstead, W. (1979). Qualitative methods: A needed perspective in evaluation research. In T. Cook e C. Reichart (Eds.), *Qualitative and quantitative methods in evaluation research*. London: Sage Publications.

Fontana, A. e Frey, J. (1994). Interviewing. The art of science. In Norman Dezin e Yvonna Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

Goetz, J. e LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research.* New York: Academic Press.

Guba, E. e Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In Norman Dezin e Yvonna Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

Kuhn, T. S. (1975). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: F.C.E.

Ludke, M. e André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU.

Meirieu, P. (1988). *Apprendre… oui, mais comment?* Paris: ESF Editeur.

Patton, M. (1990). *Qualitative Evaluation Methods*. London: Sage Publications.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a prática. (no prelo).

Punch, M. (1994). Politics and ethics in qualitative research. In Norman Dezin e Yvonna Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

Reinchardt, C. e Cook, T. (1979). Beyong Qualitative versus Quantitative Methods. In T. Cook e C. Reichardt (Eds.), *Qualitative and Quantitative Methods in Evaluation Research.* London: Sage Publications.

Schwandt, T. (1994). Construtivist, interpretivist approaches to human inquiry. In Norman Dezin e Yvonna Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

Shulman, L. (1989). Paradigmas y programas de investigacion en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporanea. In M. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza*, *I. Enfoques, teorias y métodos.* Madrid: Ediciones Padiós Ibérica. (trabalho original em inglês, publicado em 1896).

Strauss, A. e Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research. Grounded theory. Procedures and techniques*. London: Sage Publications.

Strauss, A. e Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. In Norman Dezin e Yvonna Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

Stake, R. (1994). Case studies. In Norman Dezin e Yvonna Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

DEBATE DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II

Pilar Orús Báguena, *Universidad Jaume I de Castellón*

Las ponentes de este Seminario sobre metodología han sido invitadas para presentar fundamentalmente la metodología y los métodos utilizados en sus trabajos de investigación, lo que les ha exigido un trabajo suplementario ya que, en principio ninguna de ellas habia realizado un trabajo específico sobre metodología, sino que habían sido propuestas para intervenir en este Seminario, por haber utilizado métodos de investigación de naturaleza muy diversa, así como la metodología que adoptan y los niveles educativos en que se centran sus trabajos. Y como ya viene siendo habitual en los Simposios de la SEIEM, se invitan a representantes de la Sociedad de Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación (SEM-SPCE), para presentar la replica a los ponentes de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, que lo primero que señaló es la naturaleza diversa de dichas ponencias.

El Seminario, tuvo dos parte; una primera parte se presentaron las tres ponencias.que se recogen en su totalidad en las actas, “Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos” a cargo de la profesora Alicia Bruno de la Universidad de La Laguna, “Entrevistas clínicas individuales a escolares de 3 a 6 años . Una modelización de las competencias ordinales en educaión infantil” presentada por Catalina Fernandéz Escalona de la Universidad de Málaga, y “La observación como método de investigación en Didáctica de las Matemáticas” de Carmen Chamorro Plaza de la Universidad Complutense de Madrid. En la segunda parte, intervino la profesora Leonor Santos del Departamento de Educação de la Faculdade de Ciências, de la Universidade de Lisboa, como profesora invitada de la Sociedad de Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación (SEM-SPCE) para presentar la replica a dichas ponencias mediante una contribución de título “A investigação e os seus implícitos: contributos para uma discussão”, que trambién se recoge integra en las actas.

Esta intervención de la profesora Santos sirvió para iniciar y centrar el debate de este Seminario sobre Metodología, ya que en su papel de “replicante”, terminó su intervención interpelando directamente a las ponentes, con las siguientes cuestiones:

Para Alicia Bruno: ¿En que paradigma se reconoce la autora? ¿Como encara la construcción de la teoría?, ¿Cual es el marco teórico del aprendizaje que utiliza?.

Para Catalina Fernández : respecto a las entrevistas ¿Por qué en un ambiente no natural? ¿Siempre individuales? ¿El entrevistador fué siempre el mismo?; respecto a la selección de los niños ¿Voluntarios también en la 2ª etapa?

Para Carmen Chamorro: Respecto a la observación como método de investigación, ¿qué cuestiones éticas puede plantear?; respecto a la formación permanente ¿qué propuestas?

En torno a estas preguntas, se articuló el debate que cerró la segunda sesión del Seminario con las replicas y contrarreplicas entre las ponentes, la replicante y los asistentes.

CAPÍTULO 3

Informes de Investigación

En este capítulo se presentan las ponencias correspondientes a los cuatro informes de investigación y la crónica de los debates surgidos a raíz de su presentación.

NOCIONES SOCIALES RECONTEXTUALIZADAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DE LA COMPETENCIA COMUNICATIVA

Núria Planas i Raig, *Universitat Autónoma de Barcelona*

RESUMEN:

Este informe señala la necesidad de establecer relaciones entre la educación matemática y otras disciplinas cercanas. Se toma la idea de recontextualización introducida por Bernstein y se examina cómo está siendo aplicada para revisar y adaptar el uso en investigación educativa de nociones procedentes de teorías sociales. Se pone el énfasis en tres disciplinas que, desde la década de los ochenta, vienen contribuyendo a la producción de conocimiento en educación matemática: psicología cultural, sociología y antropología. La noción de competencia comunicativa se considera con el propósito de ejemplificar parte de un proceso de recontextualización que está siendo llevado a cabo en nuestra área.

ABSTRACT:

This report points out the need to establish some relations between mathematics education and other surrounding disciplines. In particular, we take Bernstein's idea of recontextualization and examine how it is being applied in revising and adapting the use in educational research of certain notions coming from social theories. The focus is on three disciplines that have been producing since the eighties important knowledge in our field: cultural psychology, sociology and anthropology. The key notion of communicative competence is considered in order to exemplify an ongoing recontextualization process into mathematics education.

1. Procesos de recontextualización en educación matemática

Bernstein (1996) usó la noción de recontextualización para señalar la importancia de situar ciertas nociones aparecidas dentro del campo de producción de una disciplina en el campo de producción de otra disciplina distinta. En concreto, este autor sugirió la necesidad de considerar nociones de las teorías de la identidad y del poder simbólico en el análisis de las situaciones educativas. Obviamente, las relaciones entre matemáticas y educación matemática están repletas de recontextualizaciones. También han sido recontextualizados en educación mate-mática resultados y nociones de la psicología cognitiva al aplicarse los estudios de Piaget en la interpretación de los procesos mentales de formación y desarrollo de ciertos conceptos matemáticos.

Por otra parte, la educación matemática continúa estando muy ligada a la filosofía. La emergencia de los métodos de enseñanza basados en la resolución de problemas frente a la clásica transmisión de hechos, por ejemplo, es consecuencia de un proceso de recontextualización de los heurísticos filosóficos descritos por Lakatos (1976) y de la noción de conocimiento posteriormente construida por Kitcher (1984).

La tardía difusión internacional de la obra de Vygotski ha contribuido a que predominaran cuestiones estrictamente cognitivas y epistemológicas en la investigación en educación matemática hasta fechas relativamente recientes. Sin embargo, a finales de los años ochenta, las referencias a los trabajos de Vygotski en prestigiosas publicaciones tales como el *Journal for Research in Mathematics Education* o el *Educational Studies in Mathematics* (ver, por ejemplo, Bishop, 1988) han consolidado nuevos procesos de recontextualización procedentes de disciplinas cuya vinculación con la educación matemática aún no había sido seriamente tenida en cuenta.

Para Vygotski (1978), la psicología no puede ignorar los fenómenos culturales y sociales del entorno del sujeto, siendo necesario tomar cualquier actividad humana como una actividad socialmente significativa. En base a ello, las llamadas teorías sociales, psicología cultural, sociología y antropología, junto con una aproximación crítica a la semiótica, se han hecho un sitio destacado en el área de la educación matemática. Conocimientos construidos dentro de estas teorías han sido aplicados para recontextualizar la compleja noción de competencia comunicativa, noción en principio producida en el campo de la lingüística. Dicho proceso de recontextualización constituye el problema específico abordado en el presente informe.

El problema se analiza desde la convicción de que es importante fundamentar cuestiones de tipo sociocultural en un ámbito, el de la educación matemática, donde tradicionalmente han sido relegadas.

2. Noción de competencia comunicativa

Como se argumenta en un trabajo de investigación reciente (Planas, 2001), el problema de la comunicación en el aula de matemáticas tiene que ver con compartir significados tales como los modos de interpretar cómo comportarse en ciertos contextos. Pero, también y esencialmente, tiene que ver con relaciones discursivas tales como quién se dirige a quién en qué circunstancias, con qué contenidos, en qué momento, por medio de qué registro lingüístico, con qué propósitos, en medio de qué posibles malentendidos y con qué consecuencias.

Así, las oportunidades de comunicación en un entorno muchas veces parecen depender en gran medida de la posición que cada interlocutor ocupa en un cierto sistema de relaciones de poder establecidas y no tanto de los contenidos introducidos por cada interlocutor. Por otra parte, algunas interpretaciones de las normas en dicho entorno son a menudo difíciles de comprender. Los procesos de comunicación en el aula de matemáticas y la competencia comunicativa de algunos de sus participantes están siendo continuamente cuestionados debido a la presencia de interpretaciones divergentes de las normas y a las valoraciones que surgen como consecuencia del diferente grado de legitimidad de cada una de las interpretaciones.

A continuación, recogemos ideas desarrolladas en el proceso de recontextualización de la noción de competencia comunicativa en el campo de la educación matemática, con el propósito de situar brevemente el posicionamiento teórico desde el cual se construyeron los resultados mencionados en el párrafo anterior. En primer lugar, dentro de la psicología cultural, los trabajos de Abreu (2000, 2001) son de especial relevancia para la reubicación de la noción de competencia comunicativa en el campo de la educación matemática.

A raíz de ciertos procesos de recontextualización de nociones procedentes de la psicología cultural, tales como las nociones de valoraciones y representaciones sociales, se han ido introduciendo paulatinamente conceptos procedentes de la sociología (normas, en Lerman, 2001) y de la antropología (valores, en Pinxten, 1997) que han resultado ser determinantes en la reinterpretación de lo que significa ser competente en el aula de matemáticas desde un punto de vista comunicativo

Tanto Abreu, como Lerman y Pinxten señalan una misma particularidad de sus aportaciones en el campo de la educación matemática. Lo que estos autores cuentan sobre la competencia comunicativa, bien podría decirse de cualquier aula, con independencia del contenido que se enseñe; sin embargo, enfatizan la urgencia de iniciar un análisis del aula de matemáticas donde la negociación de normas, valoraciones y valores se vincule a la adquisición del dominio específico de destrezas matemáticas.

Las aportaciones realizadas desde la semiótica por Presmeg (2001) acerca de discontinuidades en la comunicación han contribuido a fundamentar aspectos esenciales en la reinterpretación de la competencia comunicativa que parecen estar relacionados con obstáculos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos.

Para Presmeg, tratar el tema de la competencia comunicativa nos acerca al entendimiento de los problemas que plantea a alumnos procedentes de culturas minoritarias la comprensión de ciertos significados convencionales en la cultura mayoritaria, así como los obstáculos que esas dificultades suponen para la adquisición de los aprendizajes escolares. La autora sitúa esta problemática dentro del campo de estudio de la educación matemática enunciando aspectos que supuestamente la agravan en este contexto. En particular, considera el papel del uso y reconocimiento de las normas de actuación. La dificultad por explicitar significados alternativos para las normas sociales en el microcontexto del aula de matemáticas y la habitual tendencia a tratar como únicas las interpretaciones de las normas específicas de la práctica matemática hacen que el problema de la competencia comunicativa deba redefinirse de un modo especial: no se trata tan solo de indagar dificultades que surgen al intentar usar y comprender el lenguaje matemático, también deben ser tenidas en cuenta las dificultades emergentes al percibir normas sociales y de la práctica matemática diferentes de las esperadas. Presmeg coincide con Lerman (2001) cuando éste afirma que la competencia comunicativa tiene que ver con procesos de socialización en una cierta cultura normativa más o menos rígida.

La importancia de la lengua en relación con la educación matemática es un tema muy complejo que se encuentra profundamente relacionado con el tema de la comunicación. A menudo se afirma que, como la competencia comunicativa ya ha sido adquirida en la lengua materna, es fácilmente transferible a una segunda o tercera lengua. Pero la transferencia de competencias es un proceso más sofisticado que el simple dominio de un vocabulario y una gramática. Hablar una misma lengua no garantiza una comunicación fluida y sin conflictos.

La adquisición de competencia comunicativa consiste en la adquisición de todo aquello que es necesario saber para poder relacionarse con eficacia en contextos cultural y socialmente significativos sin que se produzcan discontinuidades que lo impidan

(Presmeg, 2001). No se trata tan solo de construir enunciados correctos en el lenguaje coloquial y en el matemático.

También hay que procurar construir enunciados que se adecuen a un determinado contexto. Ser considerado competente en la práctica matemática tiene mucho que ver con ser considerado competente en el contexto cultural y social donde se produce dicha práctica, y esto conlleva necesariamente compartir o simular determinados significados y valores legitimados en ese contexto (Pinxten, 1997). En este sentido, la construcción de conocimiento matemático y el buen desarrollo de los procesos de comunicación son del todo inseparables. En particular, las valoraciones positivas o negativas que se intercambien en estos procesos de comunicación facilitarán o dificultarán la construcción de conocimiento matemático (Abreu, 2000).

Abreu (2001) ha llevado a cabo estudios de caso con alumnos inmigrantes con el fin de analizar interacciones comunicativas en situaciones de aprendizaje matemático. Los resultados de Abreu confirman en líneas generales la importancia de las valoraciones en los procesos de atribución de competencia comunicativa. De acuerdo con la autora, los diferentes niveles de comunicación y participación en el aula de matemáticas no son una mera cuestión de habilidades matemáticas. Los participantes no son considerados por igual y las relaciones entre ellos no están libres de valoraciones. Las interacciones con los compañeros y con el profesor son una continua fuente de valoraciones positivas y negativas y, como consecuencia, contribuyen al desarrollo de diferentes roles y estatus.

La noción de valoraciones, fuertemente vinculada a aspectos de estatus, es muy difícil de conceptualizar. Abreu describe las valoraciones como formas sutiles que todo individuo usa, ya sea consciente o inconscientemente, para controlar las acciones de los otros al interactuar con ellos. En particular, las interacciones sociales en el aula de matemáticas originan asimetrías por medio de la transmisión continuada de valoraciones entre unos y otros participantes. Lerman (2001) ha señalado la escasa atención prestada a la dimensión social del aula de matemáticas y, en concreto, a las valoraciones, en tanto formas a menudo implícitas de establecimiento de un cierto orden. Por medio de estas valoraciones, unos alumnos reciben el apoyo social necesario para mantener su participación mientras que otros no son igualmente tomados en cuenta.

Estamos de acuerdo con Evans (2000) cuando señala que las relaciones entre los participantes del aula de matemáticas influyen en las relaciones de cada uno de estos participantes con el aprendizaje y que, a su vez, ambos tipos de relaciones están influenciadas por la competencia comunicativa atribuida a cada sujeto. Para el alumno, además de adquirir conocimiento y comprensión de las matemáticas, el reto consiste en adquirir conocimiento acerca de las formas de comportamiento que le permitirán ser visto como alguien que sabe y comprende. Es decir, el alumno necesita comprender las normas, saber las formas de actuación que le habrán de conducir a un cierto grado de reconocimiento, además de controlar cómo y cuándo deben ser mostradas dichas formas de actuación.

Hay multitud de significados asignados al aprendizaje matemático no estrictamente vinculados a conocimientos matemáticos y que, sin embargo, condicionan el acceso a estos conocimientos. Es el caso de las normas sociales que regulan la dinámica del aula. Por ejemplo, la organización del trabajo entre los miembros de una clase es una norma social que admite diferentes interpretaciones. Entre ellas: trabajo individual, en pareja, autónomo, en grupo, cooperativo o trabajo según las actividades que se lleven a cabo.

Existen también distintos significados asociados a las normas de la práctica matemática. Por ejemplo, los criterios de legitimación de una solución matemática son una norma matemática que admite diferentes interpretaciones: creatividad, rigor y formalización, sofisticación, eficiencia, simplicidad, verosimilitud, rapidez, comprensibilidad para el profesor o para los alumnos, entre otras. Asumir unas u otras interpretaciones aleja o acerca al alumno del discurso pedagógico legitimado, hace que sea valorado de una u otra forma y, en definitiva, contribuye a que se le confiera un cierto grado de competencia comunicativa.

3. Implicaciones para la investigación en educación matemática

El estudio de la noción de competencia comunicativa se encuentra todavía en sus inicios. No obstante, hay argumentos tanto de orden social como científico que justifican continuar esta línea de investigación. Desde un punto de vista social, los múltiples aspectos que intervienen en la adquisición de un grado suficiente de competencia comunicativa, imprescindible para implicarse en cualquier tarea matemática, están relacionados con cuestiones de equidad y justicia social puesto que el grupo de alumnos inmigrantes y en situación de riesgo social es el que se halla más afectado.

Una comunicación exitosa va más allá del estricto entendimiento del lenguaje y remite a un background cultural que los alumnos de culturas minoritarias no siempre comparten. Alumnos distantes de la normalidad académica proyectada por una determinada cultura escolar tienden a experimentar dificultades en la comprensión de las normas del aula y, a menudo, son objeto de valoraciones negativas por ello. Para entender la multitud de factores involucrados en el hecho de que ciertos alumnos dejen de participar en las prácticas matemáticas del aula, hay que poner de manifiesto aspectos sociales y culturales. La noción de participación ha de ser interpretada en el contexto sociocultural del aula y desde la perspectiva individual de cada alumno.

Es habitual suponer que los alumnos en situación de riesgo social tienen algún tipo de impedimento dado por su condición marginal que dificulta su implicación en las prácticas matemáticas escolares. En el proyecto QUASAR (Brown y otros, 1996) se argumenta que el bajo nivel de participación y éxito en el aula de matemáticas por parte de alumnos minoritarios no se debe necesariamente a una supuesta falta de habilidades o a un déficit cognitivo, sino más bien a la conjunción de múltiples factores de naturaleza sociocultural, algunos de ellos originados en la propia micro-cultura del aula. No deben, pues, interpretarse las condiciones de participación matemática en el aula sin tenerse en cuenta factores culturales y sociales generados en este entorno, tales como la percepción de normas inesperadas y valoraciones negativas que determinan los espacios y las formas de comunicación.

De acuerdo con esto, si entendemos las matemáticas escolares como una forma de comunicación, deberemos estudiar las formas de socialización que caracterizan la cultura del aula donde se plantea dicha comunicación. Lerman (op. cit.) se pregunta quién se resiste más a esos procesos de socialización en las normas de la cultura del aula: ¿los alumnos al aprenderlos, los profesores al enseñarlos o los investigadores al tomarlos en consideración?

Desde un punto de vista científico, unos de los retos actuales de la investigación en educación matemática radica en aceptar integrar como unidades válidas de análisis la categoría cultural (distancia entre la interpretación canónica de las normas y la interpretación personal del alumno) y la categoría social (distancia entre las valoraciones esperadas por el alumno y las recibidas) que surgen del proceso de recontextualización parcialmente descrito en la sección anterior (para más detalles, ver Planas, 2002). El estudio de las categorías cultural y social mencionadas ha de contribuir a tratar aspectos de equidad en relación con las oportunidades de aprendizaje matemático de estos grupos de alumnos, pero también ha de facilitar una mejor comprensión de los procesos de aprendizaje de todos los alumnos. Avanzar hacia una mayor fundamentación de dichas categorías, tal como se entienden en este informe, ha de contribuir, por una parte, a consolidar puentes ya establecidos entre lo colectivo y lo individual y, por otra parte, a indagar relaciones emergentes entre sujeto y entorno.

Como investigadores, debemos examinar las diversas variables que intervienen en las prácticas matemáticas del aula e indagar los modos en que son construidas las diferentes identidades de los participantes como aprendices. Para empezar, el aprendizaje de las matemáticas escolares no debe ser reducido a la asimilación de un conjunto de prácticas más o menos abstractas. El aprendizaje matemático se encuentra profundamente vinculado a actividades organizadas desde un punto de vista social y a sistemas de significados normativos desarrollados de forma dinámica dentro de una comunidad. Ni la perspectiva únicamente cognitiva ni la perspectiva únicamente cultural parecen suficientes. Conviene adoptar una perspectiva integrada donde aspectos cognitivos, culturales y sociales sean conjuntamente considerados. Por ejemplo, la noción de norma no debe ser únicamente estudiada desde la perspectiva de cómo la interpreta el alumno, ni tampoco desde la perspectiva de cuáles son sus procesos constituyentes. Se trata de estudiar también las evaluaciones o valoraciones negativas a que las normas pueden dar lugar en unas determinadas circunstancias y el impacto de dichas valoraciones en los procesos individuales del alumno. Al fin y al cabo, las trayectorias individuales son, como señala Wenger (1999), producto de las prácticas sociales y de los significados culturales desde los que cada sujeto aprende a interactuar con su entorno.

Referencias.

Abreu, G. de (2000). Relationships between macro and micro socio-cultural contexts: Implications for the study of interactions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(1), 1-29.

Abreu, G. de (2001). Towards a cultural psychology perspective on transitions between contexts of mathematical practices. En G. de Abreu et al. (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practice* (pp. 173-192). London: Kluwer Academic Publishers.

Bernstein, B. (1996). *Pedagogy, symbolic control and identity: Theory, research, critique.* London: Taylor & Francis.

Bishop, A.J. (1988). Mathematics education and its cultural context. *Educational Studies in Mathematics, 19*(2), 179-191.

Brown, C.A., Stein, M.K., & Forman, E.A. (1996). Assisting teachers and students to reform the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1-2), 63-93.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American Educational Research Journal*, *29*(3), 573-604.

Evans, J. (2000). *Adults mathematical thinking and emotions: A study of numerate practices*. London: Routledge Falmer.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. NY: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2001). The social turn in mathematics education research. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44). Westport: Ablex Publishers.

Pinxten, R. (1997). Applications in the teaching of mathematics and sciences. En A.B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 373-402). New York: SUNY

Planas, N. (2001). *Obstacles en l'aprenentatge matemàtic: La diversitat d'interpretacions de la norma*. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona (edición micrográfica).

Planas, N. (2002). Obstáculos en el aprendizaje matemático generadores de interrupciones en la participación. *Educación Matemática, 14*(1): 5-25.

Presmeg, N.C. (2001). Shifts in meaning during transitions. En G. de Abreu et al. (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practice* (pp. 213-228). London: Kluwer Academic Publishers.

Vygotski, L. (1978). *Mind in society*. Cambridge: Harvard University Press.

Wenger, E. (1999). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

COMUNIDAD VIRTUAL DE DISCURSO PROFESIONAL GEOMÉTRICO. CONTRIBUCIONES DE UN PROCESO INTERACTIVO DOCENTE POR INTERNET.

Marcelo Bairral, *Universidad Federal Rural de Rio de Janeiro*

RESUMEN:

La naturaleza del pensamiento de los profesores es una área de considerable interés y la atención hacia la relevancia de la geometría como un importante componente formativo es un hecho en los planteamientos interesados en la formación inicial y continuada del profesorado. En el ámbito de la investigación cualitativa, presentaremos las contribuciones de un entorno virtual para el desarrollo crítico del contenido del conocimiento profesional del profesor de matemática. Específicamente, analizar un proceso teleinteractivo docente a partir de situaciones de enseñanza-aprendizaje en geometría (para alumnos con 11-14 años). La importancia del proceso teleinteractivo para el desarrollo de habilidades metacognitivas en los profesores es un hecho destacable en las conclusiones de la investigación.

ABSTRACT:

The nature of teachers' mathematical thinking is a current research focus. The skills and cognitive processes of learning and teaching geometry are important points in the environments of interest to the development professional. In this qualitative research we will present some contributions of one virtual environment to the critical development professional in mathematics. Specifically, we will analyse the teleinteractive teaching-learning process used in geometry (for 11-14 year old students). The study reveals the importance of the teleinteractive process for improving teachers' metacognitive skills.

1. Desarrollo del Conocimiento Profesional Docente en Geometría. Problemática.

Son muy diferentes las posturas adoptadas por los autores a la hora de realizar estudios sobre el estado de la situación con relación al profesor de matemáticas y el proceso de llegar a ser un profesor (García Blanco, 1999) y diferentes investigaciones recientes interesadas en creencias, papeles, conocimiento, etc. enfatizan la complejidad del trabajo de profesores en servicio por considerar la diversidad de componentes, por ejemplo, las diferencias regionales y, los distintos planteamientos curriculares y filosóficos (Krainer, 1998). Mientras tanto, los investigadores en formación del profesorado en general, tanto de formación continua como inicial están de acuerdo que, en la óptica de la formación personal o del desarrollo profesional, el profesor necesita:

- ✓ Desarrollar sus capacidades de intuir, imaginar, levantar hipótesis, reflexionar, analizar, organizar y seleccionar, para una toma de decisión consciente.
- ✓ Desarrollar talentos que posibiliten nuevas formas autónomas de creación, comunicación y expresión en las ciencias, artes y técnicas.
- ✓ Desarrollar actitudes de solidaridad, cooperación y reciprocidad, contribuyendo para el aumento de la conciencia social y,

- ✓ Aprender a entregarse con alegría a la aventura de liberar la imaginación y la inteligencia para crear y construir lo nuevo, y estar siempre dispuesto a reconstruir en la medida en que entiende la relatividad de lo producido.

La capacitación del profesor para el ejercicio de su actividad profesional es un proceso que presenta múltiples facetas y está siempre incompleto (Ponte, 1996). Los entornos de aprendizaje informatizados con ordenadores conectados en red, además de favorecer nuevas dimensiones de interacción (la superación de la linealidad con el hipertexto, la potenciación del desarrollo de la autonomía y de la solidaridad de los involucrados, etc.) para el desarrollo profesional, también promueven el rompimiento de barreras de espacio, tiempo, jerarquía, inteligencia y posibilitan la descentralización del trabajo escolar y los cambios cooperativos, el desarrollo de la inteligencia colectiva y la toma de conciencia individual y social.

Ante lo expuesto, estuvimos interesados en identificar las contribuciones de un entorno virtual para la formación continuada del profesorado de matemáticas en Brasil. Para ello, planteamos el siguiente **problema**:

¿De qué forma un diseño para formación en geometría por Internet, contribuye para el desarrollo crítico del contenido del conocimiento profesional del profesor de matemática? En particular, ¿Qué componentes del conocimiento profesional se desarrollan?

Como una concretización de dicho problema, nos planteamos los siguientes **objetivos**:

(1) Reconocer aspectos del contenido del conocimiento profesional que deben ser considerados en la formación continua a distancia de docentes en matemática, de forma que nos permita justificar y realizar un diseño apropiado para un curso de formación a distancia del profesorado en educación geométrica para alumnos de 11-14 años que contemple diversos aspectos del contenido del conocimiento profesional y tenga en cuenta las exigencias curriculares de un contexto educativo determinado y, analizar la viabilidad real del diseño construido.

(2) Reconocer a priori, mediante análisis de contenido, el valor y factibilidad de una selección y secuenciación de tareas formativas para el desarrollo de dicho curso y, a partir del análisis del discurso en espacios comunicativos diferentes, identificar y analizar contribuciones en el desarrollo de aspectos del contenido del conocimiento profesional en geometría.

El desarrollo profesional docente basado en la WEB objetivado por nosotros (Bairral, Giménez y Togashi, 2001), contempló un serie de estrategias implementadas en un entorno virtual de aprendizaje, es decir, un ambiente interactivo de trabajo donde los profesores interaccionaron con diferentes medios (herramientas y recursos materiales o informáticos) en situaciones de su cotidiano profesional que les propiciaron el desarrollo personal-profesional y la construcción del conocimiento.

La caracterización del conocimiento situado del profesor (Llinares, 1998), la consideración de aspectos afectivos (García Blanco, 1999) con el uso del conocimiento del profesor en las situaciones de enseñanza, su perspectiva profesional y el conocimiento de si mismo (Ponte, 1995; Oliveira, Segurado y Ponte, 1998); nos han permitido plantear los tres aspectos - *geométrico, estratégico-interpretativo y afectivo-actitudinal* - del contenido del conocimiento del profesor que hemos considerado para el trabajo por Internet con vistas al desarrollo profesional docente y según las especificidades del contexto educativo brasileño.

En el aspecto *geométrico* están las significaciones y reflexiones docentes sobre el pensar matemáticamente.

Geométrico
1. *Significaciones:* interpretación y reconocimiento -Conceptos -Terminología -Relación entre conceptos -Procesos matemáticos

Geométrico
2. *Pensar matemáticamente*: comunicación-expresión-razonamiento -Formas de validar resultados -Competencias básicas y procesos de razonamiento -Resolución de problemas -Elementos de Historia de la Ciencia

Como aspectos del conocimiento *estratégico-interpretativo*, hemos considerado las reflexiones sobre aprendizaje, instrucción y procesos interactivos.

Estratégico-Interpretativo		
Aprendizaje	*Instrucción*	*Procesos interactivos*
1. *Nociones matemáticas:* -Planificación y rutinas (enseñanza-aprendizaje) 2. *Diseños de aprendizaje* -Procesos de aprendizaje -Conceptos, procedimientos y actitudes -Análisis de casos -Relaciones sociales y socioculturización -El valor de los ejes transversales	-Finalidad y objetivos -Enlace entre contenidos -Enlace entre otros temas -Representación de los conceptos - Materiales: uso, análisis, elaboración -Entorno de trabajo y cultura en clase -Tareas: concepción, selección, secuenciación -Tareas: presentación, apoyo en la ejecución, reflexión -Actividad -Modelos de trabajo en clase	-Relación entre acción y reflexión -Papel de las interacciones -Papel de las concepciones de los alumnos -Papel de los conocimientos previos -Estrategias de razonamiento -Perspectivas con relación a la capacidad de los alumnos -Comunicación y negociación de significados -Intencionalidad

En el aspecto *afectivo-actitudinal*, están contempladas las actitudes frente al aprendizaje propio y de los alumnos, concientización y socioculturización, flexibilidad, enjuiciamiento, equidad y valores en la enseñanza.

Afectivo-Actitudinal
-El valor de la motivación -Autocontrol -Concientización y realidad -Flexibilidad -Compartir -Actitudes frente al aprendizaje propio y de los alumnos -Reflexión de/sobre lo que piensa-hace -Enjuiciamiento -Trabajo colectivo y colaborativo -Equidad y valores

1.1 Estructuración del contenido en el entorno virtual

El contenido del entorno se estructuró teniendo en cuenta las características de un profesorado con licenciatura en matemáticas, pero con poco experiencia en geometría y en el trabajo por Internet. Así, ante todo han sido propuestos elementos esenciales del currículo de 3º y 4º ciclos de la enseñanza obligatoria en un curso de extensión universitaria para que -a partir de las posibilidades de interacción para la realización de las tareas propuestas- el profesorado pudiese reflexionar y profundizar, en diferentes perspectivas, sobre: un proceso constructivo de enseñanza de la geometría (11-14 años), un énfasis metodológico, el papel que juegan las distintas actividades, la evaluación y la secuenciación de contenido (Fortuny y Giménez, 1998; Murillo, 2001). En esta perspectiva el contenido geométrico ha sido desarrollado en ocho unidades didácticas de objetivos interrelacionados y resumidos en el cuadro siguiente.

Unidad	Título	Objetivo(s) general(es)
1	¡Salga de su área!	Conocer WEB elaborada por un profesor y analizar un planteamiento.
2	Distintos puntos de vista	Reconocer la importancia de la visualización y trabajar elementos de la geometría plana y espacial.
3	Relaciones en el espacio	
4	Construyendo en *Cabrilandia*	Reflexionar sobre el valor de la construcción en el currículo de geometría.
5	Localizando, orientando y situando en el espacio	Conocer diferentes abordajes para el trabajo con ángulos y reconocer la importancia de la orientación.
6	Geometría, arte y repetición	Percibir las isometrías como componente de expresión cultural e integrar en el planteamiento geométrico elementos curriculares integradores.
7	¿Parecido o semejante?	Trabajar la semejanza como un concepto integrador y reflexionar sobre la evaluación.
8	¿Cuándo convencemos en geometría?	Reflexionar sobre modelos de razonamiento en geometría.

Todas las unidades del curso fueron organizadas y estructuradas en forma semejante a un periódico, con seis secciones de objetivos distintos, relacionadas entre sí, y que pueden ser accedidas sin un orden determinado. A continuación sigue la pantalla de apertura de la cuarta unidad del entorno, intitulada *¨Construyendo en Cabrilandia¨*.

2. Consideraciones metodológicas para la investigación.

2.1 El entorno virtual implementado y la comunicación docente establecida

El entorno virtual implementado en nuestra investigación, forma parte de un proyecto[1] para formación continuada del profesorado de educación secundaria en geometría (11-14 años), que fue implementado y desarrollado en el *Campus Virtual* de la Universidad Federal Rural de Rio de Janeiro[2], con carga horaria de cincuenta horas, totalmente a distancia.

Notas al pie[1] Universidad Federal Rural de Rio de Janeiro (Brasil) y Universidad de Barcelona (España).
[2] http://www.ufrrj.br/institutos/ie/geometria/

En nuestra investigación[3], nos planteamos analizar cualitativamente habilidades docentes comunicativas en geometría establecidas y desarrolladas a través de interacciones en un entorno virtual para la formación continua. Utilizamos los navegadores *Netscape* o *Explorer* para acceder al material disponible en red y para el establecimiento del proceso teleinteractivo. La transmisión de mensajes entre los agentes comunicadores fue básicamente de dos tipos: comunicación en tiempo real y en tiempo diferido. En el desarrollo del curso las (tele)interacciones fueron distintas y de diferentes rangos: el profesor-alumno ha podido contactar ***(i)*** al **profesor-formador** para esclarecer dudas relativas a los contenidos geométricos; ***(ii)*** al **técnico** para problemas de conexión o similares; ***(iii)*** acceder a las intervenciones en el **foro de discusión**, y ***(iv)*** a los **propios compañeros** del curso para la realización de tareas y distintas teleinteracciones, lo que constituyó el debate docente colaborativo.

2.2 Obtención de la información para la investigación

La recogida de información en nuestra investigación fue desarrollada tomando diversas fuentes de información para la obtención de los datos a partir de distintas teleinteracciones establecidas entre los profesores y considerando distintos momentos y tareas en el desarrollo del curso (Bairral, 2001).

Como forma de comunicación en *tiempo diferido,* tuvimos las intervenciones por correo electrónico (mensajes personales diversos, envío de archivos adjuntados, formulario de auto-evaluación para cada sección, formulario de inscripción, contrato didáctico de trabajo y cuestionario inicial), las intervenciones en el foro discusión y a través de mensajes del programa ICQ. Como comunicación en *tiempo real*, tuvimos también los mensajes del programa ICQ, la edición de los *chats* (obligatorios y opcionales), una entrevista semi-estructurada y la grabación de un video de clase del profesor.

[3] Investigación subvencionada por CAPES (MEC, Brasil, Proyecto BEX 1855/99-9) y coordinada por el Dr. Joaquin Giménez (UB)

Otro instrumento utilizado para la recogida de datos fue el *diario del formador- investigador*, que juntamente con las informaciones contenidas en las distintas intervenciones - diferidas o en tiempo real – matizó y desarrolló la triangulación de los datos.

2.3 El proceso de análisis

Desde la perspectiva de la semiótica social, sabemos que los sistemas de significados se forman a partir de varias clases de textos y situaciones, en contextos culturalmente significativos (Lemke, 1997). Por lo tanto, consideramos nuestro entorno virtual como una comunidad de discurso profesional docente donde se han producidos distintos intercambios de significados sobre la enseñanza de la geometría.

Para el análisis semántico (van Dijk, 1885, 2000) interpretativo de los textos, desarrollamos tres estudios de caso. El primero, a partir de la información obtenida en el desarrollo del estudio piloto (2000) y los dos siguientes con la información inherente al desarrollo del segundo curso (2001). Para la *reducción de los datos* hemos adoptado los siguientes procedimientos: (1) selección de las intervenciones de los docentes en distintos espacios comunicativos; (2) codificación de elementos característicos en las intervenciones; (3) ejemplificación y análisis de intervenciones matizando objetivos de formación y componentes del contenido del conocimiento profesional; y (4) confrontación y análisis del proceso en función de lo observado.

3. Conclusiones

Las aportaciones conclusivas se hacen según los objetivos planteados y han sido agrupadas y desglosadas como se muestra a continuación.

3.1 Sobre la estructura del entorno

Para el desarrollo de relaciones sociales progresistas en la enseñanza de geometría resulta crucial la apertura de canales de comunicación en los que todos los involucrados utilicen el capital lingüístico y cultural que llevan consigo. Hemos visto que nuestro entorno formativo favoreció y promovió una comunicación entre todos los profesores involucrados.

Sin embargo, no es el uso de las nuevas herramientas que promoverá mejoras en el proceso educativo, sino cómo integrarlas en el currículo y en el escenario educativo y cómo desarrollar un uso adecuado al servicio de determinados enfoques de enseñanza-aprendizaje. La comunicación docente establecida a partir de los distintos espacios comunicativos fue una característica destacable de nuestro diseño. Así, la constitución de una comunidad de discurso colaborativo a través de la comunicación docente y de los procesos interactivos fue un hecho fundamental en el desarrollo profesional de los profesores.

La estructuración de las unidades didácticas en seis secciones interrelacionadas hipertextualmente y enlazadas con los puntos de interactividad, constituyeron una significativa contribución del entorno implementado para el desarrollo de los aspectos del contenido profesional. En efecto, el planteamiento y el desarrollo de la dinámica del curso a partir de las tareas de formación fue un hecho revelador .

Ante todo, resulta importante subrayar que, además de las características comunicativas -similares y distintas- propias de cada espacio, es imprescindible que se establezca una relación de respeto y confianza entre todos los participantes de la comunidad de aprendizaje, de manera que todos los profesores puedan explicitar sus ideas e intercambiar prácticas y realidades educativas diversas sabiendo que los demás compañeros las respetarán y contribuirán con sugerencias y criticas constructivas.

3.2 Sobre los aspectos del contenido del conocimiento profesional

Los docentes que participaron en la investigación nos han mostrado que es posible compartir conocimientos a distancia y aprender significativa y diferenciadamente, con vistas a lograr una práctica docente en matemática comprometida con los cambios sociales. Igualmente, el diseño mostró que es posible identificar acciones docentes críticas en el desarrollo del contenido profesional de los docentes implicados. Asimismo, hemos visto que los distintos aspectos (geométrico, estratégico-interpretativo y afectivo-actitudinal) del contenido del conocimiento profesional integraron las distintas acciones de criticidad y potenciaron el desarrollo del razonamiento crítico en el quehacer docente-geométrico.

La investigación, además de explicitar diferentes significados construidos por los profesores analizados y las diferencias personales-profesionales de los mismos en su desarrollo profesional, nos ha permitido identificar componentes observados en cada intervención del docente y explicitar características de su proceso de razonamiento crítico.

Como aspecto del *contenido del conocimiento profesional geométrico* de los docentes, subrayamos una mayor conciencia y valor de su trabajo geométrico en clase. Con relación al aspecto *estratégico-interpretativo,* verificamos una implicación y discusión de los profesores en los planteamientos propios y su contribución en el planteamiento de los compañeros.

En el aspecto *afectivo-actitudinal* destacamos las actitudes favorables frente al proceso enseñanza-aprendizaje propio y de sus alumnos; recuerdos y reflexión sobre episodios de su historia personal-profesional y su importancia e influencia en la práctica profesional del profesor.

Las teleinteracciones intersubjetivas y el conocimiento profesional docente compartido en el desarrollo de las tareas de formación del entorno nos permitieron identificar un potencial del entorno virtual para integrar, a partir de los intereses personales de los involucrados, elementos externos al entorno (otros libros, otros profesores, enlaces a Webs, participación en eventos, etc.), lo que enriqueció sustancialmente el proceso de desarrollo del contenido profesional de todos los profesores.

3.3 Sobre las contribuciones del entorno a la autonomía profesional

En cuanto a los espacios de discurso en los medios telemáticos, aunque no disponemos de una base metodológica suficientemente desarrollada que favorezca el análisis del discurso en contextos virtuales, la variedad de fuentes de información que utilizamos para conocer lo que piensa y hace el profesor en su quehacer geométrico, la triangulación de la información obtenida y de los esquemas de análisis construidos a lo largo del proceso fue un aspecto metodológico fiable y relevante para investigaciones interesadas en el desarrollo teleinteractivo del contenido del conocimiento profesional de profesores en contextos específicos.

Es importante subrayar también que, a pesar de la ventaja de que toda la información –básicamente escrita- quedó registrada en el ordenador del formador, la creación de un diario por parte del investigador fue imprescindible para que la información no se perdiera, y para que profesor y formador pudiesen tener acceso a sus textos y reflexionasen metacognitivamente sobre los mismos. La posibilidad de comunicación continua con los profesores investigados, favorecida por el entorno virtual, fue otro hecho metodológico importante para que el formador-investigador socializase continuamente a los docentes sus observaciones sobre el discurso.

La realización de la entrevista y la grabación en video de una clase de los profesores investigados constituyó una estrategia metodológica importante de cara a recabar información sobre otros tipos de discursos en el desarrollo de los docentes en el curso, principalmente de aquellos que intervinieron poco. Consideramos que el uso de la entrevista no sólo debe ser un elemento de investigación, sino también metodológico en todo curso de este tipo.

Sin embargo, hay que pensar en desarrollar otras posibilidades, principalmente para países de gran extensión territorial como el caso de Brasil, que no sean solamente la entrevista y el video de clase. Alternativas como la utilización de videoconferencias; animaciones y simulaciones gráficas; diálogos con expertos; el envío y disponibilidad de fragmentos de video del profesor en clase (para analizar metacognitivamente cómo el profesor lleva a cabo una determinada tarea) y el uso de otras herramientas comunicativas, sea en tiempo real o diferido. También consideramos importante que los planteamientos desarrollen recursos informáticos de manera que el formador tenga más información acerca del recorrido virtual del profesor, es decir, enlaces y páginas a las que accedió cada profesor, contactos realizados, etc.

3.4 Sobre los indicios de mejora en el contenido, dificultades y el valor de las tareas

Las tareas favorecieron desequilibrios cognitivos. Es decir, el trabajo a través de Internet y el proceso teleinteractivo establecido y desarrollado a partir de las tareas de formación o de su ¨*metamorfosis hipertextual*¨, es decir, sus cambios o desdoblamientos suministrados y demandados consciente o inconscientemente por los docentes, posibilitó la inserción e integración de teleinteracciones metacognitivas, que han sido continuamente construidas, sostenidas o reconstruidas tomando como referencial teórico-práctico las características distintas de cada contexto en particular. A pesar de lo dicho, hemos de reconocer que las posibilidades de exploración y reflexión de la práctica no son fáciles en un curso de corta duración como el implementado.

El entorno se mostró bien organizado temporalmente. El tiempo de que disponía el profesor para el desarrollo de la tarea en el curso, la posibilidad de desarrollo en clase de la misma (o a partir de ella) y de discusión con el colectivo de los resultados obtenidos constituyeron rasgos importantes en el proceso de desarrollo del contenido del conocimiento profesional a través de interacciones a distancia y una singularidad de la dinámica de trabajo virtual. Este proceso retroalimentativo de activación constante y cada vez más compleja de los procesos cognitivos de los docentes involucrados en el proceso comunicativo, con tiempo y necesidades propias de reflexión (sobre lo que hizo, lo qué ocurrió, sobre las dificultades en el proceso de implementación y de los arreglos necesarios, los futuros cambios, etc.), fueron retos importantes en el desarrollo profesional y que también se han visto potenciados por el entorno virtual implementado.

Se pusieron de manifiesto características, roles e influencias del formador virtual en el control (individual o colectivo) continuo del proceso: el formador planteó preguntas, contrastó puntos de vista, ayudó a los profesores en sus dificultades, organizó y replaneó, informó, contestó los mensajes personales / colectivos, animó, sugirió, estudió e investigó continuamente. Además de estas acciones docentes, el formador actuó a menudo en función de la demanda del profesor, es decir, a pesar de que la tarea era propuesta por el formador, fue el profesor quién ¨*inconscientemente direccionó* ¨ el debate virtual y su continuidad, al reflexionar y plantear preguntas –normalmente inherentes a sus necesidades personales- en el desarrollo de la tarea. En este tipo de entorno, el protagonismo pasa a ser del alumno (en nuestro caso, el profesor), mientras que el formador pasa a asumir otra función: la de ofrecer soporte en el desarrollo individual y/o colectivo en la tarea mientras, por supuesto, también aprende durante el proceso.

3.5 Sobre los momentos claves identificados en el proceso de desarrollo profesional

En cuanto al entorno virtual relacionado con otros contextos, hemos visto que el desarrollo teleinteractivo del contenido del conocimiento profesional de los profesores fue enmarcado por un amplio espectro de acciones y relaciones docentes distintas que se entrelazaron de una manera determinada, y muchas veces sin frontera, en cuatro (micro)contextos interrelacionados e influyentes en el proceso de desarrollo personal-profesional: **(1)** el contexto *práctico-personal*, ligado al conocimiento profesional situado en sus diferentes aspectos (geométrico, estratégico-interpretativo y afectivo-actitudinal); **(2)** el de las *relaciones personales* que se establecen a través de la comunicación, colaboración y procesos teleinteractivos; **(3)** el contexto inherente a la *vida del profesor,* y **(4)** el *propio entorno* virtual y sus elementos constitutivos. En el contexto de la historia vital del profesor influyen y toman parte aquellas acciones que el docente va conociendo, construyendo e incorporando a lo largo de su vida: la colaboración y la ayuda mutua; la colectividad; la complicidad; la atención a la diversidad cultural y de prácticas, a la emotividad y el interés, a la ética y la identidad profesional, a los valores y normas de distintas culturas y a los procesos de socialización.

Sobre los momentos favorecidos por la dinámica de trabajo en el entorno, las teleinteracciones docentes pudieron ser agrupadas en cuatro momentos formativos claves: *(1)* sensibilidad y aceptación previa del nuevo alumno, *(2)* apertura y confianza para negociación docente, *(3)* adaptación crítica y acomodación del conocimiento práctico, y *(4)* colaboración y conciencia hacia la orientación teórica. Estos cuatro momentos formativos y la integración de los contextos anteriormente matizados, nos posibilitaron identificar que en la dinámica de trabajo virtual, el contenido del conocimiento profesional: ***(1)*** se desarrolla con el uso del conocimiento profesional situado en situaciones concretas de la enseñanza, ***(2)*** se construye integrando las características del discurso y los procesos interactivos de cada espacio discursivo; y ***(3)*** es un conocimiento distribuido, es decir, gestionado hipertextual y personalmente por el propio profesor, pudiendo ser socializado continuamente en cada espacio comunicativo del entorno u otro contexto formativo a lo largo del proceso de desarrollo profesional.

Concluyendo, nuestro entorno, a pesar de plantear un curso de características cerradas y limitado en el tiempo, se mostró importante para una actitud de valoración del trabajo docente y despertar en el profesor la atención a la necesidad de invertir constantemente en su carrera. La disponibilidad de otras tareas y sugerencias de trabajos similares (artículos, posibles proyectos etc.) constituyó una singularidad del entorno, permitiendo involucrar al docente en estudios de interés personal en el que el tiempo personal-profesional dedicado a acción y reflexión ha sido significativamente considerado.

Referencias bibliográficas

Bairral, M. A. (2001) ¨Comunicação Docente: Perspectivas para o Desenvolvimento Profissional pela Internet¨. Pátio Revista Pedagógica. Porto Alegre, n. 18, ago./out., p.37-39.

Bairral, M.A.; Giménez, J. y Togashi, E. (2001) ¨Desenvolvimento profissional docente baseado na WEB: perspectivas para a Educação Geométrica¨. Boletim GEPEM. Rio de Janeiro, n. 39, p. 25-36.

Fortuny, J.M. y Gimenez, J. (1998) Teletutorización Interactiva en Matemáticas para Asistencia Hospitalaria. Projecte TIMAH. PIE, Barcelona.

García Blanco, M.M. (1999) Proyecto Docente. Universidad de Sevilla. No publicado.

Krainer, K. (1998) ¨Some considerations on problems and perspectives of inservice mathematics teacher education¨. 8 th International Congress on Mathematical Education: Selected Lectures. Sevilla, julio/1996, p.303-321.

Kuhn, D. (1999) ¨A developmental model of critical thinking¨. Educational Researcher, 28(2), p. 16-26.

Lemke, J. L. (1997) Aprender a hablar ciencia: lenguaje, aprendizaje y valores. Buenos Aires, Paidós.

Llinares, S. (1998) Aprender a enseñar matemáticas en la enseñanza secundaria: relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico En Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, n. 32, p. 117-127.

Murillo, J. (2001) Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la E.S.O. Barcelona, Universidad Autónoma de Barcelona. Tesis Doctoral Inédita.

Oliveira, H.; Segurado, M. I. Y Ponte, J. P. (1998) Desenvolvimento Curricular em Matemática. Portalegre: SPCE.

Ponte, J.P. (1996) ¨Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática¨. En PONTE, J.P. (org.) et al. Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática. Que Formação? Lisboa: SPCE, p.193-211.

Ponte, J.P. (1995) ¨Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva¨. En Blanco Nieto, L. Y Mellado, V. (coords.) La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal. p.187-201.

Smith, J. (1991) Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. Revista de Educación n. 294, p. 275-300.

Van Dijk, T. (comp.) (2000) El discurso como estructura y proceso. Barcelona: Gedisa.

Van Dijk, T. (ed.) (1985) Semantic Discourse Analysis. Handbook os Discourse Analysis. New York: Academic Press, v. 2, p. 103-136.

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA EN TORNO A LAS TÉCNICAS DE DERIVACIÓN EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA[1]

Cecilio Fonseca, *Universidad de Vigo*

Josep Gascón, *U. Autónoma de Barcelona*

RESUMEN:

Con objeto de describir la *organización* (o *praxeología*) *matemática* (OM) en torno a la *derivación de funciones*, tal como se lleva a cabo en Secundaria (S), y para proponer modificaciones de dicha organización fundadas en el análisis didáctico-matemático, se utilizan las nociones de *OM puntual* y *OM local* (Chevallard, 1999). Se muestra que la derivación de funciones en S aparece como una *amalgama de* OM puntuales *aisladas* y *rígidas* en el sentido que se describe en Fonseca y Gascón (2000 y 2002). Se hace un esbozo de una posible *OM local* (minimal) que contiene todas las tareas y las técnicas directamente relacionadas con la derivación de funciones en S. El trabajo finaliza con unas notas breves sobre la organización de un posible *proceso de estudio* en S de dicha OM local. Se enfatiza la necesidad de estructurarlo a partir del planteamiento

[1] Algunas ideas preliminares sobre este tema fueron presentadas en el IV Simposio de la SEIEM (Huelva, septiembre de 2000) dentro de las sesiones del grupo de trabajo DMDC.

sistemático de *cuestiones tecnológicas* relativas al *alcance*, al *coste* y a las *limitaciones de las técnicas de derivación*, así como a sus *relaciones con otros tipos de técnicas*. Dicho proceso de estudio tomará pleno sentido en el seno de la reconstrucción escolar de una OM mucho más amplia en torno a la *variación de funciones*.

1. Algunas notas sobre las organizaciones matemáticas puntuales y locales

Las nociones de *tarea* y *técnica* son primitivas en el estado actual de desarrollo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), son nociones relativas a la institución de referencia **I** y, además, presentan la siguiente dualidad: en **I** sólo puede considerarse como un "tipo de tareas", **T**, aquel para el que se dispone de algún tipo de técnica, τ, con su entorno tecnológico-teórico, **[**θ/Θ**]**, más o menos explícito. Así, por ejemplo, en Secundaria la descomposición en factores primos de números "pequeños" es una *tarea*, pero la de números "grandes" no lo es. Recíprocamente, las técnicas siempre responden a tareas planteables en **I** (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Chevallard, 1999).

Diremos que una *organización* (o *praxeología*) *matemática*, OM = **[**$T/\tau;\theta/\Theta$**]**, es *puntual* (OMP) si está generada por lo que en **I** es considerado como un único *tipo de tareas*, **T** o, dualmente, si está generada por lo que en **I** es considerado como una única técnica τ. Resulta, por tanto, que la noción de OMP es relativa a la **I** y está definida, en principio, a partir del bloque técnico-práctico **[**T/τ**]**. En general las OMP se integran en *OM locales* (OML) para poder dar respuesta satisfactoria a un conjunto de *cuestiones problemáticas* que no se podían resolver completamente en ninguna de las OMP de partida. A lo largo del *proceso de estudio*, que es a la vez un proceso de (*re*)*construcción* de la OML, se va desarrollando un *discurso tecnológico* común que permite *describir*, *interpretar*, *justificar*, *explicar* y *relacionar* las antiguas *técnicas matemáticas*, así como *producir técnicas* "*nuevas*". De hecho, en el paso de un conjunto de OMP a una única OML, se pone en funcionamiento y toma protagonismo el *discurso tecnológico* θ que caracteriza la OML en cuestión. Cuando en una institución determinada **I**, y para un tipo de tareas **T**, se tiende a privilegiar una única técnica **τ(T)** que es considerada en **I** como "la manera evidente e incuestionable de resolver las tareas del tipo **T**", entonces se dificulta el desarrollo de dicha técnica y se frena su integración en OM más amplias. Estas técnicas **τ(T)** suelen asumir un carácter *autotecnológico*, esto es, se considera que no requieren ningún tipo de justificación más allá de la "evidencia" de que funcionan correctamente (Chevallard, 1999).

2. La derivación de funciones en Secundaria

La OM *empírica* en torno a la derivación de funciones, tal como se lleva a cabo en Secundaria, OM(D), no puede ser considerada como una OMP porque contiene diversos tipos de técnicas y de tareas aunque éstas puedan describirse mediante un enunciado formalmente común: *Calcula la derivada de la función f*. En efecto, en S para derivar funciones se apela de forma más o menos explícita a técnicas diferentes (esto es, consideradas diferentes en S). Entre dichas técnicas podemos citar: la *definición* (que comporta calcular el límite del cociente incremental); las técnicas que se obtienen del *álgebra de derivadas* (*regla de la suma*, *del producto*, *del cociente* y *de las funciones potenciales* de exponente natural); la *regla de la cadena* (para derivar funciones compuestas) y la técnica de *derivación logarítmica* para derivar funciones potenciales-exponenciales.

Por otra parte, la citada OM(D) tampoco puede considerarse como una OML porque las diferentes tareas que contiene no están integradas en la práctica que se lleva a cabo en S, las técnicas se presentan bastante independientes entre sí y, sobre todo, no existe un discurso tecnológico unificador que tenga una incidencia efectiva sobre el desarrollo de la práctica matemática. Podríamos decir que OM(D) es una amalgama de OMP rígidas, no integradas y poco desarrolladas, más que una verdadera OML[2].

[2] Hemos dicho que una OML viene caracterizada por un *discurso tecnológico* común a todas las OMP que integra. Podemos adelantar una caracterización más operativa para distinguir las OM *locales* de las OM *puntuales* (en I): una OM *local* debe contener los tipos de tareas, las técnicas, los elementos tecnológicos y todas las relaciones entre dichos componentes que hagan posible llevar a cabo una actividad matemática no sujeta a las restricciones que provoca la rigidez de las OMP (los aspectos de dicha rigidez serán descritos a continuación). Las OML de una I también pueden caracterizarse en términos de los *momentos didácticos* o *dimensiones del proceso de estudio* que se requieren necesariamente para reconstruir (estudiar) OML en I.

Cada una de las citadas OMP presenta ciertas características que hemos descrito en otro lugar (Fonseca y Gascón, 2000 y 2002) y que pueden resumirse en un conjunto de características que hacen referencia a los diferentes aspectos de su rigidez.

(1) Se observa una fuerte invariancia de la nomenclatura (x siempre es la variable independiente e y la variable dependiente) lo que hace presuponer que las técnicas de derivación dependerán de esta nomenclatura. Dado que no se suelen plantear tareas tales como la de derivar la función

$$s = \frac{at^2 + 2t + p^3}{(pt+2)^5}$$

respecto de la variable *t* (ni, mucho menos, la tarea de comparar la derivada respecto de *t* con la derivada respecto de *p*), es previsible que aparezcan graves dificultades cuando las variables no sean *x* e *y*, especialmente en problemas de *modelización*[3].

(2) El "dominio" de las diversas técnicas de derivación en S no incluye la *interpretación del resultado* ni, mucho menos, la *interpretación del proceso*. Aparece únicamente una interpretación local muy estereotipada, limitada a la pendiente de la recta tangente; muy *raramente se interpreta la derivada como la variación de la función*.

(3) Dadas funciones concretas como, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{5}{x^2} \quad y \quad g(x) = \frac{x}{7}$$

En S se suelen derivar como un cociente de funciones en lugar de derivar la primera como una potencia y la segunda como el producto de una constante por una función. Postulamos la *ausencia de dos o más técnicas diferentes* para derivar cada una de estas funciones es una consecuencia de la *ausencia de un cuestionamiento tecnológico* imprescindible para comparar la *eficacia*, la *pertinencia* y el *coste* de las

[3] En este trabajo nos limitamos a describir y completar la OM en torno a la *derivación de funciones*, tal como se lleva a cabo en Secundaria. Es por esta razón que utilizamos la misma nomenclatura que aparece en dicha institución. Pero en el diseño del *proceso de estudio* de esta OM deberán aparecer tareas que comporten una *utilización mucho más flexible de la nomenclatura*.

técnicas potencialmente útiles para llevar a cabo una tarea matemática concreta.

(4) En S se separan escrupulosamente (incluso en "temas" diferentes) las técnicas de derivación de las técnicas de integración. En el momento que aparecen las técnicas para calcular primitivas de ciertos tipos de funciones se supone que las técnicas de derivación ya han sido anteriormente flexibilizadas y que ya son dominadas por los alumnos. No se tiene en cuenta que la *inversión de las técnicas* constituye un *aspecto esencial de su flexibilización*.

(5) Faltan situaciones abiertas que requieran un trabajo de *modelización* utilizando el cálculo de derivadas. En particular, no se trabaja sistemáticamente la interpretación de la derivada como límite de la *Tasa de Variación Media* en situaciones mucho más generales que la clásica del paso de la velocidad media a la velocidad instantánea.

3. Esbozo de una posible OML minimal en torno a la derivación de funciones en Secundaria

Ante todo hemos de preguntarnos si es posible construir una OML que contenga todas las tareas y todas las técnicas de derivación de funciones que existen en la OM empírica de S, OM(D). Se trata de una cuestión abierta que sólo podremos responder de manera constructiva. Para ello vamos a esbozar la estructura y la dinámica interna de una OM que, conteniendo las tareas y las técnicas que aparecen en la OM(D), permita llevar a cabo una actividad matemática no sujeta a las restricciones que provoca la rigidez de las OMP. Lo más razonable es pensar, además, que *no existe una única* OML generada en S por las técnicas de derivación de funciones; pueden existir diferentes OML que, junto a los componentes de OM(D), contenga otras tareas, técnicas y elementos tecnológicos que no aparecen en S[4] aunque podrían aparecer.

[4] Ésta es una de las razones por las que no es posible poner ejemplos "conocidos" de OML; las OML deben ser "reconstruidas" explícitamente con toda su complejidad, porque no suelen aparecer completas en las instituciones escolares y, en caso de que lo estén, tampoco son fácilmente visibles (delimitables) puesto que nunca han sido utilizadas para describir los conocimientos matemáticos. Se trata de la situación contraria a la que se encuentran los "teoremas" y las "definiciones de conceptos" matemáticos que, al haber sido utilizados tradicionalmente por la *epistemología euclidiana* todavía dominante en la "cultura matemática", parecen poseer una realidad objetiva, independiente de la forma de interpretar y describir el conocimiento matemático.

Es muy importante subrayar que, aunque la OML que vamos a esquematizar podría vivir en S, en este trabajo *vamos a diseñar únicamente la OM*, pero *no la Organización Didáctica asociada*. Esto quiere decir que, por el momento, *no pretendemos describir el proceso de estudio* en S de la OML que vamos a esbozar[5].

3.1. Descripción y completación relativa, en S, de la OMP=< τ_1 >

Para describir una posible OML en torno a la derivación de funciones partiremos de una OMP en S: la generada por el cálculo de la derivada de una función polinómica de primer grado (en un punto concreto), mediante la técnica del cálculo del límite de la tasa media de variación de la función en un intervalo, cuando la longitud de éste tiende a cero. Llamaremos τ_1 a esta primera técnica.

¿Qué otras clases de funciones pueden ser derivadas utilizando dicha técnica con un "*coste*" razonable? Esto es, cuáles son los problemas de derivación que forman parte de esta OMP en S? Esta pregunta requiere, en primera instancia, una respuesta fundamentada en los datos empíricos. Una revisión de los libros de texto más utilizados en S muestra que sólo unas pocas clases de funciones son derivadas utilizando τ_1. Dichas clases son, además de las funciones polinómicas de primer grado, las siguientes:

(a) Las polinómicas de segundo grado y algunas de tercer grado como, por ejemplo:

$$h(x) = x^2 - 6x + 8 \quad \text{y} \quad i(x) = x^3 - 5$$

(b) Algunas funciones racionales sencillas como, por ejemplo:

$$j(x) = \frac{5}{2x+3}$$

[5] El diseño y experimentación de un proceso de estudio de una OM en torno a la *variación de funciones* (que contiene ampliamente a la OML en torno a las técnicas de derivación que vamos a esbozar) es uno de los objetivos principales de la investigación de la que forma parte este trabajo.

(c) Y, por último, algunas funciones irracionales sencillas como, por ejemplo:

$$k(x) = \sqrt{x+2}$$

A fin de *flexibilizar* la técnica τ_1, lo que debería permitir desarrollarla y relacionarla con otras técnicas (cosa que raramente se realiza en S), planteamos en este momento *cuestiones tecnológicas* relativas a τ_1: ¿Para qué tipo de funciones τ_1 resulta demasiado *costosa* (en términos de esfuerzo, tiempo y posibilidad de cometer errores)? ¿Cuál es, en definitiva, el *alcance* y las *limitaciones* de τ_1? ¿Es posible modificar ligeramente τ_1 de manera que se amplíe el campo de problemas al que es aplicable? ¿Qué modificaciones son necesarias?

El primer tipo de modificación que puede proponerse es el relacionado con la *dependencia de la nomenclatura* (y, en general, de los *objetos ostensivos* que intervienen). El trabajo técnico rutinizado con τ_1 para obtener la derivada de una función en puntos concretos, hace emerger la siguiente cuestión tecnológica: ¿es posible calcular con τ_1, *de una vez por todas*, la derivada de una función en un punto cualquiera? Tecnológicamente aparece la noción de *función derivada*; técnicamente se trata de un cambio de nomenclatura: allí donde antes poníamos un punto concreto $x = 2$ ó $x = -1$, ahora pondremos $x = a$ ó, simplemente, "x".

A partir de este momento surge la técnica τ_{11}, obtenida variando τ_1 en la forma indicada; se trata de una técnica que permite calcular la *función derivada* de determinadas funciones concretas. A medida que se continúa trabajando τ_{11} aparece una segunda cuestión tecnológica: ¿es posible calcular con τ_{11}, *de una vez por todas*, la función derivada de todas las funciones de una clase como, por ejemplo, las funciones lineales (o cuadráticas)? Tecnológicamente aparecerán las primeras *fórmulas de derivación*; técnicamente se trata, de nuevo, de eliminar otro aspecto de la *dependencia de la nomenclatura*: allí donde antes poníamos una función concreta $l(x) = x^2 - 6x + 8$ ó $m(x) = x^3 - 5$, ahora pondremos una función cualquiera (o un modelo algebraico) de las funciones de esa clase: $n(x) = ax^2 + bx + c$ ó $p(x) = ax^3 + b$.

Así, el *trabajo de la técnica* (Bosch y Gascón, 1991, 1992 y 1994) se manifiesta una vez más como un trabajo “creativo”, esto es, *productor de nuevas técnicas* y hasta de técnicas que permiten resolver cuestiones planteadas a nivel *tecnológico* respecto de la técnica inicial. En concreto, con la $\square_{11}$ modificada se obtienen las fórmulas siguientes:

$$D(a) = 0;\quad D(ax+b) = a;\quad D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b;\quad D(ax^3) = 3ax^2$$

$$D\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{\square a}{(ax+b)^2}$$

$$D\left(\sqrt{ax+b}\right) = \frac{a}{a\sqrt{ax+b}}$$

Denominaremos $\square_{12}$ a la técnica que consiste en aplicar estas fórmulas para obtener, sin necesidad de calcular un límite en cada caso, la función derivada de funciones pertenecientes a determinadas clases. Si ahora intentamos responder una de las cuestiones anteriores: ¿Cuál es el *alcance* (o *dominio de validez*) y las *limitaciones* de $\square_1$, incluyendo sus variaciones $\square_{11}$ y $\square_{12}$?, nos encontramos con que $\square_{11}$ resulta *demasiado costosa* para derivar, por ejemplo, la función:

$$f(x) = 5x^3 + 7x^2 \,\square\, \sqrt{6x+x}$$

pero $\square_{12}$ permitiría resolver el problema con un *coste razonable* si pudiésemos relacionar la derivada de la suma de dos o más funciones con las derivadas de las funciones sumandos. Aparece así la posibilidad de que la técnica $\square_1$ aumente extraordinariamente su *alcance* y surge, de manera natural, una tercera cuestión tecnológica: ¿la técnica $\square_{11}$ permite relacionar la derivada de la función suma con las derivadas de las funciones sumandos?

La respuesta es positiva obteniéndose un resultado “tecnológico” (en el sentido que será utilizado para *producir* nuevas técnicas).

$$D(f+g) = D(f) + D(g)$$

En efecto, combinando este resultado tecnológico y la técnica $\square_{12}$, obtenemos una nueva técnica que denominaremos $\square_{13}$ que permite resolver la tarea conflictiva anterior. Por lo tanto campo de problemas continúa ampliándose.

El "coste" de la técnica $\square_{11}$ aumenta muy rápidamente cuando se trata de derivar funciones que son producto de otras funciones como, por ejemplo:

$$g(x) = (x^2 - 4x)^2; \quad h(x) = (x^4 + 2x + 7)(2\mathrm{x} + x^5)\ ; \quad \text{o incluso} \quad j(x) = x^9$$

Necesitamos técnicas más potentes y eficaces para disminuir dicho coste. En principio tenemos dos caminos posibles para generar las técnicas que precisamos. El primer camino consiste en utilizar $\square_{11}$ para obtener una relación entre la derivada de la función producto y las derivadas de las funciones factores. Se obtiene así la *regla del producto*:

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$$

que, de manera análoga a como sucedía con la *regla de la suma*, genera una nueva técnica $\square_{14}$ que aumenta la potencia de la técnica $\square_{1}$ porque permite calcular las derivadas de productos de funciones siempre y cuando dispongamos de fórmulas para derivar las funciones que juegan el papel de factores:

$$\mathrm{D}((x^2 - 4x)(x^2 - 4x)) = 2(x^2 - 4x)(2x - 4)$$

$$\mathrm{D}((x^4 + 2x + 7)(2\mathrm{x} + x^5)) = (x^4 + 2x + 7)(2 + 5\,x^4) + (4\,x^3 + 2)(2\mathrm{x} + x^5)$$

$$\mathrm{D}(x^9) = x\mathrm{D}(x^8) + x^8 = x^2\,\mathrm{D}(x^7) + 2x^8 = \ldots = x^8\,\mathrm{D}(x) + 8x^8 = 9x^8$$

$$D((5x^3 \square 7x^2)(\sqrt{4x+2})) = (5x^3 \square 7x^2) \cdot D(\sqrt{4x+2}) + D(5x^3 \square 7x^2) \cdot \sqrt{4x+2}$$

$$D\left((2x-5x^3+x^7)\left(\frac{1}{3x-5}\right)\right)=(2x-5x^3+x^7)\cdot D\left(\frac{1}{3x+5}\right)+D(2x-5x^3+x^7)\left(\frac{1}{3x-5}\right)$$

Podemos decir, en resumen, que el tipo de funciones tales que el cálculo de su derivada es una tarea que forma parte de la OMP = **<** τ_1 **>** generada en S por la técnica τ_1 contiene, como mínimo, todas las funciones que pueden obtenerse como suma o producto de un número limitado de funciones polinómicas de grado "pequeño" (no mayor que 3) y funciones racionales e irracionales "sencillas" tales como las descritas anteriormente.

Las técnicas obtenidas en S como variaciones limitadas de τ_1 y que, por tanto, consideramos que forman parte de la OMP = **<** τ_1 **>,** continúan presentando graves limitaciones (esto es, un *coste excesivo*) incluso para derivar funciones tales como:

$$k(x) = (x^3 + x + 5)^{10}$$

y todavía más graves para realizar la tarea de derivar funciones potenciales de exponente no natural como, por ejemplo:

$$l(x)=\frac{6}{\left(x^4+9\right)^5} \qquad\qquad m(x)=\sqrt[3]{(x-2)^8}$$

3.2. Integración de la OMP = < τ_1 > en una OML minimal que podría existir en Secundaria

Las técnicas de **<** τ_1 **>** únicamente son "eficaces" (en el sentido de verdaderamente "*económicas*" y "*fiables*") para derivar el producto de unas pocas funciones que, además, han de ser elementales. Existe un desarrollo de la técnica que es mucho más traumático pero tiene mucho mayor alcance. Dicho desarrollo parte de la constatación de la asimetría entre la regla para derivar una suma de funciones y la regla para derivar un producto. Para eliminar la dificultad del producto de funciones, podemos convertirlo en una suma tomando *logaritmos neperianos* antes de intentar calcular la función derivada[6]:

$$L(g(x)) = 2\,L(x^2 - 4x) \;\Rightarrow\; L'(g(x)) = 2\,L'(x^2 - 4x)$$

$$L\,(h(x)) = L(x^4+2x+7) + L\,(2x + x^5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L'(h(x)) = L'(x^4 + 2x+ 7) + L'(2x + x^5)$$

$$L\,(j(x)) = 9\,L(x) \;\Rightarrow\; L'(j(x)) = 9L'(x)$$

De esta forma no sólo disminuye el coste de derivar un producto de funciones sino también el de derivar cualquier *función potencial* (a condición de que sepamos calcular la derivada del logaritmo neperiano de una función) como, por ejemplo:

$$L(l(x) = L(6(x^4+9)^{-5}) = L(6) - 5L(x^4+9) \Rightarrow L'(l(x) = 0 - 5L'(x^4+9)$$

$$L(m(x)) = L\left((x-2)^{\frac{8}{3}}\right) = \frac{8}{3}L(x-2) \Rightarrow L'(m(x)) = \frac{8}{3}L'(x-2)$$

La nueva dificultad está relacionada con el cálculo de la derivada del logaritmo neperiano de una función y abarca tres niveles de generalidad:

(i) ¿Cómo se relaciona la derivada de una función compuesta $f(x) = v(u(x))$ con las derivadas de las funciones componentes $v(y)$ y $u(x)$?

(ii) ¿Cómo calcular la derivada del logaritmo neperiano $L(f(x))$ de una función $f(x)$ cualquiera?

(iii) Y, en particular, ¿cuál es la función derivada de la función $L(x)$?

[6] Esta técnica existe en la Enseñanza Secundaria (De Guzman y otros, 1988, p. 239). Nunca se plantea, sin embargo, la *cuestión tecnológica* siguiente: ¿Es correcto tomar el logaritmo de funciones cualesquiera, cuyo signo desconocemos, para simplificar el cálculo de derivadas o para justificar ciertas reglas de derivación? ¿En qué casos se puede resolver el problema cambiando $L(f)$ por $L(|f|)$? Dado que estas manipulaciones se hacen con la intención de derivar $L(|f|)$, ¿qué sucede en los puntos x en los que $f(x)=0$?

La respuesta a la pregunta **(i)** la proporciona la *regla de la cadena*, que llamaremos τ_2:

$$f(x) = v(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Esta regla puede utilizarse directamente como *técnica* o bien puede jugar un papel *tecnológico* (en el sentido de productor de nuevas técnicas). Así, una vez hemos obtenido, aplicando la técnica τ_{11}, la función derivada de la función

$$f(x) = L(x)$$

$$D(L(x)) = L'(x) = \frac{1}{x}$$

y haber respondido a la pregunta **(iii)**, podemos utilizar "tecnológicamente" la regla de la cadena para obtener la *regla de derivación del logaritmo neperiano* de una función derivable cualquiera, con lo que responderemos la pregunta **(ii)**:

$$f(x) = L(u(x)) \Rightarrow D(f(x)) = L'(u(x)) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Denominaremos τ_3 a esta nueva técnica cuyo *dominio de validez* es enorme (incluye todas las funciones potenciales –no sólo las de exponente entero– y, como veremos, puede extenderse a las exponenciales). Su eficacia para calcular la derivada de funciones potenciales continúa siendo, sin embargo, limitada. Dada, por ejemplo:

$$f(x) = (x^4 + 2x + 2)^8$$

cuya derivación mediante la regla del producto presenta un *coste excesivo*, la nueva técnica τ_3 simplifica ligeramente los cálculos (aunque el coste *no es mínimo*):

$$f(x) = (x^4 + 2x + 2)^8 \Rightarrow L(f(x)) = 8\, L(x^4 + 2x + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'(f(x)) = 8\, L'(x^4 + 2x + 2) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 8 \cdot \frac{4x^3+2}{x^4+2x+2} \Rightarrow f'(x) = 8 \cdot (x^4+2x+2)^8 \cdot \frac{4x^3+2}{x^4+2x+2}$$

análogamente, la técnica τ_3 permite calcular las funciones derivadas de las funciones potenciales siguientes, aunque con un *coste no minimal*:

$$l(x) = \frac{6}{\left(x^4+9\right)^5} \qquad\qquad m(x) = \sqrt[3]{\left(x-2\right)^8}$$

Tenemos, en resumen, una OM que contiene ampliamente la OMP de la *derivación de sumas y productos de funciones elementales*:

$$\underline{<\tau_1>} \subset \underline{<\tau_1, \tau_2, \tau_3>}$$

3.3. Completación relativa de la OML minimal generada por $<\tau_1, \tau_2, \tau_3>$

Hemos visto que la regla de la cadena, τ_2, utilizada directamente como técnica, permite calcular la derivada de las funciones potenciales de exponente entero (porque pueden ser interpretadas como funciones compuestas) y, también, las de exponente real no entero. Pero la complejidad de los cálculos y, sobre todo, la necesaria identificación de las funciones componentes hace aumentar excesivamente el "*coste*":

$$f(x) = v(u(x)) = (x^4 + 2x + 2)^8$$

$$u(x) = x^4 + 2x + 2 = y \Rightarrow u'(x) = 4x^3 + 2$$

$$v(y) = y^8 \Rightarrow v'(y) = 8\,y^7$$

$$f'(x) = v'(u(x))\,u'(x) = 8(x^4 + 2x + 2)^7\,(4x^3 + 2)$$

Cuando el exponente no es un número natural, la técnica τ_3 permite, como ya hemos dicho, calcular la función derivada pero su *coste no es minimal*:

$$m(x) = \sqrt[3]{(x-2)^8}$$

$$L(m(x)) = \frac{8}{3} \cdot L(x-2) \Rightarrow \frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \Rightarrow m'(x) = \frac{8}{3} \cdot (x-2)^{\frac{8}{3}-1}$$

La rutinización de τ_3 con funciones potenciales (de exponente real cualquiera) sugiere una *fórmula de derivación*, que llamaremos τ_{31}, mucho más directa y sencilla para derivar esa clase de funciones.

$$f(x) = (u(x))^r \Rightarrow f'(x) = r(u(x))^{r-1}$$

En este punto se empieza a poner de manifiesto la *potencia tecnológica* de τ_3 como generadora y justificadora de nuevas técnicas de derivación de funciones. Así, por ejemplo, τ_3 permite *justificar* de manera muy sencilla las reglas de derivación del producto y del cociente de funciones:

$$D(L(f \cdot g)) = D(L(f)) + D(L(g)) \Rightarrow$$

$$\frac{D(f \cdot g)}{f \cdot g} = \frac{D(f)}{f} + \frac{D(g)}{g} \Rightarrow D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$$

$$D\left(L\left(\frac{f}{g}\right)\right) = D(L(f)) - D(L(g)) \Rightarrow \frac{D\left(\frac{f}{g}\right)}{\frac{f}{g}} = \frac{D(f)}{f} - \frac{D(g)}{g} \Rightarrow D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot D(f) - f \cdot D(g)}{g^2}$$

Y, además, permite *generar nuevas técnicas* útiles para derivar nuevas clases de funciones como, por ejemplo, la clase de funciones que se expresan como producto:

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$$

Tomando logaritmos neperianos y derivando en los dos miembros se obtiene la fórmula:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \frac{f'_2(x)}{f_2(x)} + \ldots + \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} \right)$$

que consideraremos como la técnica τ_{32}. Esta técnica puede ser muy útil para derivar funciones del tipo:

$$f(x) = \sqrt{5x^4 - 7x^2} \cdot (3x^5 + 6x^4 - x^2 + x) \cdot \sqrt[3]{2x^6 - x^3 + x - 1}$$

que puede generalizarse si aparecen factores en el denominador de la función que se quiere derivar:

$$f(x) = \frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_m(x)}$$

sin más que añadir algunos términos a la fórmula anterior:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \frac{f'_2(x)}{f_2(x)} + \ldots + \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} - \frac{g'_1(x)}{g_1(x)} - \frac{g'_2(x)}{g_2(x)} - \ldots - \frac{g'_m(x)}{g_m(x)} \right)$$

Llegados a este punto en el desarrollo de la OM se plantea una cuestión tecnológica crucial: ¿el *alcance* o *ámbito de validez* de la técnica τ_3 se circunscribe a las *funciones potenciales*, esto es, a funciones derivables elevadas a un exponente real cualquiera? ¿Es posible utilizar una variante de τ_3 para derivar funciones *exponenciales*?

Dado que la técnica τ_3 se ha obtenido a partir de la regla de la cadena y de la derivada de la función $y = L(x)$ y dado que la función exponencial $y = e^x$ es la inversa de dicha función, parece lógico pensar que τ_3 será útil para derivar funciones exponenciales y, en efecto, aplicando τ_3 se obtiene:

$$D(L(e^x)) = D(x) = 1 \Rightarrow \frac{D(e^x)}{e^x} = 1 \Rightarrow D(e^x) = e^x$$

Surge, de esta forma, una nueva variación de la técnica τ_3, que llamaremos τ_{33} aplicable a las *funciones exponenciales* que tengan por exponente una función $g(x)$ derivable, esto es, $f(x) = b^{g(x)}$.

$$D(L(f(x)) = D(g(x)\cdot L(b)) = L(b)\cdot D(g(x)) \Rightarrow f'(x) = b^{g(x)}\cdot L(b)\cdot g'(x)$$

ya sea aplicando directamente la fórmula o bien aplicando, paso a paso, la técnica τ_{33}.

El desarrollo de esta técnica nos lleva, de manera natural, a las funciones *exponenciales-potenciales* tales como:

$$f(x) = h(x)^{g(x)}$$

Esta técnica que denominaremos τ_{34} se llama, a veces, "método de *derivación logorítmica*". Tenemos, en resumen, una *OML minimal*[7] en torno a las técnicas de derivación de funciones en Secundaria que está generada por las técnicas τ_1, τ_2 y τ_3 junto con sus variaciones τ_{11}, τ_{12}, τ_{13}, τ_{31}, τ_{32}, τ_{33} y τ_{34}.

4. Algunas notas sobre el proceso de estudio en S de la OML = < τ_1, τ_2, τ_3 >

4.1. Una forma empezar a "*independizar*" *las técnicas de derivación de la nomenclatura* habitual sería interpretando una parábola como el conjunto de puntos del plano sobre los que se anula una función de dos variables. Podría continuarse considerando otras muchas gráficas de funciones como el conjunto de ceros de otras funciones de dos variables. Podría introducirse aquí la técnica de la *derivación implícita* e interpretar las derivadas parciales en un punto respecto a cada una de las dos variables.

[7] Afirmamos que se trata de una OM *local* porque postulamos que su estructura y su dinámica interna (tal como ha sido esbozada más arriba) permitirá llevar a cabo una actividad matemática no sujeta a las restricciones características de la rigidez típica de las OMP. Afirmamos, asimismo, que se trata de una OML *minimal* porque no parece que sea posible construir otra OML que estando contenida en ella contenga estrictamente todas las tareas y las técnicas de derivación que aparecen en S. En este punto sería preciso describir detalladamente la tecnología θ que la caracteriza como OML.

4.2. A fin de empezar a tomar en consideración la *interpretación del resultado* obtenido al aplicar una técnica de derivación como un aspecto importante del dominio de dicha técnica, es imprescindible considerar las expresiones analíticas de las funciones como *modelos matemáticos de situaciones* que pueden ser "*extramatemáticas*" (económicas, físicas, biológicas, de ingeniería, químicas, ...) pero que también pueden ser situaciones "*intramatemáticas*" (aritméticas, geométricas, probabilísticas, ...). Postulamos la OM en torno al estudio de la *variación de funciones* (dentro de la cual tomará sentido la OML en torno al cálculo de derivadas que hemos esbozado aquí) se construirá a partir de un proceso de modelización.

4.3. Para que el proceso de estudio tenga continuidad y no se rompa en actividades atomizadas deben plantearse, como uno de los objetivos principales del estudio, abordar *cuestiones tecnológicas* del tipo siguiente: de entre las diferentes técnicas de derivación aplicables a cada una de estas funciones, ¿cuál será la mejor en cada caso? (la más *económica*, la más *segura*, la *mejor justificada*).

Otro tipo de tareas, relacionado con el cuestionamiento tecnológico de las técnicas, consiste en proponer que el estudiante derive una función mediante dos (o más) técnicas diferentes y que a continuación compare (con determinados criterios) ambos procesos y ambos resultados. Así, por ejemplo, se le podría proponer que derivara la inversa de la función:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{4x + 5}$$

mediante dos técnicas diferentes. Ya sea calculando previamente la función inversa y después derivándola, o bien utilizando (más o menos implícitamente) el teorema de la función inversa. Esto nos llevaría a plantear *cuestiones tecnológicas relativas al alcance y las limitaciones de esta técnica* (¿para qué tipos de funciones podemos aplicar esta técnica?, ¿porqué no se puede utilizar en algunos casos?) y a *relacionar las técnicas de derivación con otras técnicas* tales como la que permite obtener la inversa local, la que sirve para caracterizar las funciones inyectivas, la que relaciona las gráficas de una función y con la de su inversa, la que relaciona la gráfica de una función con la gráfica de la función derivada, etc.

4.4. ¿En qué casos una técnica de derivación es *invertible* directamente para obtener una técnica útil para calcular primitivas? ¿Cómo se pueden caracterizar, por ejemplo, la clase de *funciones que tienen como derivada una función racional*? ¿Y las funciones racionales que son la derivada de una función "elemental"? ¿Cómo podríamos utilizar esta caracterización como técnica para calcular primitivas de cierto tipo de funciones?.

Referencias bibliográficas

Bosch, M. y Gascón, J. (1991): Prácticas en matemáticas: el trabajo de la técnica, comunicación presentada en el "*Tercer simposio internacional sobre Investigación en Educación Matemática*", Valencia.

Bosch, M. y Gascón, J. (1992): Una nova activitat docent: les pràctiques a la llicenciatura de matemàtiques, Actes de les Jornades celebrades a Bellaterra, abril de 1992 sobre *L'Autònoma i la innovació docent*, pp. 153-160.

Bosch, M. y Gascón, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.

Chevallard, Y., Bosch, M. Y Gascón, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

De Guzmán, M. y Otros, (1988): *Matemáticas. Bachillerato 3*, Anaya: Madrid.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las organizaciones didácticas, *XIV Jornadas del SIIDM*, Cangas do Morrazo, abril del 2000. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino.htm

Fonseca, C. y Gascón, J. (2002): Ausencia de Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).

LOS MAPAS CONCEPTUALES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN

Eduardo Galán, Ramón Granell y Pedro Huerta,
Universitat de Valencia

RESUMEN:

Este trabajo tiene por objeto mostrar los avances de un proyecto de investigación más amplio que se encuentra en la fase experimental. Se discute la noción de mapa conceptual y se reinterpreta desde las matemáticas, se revisa el estado de la investigación sobre esta herramienta y sus usos para la investigación en Educación Matemática y se expone, finalmente, la fase experimental del proyecto, haciendo hincapié en los participantes y en los objetivos. Se incluye un conjunto abundante de referencias que dan cuenta de los mapas conceptuales en la investigación, en contextos diferentes.

ABSTRACT:

In this report, we want to show some issues related to a wider research project that now is in experimental phase. We discuss the notion of concept map, mainly in mathematics context, we review the state of the research about this tool and their uses to research in Mathematics Education and, finally, we expose the experimental phase of our project in that is particular to students and objectives. We also show, at the end of his work, an exhaustive set of references about research in concept maps in several contexts.

0. Introducción

El trabajo que presentamos aquí constituye una parte de los primeros resultados alcanzados en nuestro proyecto de investigación[1] que tiene como objetivo principal estudiar el potencial de la herramienta conceptual conocida como mapas conceptuales para la investigación en Educación Matemática.

Los mapas conceptuales han sido investigados desde diferentes puntos de vista, principalmente se ha explorado su potencial como herramienta para el diseño y desarrollo de una enseñanza que facilite el aprendizaje significativo y como herramienta para la evaluación de los estudiantes. Hoy, no es extraño ver mapas conceptuales que dan cuenta de una lección, de una estructura conceptual particular o de una idea estructurada, lo que nos hace pensar en que el interés por esta herramienta va a ir en aumento. Además, con la implantación cada vez mayor de las nuevas tecnologías en la enseñanza, el interés de los mapas conceptuales como organizador de una estructura conceptual deberá ir en aumento con los años (Fisher, K.; Wandersee, J.; Wideman, G. 2000). Pero, estos usos de los mapas conceptuales y este interés no se manifiestan claramente en nuestra área aunque, no obstante, se están dedicando algunos esfuerzos en investigar su potencial (Huerta, 1995, 1997, 1998, 1999; Casas, 2001).

[1] Proyecto I+D BSO2000-1418, de tres años de duración, financiado por el Ministerio de Educación Cultura y Deporte

En este trabajo lo que pretendemos es centrar la noción de mapa conceptual de matemáticas, mostrar aspectos de la investigación sobre esta herramienta, haciendo hincapié en lo que es particular de la Educación Matemática, señalar lo que sabemos y lo que no sabemos hasta ahora, y refirir finalmente el estado actual de nuestro proyecto investigación.

1. Los mapas conceptuales. Usos, intenciones y formas de los mapas conceptuales.

Formalmente, un mapa conceptual es un grafo formado por nodos y líneas o links con etiquetas. Los nodos se corresponden con términos importantes (substituyendo a los conceptos) en un dominio. Las líneas o links denotan la relación entre un par de conceptos (nodos). La etiqueta con la que se distingue la relación nos dice cómo están relacionados esos conceptos. La combinación de dos nodos y una línea con etiqueta se le llama proposición[2] (Ruiz-Primo, 2000). Esta definición se aleja de la original en la que mapa conceptual se refiere a una técnica de representación gráfica o a un recurso esquemático que representa un conjunto de significados incluido en una estructura de proposiciones (Novak y Gowing, 1988).

La expresión mapa conceptual se presenta en la actualidad con una gran variedad de significados y usos, lo que en muchos casos lo hace irreconocible, hasta el punto que se han descrito más de 120 variaciones en la manera de concebirlos y en las intenciones a las que sirve. Esto, dificulta cualquier intento de dar una definición de mapa conceptual que englobe a todas ellas. Así, en una línea parecida a los mapas conceptuales se pueden encontrar otras técnicas de representación gráfica del conocimiento como los mapas mentales (Buzan, 1996) y las redes semánticas (Fisher, 1990). También, los WebMaps o mapas araña, los Kmaps o mapas de conocimiento (Schvaneveldt, 1990) y los organizadores gráficos (Beissner, Jonassen y Grabowski, 1993), etc... Todos ellos comparten la intención de representar gráficamente el conocimiento y su organización.

[2] Generalmente, se considera que una proposición es la unidad básica de significado en un mapa conceptual y la unidad más pequeña que puede usarse para juzgar la validez de las relaciones trazadas entre dos conceptos.

Para nosotros un mapa conceptual de matemáticas es un mapa conceptual como lo define Ruiz-Primo (2000) en el que lo que se representa son conceptos matemáticos y relaciones entre conceptos matemáticos que dan lugar a proposiciones matemáticas. Dichas relaciones pueden servir tanto para definir el concepto matemático en su relación con otro, como para establecer proposiciones entre conceptos susceptibles de ser demostradas o probadas. El usuario del mapa decide entre los signos disponibles en el SMS (Puig, 1997) en el que es competente qué signos usará para representar los conceptos y las relaciones entre los conceptos. Si se consideran estratos en la competencia de un determinado SMS, pueden entonces considerarse diferentes estratos en la representación por mapas conceptuales de una determinada estructura matemática. Este supuesto nos conduce a pensar en la multidimensionalidad de la representación de una estructura conceptual de matemáticas por mapas conceptuales.

Por otra parte, la pretensión de los mapas conceptuales es hacer que algo que está dentro de la mente de las personas pueda ser representado fuera de ella. Lo que se representa es algunos aspectos importantes del conocimiento proposicional (también llamado declarativo) de un estudiante en un dominio de conocimiento (Ruiz-Primo, 2000) y la forma de hacerlo es mediante redes estructurales con la esperanza de que exista semejanza entre la representación externa (el mapa conceptual) y la representación interna (estructura cognitiva) (Hasemann y Mansfield, 1995). Así que se piensa que la construcción de un mapa conceptual no sólo evalúa el contenido de la memoria declarativa de un estudiante sino que además la organización de los conceptos en la memoria declarativa (McClure, 2001)

En una mapa conceptual se ha de prestar atención prioritaria a la representación de las relaciones entre conceptos, los links, las cuales son fundamentales para poder identificar la estructura cognitiva de los estudiantes, ya que los conceptos y las relaciones entre conceptos tienen significados diferentes según los esquemas individuales existentes en cada persona. Pueden ser jerárquicos o a-jerárquicos.

La jerarquía puede visualizarse en el formato que se usa para la construcción del mapa conceptual (los llamados mapas jerárquicos o mapas paraguas), aunque otras veces la jerarquía está presente en las relaciones que se establecen entre los conceptos, de manera que las etiquetas que se usan en los links entre los conceptos implican una relación jerárquica entre dichos conceptos. Así que, podemos decir que el formato del mapa no implica necesariamente una relación jerárquica entre los conceptos, a menos que la supuesta jerarquía se haga explícita con la inclusión del link apropiado. Al revés, un mapa sin aspecto jerárquico no implica necesariamente que no exista jerarquía entre los conceptos, es posible que la etiqueta que dota de significado a un link manifieste explícitamente una jerarquía.

En investigaciones anteriores (Corberán y otros, 1999) ya clasificamos los usos más habituales de los mapas conceptuales, aunque aquí el que nos interesa es el uso para la investigación en Educación Matemática

Debe tenerse presente que un mapa conceptual responde no sólo a la estructura conceptual a la que trata de representar sino que, también, a las intenciones que tiene el que lo construye al realizar esa representación. No siempre pueden verse mapas conceptuales que dan cuente de una estructura conceptual de un determinado tema. Así, hay mapas conceptuales (por ejemplo, Corberán, 1996) en el que la autora pretende no sólo describir y organizar una estructura conceptual sino que, además, mostrar procedimientos de medida del área y su relación con la estructura conceptual representada. El que presentan Sainz y Figueras (1999), basado en el de Corberán, y al que la autora llama red conceptual, tiene una clara intención de representar una posible organización de la enseñanza del volumen sin que se representen, explícitamente, conceptos matemáticos sino procedimentos atados a propiedades del volumen de sólidos. Pueden verse también mapas conceptuales en el que la estructura representada no responde a un tema concreto de matemáticas sino a un análisis de la estructura de los problemas de probabilidad escolares (Huerta, 2002) y en el que el autor no pretende sino hacer visual dicha estructura usando términos que no responden, al menos directamente, a conceptos matemáticos. Son mapas conceptuales que parecen tener la vocación de organizadores de otras estructuras. En otras ocasiones, los mapas conceptuales describen una estructura no conceptual sino lógica en la que habría que considerar o incluir el concepto sobre el que se demanda un mapa conceptual. Este manera de actuar puede verse en los ejemplos que se citan (Corberán y otros, 1999), en el que los autores, estudiantes de la Facultad de Matemáticas, sitúan el concepto de derivada en la lógica de su aprendizaje dentro de la licenciatura de matemáticas. El concepto pertenece a una estructura más amplia y se relaciona con otras estructuras también más amplias (derivabilidad, diferenciabilidad, continuidad, etc).

1.1. La investigación sobre mapas conceptuales o que usan los mapas conceptuales

La historia de los mapas conceptuales como herramienta de investigación y evaluación tiene escasamente 20 años de antigüedad. El uso creciente de esta herramienta por profesores e investigadores ha determinado que algunas investigaciones se hayan dirigido a explorar y obtener evidencias sobre la fiabilidad y validez de esta herramienta (Xiufeng y Hinchey, 1993; Markham, Mintzes y Jones, 1994), principalmente en el contexto de la enseñanza de las ciencias. El volumen de investigaciones que han usado los mapas conceptuales como herramientas de investigación o de evaluación en matemáticas (Mansfield y Happs, 1989; Hasemann, 1989; Gail y Vesilind, 1993; Huerta, 1995, 1997, 1999; Raymond, 1997; Williams, 1998; Doerr y Browers, 1999; McClure, 2001, por ejemplo) no es comparable con el de las que se contextualizan en ciencias experimentales, pues, ya en la última década del siglo XX, Al-Kunifed y Wandersee (1990) publicaron una lista de cien referencias relacionadas con los mapas conceptuales.

En términos generales, las investigaciones cuentan como fuente de información mapas conceptuales que llamamos de lápiz y papel, en las que los participantes suelen tener alguna competencia en la técnica de representación. Esto último hace que los participantes tengan libertad para representar una estructura determinada. No se imponen un número determinado de conceptos ni de relaciones, ni suele imponerse una jerarquía predeterminada.

Cuando el objeto de investigación es el cambio conceptual, suelen distanciarse los mapas conceptuales en el tiempo y a lo largo de un periodo de enseñanza. Las series de mapas conceptuales construidos constituyen el objeto de análisis, analizándose los posibles cambios conceptuales individuales.

Cuando el objeto de investigación es la representación individual de una estructura conceptual, se suele pedir a los participantes un mapa conceptual que represente la organización individual de esa estructura, mapa conceptual que se pone en relación con los mapas conceptuales del resto de los participantes y con un supuesto mapa de expertos, el cual es construido por expertos en el tema, el propio investigador o profesores implicados en la enseñanza.

Algunas investigaciones (Huerta, 1997; Lomask y otros, 1993, por ejemplo) eliminan el efecto que la construcción de los mapas conceptuales pueda tener sobre lo que se pretende evaluar, ya sea porque desconocen la técnica o por su escasa habilidad metacognitiva. Se diseñan ítems especiales (Huerta, 1997) de cuyas respuestas el investigador construye mapas conceptuales individuales que están sujetos a posterior análisis o bien se diseñan ítems de final abierto (Lomask y otros, 1993) cuyo análisis permite al investigador construir un mapa conceptual de la respuesta del estudiante.

El análisis de la información se procesa generalmente de un modo cualitativo, no obstante se han diseñado métodos numéricos de evaluación de mapas conceptuales como el que propusieron originalmente Novak y Gowin (1988) y las variantes de Ruiz-Primo (2000) y McClure (2001), por ejemplo. Éstos últimos pretender asignar números a aspectos como la precisión de una proposición o medir aspectos como la coherencia del mapa o la similaridad entre un mapa y el de un experto. Es común, también, a la mayoría de investigaciones, la elección de participantes de la investigación a los que se entrevista clínicamente. En otro sitio (Huerta, 1998) ya dijimos que ambas metodologías van unidas, pues con la entrevista clínica el investigador puede obtener evidencias sobre la significación de los conceptos y de las relaciones entre los conceptos, además de los procesos cognitivos que llevan a una persona a establecerla.

1.2. El estado actual de nuestra investigación

Intenciones de uso de los mapas conceptuales

Como herramienta para la evaluación de los estudiantes

Como contexto donde revisitar y organizar "viejas" estructuras conceptuales con el fin de construir unidades didácticas.

Objetivos:

a.1) Evaluar mediante mapas conceptuales:

a.1.1 La organización de una determinada estructura conceptual en los estudiantes, después de una estrategia de enseñanza sobre esa estructura conceptual derivada de un mapa conceptual de experto

a.1.2 El cambio conceptual, a través de una serie de sucesivos mapas conceptuales producidos por los estudiantes mientras se desarrolla la enseñanza sobre una estructura conceptual. Este trabajo experimental se lleva a cabo con los estudiantes de la Escuela de Magisterio de Valencia.

b.1)Analizar el potencial de los mapas conceptuales como contexto para revisitar "viejas" estructuras conceptuales.

b1.1 Cómo resulta el mapa conceptual desde la perspectiva del estudiante de la facultad de Matemáticas

b1.2 cómo se usa este mapa conceptual para el diseño de unidades didácticas como marco teórico para la enseñanza de las matemáticas.

Los estudiantes

La investigación sobre los mapas conceptuales y su uso para la investigación en Educación Matemática, que tenemos actualmente en curso, la hemos contextualizado en la formación inicial del profesorado de la Enseñanza Primaria y Secundaria. Los estudiantes que participan en nuestro estudio experimental son estudiantes de la Escuela de Magisterio que cursan la asignatura de Matemáticas y su Didáctica de 9 créditos y estudiantes de la Facultad de Matemáticas que cursan las asignaturas optativas de Didáctica de las Matemáticas de 7'5 créditos. También han participado estudiantes del CAP.

Los estudiantes están divididos en grupos, de tal manera que tenemos muestras de estudiantes con experiencia en la construcción de mapas conceptuales y muestras de estudiantes sin esa experiencia. Los estudiantes con experiencia en mapas conceptuales varían desde los que tienen cierta competencia en tareas de construcción de mapas hasta los que solamente tienen contactos esporádicos con ellos, bien porque han realizado pocos mapas o bien porque sólo han observado mapas conceptuales ya construidos.

Las tareas

Una muestra de estudiantes construye los mapas conceptuales en los casos siguientes: a) Con libertad y b) Con restricciones.

Una muestra de estudiantes, sin experiencia, usa la redes Asociativas Pathfinder (descritas, por ejemplo en Casas, 2001). Dependiendo de los medios informáticos, podemos incluir una muestra de estudiantes que use el software SemNet (Fisher, 1990)

Una muestra de estudiantes construye unidades didácticas sobre estructuras matemáticas de la Educación Secundaria

El análisis de los datos

El tratamiento de los datos obtenidos se atenderá tanto a la evaluación cualitativa de los mapas, en la que se explora:

El nivel de significación de los conceptos y de las relaciones entre los conceptos representados en el mapa conceptual individual

La relación entre los mapas conceptuales individuales y la relación con el mapa de expertos, como a la evaluación cuantitativa, atendiendo también a los mismos aspectos de relación y usando los métodos propuestos por Ruiz-Primo (2000) o McClure (2001).

1.3. El futuro de la investigación

Nuestro proyecto se cierra el próximo año, en el que pretendemos dar cuenta de los datos experimentales que estamos recogiendo. No obstante hay cuestiones que deberán estar sujetas a posteriores investigaciones si se pretende que esta herramienta se encuentre entre las herramientas del investigador en Educación Matemática. Citaremos algunas de ellas:

- Fijar cuáles han de ser las intenciones para que una representación gráfica de un determinado conocimiento matemático pueda considerarse como un mapa conceptual de matemáticas.

- Fijar criterios de evaluación, lo más objetivos posibles, atados a esas intenciones, de manera que los mapas conceptuales se puedan considerar como una herramienta válida y fiable para la evaluación del conocimiento proposicional o declarativo de los estudiantes.

- Estudiar el proceso de representación de mapas conceptuales. Deben sugerirse entonces cuestiones que concreticen una más general como ¿qué ocurre desde que se encarga la tarea de construir el mapa conceptual hasta que se da por finalizada ésta?

- Estudiar la multidimensionalidad de los mapas conceptuales de matemáticas, entendida aquí una dimensión como el plano en el que se representa una estructura conceptual.

2. Conclusión

Una conclusión evidente que se desprende de este trabajo es la certeza de que es necesaria más investigación sobre el potencial de los mapas conceptuales en educación matemáticas. Algunos de los trabajos a los que nos hemos referido, contextualizados en las ciencias experimentales, apoyan el uso de los mapas conceptuales para la investigación y como medio alternativo para la evaluación de los estudiantes. Pero esto no está mencionado explícitamente en matemáticas. Hay indicios de que sí, pero éstos están sujetos a la fiabilidad y a la validez de la investigación con mapas conceptuales heredados de aquellas investigaciones.

Además, hay indicios que nos conducen a pensar que los mapas conceptuales de matemáticas pueden pensarse en más de un nivel de abstracción y en consecuencia pueden ser representados en diferentes estratos del SMS en el que uno es competente. Entonces, no n sólo se ha de investigar los mapas conceptuales representados en un plano, sino también la relación entre planos.

Finalmente, hay que pensar en el uso de las nuevas tecnologías y la cultura de la rapidez y el acceso a la información en la que vivimos. Se aventura que el papel de los mapas conceptuales en esta nueva cultura puede ser importante, al menos en algunos de los usos a los que nos hemos referido, por lo que es necesario dedicar tiempo y esfuerzos para ver qué papel pueden jugar los mapas conceptuales de matemáticas en la nueva cultura en la que nos movemos.

Referencias bibliográficas

Al-Kunifed, A.; Wandersee, J., (1990). One hundred references to concept mapping, *Journal of research in Science Teaching,* vol. 27, núm 10, págs 1069-1075.

Beissner, K. L.; Jonassen, D.; Grabowski, B., (1993). Using and Selecting Graphic Techniques To Adquire Structural Knowledge, *ERIC reports*, Washington.

Buzan, T, (1996). Los Mapas Mentales,

Casas García, L., M., (2001). Aportaciones a al investigación sobre la estructura cognitiva de los alumnos a través de Redes Pathfinder. Un estudio exploratorio en Geometría, Trabajo de Investigación dirigido por Ricardo Luengo, Universidad de Badajoz.

Corberán, R., (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde Primaria a la Universidad*. (Tesis doctoral no publicada). (Universitat de València: Valencia).

Corberán, R., Galán, E., Granell, R., Guillén, G., Huerta, M. P., (1999). Memoria final (no publicada) del proyecto de investigación precompetitivo UV98-27 titulado Los Mapas Conceptuales en Educación Matemática: un estudio comparado de los métodos de investigación. (Universitat de València: Valencia).

Doerr, H., & Browers, J., (1999). Revealing Pre-service Teachers' Thinking About Functions Through Concept Mapping, en *Proceedings of the Tweenty-first annual meeting of the PME-NA*, pp. 364-369. Cuernavaca, Morelos, México.

Fisher, K., (1990). Semantic Networkimg: The new kid on the block, *Journal of Research in Science Teaching*, 27, 10, pp. 1001-1018.

Fisher, K.; Wandersee, J.; Wideman, G., (2000). Enhancing cognitive skills for meaningful understandig of domain specific knowlede. www.sci.sdsu.edu/CRMSE/Fisher_aaas2000.html (visitada el 4 de octubre de 2001)

Gail, J. & Vesilind, E., (1993), Changes In The Structure of Pedagogical Knowledge in Mathematics and Sciencie Preservice Teachers, en *The proceedings of the Third International Seminar on Misconception and Educational Strategies in Science and Mathematics*, Misconceptions Trust: Ithaca, NY.

Hasemann, K., (1989). Children's individuality in solving fraction problems, en Proceeding of the *13th. Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education*, vol. 2, pp 67-74

Hasemann, K.; Mansfield, H (1995). Concept Mapping in Research on Mathematical Knowledge Development: Background, Methods, Findings and Conclutions, *Educational Studies in Mathematics*, vol 29, pp. 45-72.

Huerta, M.P., (2002). www.uv.es/~didmat.

Huerta, M. P., (1995). Using Concept Maps to Analyse Students' Relationships between quadrilaterals, en Proceedings of the *19th International Conference for the Psycology of the Mathematics Education*, vol. 1, p. 242, Recife, Brasil.

Huerta, M.P., (1997). *Los niveles de van Hiele en relación con la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales*. Tesis Doctoral. Servei de Publicacions de la Universitat de València. Universidad de Valencia.

Huerta, M.P., (1999). The can be relationships between quadrilaterals. A study using concept maps, *Proceedings of the twenty first Annual Meeting of the PME-NA*, vol. 1 pp.443-445

Huerta, M.P, (1998). *La entrevista clínica y los Mapas Conceptuales*, ponencia presentada en el segundo congreso de la SEIEM, Pamplona, septiembre de 1998. Actas

Huerta, M. P., (1999). Los mapas conceptuales en Educación Matemática: Análisis comparado de los métodos de investigación, *Segundo encuentro entre el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV/IPN y el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas de la Unidad de Matemática Educativa de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos*, México, del 27-28 de octubre de 1999.

Lomask, M., Baron, J. & Grieg, J., (1993). Assessing Conceptual Understanding in Science through the Use of Two-andThree Dimensional Concept Maps, en *The proceedings of the Third International Seminar on Misconception and Educational Strategies in Science and Mathematics*. Misconceptions Trust: Ithaca, NY.

Mansfield, H.; Happs, J., (1989). Using concepts maps to explore students' understandings in geometry, en *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psycology of the Mathematics Education*, vol 2. pp. 250-257.

Markham, K., Mintzes, J., Jones, G., (1994). The Concept Map as a Reseach Evaluation Tool: Further Evidence of Validity, en *Journal of Research in Science Teaching*, 31, 1, pp. 91-101.

McClure, J., R., (2001). Concept Maps and the Adquisition of Cognitive Skill: Concept Maps as a Tool to Study Skill Acquisitio, en http://espse.ed.psu.edu/suen/papers/AERA99_MCCLURE.HTM, (visitada el 3 de octubre de 2001).

Novak, J.D.; Gowing, D.B., (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Puig, L., 1997, Análisis fenomenológico, en Rico, L. (coord.), (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria, Cuadernos de formación del profesorado, nº12*, ICE Universitat de Barcelona, Barcelona: Horsori, pp. 61-94.

Raymond, A., (1997). The use of Concept Mapping in Qualitative Research: A Multiple Case Study in Mathematics Education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 19, n.3, pp 1-28.

Ruiz-Primo, M., (2000). El uso de mapas conceptuales como instrumentos de evaluación del aprovechamiento en ciencias: lo que sabemos hasta ahora. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 2, (1).
Consultado el 30/11/2001 en http://redie.ens.uabc.mx/vol2no1/contenido-ruizpri.html.

Saiz, M.; Figueras, O., (1999). A conceptual network for the teaching-learning processes of the concept of volumen, en *Proceedings of the twenty first Annual Meeting of the PME-NA*, vol. 1, pp. 436-442

Schvaneveldt, R., (1990). Pathfinder associative networks: *Studies in Knwoledge organization*, Norwood, Nj, Ablex Publishing Corporation.

Williams, C, (1998). Using Concept Maps to Assess Conceptual Knowledge of Function, en *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 4, pp. 414-421.

Xiufeng, L. & Hinchey, M, (1993). The Validity and Reliability of Concept Mapping as an Alternative Science Assessment, en *The proceedings of the Third International Seminar on Misconception and Educational Strategies in Science and Mathematics*, Misconceptions Trust: Ithaca, NY.

CRÓNICA DE LOS INFORMES DE INVESTIGACIÓN

Enrique de la Torre Fernández, *Universidade da Coruña*

Primera sesión de "Informes de Investigación"

La primera sesión de Informes de Investigación tiene lugar el primer día del Simposio, comenzando a las 16'30 horas con la presentación del informe titulado *"Nociones sociales recontextualizadas en educación matemática: el caso de la competencia comunicativa"*, por la Dra. Núria Planas i Raig, de la Universidad Autónoma de Barcelona.

En los 35 minutos de exposición comenzó señalando la necesidad de establecer relaciones entre la educación matemática y otras disciplinas, apuntando a la competencia comunicativa como una de las nociones que necesita ser recontextualizada en el campo de la educación matemática. A lo largo de la exposición presenta algunos ejemplos de cómo los actores del proceso educativo en el aula interpretan la norma de distintas maneras y de cómo las diferentes interpretaciones influencian los procesos de atribución de competencia comunicativa. Concluye señalando como un reto a la investigación en educación matemática el integrar como unidades de análisis la categoría cultural y la categoría social surgidas del proceso de recontextualización.

A continuación, durante 20 minutos, se establece un debate con la ponente, interviniendo en primer lugar el Dr. Luis Puig, quien cuestiona el papel del profesor de matemáticas tal como lo presenta la ponente, indicando que en su opinión se debe atender a la interpretación de la norma desde el punto de vista de la materia, las matemáticas, y cuestiona además si uno de los alumnos que se citan en el ejemplo expuesto por la ponente, manifiesta un uso apropiado del conocimiento matemático.

Seguidamente la Dra. Leonor Santos pregunta si durante el proceso de investigación llevado a cabo en el aula hubo interacción con la profesora del aula, en el sentido de si se ha realizado una reflexión sobre su actuación. La ponente responde que no se ha realizado esa reflexión, puesto que el objetivo de la investigación era el exponer las distintas actuaciones de los estudiantes, sin mediar en la actuación de la profesora.

Finalmente el Dr. José Carrillo precisa que el concepto de competencia es algo recurrente, pues aludimos a la competencia del profesor para analizar la competencia del alumno. La ponente responde que a lo que se refiere es a la noción de procedencia de la autoridad.

El segundo informe de investigación es presentado por el Dr. Marcelo Bairral, de la Universidad Federal Rural de Rio de Janeiro (Brasil), y se titula *"Comunidad virtual de discurso profesional geométrico. Contribuciones de un proceso interactivo docente por Internet"*. En su exposición hizo un resumen de la investigación realizada que consistió en el desarrollo de un entorno virtual para la formación continuada de profesores de matemáticas en varios estados de Brasil.

En el debate que siguió a la exposición intervino el Dr. Luis Puig para pedir aclaraciones sobre los tres dominios que se mencionaron en la presentación: teleinteractivo crítico, situado y distribuido. El ponente responde que esos tres dominios son tres dimensiones del conocimiento profesional, que no son independientes, y que a pesar de las especificidades del entorno virtual implementado, fue posible lograr una integración con la mediación vía Internet. La siguiente cuestión la plantea la profesora Joana Brocardo, acerca de los 'chats' asociados al entorno virtual creado. Inquiere sobre su obligatoriedad y el aporte que la participación en los chats hace a la formación a distancia de los profesores. En la respuesta, el ponente aclara que, aunque se trata de una formación a distancia, los profesores también trabajan (en otros espacios comunicativos del entorno) en grupos pequeños, de dos o tres personas, por lo que no se trata solamente de una formación individual aislada de los compañeros. De esta manera, con las idiosincrasias dicursivas de cada espacio, el profesor construye colaborativamente su conocimiento profesional en matemáticas.

Segunda sesión de "Informes de Investigación"

La segunda sesión de Informes de Investigación tiene lugar el día 13, comenzando a las 16'30 horas con la presentación del informe titulado *"Organización Matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria",* realizado por el profesor Cecilio Fonseca, en colaboración con el Dr. Josep Gascón. Durante media hora el ponente hace una presentación de la investigación realizada en torno a las organizaciones matemáticas que aparecen en el estudio de la derivación de funciones.

El debate comienza con la intervención del Dr. Luis Rico quien pide aclaraciones sobre la 'teoría de la organización' de la que ha hablado el ponente, indicando además que, a su juicio, las conjeturas y preguntas de investigación son algo esperado y pregunta qué aporta el marco teórico que justifique un nuevo enfoque sobre la cuestión investigada.

Contesta el ponente precisando las cuestiones relativas a la teoría de la organización e indica que en éste informe quiere reflejar la realidad que se encuentra en las aulas a la hora de enseñar matemáticas. Responde también el Dr. Josep Gascón, como coautor del informe, señalando que en éste no se trata de ninguna teoría de la organización. La noción de organización matemática que mencionó el ponente es una de las nociones básicas de la Teoría Antropológica, que está bien establecida y descrita en diversas publicaciones bien conocidas en la comunidad didáctica internacional.

La siguiente pregunta la formula el Dr. Luis Puig, pidiendo que se explique qué es lo sustantivamente nuevo en esta investigación. Responden ambos autores del informe aclarando las aportaciones nuevas que se presentan en el trabajo. En particular enfatizan que la hipótesis de la ausencia institucional de organizaciones matemáticas locales, la caracterización de éstas y la explicación de los efectos didácticos indeseables que dicha ausencia comporta, constituyen las primeras aportaciones originales de ésta investigación.

Finalmente interviene el Dr. Tomás Ortega, señalando que considera que la ponencia que se ha presentado difiere sustancialmente del texto escrito y que la exposición debiera haberse ceñido al trabajo presentado previamente. Responde el ponente que ha situado la presentación en un marco más amplio a fin de explicitar alguno de los presupuestos de la investigación, el alcance de sus conjeturas y la importancia de diseñar el proceso de estudio de una organización matemática local.

El segundo informe de investigación es presentado por el Dr. Pedro Huerta, de la Universidad de Valencia, en colaboración con los profesores D. Eduardo Galán y D. Ramón Granell. El título es *"Los mapas conceptuales en Educación Matemática: Antecedentes y estado actual de la investigación"*. Durante media hora el ponente relata la situación de un proyecto de investigación que pretende investigar el potencial de los mapas conceptuales para la investigación en educación matemática.

El debate lo inicia la Dra. Carmen Penalva, quien expresa su sorpresa porque el ponente no menciona diversas referencias aparecidas en los años 1996 y 1998, en concreto su Tesis Doctoral, leída en la Universidad de Valencia y la publicación en la revista Educación Matemática (1998), en la que utilizó mapas cognitivos. También le pregunta si establece una diferencia entre el mapa cognitivo de un sujeto, en el sentido de un mapa que muestra parte de su estructura cognitiva, y el mapa conceptual.

Responde el ponente que esa diferencia entre mapa cognitivo y mapa conceptual la considera abandonada, ya que todos los mapas conceptuales están construidos por una persona, por lo que ya deja traslucir su estructura cognitiva particular. Responde a la cuestión sobre la ausencia de ciertas referencias bibliográficas aclarando que se realizó una búsqueda sobre investigaciones en y con mapas conceptuales.

A continuación el Dr. Luis Rico pregunta sobre las diferencias y similitudes entre estos tipos de sistemas de representación y los Sistemas Matemáticos de Signos. El ponente responde que los signos que se usan para la representación por mapas conceptuales no son comparables a los signos que se usan para describir conceptos y relaciones matemáticas, pues ambos conjuntos de signos están refiriéndose a cosas distintas. En este sentido comenta la existencia de estratos en el sistema matemático de signos que permiten pensar en la multidimensionalidad de los mapas conceptuales de matemáticas, mientras que esa consideración no puede darse en los signos para la representación por mapas conceptuales.

También pregunta el Dr. Rico hasta qué punto las limitaciones de los mapas conceptuales afectan a la investigación y a la enseñanza que se derivan de su uso. Nuevamente responde el ponente, explicando que las limitaciones están dadas por lo que es susceptible de ser representado en un mapa conceptual, pues constata que no todo el conocimiento matemático puede representarse mediante mapas conceptuales. Afirma, además, que lo que puede investigarse y puede enseñarse está restringido a lo que se suele llamar el conocimiento estructurado o declarativo

Finalmente intervienen el Dr. José María Cardeñoso y el Dr. Luis Puig, haciendo sendas preguntas al ponente, que las responde a continuación.

CAPÍTULO 4

Grupos de Trabajo

En este capítulo de las Actas se presentan los informes correspondientes a las comunicaciones presentadas en los diversos Grupos de Trabajo.

GRUPO DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Coordinadora: **María Luisa Fiol** , *Universidad Autónoma de Barcelona*

Las cinco ponencias programadas para su presentación y defensa en las dos sesiones de trabajo del VI Simposio de la SEIEM se habían enviado previamente a los componentes del grupo. Así y todo se consideró oportuno disponer de fotocopias no sólo del programa sino también de estos trabajos, en previsión de la presencia en estas sesiones de trabajo de nuevos participantes.

Posteriormente a un breve saludo inicial se recordó el acuerdo adoptado de limitar a 15 o 20 minutos la exposición de cada ponencia para intentar dar después y en cada caso unos 10 minutos para entrar en debate.

En la primera sesión de trabajo, el jueves día 12 de septiembre, se presentaron las tres ponencias siguientes:

1. "El Aprendizaje Colaborativo y la Demostración Matemática"

Ponentes: ***José Francisco Martín, Jesús Murillo*** *(Univ. de la Rioja) y* ***Josep M. Fortuny*** *(Univ. Autónoma de Barcelona).*

José Francisco empezó por hablar del aprendizaje colaborativo. Los métodos tradicionales de enseñanza contemplan la clase como un entorno en el que el papel del profesor se reduce simplemente a dar información a los estudiantes y en la que los objetivos y metas planteados han de conseguirse individualmente por los alumnos, situación que contrasta con la clase en la que se trabaja de forma cooperativa/colaborativa. El aprendizaje cooperativo se refiere a un método de instrucción en el que los estudiantes trabajan conjuntamente en grupos para alcanzar metas comunes. Los alumnos ayudan a otros para que "todos" puedan alcanzar en alguna medida el éxito. En la clase de trabajo cooperativo el centro es el estudiante y se considera al profesor como un facilitador y guía del aprendizaje y a los estudiantes como buscadores de información.

Puntualizó que tal como señalan Scardamalia y Bereiter (1992): *"Los estudiantes necesitan aprender profundamente y aprender cómo aprender, cómo formular preguntas y seguir líneas de investigación, de tal forma que ellos puedan construir su propio conocimiento a partir de lo que conocen. El conocimiento propio que es discutido en grupo, motiva la construcción de nuevo conocimiento".*

En su trabajo hacen un análisis epistemológico del concepto de demostración matemática y de su importancia en el desarrollo de la capacidad de razonamiento de nuestros alumnos y en la adquisición del conocimiento matemático. Por otra parte dan una visión de la situación actual de las investigaciones acerca de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática, y plantean su propuesta de lo que entienden por demostración en la educación matemática. Se realiza un análisis de dos experiencias de demostración llevadas a cabo con medios informáticos.

Es objetivo central de su investigación, a partir de información recogida sobre alumnos reales y utilizando un entorno de *trabajo colaborativo* apoyado en medios informáticos, analizar los beneficios cognitivos que se producen en los alumnos, en relación a su capacidad de entender y producir demostraciones matemáticas.

2. "Los conceptos Trigonométricos: Estudio exploratorio transversal realizado con alumnos de enseñaza Básica, Media y Superior"

Ponentes: ***Ana M. Figueiredo Antunes*** *(Instituto Beja, Portugal)*
Ricardo Luengo Gonzáles *(Universidad de Extremadura)*

En el trabajo de investigación presentado se analiza y compara el dominio de conceptos trigonométricos, que presentan los alumnos de Enseñanza Básica, Secundaria y Superior. Cataloga el tipo de esquemas/representaciones presentados y verifica sí su presencia, en las respuestas dadas por alumnos de diferentes niveles de enseñanza, tiene influencia en su destreza en la resolución de problemas trigonométricos. Así mismo se analizan y catalogan las opiniones de los alumnos, de los distintos cursos, respecto a la importancia y utilidad del estudio de la trigonometría.

Para la obtención de los datos, se han elaborado y aplicado un instrumento de investigación: un test, con diferentes tipos de preguntas, igual para todos los alumnos, de los diferentes niveles de enseñanza, que constituyeron la muestra.

De la análisis de datos se concluyó que:

i) el dominio de conceptos trigonométricos depende del año lectivo a que pertenecen hasta al 12º año. Cuando encuestamos a los alumnos del 1º y 2º años, el nivel de conocimientos en este dominio disminuyó.

ii) generalmente, la presencia de esquemas contribuyó a una mejor interpretación de problema y está asociada a respuestas correctas, a pesar de haber existido situaciones en las que los alumnos no necesitaron recurrir a esquemas para resolver el problema correctamente.

iii) de las opiniones de los alumnos, respecto à la importancia y utilidad del estudio de la trigonometría , se destaca un mayor número de respuestas relacionadas con el contexto del alumno en detrimento de las respuestas relacionadas con factores científicos.

3. "Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de trigonometría, en Bachillerato"

Ponentes: ***Marcelino J. Ibañes*** *y* ***Tomás Ortega****, (Universidad de Valladolid).*

Aquí se da cuenta de algunos analizadores específicos para el tratamiento de la demostración, y se aplican a los libros de texto de Matemáticas I, de primer curso de Bachillerato, en el tema de Trigonometría.

Se consideran los siguientes analizadores específicos: Clase de justificación utilizada (*esquemas de prueba* y *niveles* de demostración) y *técnicas empleadas –método, estilo y modo*-. Valoración de las *funciones* que cumple la prueba empleada y *reconocimiento de procesos* (*distinción* e *identificación*). Consecuencias. Uso de e*xpresiones* usuales y específicas, *idea global* del proceso seguido y s*ignificado* de teorema e *interpretaciones*, etcétera. Entre las reflexiones deducidas del análisis destacan éstas: Casi siempre se trata de demostraciones más o menos completas y rigurosas. No se emplea otro *método* que el de *silogismo* (aunque, a veces, se consideran *casos*) y los *estilos* son uniformes en cada teorema. Los libros de texto consultados no hacen ningún comentario acerca de las *funciones* que cumplen las demostraciones expuestas. La intención que se observa es la de simple *verificación*. No hay comentarios explícitos con el fin de llamar la atención sobre la clase de razonamiento que se hace, sus características, y sus efectos, o para distinguirlo de otras posibles justificaciones. La muestra más clara, en este sentido, que se encuentra en los textos, es la referencia al proceso, o su titulación, como una “demostración”. En muchos casos ni siquiera se califica el procedimiento empleado y en ningún caso se ha encontrado una explicación global del proceso, es decir, ninguna explicación de las líneas generales que se han seguido, lo que resulta fundamental para su comprensión… En resumen, parece que existe cierta preocupación por demostrar los teoremas como si se tratara de un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor, pero se emplean pocos recursos en hacer comprensibles esas demostraciones, en prevenir errores y dificultades, en acudir a las fuentes, en diseñar materiales de apoyo, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización.

En la segunda sesión el día 14 de septiembre se presentaron las dos ponencias siguientes:

4. "Las isometrías en el currículo de la ESO en Galicia. Análisis de una evaluación"

Ponente: ***Teresa Fernández Blanco*** *(Universidad de Santiago de Compostela)*

El objetivo de la presente ponencia es analizar el tratamiento del tema de las isometrías del plano que se hace en las clases de matemáticas de 2º ciclo de la ESO en la comunidad gallega.

Los resultados presentados en este trabajo son fruto de un análisis que ha comprendido, principalmente, cuatro frentes:

El examen del DCB vigente para esta etapa de la enseñanza, estudiando la presencia de contenidos relativos a este tema en el mismo y la importancia dada a dicho tema, que se refleja en los objetivos y criterios de evaluación contenidos en dicho documento.

El estudio del enfoque que se hace de las isometrías en los diferentes libros de texto de las editoriales con más presencia en las aulas gallegas. Es un hecho conocido que muchos de los profesores de estos niveles adaptan sus enseñanzas en gran medida al libro de texto que usan, por lo que este estudio (complementado por el resto del trabajo) ha sido de gran ayuda para conocer el tratamiento que los profesores dan a este tema.

El tercer punto sobre el que hemos trabajado concierne a las creencias del profesorado, para lo que se ha elaborado un cuestionario que ha sido respondido por profesores de secundaria de la comunidad gallega. Varios de los ítems del cuestionario hacían referencia a la importancia que se daba al tratamiento de este tema dentro del currículum, los materiales didácticos utilizados y el uso de recursos informáticos como apoyo a la misma.

Por último se pasó un cuestionario a alumnos de diferentes centros, públicos y privados, de las cuatro provincias gallegas con el fin de conocer sus competencias en el tema tratado, las estrategias que utilizan para enfrentarse a situaciones concretas, los obstáculos de aprendizaje con que se encuentran y su valoración personal sobre los problemas propuestos. Como complemento a este último punto, se analizó la evolución de un grupo de alumnos con los que se utilizó un recurso informático (el GEOCLIC) como apoyo en la enseñanza de las isometrías, haciendo un estudio cualitativo de errores y obstáculos de aprendizaje.

5. "La capacidad Espacial en la Educación Matemática"

*Ponente: **Modesto Arrieta** (Universidad del País Vasco).*

Línea de investigación presentada y aprobada en el programa de Doctorado de Psicodidáctica de la Universidad del País Vasco.

A la finalidad de la Matemática en la enseñanza obligatoria, además de las más generales y comunes con otras áreas, se le reconocen dos más específicas como son:

- La mejora de las capacidades intelectuales, como la capacidad numérica, espacial o de razonamiento lógico.

- Ser instrumento básico y necesario para otras áreas: Por su precisión en el lenguaje, por la riqueza de sus representaciones y por la potencia de la demostración como modelo de argumentación.

Nosotros vamos a incidir en la capacidad espacial y en el contenido matemático que mejor se asocia a dicha capacidad, como es la geometría.

El objetivo de la línea de investigación consiste en desentrañar los mecanismos que rigen la capacidad espacial y su desarrollo, y paralelamente el de la geometría, para poder hacer propuestas coherentes y eficaces de geometría que impulsen la mejora de la capacidad espacial.

Trabajaremos paralelamente tres temáticas particulares:

El primer modelo ha de responder a la cuestión de qué es la capacidad espacial: concepto, factores, componentes, estrategias de resolución de tareas espaciales...., todo aquello que nos permita diagnosticar la capacidad espacial de los sujetos: la estructura factorial de Carroll y la teoría de los tres estratos, las componentes de Sternberg y las estrategias de Lohman. Los mismos conceptos con diferente nombre o diferentes conceptos con el mismo nombre es tan habitual que cualquier intento de avanzar en el tema es imposible si no es en base a un modelo teórico con justificación empírica.

La segunda temática particular ha de responder a las siguientes cuestiones ¿Cómo se desarrolla la capacidad espacial? ¿Cómo se desarrollan las nociones y conceptos geométricos asociados a dicha capacidad espacial? Los modelos de referencia son los trabajos de Piaget y seguidores.y los trabajos de Van Hiele y seguidores. Los conceptos o nociones estudiados ¿ son todos los que están?, ¿están todos los que son?. El análisis que se hace de cada noción, concepto o familia de conceptos ¿es suficiente? ¿se podrían categorizar los objetivos?

La finalidad última de la línea de investigación es impulsar la mejora de la capacidad espacial de los alumnos y para ello deberemos hacer propuestas didácticas eficaces de geometría. Esta es la tercera temática particular: ¿qué condición ha de cumplir a priori una propuesta?. Ha de tener en cuenta la interacción sujeto-contenido y por lo menos debemos de utilizar estos modelos de referencia: Las situaciones didácticas de Chevallard, los errores, los recursos como el entrenamiento, los materiales manipulativos, el ordenador,...

Se incorporaron al grupo de investigación en el Aprendizaje de la Geometría:

Germán Torregrosa Gironés de la Universidad de Alicante; Mª del Sagrario Simarro Fernández de la Univ.Complutense de Madrid; María Alexandra de Oliveira Gomes, de la Univ. do Minho; José Francisco Martín Olarte de la Univ. de la Rioja; María Peñas Troyano de la Universidad de Granada; Ana Mª Figueiredo Antúnez del Instituto Beja de Portugal y Marcelo Almeida Bairral de la Universidad Federal Rural de Rio de Janeiro.

GRUPO DE DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS

Coordinador: **Matías Camacho Machín**, *Universidad de La Laguna*

En las sesiones de trabajo celebradas en el Simposio se presentaron tres informes de investigación y un Taller relacionados con los trabajos de investigación que realizan los miembros del grupo.

Jueves 12 de septiembre

Imagen informal del infinito y conocimiento formal del cálculo diferencial e integral: conexiones e incoherencias que evidencian estudiantes universitarios en relación al infinito actual

(Informe de Investigación)

Sabrina Garbin Dall'Alba (*Universidad Simón Bolívar de Caracas. Venezuela)*

Esta investigación parte del estudio de Garbin (2000) (Garbin y Azcárate 2002) y la caracterización de Tall (2002) de informal image y formal image. Plantea identificar qué tipo de conexiones establecen los alumnos Universitarios que tienen conocimientos previos del cálculo diferencial e integral en problemas que está presente la misma noción de infinito actual; establecer la relación e influencia del conocimiento previo formal del cálculo que tienen los estudiantes, en la coherencia e incoherencia que manifiestan los estudiantes y en la formación consistente de la imagen conceptual del infinito actual. En esta comunicación se presentan algunos de los resultados y conclusiones que nos acercan a estos objetivos. El estudio es cualitativo y participaron 89 estudiantes Universitarios, de Ciencias (Física y Química) y de Ingeniería (diferentes campos) con edades comprendidas, mayoritariamente, entre 18 y 20 años.

Referencias:

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. España.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002): "Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años" en Enseñanza de las Ciencias, 20 (1).

Tall, D. (2002): "Natural and Formal Infinities" to appear *Educational Studies in Mathematics.* (http://www.davidtall.com).

Reflexión sobre instrumentos para el análisis de tareas sobre el concepto de derivada y su proceso de resolución

(Taller)

Edelmira Badillo y Carmen Azcárate (*Universitat Autònoma de Barcelona).*

La investigación en Didáctica de la Matemática ha señalado la importancia que tiene el diseño, la elección, la implementación y la evaluación de tareas matemáticas por parte del profesor tanto en la elaboración de unidades didácticas como en el proceso mismo de enseñanza de los conceptos matemáticos. Consideramos que el análisis de las tareas que los profesores plantean en la unidad didáctica y en la(s) evaluación(es) del concepto de derivada, nos proporciona información relevante sobre el modo de conocer qué tienen del concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. Al analizar las tareas matemáticas hemos optado por diferenciar dos elementos claves que nos ayuden en la descripción de lo que significa comprender un concepto matemático por parte de los profesores que participan en este estudio: Las características textuales de las tareas y la naturaleza de la actividad cognitiva que se genera a partir de ellas (García y Llinares, 1996).

En este taller presentaremos el instrumento que hemos diseñado para el análisis de las tareas que los profesores proponen para la enseñanza y evaluación del concepto de derivada, el cual es una tabla que consta de ocho categorías que hemos denominado: tipo de problema, profesor, situación problema, representaciones, técnicas, conocimientos involucrados, procesos cognitivos y recursos tecnológicos. La elección y definición de estas categorías se hizo atendiendo al marco teórico en el que nos basamos, como son la teoría APOE liderada por Dubinsky y colaboradores (1996) y los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997).

Igualmente, dado que nos interesa profundizar en la descripción de la comprensión del concepto de derivada (objeto matemático) que tienen estos profesores (Norman, 1992), presentaremos un instrumento para organizar y analizar las respuestas y el proceso de resolución que exhiben los profesores frente a una serie de tareas matemáticas que les planteamos, basado en las redes sistémicas de Bliss y Ogborn (1979, 1983).

Contenido:

1. Breve exposición sobre referentes teóricos, categorías analíticas y diseño de instrumentos para el análisis de tareas matemáticas
2. Presentación de los instrumentos de recolección de la información: Cuestionario indirecto y viñetas

3. Análisis del proceso de resolución de las tareas sobre derivada de profesores de matemáticas en ejercicio: Redes sistémicas
4. **Actividad 1**: Análisis del proceso de resolución de profesores de matemáticas en ejercicio de la cuarta tarea del cuestionario: Elaboración de la red sistémica
5. **Actividad 2**: Discusión sobre los instrumentos de análisis propuestos

- Tabla de análisis de las tareas matemáticas (Badillo y Azcárate, 2002)
- Redes sistémicas

Sábado, 14 de septiembre

Área e integral definida. Ideas de los estudiantes cuando usan un programa de cálculo simbólico

Ramón Depool y ***Matías Camacho*** *(Universidad de la Laguna).*

Presentamos un estudio exploratorio llevado a cabo con 28 estudiantes. El trabajo se desarrolló de la siguiente manera: se dictó el programa oficial Cálculo I, durante un semestre, con la variante de que, además de las clases habituales de tiza y pizarra, participaron en prácticas de laboratorio con ordenadores, siguiendo un módulo instruccional, con el software *DERIVE (versión 4)*.

Al comienzo de la Unidad 4 del programa (Integral) se aplicó una cuestionario inicial de conocimiento (CIC) y al finalizar la unidad se otro cuestionario conocimientos (CFC), adaptados de Orton (1983), Mundy (1984) y Calvo (1997), mediante los cuales se pretendía:

•Extraer información relacionada con el uso por parte de los estudiantes de distintos registros de representación semiótica (Duval 1995) y cómo los utilizan a la hora de resolver situaciones que involucran el concepto de área de figuras planas.

•Caracterizar la idea de área que traen los estudiantes que han cursado la secundaria y no conocen aún el concepto de integral definida y seguidamente cómo influye el estudio de la integral definida en un ambiente en donde se combinan las clases habituales y prácticas de laboratorio.

Como resultados del análisis de las pruebas tenemos que:

- Mientras que los estudiantes analizados utilizan los registros dados, reconociéndolos y realizando transformaciones dentro de los registros cuando resuelven el CIC, el análisis del CFC nos muestra que después de la formación recibida tienden a utilizar los registros simbólicos dados, pasando a un segundo plano los gráficos. Las transformaciones son hechas en el registro simbólico. Cuando utilizan el registro gráfico resultan muy limitadas las transformaciones de registros.
- Cuando los estudiantes resuelven las tareas propuestas en el CIC, suelen crear nuevos registros a partir de los que se le presentan, sin embargo el análisis del cuestionario final nos indica que dados que después de la experiencia, tienden a trabajar en el registro simbólico en el que se les propone la actividad. Lo que no esta claro es si esto es producto de una economía de registros o es debido a la redacción del ítem.

Análisis de pautas de evaluación de textos escolares. Creación de un modelo

Mª Consuelo Monterrubio Pérez y ***Tomás Ortega*** *(Universidad de Valladolid)*

La elección del libro de texto no es tan fácil como parece ni debe hacerse con la ligereza habitual porque, a menudo, no se descubren los aspectos positivos y negativos hasta después de haberlo utilizado en la práctica. En los últimos años se han realizado estudios generales para que pudieran aplicarse a todas las áreas, pero son muy pocos los que se han ocupado del área de matemáticas específicamente. Nosotros estamos tratando de construir un modelo de valoración de textos que permita elegir de forma objetiva el material más adecuado a las características del Centro para desarrollar los cursos de matemáticas y en el presente trabajo se presenta una síntesis del análisis realizado sobre los trabajos, que para nosotros han sido los más relevantes y que que nos han servido de fundamentación (Aspectos importantes: Marchesi y Martín; Fernández; Otte. Modelos de valoración: del Carmen; Bernad; Santos; Bonafé; Gimeno Sacristán; García; Parcerisa; Prendes. Valoración específica: Cubillo; Blázquez, Ibañes; Bodí y Valls; Rico; González; Haro y Torregrosa; Martín. Modelo de valoración general de textos matemáticos: Ortega)

El trabajo presentado termina exponiendo cómo, del análisis de estos modelos descritos y del trabajo que se está realizando, se sigue que un buen modelo de valoración de textos debe, al menos, cumplir las siguientes características:

- Sencillo de manejar.
- Permite analizar el material de forma global, pero también se puede realizar un análisis de algún aspecto en particular. Este análisis, global o particular, se puede llevar a cabo para el texto completo o para algún tópico concreto.
- Es posible aplicar distintos niveles de profundización en el análisis que se realiza. La propuesta es hacer un análisis previo para la elección del texto y, posteriormente, un estudio exhaustivo durante el uso del texto elegido.

En la actualidad se está realizando un análisis comparativo de los modelos generales descritos anteriormente y el modelo de T. Ortega.

El último asunto tratado en la Reunión del sábado día 14 de septiembre: se procedió a la elección de la nueva coordinación del Grupo. Por unanimidad se eligió a la **Dra. María Teresa González Astudillo** de la Universidad de Salamanca como nueva Coordinadora del Grupo de Trabajo.

GRUPO DE DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA

Coordinadora: **Angustias Vallecillos Jiménez**, *Universidad de Granada*

Resumen de las actividades del grupo durante el VI Simposio de la SEIEM, celebrado en Logroño del 11 al 14 de Septiembre de 2002.

Previamente a la celebración del Simposio se había establecido el siguiente Orden del día:

Primera Sesión: 12 de Septiembre, 18'30 - 20'00 horas

- Saludo/ Presentación de la nueva Coordinadora.
- Simulación y probabilidad en la formación de maestros de enseñanza primaria. Mª Jesús Cañizares Castellano y Juan Díaz Godino.

- Estadística y Probabilidad en los libros de texto para la ESO. Carmen Martín.
- Marco teórico para la enseñanza y la evaluación del aprendizaje de la estadística inferencial elemental. Angustias Vallecillos y Antonio Moreno.
- Información sobre actividades del IASE y Congresos futuros. Carmen Batanero
- Intuiciones y creencias sobre representatividad muestral en secundaria. Sandra Gallardo Jiménez y Angustias Vallecillos.
- Estudio teórico y experimental sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos inferenciales en el nivel de secundaria. Proyecto de Tesis Doctoral. Antonio Moreno.
- Las medidas de posición central en los libros de ESO. Carmen Batanero y Belén Cobo.

Segunda Sesión: 14 de Septiembre, 9'30 - 11'00 horas

- Planificación de la agenda de trabajo del grupo para el próximo año.
- Debate sobre la organización interna del grupo, diseño y reparto de tareas para la edición de un libro con las aportaciones a la investigación de los miembros del grupo y/o especialistas relevantes invitados.

Las sesiones planificadas sufrieron algunas modificaciones y una reorganización de sus contenidos debido a que algunos de los miembros del grupo vieron imposibilitada su presencia en Logroño por diversas razones:

- por haberse convocado la lectura de una Tesis Doctoral en las mismas fechas: Carmen Batanero (codirectora de la misma) y Juan Díaz (miembro del tribunal que la juzgó); Andrés Nortes, presente en la primera de las sesiones, anunció su imposibilidad de asistir a la segunda por tener que viajar a Barcelona como miembro del tribunal de la Tesis también.

- por coincidir las fecha del Simposio con las del Congreso sobre Aprendizaje y Enseñanza de la Matemáticas que organiza la SAEM 'Thales' en Almería: Antonio Moreno y Belen Cobo.

Este cúmulo de circunstancias adversas hizo que al principio de la primera de las sesiones que teníamos planificadas, se replantease el contenido de las mismas y se decidió reorganizar su contenido con el fin de concentrarlo en una sola, aunque fuese a costa de prolongar un poco mas el tiempo inicialmente previsto para ella.

De acuerdo con esto, el Orden del Día para la sesión quedó como sigue:

- Planificación de la agenda de trabajo del grupo para el próximo año.
- Debate sobre la organización interna del grupo, diseño y reparto de tareas para la edición de un libro con las aportaciones a la investigación de los miembros del grupo y/o especialistas relevantes invitados.
- Estadística y Probabilidad en los libros de texto para la ESO. Carmen Martín.
- Intuiciones y creencias sobre representatividad muestral en secundaria. Sandra Gallardo Jiménez y Angustias Vallecillos.

Los dos primeros puntos fueron largamente debatidos, sobre todo, en lo que se refiere a la publicación de un libro que recoja las aportaciones a la investigación de los miembros del grupo y después de un período de tiempo que hace que estas puedan constituir en su conjunto una aportación relevante para la comunidad de profesores e investigadores. Después de debatir acerca de las diversas posibilidades para la estructuración de dicha publicación, se decidieron, principalmente, dos cosas: trabajar en la edición de un número monográfico de una revista y poner en circulación entre los miembros del grupo un primer borrador de estructura para la publicación que será criticado y completado entre todos hasta la organización definitiva del mismo.

Carmen Martín presentó a continuación su trabajo titulado “La estadística y la probabilidad en los libros de texto de enseñanza secundaria obligatoria”, trabajo realizado como parte de un Proyecto de Investigación que se desarrolla en la Universidad de Alicante.

Sandra Gallardo presento su trabajo “Intuiciones y creencias sobre representatividad muestral en secundaria”, parte de su trabajo de investigación tutelada, realizado como parte de sus estudios de doctorado en la Universidad de Granada bajo la dirección de Angustias Vallecillos.

Ambos trabajos suscitaron gran interés entre los asistentes, fueron muy comentados y se hicieron muchas preguntas aclaratorias que fueron respondidas por las ponentes con todo detalle.

La sesión finalizó y se levantó a las 20’30 horas del día 12 de Septiembre.

Relación de participantes:

Andrés Nortes, Universidad de Murcia

Carmen Martín, Universidad de Alicante

Carmen Penalva, Universidad de Alicante

Cesar Saenz, Universidad Autónoma de Madrid

Sandra Gallardo, Universidad de Granada

Angustias Vallecillos, Universidad de Granada.

GRUPO DE PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO

Coordinador: **José Mª Gairín Sallán**, *Universidad de Zaragoza*

Primera sesión: jueves 12 de septiembre de 2002

En esta sesión estaba previsto presentar un informe sobre el Seminario celebrado en el pasado mes de mayo y concretar la estructura científica y organizativa de estos Seminarios y de los que se celebran en el Simposio de la SEIEM.

Siguiendo el orden del día, el responsable del grupo comenta el VI Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico, celebrada en Santiago de Compostela, del 23 al 25 de mayo de 2002. Se comienza por agradecer el esfuerzo de Teresa Fernández, Mª Jesús Salinas y Ángeles García, sin cuya dedicación no hubiese sido posible que todos los asistentes nos llevásemos un grato recuerdo tanto de las sesiones de trabajo como de las de esparcimiento.

Seguidamente se comentan los principales problemas que surgieron en torno a la organización y desarrollo de este Seminario: su financiación y la publicación de las intervenciones. La búsqueda de recursos para mantener las condiciones de este tipo de encuentros no es igual en todas las universidades, por lo que resulta aconsejable que cada grupo organizador, con los fondos disponibles, comunique con suficiente antelación a los miembros del grupo las condiciones en que se va a desarrollar el Simposio, así se evitarán los conflictos provocados por la forma en que se cubrieron gastos de los asistentes a encuentros anteriores.

En cuanto a la publicación de las intervenciones en este Simposio las posibilidades financieras quedan limitadas a la edición de un CD, aun cuando quedan por superar los trámites necesarios para que en el mismo figure el ISBN, pues es un elemento esencial para su valoración por la Comisión Nacional que evalúa la actividad investigadora.

Se entabló un interesante debate sobre la finalidad y estructura de los Seminarios y, consecuentemente, sobre el desarrollo de las sesiones del grupo PNA en las dos sesiones de que se dispone en cada Simposio de la SEIEM. Como conclusión los asistentes manifestaron el deseo de que se sigan manteniendo los Seminarios anuales y que también se mantenga el mismo tipo de actividades: presentación de los trabajos correspondiente al periodo investigador de los alumnos de Tercer Ciclo, y exposición de los avances de las investigaciones conducentes a las tesis doctorales; además, se acordó que la periodicidad de estos Seminarios coincidiría con la del Simposio de la SEIEM, y que podría ser bianual si la asamblea de los socios así los acordaba.

Segunda sesión: sábado 14 de septiembre de 2002

Inicialmente se había previsto que uno de los miembros del grupo hiciese una exposición sobre el modo en que se gestiona la investigación en su Universidad, indicando aspectos referentes a la tramitación de ayudas, a la organización de equipos o grupos de investigadores y a la difusión de los resultados. Pero la necesidad de debatir la estructura y organización de las sesiones del grupo en los Simposios aconsejó posponer la intervención prevista.

Tras el correspondiente debate se unificaron las posiciones de los asistentes en torno a las siguientes cuestiones:

- No parece oportuno introducir, en estas reuniones del grupo, intervenciones sobre trabajos de investigación puesto que su lugar adecuado son los Seminarios que viene organizando el grupo.

- Hay que potenciar la cohesión del grupo intentando buscar la aproximación tanto en los enfoques y en los métodos de investigación, como en la definición de las intersecciones entre líneas de trabajo de los miembros del grupo.

- Fomentar la participación en las actividades del grupo de investigadores que trabajan en temas transversales y, más concretamente, comenzar por animar a quienes trabajan en historia de la Matemática para que intervengan en nuestros Seminarios y reuniones en los Simposios.

- Trabajar en la redacción de un documento, que tenga calidad para ser publicado, en el que se recojan las aportaciones a la investigación de los miembros del grupo. Para ello, hay que estructurar las intervenciones de los investigadores y Universidades y utilizar las sesiones del próximo Simposio para conocer el estado en que se encuentra cada trabajo parcial y discutir el contenido de los mismos.

- Respecto a la próxima reunión del Seminario los compañeros de la Universidad de Valencia se comprometen a hacer todas las gestiones necesarias para estudiar la posibilidad de celebrarlo en dicha ciudad.

GRUPO DE CONOCIMIENTO Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Coordinador: **Pablo Flores**, *Universidad de Granada*

El trabajo del grupo se dividió en dos sesiones. En cada una de ellas se presentó un trabajo de investigación en curso. Además, en la segunda se presentó una monografía.

Primera sesión

Tras la presentación del grupo, se pasó a discutir sobre las actividades que se iban a desarrollar durante este seminario. Para el presente se cuenta con dos trabajos, cada uno de los cuales será presentado en una sesión de las previstas. Los próximos seminarios en los Simposios de la SEIEM, se dedicarán a presentaciones de trabajos de investigación en curso y debates sobre artículos recientes relativos al conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, con objeto de debatir sobre algunos constructos importantes en el área.

A continuación María Peñas, de la Universidad de Granada, presentó el trabajo de investigación tutelada: *Un estudio del proceso de reflexión sobre cuestiones profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas,* del que se incluye un breve resumen.

Un estudio del proceso de reflexión sobre cuestiones profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Autora: ***María Peñas****, Director:* ***Pablo Flores****.*

La investigación consiste en describir y caracterizar el proceso de reflexión que llevan a cabo un grupo de 5 estudiantes del último curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada, durante un módulo de la asignatura Práctica de Enseñanza, que tiene lugar con posterioridad al *practicum*. Basándonos en la caracterización de Dewey sobre profesores reflexivos, y los aportes posteriores de Smyth y Schön, hemos concretado la noción de reflexión, y las variables de investigación, con los trabajos de Cooney. Los objetivos de la investigación son caracterizar e identificar aspectos que los estudiantes encuentran problemáticos, la forma en que reflexionan sobre ellos, y los modelos de enseñanza de las matemáticas que sustentan. Para ello se ha llevado a cabo una investigación cualitativa, de carácter interpretativo, basada en la observación participante, el análisis de contenido de las producciones de los estudiantes, y un cuestionario de valoración del módulo. El grupo estudiado trabajó sobre la cuestión profesional: *Qué matemáticas se pueden enseñar en la ESO con el Tangram*. Hemos observado que han evolucionado las ideas de los estudiantes durante el módulo, que han ampliado el papel que le conceden a los juegos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que sienten la necesidad de profundizar en la utilidad didáctica de los mismos. Los estudiantes redefinen el papel del alumno, al que quieren conceder mayor protagonismo en el aula y se muestran receptivos ante nuevas ideas didácticas. Se manifiestan más favorables a conceder autoridad al formador cuando se encuentran ante un conocimiento matemático, mientras que mantienen una postura relativista en lo que se refiere al conocimiento didáctico. Los diferentes aspectos observados en relación a las tendencias de enseñanza no definen una posición clara de los estudiantes, pero si se observa cierta predisposición a un cambio en su modelo de enseñanza.

Segunda sesión

Los compañeros Pilar Azcárate, de la Universidad de Cádiz, y José María Cardeñoso, de la Universidad de Granada, presentaron el informe de investigación: *El tratamiento del Azar en Educación Secundaria Obligatoria*, del que presentamos un resumen a continuación.

El tratamiento del Azar en Educación Secundaria Obligatoria

Autora: ***Ana Serradó***

Directores: ***Pilar Azcárate y José María Cardeñoso***

La investigación se enmarca en el grupo de investigación de la Universidad de Cádiz "Desarrollo Profesional del Docente", una de cuyas agendas aborda la enseñanza y aprendizaje del conocimiento probabilístico, analizado desde la perspectiva del profesor. El objetivo del trabajo es analizar los modelos de intervención asociados a la planificación, desarrollo y evaluación del proceso de Enseñanza y Aprendizaje del "Tratamiento del Azar" en Educación Secundaria Obligatoria. A partir de los estudios realizados por Azcárate (1996) y Cardeñoso (2001) han deducido tendencias probabilísticas de los profesores, lo que les lleva a argumentar que los profesores de Educación Secundaria no disponen de información/formación adecuada para elaborar unidades didácticas relacionadas con la probabilidad, por lo que recurrirán a los libros de texto y sus guías didácticas. Por tanto, para estudiar las tendencias educativas de los profesores al tratar el conocimiento probabilístico en sus aulas, hay que analizar el tratamiento del azar en los libros de texto. El trabajo de investigación se articula en dos fases. La primera ha consistido en un análisis de los libros de texto, empleando para ello un análisis de contenido, y tratando de analizar los elementos y la estructura de un libro de texto, caracterizar el conocimiento que desarrollan sobre la aleatoriedad, y analizar los argumentos, interpretaciones o significados que se otorgan a los fenómenos aleatorios en términos probabilísticos, en los libros de texto. Para ello se ha seleccionado una muestra de cuatro editoriales cuyos libros de texto son los más utilizados por los profesores de ESO, y se realizó un análisis de contenido (Bordín, 1986). Este análisis ha permitido establecer las tendencias educativas que se detectan en los proyectos educativos de estas 4 editoriales, lo que ha llevado a reformular y concretar algunas de las ideas de partida. La segunda fase consistirá en estudios de casos, sobre el uso que hacen los profesores de matemáticas de secundaria del libro de texto. En la actualidad, esta fase se encuentra en su comienzo. Se va a analizar cómo el profesor planifica el uso del libro de texto y las adecuaciones que realiza para diseñar la intervención. De esta forma podremos comparar los modelos de intervención subyacente en los libros y el modelo de intervención que presente el profesor cuando planifica y cuando interviene.

Por último, Luis Carlos Contreras y Lorenzo Blanco presentaron la monografía:

Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente

Redactada por varios miembros de este grupo de investigación. Los editores relataron que la intención de la monografía es emplear el bagaje investigativo desarrollado por los integrantes del grupo para hacer propuestas formativas que puedan ser aplicadas en el aula por otros compañeros. La estructura de cada propuesta es similar: En primer lugar se hace una caracterización de cómo entienden los autores la formación de maestros, y posteriormente presentan la propuesta formativa, aportando ejemplos y describiendo las tareas concretas y su justificación. Algunos autores presentes en el acto describieron brevemente sus aportaciones.

GRUPO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA

Coordinador: **Josep Gascón**, *Universidad Autónoma de Barcelona*

En la primera sesión, que tuvo lugar el viernes, día 13 de septiembre de 2002, se presentó la siguiente comunicación:

Presentación de contenidos matemáticos mediante una estructura genérica y modular. Experiencia en el marco de la formación del profesorado.

Ponentes: ***Miguel Delgado*** *(UNED) y* ***Teresa Ulecia*** *(UNED)*

En esta presentación hacemos referencia a un estudio, sobre la forma de introducir las Matemáticas, desarrollado en el marco de la Formación de Profesorado. Este estudio, aún no concluido, se basa en el diseño de un tipo de presentación muy estructurada de contenidos matemáticos que utiliza actividades genéricas, modulares y adaptables, según las necesidades del alumno, al desarrollo de los contenidos. La experimentación de dicha estructura se llevó a cabo con 832 profesores de Matemáticas (la mayoría de Educación Secundaria y algunos del primer ciclo de Universidad) que a lo largo de 5 años han seguido el curso de Formación de Profesorado "El ordenador en el aula de Matemáticas". La fase de experimentación personal de dichas actividades realizada por esos alumnos-profesores se ha desarrollado sin participación de los autores. Actualmente se analiza dicha experimentación. Además, se lleva a cabo la experimentación en el aula, a nivel de profesores de Educación Secundaria en dos cursos, 3º y 4º de E.S.O., con una muestra de 10 profesores y sus correspondientes alumnos. El marco teórico en que se encuadra el trabajo es el de la teoría de Situaciones Didácticas.

En esta misma sesión de trabajo estaba prevista la presentación de una segunda comunicación que tuvo que suspenderse por indisposición de la ponente. Creemos, de todas formas, que es interesante hacer público el resumen de dicha comunicación teniendo en cuenta, además, que constituye -tal como indica el subtítulo de la misma- la crónica de un trabajo de tesis que ha sido presentada posteriormente (el pasado 4 de octubre) en la Universidad de Zaragoza y que, por tanto, está al alcance de nuestra comunidad.

El proceso de algebrización de Organizaciones Matemáticas Escolares

Crónica de un trabajo de tesis

Ponente: ***Pilar Bolea*** (U*niversidad de Zaragoza)*

El problema didáctico del *álgebra escolar* (AE) empezó formulándose en términos de las dificultades cognitivas del sujeto; pasó a considerarse un problema psicolingüístico y ha acabado planteándose en términos de la estructura y la dinámica de las Organizaciones Matemáticas y Didácticas escolares. Esta evolución del problema AE puso de manifiesto la necesidad de construir, desde la didáctica, un *modelo epistemológico específico* del álgebra escolar. Surgió así la necesidad de llevar a cabo un estudio empírico para poner a prueba la hipótesis de que el modelo dominante en la institución escolar es el de la *aritmética generalizada* y para contrastar la validez de nuestro modelo epistemológico de referencia. El problema AE puede ahora formularse en términos del *proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* y el fenómeno de la "desalgebrización" del currículum de secundaria debe analizarse a la luz de las *funciones didácticas* de dicho proceso de algebrización. La crónica de este trabajo no hace más que confirmar nuestra convicción de que el investigador no elige, en cada momento, los problemas que debe estudiar sino que es la evolución de éstos la que dirige su trabajo.

En la segunda sesión de trabajo, celebrada el sábado 14 de septiembre e 2002, se presentaron dos nuevas comunicaciones:

Dos experiencias renovadoras en la enseñanza de la aritmética: Pestalozzi y la enseñanza mutua.

Ponente: ***Loli Carrillo*** *(Universidad de Murcia)*

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que estamos desarrollando, cuya cuestión central es: ¿Cuáles eran las propuestas sobre la enseñanza de la aritmética que se presentaban a los futuros maestros en las Escuelas Normales durante su primera época?

La primera propuesta que se elaboró se debe a Pablo Montesino, primer director de la Escuela Normal Central, y en ella se recogen las aportaciones tanto de la enseñanza mutua como de Pestalozzi. De ahí el interés de estudiar y comparar, en lo que se refiere a la aritmética y su enseñanza, estas dos experiencias que se desarrollaron durante el primer cuarto del siglo XIX, relacionadas con la reforma de la enseñanza primaria, necesaria para extender la educación a todos los ciudadanos. Se muestra muy claramente la determinación recíproca entre las Organizaciones Matemáticas, esto es, la forma de organizar en dicha etapa histórica las cuestiones aritméticas, su práctica y el discurso justificativo e interpretativo de la misma, y las correspondientes

Organizaciones Didácticas, esto es, la forma de organizar la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética en el ámbito de la institución citada.

La última de las comunicaciones que se presentaron y discutieron fue la siguiente:

Presentación de un software de tratamiento gráfico de datos a través de su clasificación.

Ponentes: ***Pilar Orús y Gloria Villarroya*** *(Universitat "Jaume I")*

La introducción del ordenador como útil de trabajo en la enseñanza de las diferentes disciplinas es un hecho en la actualidad así, dentro de la disciplina de las Matemáticas y de la Didáctica de las Matemáticas, existen paquetes informáticos utilizados en la construcción de las diferentes ingenierías didácticas: el programa CABRI puede considerarse como un ejemplo paradigmático en este sentido.

En el presente trabajo presentamos el diseño y realización de un software para el tratamiento gráfico de la información basado en las teorías de J. Bertín, según el cual, las significaciones de una construcción gráfica se derivan del juego de oposiciones visuales que aparecen entre los propios elementos a los que recurre la sintaxis gráfica y de la relación lógica que se establece visualmente.

El software implementado pretende servir como instrumento para la construcción de una ingeniería didáctica sobre tratamiento gráfico de datos y su clasificación.

En esta comunicación presentaremos el software y las opciones de representación gráfica matricial de los datos (binarios o no) y el tratamiento automático de éstos, utilizando los índices de similaridad utilizados por el programa informático CHIC (Gras, Lerman), así como la significación de las agrupaciones (clases) resultantes en la clasificación obtenida automáticamente. La presentación del software incluirá un ejemplo de utilización que contempla el tratamiento de un fichero de datos concretos.

Todas las comunicaciones fueron seguidas por un intenso debate del que aquí no se puede dar cuenta.