INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Almería, 18-21 Septiembre 2001

Editores:
M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA
Servicio de Publicaciones
2002

Investigacion en Educación Matemática

EDITORES:
M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino

DISEÑO DE COLECCIÓN:
Joaquín López Cruces

MAQUETACIÓN DE INTERIOR:
Germán Balaguer Valdivia

IMPRIME:
S.A. de Fotocomposición

ISBN: 84-8240-544-6
DEPÓSITO LEGAL: Al-95-2002

Con la financiación del Plan Nacional I+D+I PGC 2000-2929-E y del III Plan Andaluz de Investigación

INVESTIGACION en educación matemática. -- Almeria : Universidad de Almería, D.L: 2002
(Actas (Universidad de Almería) ; 23)
D.L. AL.95-2002
ISBN 8482405446
1. Matemáticas - Investigación 2. Matemáticas - Estudio y enseñanza
I. Gil Cuadra, Francisco, ed. lit. II. SERIE
51:37.013

V SIMPOSIO SEIEM

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I:

PRUEBA Y DEMOSTRACION: RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

CUATRO CUESTIONES EN TORNO AL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

MARCELINO J. IBAÑES JALÓN

Universidad de Valladolid

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

CUATRO CUESTIONES EN TORNO AL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

❧

MARCELINO J. IBAÑES JALÓN
Universidad de Valladolid

RESUMEN

En este trabajo pretendemos dar respuesta a algunas cuestiones que surgen al reflexionar sobre el aprendizaje -en el ámbito del bachillerato- de la demostración matemática. En particular:

- ¿En qué consiste entender las demostraciones matemáticas?
- ¿Qué clase de pruebas convencen a nuestros alumnos?
- ¿Reconocen los alumnos las demostraciones matemáticas?
- ¿Cómo influye la manera de redactar los enunciados de los teoremas en su comprensión por parte de los alumnos?

ABSTRACT

In this work we propose some topics to investigate the pupil's understanding of mathematical proof. First of all we present a general view of what represents the understanding of a proof. Then we perform partially the plan starting from the pupil's *proof scheme* (Harel and Sowder). As the original idea of these authors seems to be insufficient, we propose a new concept of *proof scheme* which comprises several *modalities* and it takes into account the roles and *functions* of proofs (De Villiers). This study leads us in a natural way towards two others aspects: the *recognition* of mathematical processes and the influence of certain expressions.

¿EN QUÉ CONSISTE ENTENDER LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS?

En el aprendizaje de la demostración pueden considerarse, en principio, dos tipos de actividades: *entender* demostraciones y *hacer* demostraciones; aquí atenderemos a las primeras. Desde nuestra experiencia docente e investigadora –Ibañes (1997, 2001a y 2001b) e Ibañes y Ortega (1997)-, enriquecida con las valiosas aportaciones de otros investigadores –principalmente: Alibert y Thomas (1991), Arsac (1988), van Asch (1993), Balacheff (1982, 1987), Bell (1976, 1977), Blum y Kirsch (1991), Chazan (1993), van Dormolen (1977), Dreyfus (1999), Duval (1991), Fischbein (1982), Galbraith (1981), Hanna (1989, 1989b, 1990, 1995, 1996), Hanna y Jahnke (1996), Harel y Sowder (1998), Hersh (1993), Martin y Harel (1989), Martínez Recio (1999), Miyazaki (2000), Moore (1994), Movshovitz-Hadar (1996), Porteous (1990), Semadeni (1984), Senk (1985, 1989), y de Villiers (1993)-, nos permitimos señalar, a continuación, algunas condiciones que contribuyen a la comprensión de este procedimiento matemático.

En primer lugar, es necesario *comprender el enunciado*, lo que incluye varios aspectos: unos *matemáticos* (comprender los términos matemáticos empleados, darse cuenta de la necesidad de las hipótesis, reconocer el *significado* del teorema: relación con otros resultados, interpretación gráfica, importancia práctica, etcétera); otros pueden considerarse *lógicos* (interpretar correctamente las proposiciones utilizadas -en particular, las *condicionales*-, identificar la hipótesis y la tesis, identificar el *tipo* de enunciado -Ibañes y Ortega (1997)-, …); por fin, los hay *semánticos* (interpretar correctamente expresiones usuales, unas del lenguaje ordinario –*todo*, *cualquiera*, …- y otras más específicas, como *condición necesaria*, *condición suficiente*, etcétera).

Así mismo, resulta imprescindible *entender los pasos* de la demostración. Y, en esta tarea también entran en juego aspectos *matemáticos* (comprender los términos matemáticos empleados, recordar resultados -conceptos, teoremas, algoritmos- anteriores y relacionarlos oportunamente con la proposición objeto de estudio, etcétera), *lógicos* (interpretar correctamente las proposiciones, aplicar correctamente las reglas de inferencia -en particular, el *modus ponendo ponens* y el *modus tollendo tollens*-, etcétera), y *semánticos* (utilizar adecuadamente las *palabras de enlace* –"así", "ya que", "luego", etcétera-, interpretar correctamente la notación utilizada, etcétera).

Pero, no basta con lo anterior, sino que también hay que *comprender globalmente* la demostración. Esto significa *comprender el razonamiento* empleado, para lo que es necesario poseer el *esquema de prueba* adecuado que permita: ser consciente de la necesidad de un razonamiento *universalmente válido*; la *identificación* del proceso -dada una demostración de una determinada proposición, reconocer que, efectivamente, se trata de una demostración- y su *distinción* –diferenciar una demostración de otros procesos matemáticos, como justificaciones, cálculos, etcétera-; y el reconocimiento de las *líneas maestras* y las *ideas clave* de la demostración. Pero, comprender globalmente la demostración también significa *comprender los recursos* utilizados - *métodos*, *estilos* y *modos*- y *comprender los fines* -valorar las *funciones* que cumple la demostración estudiada-.

Por último, para comprender las demostraciones resulta útil dominar algunos *recursos auxiliares*, como los de *cálculo*, los de *visualización*, o los recursos de *analogía* (geométricos, mecánicos, etcétera).

¿QUÉ CLASE DE PRUEBAS CONVENCEN A NUESTROS ALUMNOS?

Responderemos a esta cuestión -y a las siguientes-, a la luz de nuestra investigación –Ibañes (2001b)- con alumnos de primer curso de bachillerato. Esta investigación parte del estudio del esquema de prueba de los alumnos -Harel y Sowder (1998)- pues consideramos que éste juega un papel esencial en la comprensión de las demostraciones.

Harel y Sowder, definen: *"A person's proof squeme consist of what constitutes ascertaining and persuading for that person"*, y clasifican estos *esquemas de prueba* en: esquemas de *convicción externa*, *empíricos* y *analíticos*. Y, cada uno de ellos los subdividen varias clases, las principales de las cuales se citan en la tabla 1.

Esquemas de prueba		
De convicción externa	*Empíricos*	*Analíticos*
Rituales *Autoritarios* *Simbólicos*	*Inductivos* *Perceptuales*	*Transformacionales* *Axiomáticos*

Tabla 1. Principales esquemas de prueba, según Harel y Sowder.

Nosotros, analizando las respuestas de nuestros alumnos, hemos adaptado la anterior clasificación a la realidad que hemos encontrado, resultando la de la tabla 2:

<table>
<tr><th colspan="5">Esquemas de prueba</th></tr>
<tr><td rowspan="7">De convicción externa (E1)</td><td colspan="2">Empíricos</td><td colspan="2">Analíticos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Experimentales (E2)</td><td colspan="2">Transformacionales (E4)</td></tr>
<tr><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inductivos (E3)</td><td>Particulares</td><td>Generales</td></tr>
<tr><td>Falsos</td><td>Auténticos</td><td>Incompletos</td><td>Completos</td></tr>
<tr><td>De un caso (E3.1)</td><td>De varios casos (E3.2)</td><td colspan="2" rowspan="2">Intuitivo-Axiomáticos (E5)</td></tr>
<tr><td>No Sistemáticos</td><td>Sistemáticos (E3.3)</td></tr>
</table>

Tabla 2. Esquemas de prueba utilizados en nuestra investigación.

Por un lado, no precisamos todas las subclases que describen Harel y Sowder, por lo que se suprimen las innecesarias. Y, por otro lado, nos conviene definir nuevas subcategorías, que se relacionan a continuación, ilustrándolas con la transcripción de algunas respuestas de los alumnos a uno de los problemas que se les propuso: *justifica que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º*.

Así, entre los esquemas *empíricos* se introducen los *experimentales* (E2), porque se han encontrado alumnos que precisan de la manipulación física –real o virtual- para llevar a cabo su argumentación. Según las características del procedimiento que utilicen, estos últimos esquemas pueden dividirse en:

- Experimental *estático*:

"Se miden con un transportador de ángulos cada ángulo, y su suma tiene que dar 180º."

- Experimental *dinámico*:

"Si tenemos un triángulo cualquiera, con un compás podemos ir poniéndolos sobre una recta. Cogiendo un punto de la recta, vamos poniendo las mediciones de los ángulos una sobre la otra y, al final, nos llega a otro punto de la recta. Y nosotros sabemos que una recta tiene 180º."

Los esquemas de prueba *inductivos* (E3) se clasifican atendiendo a distintos criterios: a su interpretación, al número de casos y a la forma de seleccionarlos. Atendiendo a su interpretación por parte de los alumnos, pueden ser: *falsamente inductivos* -el alumno entiende la justificación de la proposición como su comprobación en algún caso-; o *inductivo auténticos* -el alumno comprueba la proposición en algún caso particular, siendo consciente de la necesidad de suponer su validez universal ante la imposibilidad práctica de realizar la comprobación en todos los casos-. Las respuestas inductivas que hemos encontrado al problema antes citado son, casi siempre, falsamente inductivas; sólo en algún caso se puede intuir que el alumno es medianamente consciente del método inductivo auténtico:

"La respuesta que voy a dar es válida para cualquier tipo de triángulo, pero lo he realizado sobre un triángulo isósceles, debido a la carencia de medios (transportador)."

Sin embargo, cuando el profesor ha expuesto -para su consideración y crítica- diversas pruebas del problema, ha habido alumnos que han rechazado las pruebas falsamente inductivas y admitido la auténtica.

Atendiendo al número de casos considerado, pueden realizarse sobre un solo caso particular o sobre varios casos, resultando los esquemas:

- Inductivo *de un caso* (E3.1):

"Se demuestra con un ejemplo". Elvira dibuja al lado un triángulo equilátero, marca los ángulos con medidas de 60º y dice que la suma es 180º.

- Inductivo *de varios casos* (E3.2):

Leticia justifica el resultado dibujando un triángulo equilátero y otro isósceles rectángulo, señala la medida de sus ángulos y, en ambos casos, resalta que la suma es 180º.

Soledad argumenta: "Haciendo muchos triángulos, con distintos ángulos cada vez, midiéndolos y viendo que siempre su suma es igual a 180º".

La selección de casos puede hacerse atendiendo a un criterio, dando lugar al esquema inductivo *sistemático* (E3.3), o sin que haya un criterio definido, lo que supone un esquema *no sistemático*. Con los primeros ocurre lo mismo que con los auténticos: no hay esquemas sistemáticos en las respuestas inductivas que hemos encontrado al problema, pero ha habido alumnos que han rechazado las pruebas no sistemáticas expuestas por el profesor, al tiempo que aceptaban la sistemática.

El esquema de prueba *transformacional* (E4) también se clasifica atendiendo al procedimiento, a su extensión, o a su grado de corrección. Atendiendo al procedimiento:

- Transformacional *estático*:

Susana dibuja un triángulo, desde un vértice prolonga uno de los lados que inciden en él y traza una paralela al lado opuesto, resultando la figura 1.

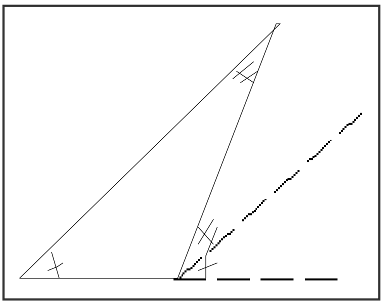


Figura 1

- Transformacional *dinámico*:

"Cogiendo un ángulo fijo y variando los otros dos, vemos que la suma de los tres ángulos del triángulo da 180º, tal y como vemos a continuación".

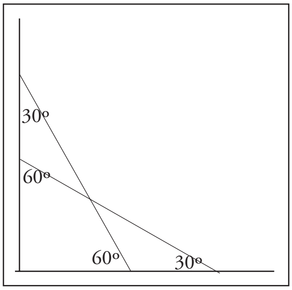


Figura 2

Atendiendo a su extensión puede ser: *particular* –si razona sobre un objeto particular- o *general* –si razona con elementos genéricos-. Y, atendiendo a su grado de corrección: *incompleto* -el razonamiento es incompleto o incorrecto- o *completo* -el razonamiento es completo y correcto-. A continuación, a título de ejemplos, se exponen un razonamiento particular completo y uno general completo:

"En un cuadrado vemos que todos los ángulos miden 90º; si trazamos la diagonal nos salen dos triángulos iguales. Si la suma de los ángulos del cuadrado es 360º, la de los triángulos deberá ser la mitad (180º). Ramón acompaña el dibujo de la figura 3.

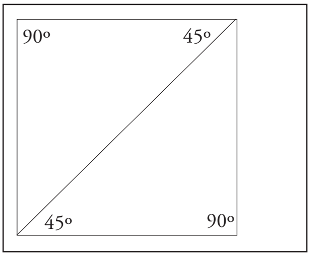


Figura 3

"Primero construimos un triángulo cualquiera ABC, y con él dibujamos un paralelogramo con BD de diagonal; entonces alargamos la base y sabemos que A=A' ya que el lado AB es paralelo a DC. Pero para completar el ángulo llano, el ángulo que nos queda tiene que ser igual a B, ya que los otros dos son C y A=A'." Itzíar acompaña el dibujo de la figura 4.

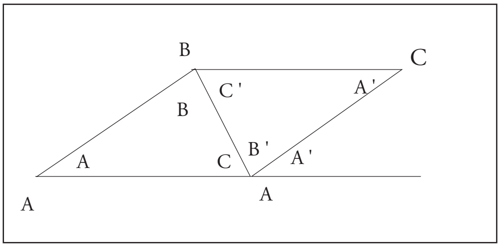


Figura 4

Por otra parte, en nuestra investigación hemos observado que *lo que constituye comprobación y convencimiento* para nuestros alumnos de bachillerato no es algo fijo y determinado, sino variable. Y, esta variedad se manifiesta:

- En la amplia gama de esquemas de prueba exhibidos por los alumnos, coincidiendo con lo que también hace constar Martínez Recio (1999, página 236).
- En la abundancia de respuestas -de una misma persona- que presentan rasgos de distintos esquemas de prueba. Esta peculiaridad ha sido ya descrita por otros investigadores; por ejemplo, Martin y Harel (1989), refiriéndose a los argumentos inductivos y deductivos, aunque con otro tipo de alumnos, señalan en la página 49:

> "Acceptance of inductive and deductive arguments as mathematical proofs was not found to be mutually exclusive. This suggests that the inductive frame, wich is constructed at an earlier stage than the deductive frame, is not deleted from memory when students acquire the deductive frame. Moreover, the everyday experience of forming and evaluating hypotheses by using evidence to support or refute them serves to reinforce the inductive frame. Thus, as our results indicate, inductive and deductive frames exist simultaneusly in many students. The findings of Fischbein and Kedem (1982) suggest a further relationship between these two frames. They found that many students who were convinced by deductive proof still wanted further empirical verification. This suggests that the activation of both the deductive and the inductive proof frames may be required for students to believe a particular conclusion."

- El escaso número de alumnos que repiten el mismo esquema de prueba para resolver distintos problemas.

Todo esto nos hizo ver que los alumnos de este nivel se encuentran en un estado de transición bajo la influencia de distintos esquemas, no siendo plenamente conscientes ni de sus diferencias ni de sus limitaciones; y, por consiguiente, utilizan uno u otro según las peculiaridades de lo que se les propone, o, incluso, emplean varios al mismo tiempo. En consecuencia, no parece conveniente –en principio- hablar del esquema de prueba de tal alumno, sino del esquema que ha *utilizado* (EsU) para resolver un problema determinado. Además, a lo largo de la investigación se introducen otras modalidades que enriquecen y completan la idea previa de esquema de prueba. Pero, antes de exponerlas, digamos que se propusieron –sucesivamente- a los alumnos del grupo experimental, para su aceptación o rechazo, cinco pruebas del teorema *"la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º"*, que corresponden a los esquemas: inductivo de un caso (E3.1), inductivo de varios casos (E3.2), inductivo sistemático (E3.3), transformacional (E4), e intuitivo axiomático (E5). Pues bien:

- Si una determinada prueba es aceptada por el alumno como demostración, se habla de esquema *aceptado* (EsA).
- Si el alumno, además de aceptar la prueba, rechaza explícitamente las anteriormente expuestas, se considera que el esquema está *adherido* (EsAd).
- Cuando se pregunta al alumno sobre su interpretación de lo que significa *demostrar*, tenemos su esquema *declarado* (EsD), que no tiene por qué coincidir ni con su esquema utilizado ni con el aceptado.
- En la secuencia de las cinco pruebas propuestas hemos llamado esquema *inicial* (EsI) al primero de los esquemas aceptados y esquema *final* (EsF) al último de los adheridos, para cada alumno.

Así pues, parece natural que, para asignar un determinado esquema de prueba a un estudiante, se exija algo más que éste lo haya utilizado o aceptado en alguna ocasión. Por ejemplo, el esquema *asignado* en un momento dado podría ser el último de los adheridos en ese momento.

Del análisis de las respuestas de los alumnos merece destacarse lo siguiente:

1. El 50% de los estudiantes acepta la primera prueba -inductiva de un caso-.

2. Después, se da una aceptación creciente de los sucesivos esquemas de prueba propuestos -que culmina con la aceptación universal del esquema intuitivo axiomático-, pero coexistiendo –en algunos alumnos- los esquemas inductivos y los analíticos.

3. A lo largo del proceso, la adhesión a los esquemas inductivos va cediendo en favor de otros esquemas inductivos más avanzados y, finalmente, de los analíticos.

4. No obstante lo anteriormente dicho, los esquemas inductivos se mostraron muy *enraizados* (no se renuncia a ellos); en particular el de un caso, pues es el que más adhesiones conserva al final del proceso en relación con las que tenía al principio.

5. El proceso ha servido para que los alumnos mejoren su esquema de prueba, ya que el 61% de ellos han experimentado una evolución positiva. Además, mientras que sólo el 17% de los alumnos rechazan inicialmente los esquemas inductivos, al final del proceso lo hacen el 56% de ellos.

Otro aspecto a tener en cuenta son las *funciones* -de Villiers (1993)- que cumple una prueba o demostración. Hanna (1989b) distingue entre "demostraciones que prueban" y "demostraciones que explican". Pues bien, nosotros hemos encontrado que las pruebas con mayores cualidades explicativas son las que más convencen a nuestros alumnos. Como testimonio de las de las múltiples muestras de reconocimiento de las cualidades de explicación –o de su carencia- en las pruebas expuestas, a continuación se transcriben los comentarios espontáneos (no se había preguntado por ello) de algunos alumnos:

> "Queda probado, pero no queda explicado por qué es así".
> "Sí. Queda mejor probado que en las hojas anteriores, aunque todavía no explica por qué los tres ángulos interiores suman 180º".
> "Aquí se prueba que es verdad y, aunque no del todo, se aproxima a explicar de donde procede el teorema".
> "Es la única de las cuatro hojas que explica por qué; por lo tanto no se puede poner ninguna pega".
> "Utiliza el mismo razonamiento de la hoja anterior, pero explicando y razonando las relaciones entre los ángulos."

Resumiendo todo lo anterior, se concluye que la clase de pruebas que convencen a una persona depende de su esquema de prueba. Pero, en el caso de los alumnos de bachillerato no es sencillo determinar éste, ya que se encuentran en un estado de transición entre los inductivos y los analíticos, presentándose los primeros fuertemente enraizados. Por otra parte, el valor explicativo de las pruebas influye en su capacidad de convencimiento, por lo que los profesores deberíamos esforzarnos en exponer pruebas que expliquen.

¿RECONOCEN LOS ALUMNOS LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS?

Reconocer las demostraciones incluye -Ibañes (2001)- *distinguirlas* de otros procesos e *identificarlas* cuando se está en presencia de una de ellas. Además, también significa *ser consciente de sus consecuencias*; por ejemplo, que se debe *aplicar el resultado* cuando proceda, que no se precisa de *posteriores comprobacio-*

nes, que resulta imposible encontrar *contra-ejemplos*, etcétera. En este apartado expondremos los resultados que hemos obtenido en el reconocimiento de procesos por parte de alumnos de primer curso de bachillerato en la citada investigación.

Para la *distinción* de procesos se propusieron a los alumnos, en distintas fases de la investigación, tres cuestiones. En la primera se les pidió que revisaran en sus apuntes las pruebas expuestas en clase en el tema de Trigonometría, y decidieran si se trataban, o no, de demostraciones -el profesor había justificado los teoremas correspondientes a esta teoría utilizando indistintamente *comprobaciones* o *demostraciones*-. El análisis de las respuestas de los alumnos se resume en los siguientes puntos:

1. Cuando el proceso expuesto se trata de una demostración, la mayoría de los alumnos (76%) responden acertadamente que lo es. Sin embargo, las razones aducidas para explicar esta elección no son siempre las más convenientes, ya que mientras algunos basan su respuesta en el *razonamiento* empleado (R), otros lo hacen en las *funciones* que observan en el proceso expuesto (F), o en aspectos *externos* (E).

2. Cuando el proceso no es una demostración, la mayoría de los alumnos (57%) responden equivocadamente que se trata de una demostración. Además, los que aciertan no siempre lo hacen con razones suficientes –igual que en el caso anterior-.

3. Las respuestas equivocadas -tanto en las demostraciones como en las comprobaciones- han sido propiciadas, en muchas ocasiones, por la influencia de los *esquemas de prueba inductivos* en los alumnos de este nivel.

En la segunda cuestión se exponen cinco procesos matemáticos, y se pide señalar cuál es la demostración que se encuentra entre ellos. El primero se trata de un cálculo, el segundo es una demostración, el tercero una definición, el cuarto es el enunciado de una proposición y el quinto constituye una comprobación mediante un ejemplo. El análisis de las respuestas de los alumnos se resume en los siguientes puntos:

1. Aciertan el 27% de los alumnos eligiendo el segundo proceso, mientras que la mayoría (64%) elige el quinto proceso, poniendo de manifiesto –de nuevo- el arraigo de los esquemas de prueba inductivos.

2. Entre los alumnos que eligen el segundo proceso, el 71% se han fijado en la clase de razonamiento y el 57% en la función que cumple el proceso -algunos en ambos-. Y, de los que eligen el quinto proceso, el 21% se centra en la clase de razonamiento, el 86% en la función que cumple el proceso y el 5% en aspectos externos.

3. De los alumnos que se fijan en el razonamiento utilizado, el 63% acierta respondiendo que el segundo proceso es la demostración, mientras que el 94% de los estudiantes que se centran en la función que cumple, fallan al elegir otras opciones.

Con el fin de mejorar la capacidad de los alumnos en la distinción entre las demostraciones y las simples comprobaciones, se expusieron –durante un periodo lectivo de 50 minutos- distintos enunciados con sus justificaciones correspondientes (demostraciones o comprobaciones). A continuación, y para cada uno de ellos, se guió a los alumnos hacia la identificación del proceso mediante preguntas del siguiente tipo:

- ¿El enunciado se refiere a un objeto concreto o a todos los objetos de una determinada clase?
- El razonamiento que se hace a continuación, ¿vale para todos los objetos de esa clase o sólo para un objeto concreto?
- ¿Queda probada la propiedad considerada para todos los objetos de la clase?
- Por lo tanto, ¿queda así demostrado el teorema, si o no?

Dos semanas después se propuso la tercera cuestión, en la que, como en la segunda, se exponen cinco procesos matemáticos y se pide a los alumnos que señalen cuál es la demostración que se encuentran entre ellos. En esta ocasión el 85% de los alumnos acierta en elegir la demostración. Además, estos alumnos son, precisamente, los que se fijan en el razonamiento utilizado. Por otra parte, todos los estudiantes que acertaron en la cuestión anterior, también lo hacen esta vez.

Una especialización en la *distinción* de procesos consiste en su *identificación* (del proceso y de su enunciado). En este sentido, se propuso a los alumnos una cuestión en la que se demuestra que *uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera, se obtiene un paralelogramo*, y se les pregunta qué es lo que se ha hecho. A continuación se resume el análisis de sus respuestas.

1. En la identificación del proceso, los alumnos se distribuyen en distintos niveles de la manera siguiente:

- El 45% identifican el proceso como una demostración (P1):

"Demostrar que la unión de los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero forman un paralelogramo".

- También el 45% de los alumnos identifican el proceso como una comprobación o una explicación (P2):

"Hemos comprobado, con un ejemplo, que si unimos los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero, sale un paralelogramo".

- El 9% de los alumnos se limitan a describir el proceso (P3):

"En un cuadrilátero hemos dibujado dos triángulos … y hemos unido los puntos medios de los lados …"

2. En la identificación del enunciado se obtienen los siguientes niveles:

- El 27% de los alumnos dan un enunciado completo (E1):

"Uniendo los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero cualquiera, obtenemos un paralelogramo".

- El 14% da un enunciado incompleto (E2), que incluye sólo la conclusión:

"Una demostración de que *OLMN* es un paralelogramo".

- El 32% de los alumnos dan un enunciado incorrecto (E3):

"Al unir los puntos medios de dos de los lados de un triángulo, este segmento es paralelo al tercer lado".

- El 27% de los alumnos no proponen enunciado alguno (E4):

"Partiendo de un lema o ley que admitimos, se ha explicado otra ley".

Por último, pasamos a las consecuencias de haber demostrado un teorema. En relación a ellas se propusieron, en distintas fases de la investigación, tres cuestiones. El objetivo de la primera es observar cuál es la disposición que muestran los alumnos para *aplicar* un teorema. Se comienza con el enunciado y una demostración (indicando que así se hace) de la propiedad de los cuadriláteros antes citada. A continuación, se pide a los alumnos que dibujen un cuadrilátero cualquiera y unan los puntos medios de sus lados. Finalmente, se les pregunta si pueden afirmar que la figura obtenida es un paralelogramo *(a)*, que no lo es *(b)*, o que no tienen la suficiente información para decidir si lo es o no *(c)*. En lo que sigue se resume el análisis de sus respuestas.

1. Todos los alumnos (100%) eligen la opción *a*. Sin embargo, las justificaciones no son uniformes, sino que obedecen a distintas razones.

2. En primer lugar, el 32% de los alumnos afirman que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo, en aplicación del teorema que se acaba de demostrar (nivel DA1):

> "Se obtiene un paralelogramo porque en la demostración se explica, … siendo esta demostración aplicable a cualquier cuadrilátero …".

3. En un segundo nivel (DA2), se sitúa el 18% de los alumnos, los cuales argumentan que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo repitiendo –total o parcialmente- la construcción que se hace en la demostración:

> "Si trazamos las diagonales *AC* y *BD* se ve que *LM* y *ON* son paralelas a la primera y que *LO* y *MN* lo son a la segunda. De aquí se deduce que *MNLO* tiene sus lados paralelos y , por lo tanto, es un paralelogramo".

4. El 45% de los alumnos se sitúan en un tercer nivel (DA3), pues argumentan sobre el caso particular de su dibujo, sin hacer referencia alguna al teorema. Así pues, estos alumnos no son conscientes ni de la aplicabilidad del teorema ni de su procedimiento.

> "En el cuadrilátero que he hecho yo se ve que es un paralelogramo, aunque esté trazado sin escuadra …".

5. Además, el 5% de los estudiantes no justifica su elección (nivel DA4).

6. Sorprendentemente, excepto uno, todos los alumnos que aplicaron el teorema, es decir, los del nivel DA1, *hacen una posterior verificación* del mismo al referirse también a la situación particular de su dibujo.

> "Porque nos lo han demostrado arriba y porque se ve a simple vista que *LO* y *MN* son paralelos, igual que *LM* y *ON*".

En la literatura de la especialidad se encuentran otros investigadores que se han ocupado de este fenómeno. Por ejemplo, Fischbein (1982) obtuvo que sólo el 14'5% de los estudiantes de *high school* que encuestó fueron "consistentes hasta el final" en aceptar la validez de un teorema y de su demostración *sin sentir la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas*.

La reflexión sobre estos resultados nos llevó a impartir a los alumnos unas instrucciones sobre las *consecuencias* de demostrar un teorema, en particular: *la conveniencia de su aplicación, la improcedencia de ulteriores verificaciones y la imposibilidad de encontrar contra-ejemplos*. Con estos fines se enuncian y demuestran varios teoremas; después de cada uno de ellos, se pide dibujar un objeto concreto de los considerados en el enunciado, y se pregunta si se cumple para él la conclusión del teorema, proponiendo tres posibilidades:

- *Medir o realizar un cálculo con números concretos*.
- *Repetir los pasos de la demostración*.
- *Idear otro procedimiento*.

Para orientar en esta última alternativa, pasados unos minutos, se plantea lo siguiente:

- *¿El enunciado del teorema sirve para todos los objetos considerados o sólo para algunos?*
- *En particular, ¿sirve también para el objeto que dibujaste?*
- *Luego, ¿es cierto para tu objeto la conclusión del teorema?*

Por último, se pregunta:

- *¿Se podrá encontrar un objeto concreto para el que no se verifique el teorema?*

Dos semanas después se propusieron las cuestiones segunda y tercera. La segunda cuestión similar a la primera, aunque referida a otro teorema: *el segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un* *triángulo es paralelo al tercer lado*. En las respuestas, comparándolas con las de la primera, se observa un importante aumento en el nivel DA1 (del 32% al 50%), con el consiguiente retroceso de los niveles menos cualificados. Además, disminuyen notablemente (del 27% al 5%) aquellos alumnos que, después de haber aplicado el teorema, precisan de *ulterior verificación*.

La tercera cuestión se refiere a la *imposibilidad de encontrar contra-ejemplos* para un teorema demostrado. En esta cuestión los estudiantes tienen a la vista el mismo teorema que en la anterior, y se les pregunta si podrían encontrar un triángulo en el que, uniendo los puntos medios de dos de sus lados, el segmento resultante no sea paralelo al tercer lado. El análisis de las respuestas se resume en los siguientes puntos:

1. El 85% de los alumnos coinciden en la imposibilidad de encontrar el mencionado triángulo, aunque las justificaciones no son uniformes, sino que obedecen a distintas razones que se han clasificado en los siguientes niveles de respuesta:

- Declara la imposibilidad en virtud de la aplicación del teorema (CE1).
- Declara la imposibilidad en virtud del procedimiento empleado en su demostración (CE2).
- Declara la imposibilidad en virtud de argumentos al margen del teorema (CE3).
- Tiene dudas sobre si es posible o no (CE4).
- Piensa que es posible encontrar contra-ejemplos (CE5).
- No justifica la respuesta (CE6).

2. La distribución de para cada nivel de respuesta se muestra en la tabla 3.

CE1	*CE2*	*CE3*	*CE4*	*CE5*	*CE6*
55%	0%	25%	15%	0%	5%

Tabla 3. Porcentajes correspondientes a cada nivel de respuesta en ambos grupos.

3. A continuación se incluyen algunas citas de las justificaciones dadas por los alumnos, que se corresponden con los niveles antes definidos:

"No, porque el teorema sirve para todos los casos".

"Porque siempre va a determinar un paralelogramo al trazar la paralela a uno de los lados".

"Porque aunque el triángulo lo hagas muy obtuso, la hipotenusa te dará más grande, y el punto medio pasará por la paralela de la base".

"No sé si se podría encontrar porque no sé si el teorema sirve para todos los triángulos o tiene excepciones".

"Sí, porque si tú, cuando prolongas los lados de un triángulo, encuentras el punto medio de esos lados y trazas la recta, ésta no tiene por qué ser paralela (al tercer lado)".

4. Si se considera el *esquema* de prueba de los estudiantes, se obtiene que mientras que el 89% de los alumnos que acreditaron un esquema *analítico* son conscientes de la imposibilidad de encontrar un contra-ejemplo, lo son tan sólo el 29% de los que no lograron traspasar los esquemas *inductivos*.

¿CÓMO INFLUYE LA MANERA DE REDACTAR LOS ENUNCIADOS DE LOS TEOREMAS EN SU COMPRENSIÓN POR PARTE DE LOS ALUMNOS?

La comprensión del lenguaje, y su correcta utilización, constituyen uno de los requisitos más importantes para el aprendizaje de las matemáticas. Por eso no es de extrañar que la inclusión de determinadas *expresiones* –del lenguaje usual o del más específico de las matemáticas- en el enunciado de los teoremas influya en su comprensión por parte de los alumnos.

Algunas palabras del lenguaje usual cuyo significado preciso depende de la lógica constituyen un claro ejemplo de las expresiones que causan más dificultades de interpretación. Son el caso de las específicas de la *lógica de proposiciones*, sobre la que actualmente estamos finalizando una investigación. En Ibañes (2001) se estudia la influencia de algunas expresiones de uso más común, entre las muchas que pueden emplearse. En una primera cuestión se proponen los siguientes tres enunciados:

a) La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

b) La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es 180º.

c) La suma de las medidas de los ángulos interiores de todo triángulo es 180º.

Se pregunta si significan lo mismo y, en caso contrario, que expliquen las diferencias. El análisis de las respuestas puede resumirse en los siguientes puntos:

1. El 55% de los alumnos contesta afirmativamente y el 45% responde que no.

"Sí. En el primer enunciado, al poner "un triángulo" nos referimos a cualquier triángulo, ya que si no, deberíamos especificar a qué triángulos nos referimos. Y al decir en el segundo "cualquiera", estamos refiriéndonos a todos los triángulos".

"No. Mientras el primero habla de un triángulo en concreto, el segundo habla de un triángulo cualquiera, y el tercero explica que se cumple para todo triángulo, no uno sólo ni elegido al azar".

2. Entre los que consideran que los tres enunciados significan lo mismo (IIT), no todos se sienten completamente seguros, sino que algunos alumnos expresan sus dudas o matices, e incluso proponen enunciados alternativos:

"Sí, aunque hay pequeñas diferencias a lo último de las frases. En el primer caso especifica a *uno*, en el segundo dice *cualquier*, y en el último *todos*. Pero todas quieren decir que *en cualquier triángulo la suma de sus ángulos interiores es 180º*".

3. Entre los que responden negativamente, algunos diferencian el primer enunciado de los otros dos (IID) y otros consideran distintos los tres enunciados (IDT).

"No. Porque la primera se refiere a un triángulo concreto, y los otros dos generalizan utilizando palabras como *todo* y *cualquiera*".

"No. La primera afirmación sólo se refiere a un triángulo. La segunda se refiere a cualquiera, pero no generaliza. La tercera afirmación generaliza y se puede tomar como ley".

4. Los errores de interpretación más extendidos fueron:

- Que el enunciado *a)* se refiere a *un triángulo concreto* (TTC).
- Que el enunciado *b)* se refiere a *un triángulo tomado al azar* (TTA).

En la segunda cuestión se pide a los alumnos justificar el mismo resultado, aunque en el enunciado se utilizó la expresión *todos los triángulos* (TT): *"en todos los triángulos, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180º"*. En el estudio de los *esquemas de prueba* (apartado 2), se había propuesto el mismo problema con la expresión *un triángulo* (UT). Las diferencias que se han apreciado entre ambas situaciones (UT y TT) son:

1. Aparecen esquemas de convicción externa (CE) -0% con UT y 23% con TT-, probablemente porque probar el resultado para *todos los triángulos* supone un reto demasiado importante como para que estos alumnos lo afronten con sus propios recursos, por lo que necesitarían *recordar* lo que se dijo en clase.

2. Se triplica el porcentaje de alumnos que consideran varios casos -pasa del 18% con UT al 59% con TT-, lo que parece una consecuencia clara de la petición de una prueba universal.

3. Contrariamente a lo que cabía esperar, aumenta el porcentaje de los esquemas inductivos (Ind) -del 11% con UT al 23% con TT-, y disminuye el de los analíticos (Ana) -del 56% con UT al 32% con TT-. La razón puede ser ésta: todavía no está al alcance de los alumnos de primer curso de bachillerato hacer por sí solos un razonamiento universal, por lo que la reacción de la mayoría a la petición de que se pruebe el enunciado para *todos los triángulos* consiste en considerar varios casos, produciendo como consecuencia la proliferación de esquemas inductivos.

4. Martínez Recio (1999, página 238) crea una situación análoga a la nuestra al informar a parte de los alumnos encuestados sobre las características de la demostración matemática, obteniendo, en contra de lo que esperaba, que las respuestas de esos estudiantes –de primer curso de universidad- no son mejores que las del resto. Creemos que el comentario anterior también sirve para explicar esta aparente contradicción.

Por otra parte, hay varios *tipos* -Ibañes y Ortega (1997)- de enunciados de teoremas matemáticos: *de condición necesaria, de condición suficiente*, y *de condición necesaria y suficiente*. Y, esos enunciados pueden contener o no expresiones más o menos específicas del lenguaje matemático. Así, los de los dos primeros tipos se enuncian utilizando la expresión más usual *si…, entonces*, o bien, incluyendo las expresiones *una condición necesaria* o *una condición suficiente*. Y, los del tercer tipo podrían enunciarse en la forma *si…; y recíprocamente…*, o con las expresiones más específicas *una condición necesaria y suficiente* o *si, y sólo si,…* Todas estas expresiones son frecuentes en las clases de Matemáticas. Pues bien, en Ibañes (2001) hemos propuesto dos cuestiones con el objeto de observar cómo entienden los estudiantes esta clase de expresiones.

En la primera cuestión se enuncian cuatro teoremas que relacionan los paralelogramos con la propiedad de sus diagonales de dividirse mutuamente en segmentos iguales, empleando las expresiones: *si…, y, recíprocamente…*; *una condición necesaria*; *una condición suficiente*; y *si, y sólo si,* por este orden. Después de cada enunciado se sugieren cuatro posibilidades para demostrarlo, de los que los alumnos debían elegir la correcta. El análisis de las respuestas puede resumirse en los siguientes puntos:

1. Los alumnos interpretan correctamente la expresión *si…, y recíprocamente,* pero tienen muchas dificultades en la interpretación de las otras expresiones utilizadas, por lo que incurren en diversos errores tales como considerar sólo una condición (*So*) -en los teoremas de *condición necesaria y suficiente*-, identificar la proposición con su recíproca (*IdRe*) -cuando el teorema es de un solo sentido-, o duplicar la condición (*DuCo*)–también cuando el teorema es de un solo sentido-.

2. Los enunciados de condición necesaria y suficiente son entendidos por los alumnos mucho mejor cuando emplean la expresión *si…, y recíprocamente* (100% de respuestas correctas), que cuando incluyen la expresión *si, y sólo si* (38%).

3. Se observa en los alumnos cierta tendencia a interpretar los enunciados como de *condición suficiente*. En efecto, en el teorema *2*, la mitad comete el error de identificar el enunciado con la proposición recíproca (IdRe), que es, precisamente, la condición suficiente. Además, en el teorema *4*, la opción más elegida es la que supone reducir el enunciado a la condición suficiente (So). Por otra parte, parece que entienden mejor esta condición que la necesaria, dada la diferencia entre los que eligen la opción correcta en los teoremas *2* y *3* (14% y 52%, respectivamente).

Al reflexionar sobre estos resultados, el equipo investigador diseñó unas instrucciones que se basaban en transformar gradualmente los enunciados que incluyen estas de expresiones en otros más asequibles, empleando para ello tres fases:

1. Modificar ligeramente la expresión de manera que sea más intuitiva (*Dicho de otra forma*).
2. Escribir el enunciado resultante en la forma *si …, entonces*.
3. Indicar la estrategia a seguir para demostrarlo (*Lo que hay que hacer*).

A continuación se detallan estas fases en un ejemplo:

Teorema: Una ***condición necesaria*** *para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es que sus diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales.*

Dicho de otra forma:

Si un cuadrilátero es un paralelogramo, ***necesariamente*** *sus diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales.*

Escrito en la forma *si ..., entonces*:

Si *un cuadrilátero es un paralelogramo,* ***entonces*** *sus diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales.*

Lo que hay que hacer para demostrarlo:

Considerar *un paralelogramo cualquiera y* ***demostrar*** *que sus diagonales se cortan mutuamente en segmentos iguales.*

Pasadas dos semanas, se propuso la segunda cuestión –similar a la primera-, en la que se enuncian tres teoremas que utilizan, respectivamente, las expresiones: *una condición necesaria* (CN); *una condición suficiente* (CS); y *si, y sólo si* (CNS),. El análisis de las respuestas se resume en los siguientes puntos:

1. La interpretación de los distintos enunciados ha evolucionado de manera muy favorable. Esto se constata tanto en la variación de las respuestas correctas de los alumnos del grupo experimental (G.E.), como en la comparación de estos resultados con los obtenidos en un grupo de control (G.C.), como puede observarse en la tabla 4.

		CN	*CS*	*CNS*
G.E.	*Cuestión 1*	14%	52%	38%
	Cuestión 2	68%	82%	86%
G.C.	*Cuestión 2*	25%	40%	55%

Tabla 4. Evolución de los porcentajes de respuestas correctas en los distintos teoremas.

2. Paralelamente, los errores observados en la primera cuestión se han reducido hasta casi desaparecer en el grupo experimental.

3. Los propios alumnos han propuesto, en entrevistas celebradas posteriormente, expresiones equivalentes a las antes citadas, que ellos entienden mejor. Por ejemplo, en lugar de *una condición necesaria*, proponen utilizar *para…, hace falta…*, o bien, *lo que necesitas para…, es que…*, y en lugar de *una condición suficiente* proponen utilizar *para que…, bastaría que…*

REFERENCIAS

ALIBERT, D. y THOMAS, M. (1991). "Research on mathematical proof". En Tall (Editor): *Advanced mathematical Thinking*, 215-230. Kluwer Academic Publishers.

ARSAC, G. (1988). "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 247-280.

van ASH, A.G. (1993). "To prove, why and how?". *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.

BALACHEFF, N. (1982). "Preuve et démonstration en mathematique au college". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 261-304.

BALACHEFF, N. (1987). "Processus de preuve et situations de validation". *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

BELL, A. W. (1976). "A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations". *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

BELL, A. W. (1977). "The learning of process aspects of mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 10, 361-387.

BLUM, W. y KIRSCH, A. (1991). "Preformal proving: examples and reflections". *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183-203.

CHAZAN, D. (1993). "High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof". *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359-387.

van DORMOLEN, J. (1977). "Learning to understand what giving a proof really means". *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.

DREYFUS, T. (1999). "Why Johnny can't prove". *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85-109.

DUVAL, R. (1991). "Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration". *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

FISCHBEIN, E. (1982). "Intuition and Proof". *For the learning of Mathematics*. 3, 2, 9-18 y 24.

GALBRAITH, P.L. (1981). "Aspects of proving: a clinical investigation of process". *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1-28.

HANNA, G. (1989 a). "More than Formal Proof". *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.

HANNA, G. (1989 b). "Proofs that prove and proofs that explain". *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, 45-51. París.

HANNA, G. (1990). "Some pedagogical aspects of proof". *Interchange*, 21, 6-13.

HANNA, G. (1995). "Challenges to the Importance of Proof". *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.

HANNA, G. (1996). "The ougoing value of proof". En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 1-14. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

HANNA, G. Y JAHNKE, H.N. (1996). "Proof and proving". En Bishop, A.J. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (páginas 887-908).

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283 . American Mathematical Society, Providence, USA.

HERSH, R. (1993). "Proving is convencing and explaining". *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.

IBAÑES, M. (1997). "Alumnos de Bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones". *Uno*, 13, 95-101. Barcelona.

IBAÑES, M. (2001a). "Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento". *Actas del 5º seminario Regional de Educación Matemática. Toro, 1998*. Zamora.

IBAÑES, M. (2001b). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Dirigida por *Tomás Ortega*.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1997). "La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria". *Educación Matemática*, 9, 2, 65-104.

MARTIN, W. G. y HAREL, G. (1989). "Proof frames of preservice elementary teachers". *Journal for Research in Mathematics Education*. 20, 1, 41-51.

MARTÍNEZ RECIO, Á. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

MIYAZAKI, M. (2000). "Levels of proof in lower secondary school mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 41, 47-68.

MOORE, R.C. (1994). "Making the transition to formal proof". *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

MOVSHOVITZ-HADAR (1996). "On striking a balance between formal and informal proofs". En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 43-52. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

PORTEOUS, K. (1990). "What do children really believe?". *Educational Studies in Mathematics*, 21, 589-598.

SEMADENI, Z. (1984). "Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training". *For the Learning of Mathematicas*, 4(1), 32-34.

SENK, S.L. (1985). "How well do students write geometry proofs?". *Mathematics Teacher*, 78, 448-476.

SENK, S.L. (1989). "Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs". *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 309-321.

de VILLIERS, M. (1993). "El papel y la función de la demostración en matemáticas". *Épsilon*, 26, 15-30. Original de 1990.

LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA. UNA APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA Y DIDÁCTICA

ANGEL MARTÍNEZ RECIO
Universidad de Córdoba

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA. UNA APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA Y DIDÁCTICA

❧

ANGEL MARTÍNEZ RECIO
Universidad de Córdoba

RESUMEN

En este artículo se considera la demostración matemática como un objeto complejo que admite distintas interpretaciones y dimensiones. Dentro de la institución matemática, la interpretación dominante es la consideración de la demostración como demostración deductiva, formal. Pero esa interpretación, además de limitada desde un punto de vista epistemológico, comporta importantes dificultades para los estudiantes de distintos niveles educativos, incluido el universitario, que manifiestan una gama variada de esquemas personales de demostración. Atendiendo a dichas razones epistemológicas y didácticas, se propone revisar la interpretación formalista de la demostración matemática, flexibilizar su significado, dando cabida en él a otras formas de argumentación -también utilizadas por los matemáticos al hacer sus demostraciones-, más cercanas a las prácticas reales de los estudiantes.

ABSTRACT

In this paper mathematical proof is considered as a complex object which admits different interpretations and dimensions. Inside the mathematical institution, the dominant interpretation is the consideration of proof exclusively as deductive, formal proof. But that interpretation, besides limited from a epistemological point of view, presents important difficulties for the students of different educational levels (including university student), who show a great variety of personal proof schemes. Taking into account these epistemological and didactic reasons, the formal interpretation of mathematical proof is proposed to be reviewed, considering mathematical proof as a more flexible object, in which other forms of argumentations are included -also used by mathematicians in their proofs-, closer to the real daily life activities of students

SIGNIFICADOS DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA. NECESIDAD DE UNA REVISIÓN CONCEPTUAL

Introducción

Aunque se trata de un objeto complejo, que admite diferentes interpretaciones, la demostración matemática aparece para muchos matemáticos como demostración deductiva formalizada, que es el modelo para ellos de demostración rigurosa. Un modelo que está ligado a la concepción que buena parte de los matemáticos tiene de la propia matemática: una disciplina abstracta, cuyos teoremas se deducen de conjuntos establecidos de axiomas, mediante razonamientos estrictamente lógicos. La axiomatización garantiza el rigor. Dieudonné (1987, p. 206) sintetiza esta idea diciendo: *"no puede haber demostración 'rigurosa' excepto en el contexto de una teoría axiomática"*.

Sin embargo, la aplicación de la demostración formal en el ámbito escolar está actualmente cuestionada, dadas las dificultades que comporta para los estudiantes, de acuerdo con diferentes investigaciones desarrolladas en las últimas décadas.

Fischbein (1982, p. 16), investigando sobre una muestra de 400 estudiantes de secundaria en Tel Aviv cómo distinguían entre demostración empírica y formal encontró que sólo un 14,5% de los estudiantes estudiados fueron capaces de aceptar una demostración desarrollada de acuerdo con un razonamiento estrictamente lógico, sin necesidad de comprobaciones empíricas adicionales: *"sólo el 14,5% fueron consistentes hasta el final (es decir, no sintieron la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas)"*.

Senk (1985), en un estudio realizado con 1520 estudiantes, que habían recibido enseñanzas sobre la demostración en un curso de geometría, en 74 clases, de 11 escuelas, de 5 estados de EEUU, encontró que sólo *"... aproximadamente el 30% de los estudiantes que habían seguido un curso año completo con enseñanza de la demostración alcanzaron un 75% de nivel de maestría en demostraciones escritas"*.

Martín y Harel (1989, p. 41), en una investigación sobre esquemas personales de demostración matemática, realizada con 101 alumnos de Magisterio, encontraron que *"... más de la mitad de los estudiantes aceptaban un argumento empírico-inductivo como demostración matemática valida"*.

Nosotros mismos, (Recio y Godino, 1996), Recio (2000), hemos podido constatar la dificultad que encuentran los estudiantes universitarios de nuestro entorno cultural para generar, de forma espontánea, sencillas demostraciones formales. En una investigación desarrollada en el curso 1994-95, sobre 429 estudiantes de universidad, de primer curso, con alguna asignatura de matemáticas en el curriculum, encontramos que sólo un 32,9% de dichos estudiantes fueron capaces de desarrollar, de modo formal, las dos demostraciones, extremadamente simples, que se les reclamaban. Estos resultados volvieron a confirmarse – con porcentajes aún inferiores- en una investigación similar desarrollada en el curso 1997-98.

Como consecuencia de estos y otros estudios semejantes, en las últimas décadas se está produciendo una revisión del carácter formalista de la demostración en el ámbito escolar -introducido en dicho ámbito durante la década de los sesenta y primeros de los setenta, acompañando al movimiento de renovación de la enseñanza de la matemática que dio en llamarse *"matemática moderna"*.

A nosotros nos parece conveniente revisar el carácter formal atribuido a la demostración matemática, pero no sólo en el ámbito educativo, sino también en el matemático propiamente dicho. Revisar el carácter excesivamente formalista que desde la institución matemática se suele atribuir a la demostración matemática, abriendo su significado a otras prácticas más informales, que también utilizan los matemáticos en sus procesos argumentativos.

1.2. Significados de la demostración matemática para la institución matemática

La demostración matemática es el proceso validativo que siguen los matemáticos para justificar sus teorías. Aunque existen otras opciones, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógico-formal.

Knowless (1998, p. 1) explicita el significado formalista de la demostración matemática diciendo: *"Una demostración en una teoría matemática es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales es o bien* *un axioma ... o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Un teorema es una proposición así derivada por una demostración".*

La concepción formalista de la demostración pone el acento en los aspectos sintácticos. Se evita el recurso a la intuición y se prefiere el uso de reglas de inferencias formales, precisas, bien definidas. La lógica que soporta las demostraciones matemáticas, así consideradas, es la lógica formal. La demostración se convierte en un procedimiento algorítmico que puede ser materializado mediante el uso de ordenadores. Para Schwichtenberg (1982, p. 81) " *... una demostración formal puede ser vista como un programa (de ordenador)".*

Sin embargo, las demostraciones bajo los esquemas formalistas se vuelven extraordinariamente complejas. Livingston (1987), por ejemplo, muestra la complejidad de la prueba de la unicidad del elemento neutro en un grupo algebraico, comparada con su simplicidad mediante una argumentación informal.

Esto hace, como afirma Resnick (1992), que la matemática contemporánea esté, alternativamente, repleta de *"working proofs",* de demostraciones informales, no axiomatizadas. Están apareciendo además, según Hanna (1995), nuevos procedimientos, como la "zero-knowledge proof", o la "holographic proof", basadas en comprobaciones experimentales, desarrolladas mediante ordenadores, utilizando procedimientos aleatorios de validación.

En realidad, es desde la propia teoría de los fundamentos de la matemática de donde se obtienen, precisamente, los resultados que expresan los límites de los sistemas formales para expresar la matemática en su conjunto. Un resultado bien conocido, como es el teorema de incompletitud de Gödel (Kline, 1980), que afirma la incompletitud de cualquier sistema formal capaz de contener la teoría de números, muestra con claridad dichos límites. No existe un sistema formal consistente capaz de contener, por completo, ni siquiera a la aritmética elemental. Lo que, en definitiva, viene a significar que la matemática no puede reducirse a un mero sistema formal.

La consecuencia es que la verdad matemática deja de tener valor absoluto, presentando un valor pragmático. Las posiciones estrictamente formalistas pierden sentido. Se abren así las puertas, dentro de la institución matemática, a otras opciones menos formalistas, más informales. La validez de las proposiciones matemáticas no se resuelve acudiendo a procesos de derivación formal, sino que es una cuestión ligada al acuerdo convencional, al acuerdo entre partes, entre las personas e instituciones implicadas en el proceso de demostración.

1.3. Significados de la demostración matemática en la institución educativa

Dentro de la institución educativa, la demostración matemática tiene hoy día un significado más abierto, menos formalista. Junto al pensamiento estrictamente deductivo, se resalta también la necesidad de potenciar otros modos validativos de tipo empírico-inductivo, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización, etc.

Así, los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática, elaborados por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) de los EEUU de América, en las orientaciones para el ciclo 9-12 (final de secundaria y bachillerato, aproximadamente), centran la atención (p. 147) en la necesidad de combinar el pensamiento inductivo con el deductivo, marcando como objetivo que todos los estudiantes tengan experiencias con estos dos modos de pensamiento, para que lleguen a apreciar el papel que cumplen ambos en la matemática y fuera de las matemáticas.

En España, el Diseño Curricular Base, elaborado por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 1989. Secundaria, p. 480), considera el razonamiento deductivo como el resultado de un proceso que se inicia con las formas empírico-inductivas de razonamiento, ofreciendo consideraciones como las siguientes: *"Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento matemático va por buen camino. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior. Esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares, a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático".*

1.4. Hacia una revisión epistemológica del concepto de demostración matemática

La concepción formalista de la demostración matemática hunde sus raíces en la propia evolución histórica de la matemática.

El programa de desarrollo axiomático de la geometría iniciado por Euclides hace más de dos mil años aparece como el primer intento sistematizado de dar una base axiomática al proceso de construcción del conocimiento matemático.

El surgimiento en el siglo XIX de las geometrías no euclídeas –que, pese a contener axiomas que aparecen como intuitivamente no evidentes, son tan consistentes, tan coherentes en su desarrollo lógico como la propia geometría euclídea- representó un hito histórico importante en la evolución del pensamiento matemático hacia posiciones formalistas. Su introducción ayudó a diferenciar entre espacio físico y geométrico, entre matemáticas y realidad. Ha servido para establecer la coherencia lógica -y no una adecuación ingenua con la realidad exterior- como base de fundamentación de la matemática (Kline, 1980).

Pero las posiciones formalistas extremas han exagerado el aspecto sintáctico de los sistemas axiomáticos. Para evitar las contradicciones lógicas que, a veces, ha propiciado el uso de la intuición, se pone el acento en los aspectos sintácticos, en detrimento de los semánticos. Se evita la significación de los términos matemáticos, que aparecen como meros elementos simbólicos de un sistema formal. Se acude al uso de reglas formales, definidas dentro del mismo sistema, que se pueden aplicar de una manera mecánica, algorítmica. La demostración se reduce a un procedimiento algorítmico que podría desarrollarse de forma automatizada, mediante el uso de ordenadores.

Como hemos señalado ya, teoremas metamatemáticos como el de Gödel demuestran la futilidad de los intentos de reducir la matemática a un mero sistema formal. La matemática es mucho más que mero encadenamiento deductivo, formal, apareciendo como un proceso creativo, ligado a la formulación de conjeturas, a la presencia del ejemplo y el contraejemplo, a la falsabilidad, a los procesos de prueba y refutación (Lakatos, 1976).

Hoy aparece como necesaria una revisión del objeto "demostración matemática", que permita una apertura hacia perspectivas más flexibles, pragmáticas, convencionales.

Un estudio de los variados esquemas personales de demostración matemática que manifiestan los sujetos individuales puede ayudar a comprender la complejidad de dicho objeto y a permitir otras significaciones del mismo, más informales, más cercanas a las prácticas habituales de los estudiantes.

SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

2.1. Esquemas personales de demostración matemática

Harel y Sowder (1998) han estudiado la dimensión personal o subjetiva de la demostración matemática. Un elemento esencial de su propuesta es la idea de esquema personal de demostración, que para ellos representa todo aquello que supone persuasión y convencimiento para la persona.

Nosotros hemos utilizado la idea de esquema personal de demostración, usándola como esquema representativo de una categoría de respuestas personales, dadas por un colectivo amplio de sujetos individuales.

Hemos utilizado esa idea en nuestra investigación, citada anteriormente (Recio, 2000), que desarrollamos durante el curso 1994-95, sobre una muestra de 429 estudiantes de primer curso de universidad, con alguna asignatura de Matemáticas en el curriculum y que complementamos con algunos elementos confirmatorios durante el curso 1997-78.

Como resultado de ese estudio, hemos encontrado cuatro tipos básicos de esquemas personales de demostración matemática: argumentación explicativa, argumentación empírico-inductiva, prueba deductiva informal y demostración deductiva formal.

Los esquemas de tipo "argumentación explicativa" son formas muy elementales de argumentación, que sirven a los sujetos para explicarse el significado de la proposición a demostrar a partir de su aplicación en algunos casos particulares (por ejemplo, entender el significado del teorema de Pitágoras, aplicándolo en algunos casos particulares). Verdaderamente no hay intención validativa, sino que la intención es esencialmente explicativa. A pesar de ello, consideramos este tipo de argumentación como esquema personal de demostración, en primer lugar porque apareció en nuestro estudio como un esquema de respuesta de muchos estudiantes cuando se les pedía realizar una demostración, y, además, porque el elemento explicativo tiene sentido como primer eslabón del proceso demostrativo.

Los esquemas de tipo "argumentación empírico-inductiva" también se centran en el cumplimiento del correspondiente teorema en un conjunto de casos particulares, pero aquí la intención no es ya explicativa, sino que lo que se pretende es comprobar el cumplimiento *en general* de dicho teorema (lo que se reconoce por la utilización de variables genéricas, por la afirmación expresa de ese cumplimiento generalizado, etc.).

Los esquemas de tipo "prueba deductiva informal" corresponden a argumentaciones lógicas de tipo informal, apoyadas en analogías con otros modelos isomorfos, en la utilización de elementos gráficos, etc. Por ejemplo, muchas argumentaciones que suelen usarse en secundaria y en bachillerato para explicar las propiedades de las funciones de variable real, mediante el estudio de sus representaciones gráficas, las "curvas".

Los esquemas de tipo "demostración deductiva formal" corresponden a argumentaciones basadas en la potencia validativa del encadenamiento axiomático, pudiendo aparecer elementos intuitivos que ayudan a la demostración lógico-formal, pero que no la sustituyen.

2.2. ¿Qué tipos de demostraciones matemáticas convencen a nuestros alumnos?

Los enunciados de los problemas aplicados en la prueba, mediante los que estudiamos los esquemas personales de demostración de estudiantes universitarios de nuestro entorno sociocultural, fueron los siguientes:

Problema Aritmético: *Demuestra que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Recuerda que los números naturales son los infinitos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19, 11, 12, 13, 14, 15,...).*

Problema Geométrico: *Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes cualesquiera forman un ángulo recto. (Recuerda que dos ángulos son adyacentes si tienen el vértice y un lado en común y suman un ángulo llano, es decir 180º. Un ángulo recto mide 90º. La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos partes iguales).*

Los resultados a estos los problemas se dan en la tabla siguiente. Las respuestas de tipo 1 corresponden a respuestas muy incorrectas, que demuestran limitaciones importantes en la comprensión del enunciado de los problemas, en la capacidad validativa, etc. Las respuestas 2, 3, 4 y 5 se corresponden con los cuatro tipos de esquemas personales de demostración anteriormente considerados en orden numérico creciente de 1 a 4.

Frecuencias y porcentajes de los tipos de respuestas

	Problema 1 (Aritmética)			Problema 2 (Geometría)		
Respuesta	Frecuencia	%	% Acumulativo	Frecuencia	%	% Acumulativo
1	16	3,7	3,7	34	7,9	7,9
2	48	11,2	14,9	85	19,8	27,7
3	122	28,4	43,4	75	17,5	45,2
4	39	9,1	52,5	53	12,4	57,6
5	204	47,5	100,0	182	42,4	100,0

Puede observarse que el porcentaje de estudiantes que resolvieron correctamente cada uno de los dos problemas *no alcanzó el 50%.* Ese porcentaje se redujo hasta el *32,9* cuando se cuantificaron las respuestas conjuntas de los dos problemas, de manera que *sólo 141 de los 429* estudiantes a los que se pasó la prueba resolvieron correctamente ambos problemas.

De acuerdo con esos resultados del apartado anterior y otros aportados por otros investigadores, referidos anteriormente, puede decirse que un porcentaje importante de estudiantes acude espontáneamente a argumentaciones empírico-inductivas para hacer demostraciones matemáticas. Es decir, como sistema de demostración acude a una comprobación del enunciado en varios casos particulares, con intención de confirmar su cumplimiento de una forma generalizada.

De acuerdo con investigaciones posteriores, que aún estamos analizando, podemos pensar que una mayoría de estudiantes de nivel universitario puede llegar a aceptar, a partir de las explicaciones del profesor, las demostraciones deductivas formales como formas más elaboradas de demostración, más completas, con superior potencialidad validativa. Pero en situaciones problemáticas nuevas, donde tienen que poner en funcionamiento sus modos argumentativos espontáneos, una proporción importante de estudiantes, que ya han aceptado la superioridad teórica de la demostración deductiva (formal o informal) sobre la empírico-inductiva, reproducen esquemas validativos de este último tipo. De forma que tenemos que pensar que son estos esquemas, los empírico-inductivos, los que realmente resultan más convincentes para un porcentaje importante de alumnos, incluso de nivel universitario. En todo caso, dejamos abierta esta afirmación a posteriores análisis.

2.3. Relaciones entre esquemas personales y significados institucionales de la demostración matemática

Las actuales tendencias en educación matemática consideran la actividad matemática desde una perspectiva social y cultural, interpretando los objetos matemáticos como entidades culturales socialmente compartidas. En esa línea, Godino y Batanero (1998) consideran que los conocimientos individuales de los sujetos están mediatizados por las particularidades del conocimiento desarrollado en el seno de las instituciones en que participan los sujetos.

Bajo esa perspectiva, los esquemas personales de demostración pueden relacionarse con los significados institucionales de la demostración. Puede considerarse que los esquemas personales de demostración matemática que manifiestan los estudiantes guardan relación con los diferentes significados que la demostración tiene en contextos institucionales en los que los estudiantes se encuentran inmersos, como pueden ser la vida cotidiana, las clases de ciencias experimentales, las clases de matemáticas, etc.

En la vida cotidiana existe un tipo de demostración, de argumentación de carácter intuitivo, que permite a los sujetos formular conjeturas, resolviéndolas por mecanismos de ensayo y error. Es una argumentación que, de acuerdo con Miller-Jones (1991), se apoya en el lenguaje natural, es muy dependiente del contexto concreto en que esté situado el individuo que desarrolla la argumentación, e incluso de sus estados de ánimos. El estudiante incorpora a las clases de matemáticas esta forma de argumentación que utiliza en la vida cotidiana. La llamaremos *argumentación intuitiva*.

En contraste con la argumentación intuitiva de la vida cotidiana, la argumentación científica tiene un sentido validativo de más largo alcance, orientado a la creación de conocimientos científicos, explicables de forma racional y objetiva, con un continuo sometimiento al tamiz de la prueba experimental. La prueba científica, basada en la comprobación experimental, penetra en el ámbito matemático y da origen a una forma de argumentación matemática, que llamaremos *prueba empírico-inductiva*, que permite efectúar un primer movimiento validativo mediante la comprobación de la proposición a demostrar en diferentes casos particulares. Es una forma de argumentación que el profesor suele utilizar en clase de matemáticas con fines explicativos.

En la matemática profesional se utilizan dos tipos de demostración. Por un lado una demostración informal, una argumentación de carácter deductivo, pero sustentada en la intuición, en el uso de variados procedimientos informales (elementos gráficos, relaciones analógicas, generalizaciones inductivas, etc.). Por otro, una demostración de carácter deductivo formal, desarrollada en un lenguaje con un fuerte componente simbólico, efectuando una estricta derivabilidad axiomática, formal. Hablaremos de *demostración deductiva, informal y formal*, respectivamente, para referirnos a estos dos modos de demostración matemática. En las clases de matemáticas, los estudiantes entran en contacto con estos dos tipos de argumentación, que suelen usar los profesores, en diferentes momentos de su acción docente.

Vemos, por consiguiente, que existen variados modos de argumentación matemática que se complementan y que nosotros proponemos incorporar al significado del objeto *demostración matemática*, que para nosotros es un objeto rico, complejo, pleno de matices.

Partiendo de nuestro estudio acerca de los esquemas personales de demostración matemática, y de su posible relación con los significados de la demostración en distintos contextos institucionales, nuestra propuesta es ampliar el estricto sentido formalista que la interpretación dominante en la institución matemática atribuye hoy a la demostración matemática y considerar que *tanto la argumentación intuitiva, como la prueba empírico-inductiva, como la demostración deductiva informal como la demostración deductiva formal constituyen aspectos complementarios de la demostración matemática, que representa un proceso activo, vivo, que comporta distintas fases, desde la formulación inicial de las primeras conjeturas hasta los procesos finales de expresión formalizada de la demostración.*

Esa ampliación del objeto demostración matemática permitiría recoger mejor los variados modos de prueba que desde distintos ámbitos institucionales y personales se utilizan para validar las proposiciones matemáticas, y que aparecen más cercanos a los usos argumentativos espontáneos de los estudiantes.

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA

3.1. Formas de demostración en el aula

La demostración en clase de matemáticas presenta una gran diversidad de formas, apareciendo en los distintos niveles educativos los variados tipos de argumentaciones analizados en los apartados anteriores.

En Primaria predomina una matemática informal. Los conceptos matemáticos aparecen imbricados con objetos y situaciones de la vida cotidiana, de la realidad física y social. La argumentación prototípica es una argumentación informal de carácter muy intuitivo.

Al respecto, los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática elaborados por el National Council of Teachers of Mathematics de los EEUU de América (NCTM, 1989), ya considerados anteriormente, plantean para el ciclo P-4 (que puede hacerse corresponder, aproximadamente, con Educación Infantil y los dos primeros ciclos de Educación Primaria, en nuestro sistema educativo), que (p. 28):

> "Durante estos años, el razonamiento matemático debe incluir todo tipo de pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden a los niños a darse cuenta de que las matemáticas tienen sentido…
> Debe intentarse que los niños justifiquen sus soluciones, sus procesos de pensamiento y sus conjeturas, y que además lo hagan de diversas formas. Los modelos manipulativos y otros modelos físicos les ayudan a relacionar los procedimientos y algoritmos con los hechos conceptuales que los apoyan y proporcionan objetos concretos a los que hacer referencia a la hora de explicar y justificar sus ideas…".

En Secundaria las formas prototípicas de argumentación son la prueba empírico-inductiva y la demostración deductiva informal.

Para el ciclo 5-8 (que corresponde, aproximadamente, con el tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de ESO, en nuestro sistema educativo), los Estándares plantean como objetivo un tipo de razonamiento fundamentado en lo concreto, en métodos inductivos y en formas deductivas elementales. Así, afirman (p. 79):

> "Mientras la mayor parte de los estudiantes de quinto grado continúan ejerciendo un pensamiento concreto que depende de un contexto físico o específico para poder percibir regularidades y relaciones, muchos alumnos de octavo grado son ya capaces de

> razonamiento más formal y de abstracción. No obstante, incluso los estudiantes más avanzados de los niveles 5-8 pueden hacer uso de materiales concretos para apoyar su razonamiento…”

Y también (p. 148):

> “En los niveles 5-8, los estudiantes habrán experimentado el razonamiento inductivo y la evaluación y construcción de argumentos deductivos sencillos en diversos contextos de resolución de problemas”.

Los Estándares plantean, para el ciclo 9-12 (que podría hacerse corresponder, aproximadamente, con el segundo ciclo ESO y Bachillerato) que (p. 148):

> “En los niveles 9-12, a medida que los contenidos van siendo más profundos y complejos, debe mantenerse este énfasis en la interacción que se da entre la formulación de hipótesis y el razonamiento inductivo, y en la importancia de la verificación deductiva…”

En la Educación Universitaria, es más habitual el contacto con la demostración deductiva formal, con el rigor deductivo. Los estudiantes universitarios han de familiarizarse con el hecho de que la argumentación deductiva formal es el método por el que se establece, en último término, la validación de los teoremas matemáticos.

3.2. Finalidad de la demostración matemática en el aula

La finalidad que pueda tener la demostración en clase de matemáticas puede conceptualizarse analizando las propuestas de los Estándares que señalan como objetivos los siguientes:

> “En los niveles P-4, el estudio de las matemáticas debe hacer hincapié en el razonamiento, para que los estudiantes sean capaces de:
> - llegar a conclusiones lógicas en matemáticas;
> - usar modelos, hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar sus ideas;
> - justificar sus respuestas y sus modelos resolutivos;
> - hacer uso de sus estructuras conceptuales y conexiones para analizar situaciones matemáticas;
> - creer en el significado de las matemáticas”.

> “En los niveles 5-8, el razonamiento debe impregnar todo el currículo de matemáticas para que los estudiantes sean capaces de
> - reconocer y aplicar razonamientos deductivos e inductivos;
> - entender y aplicar procesos de razonamiento, con especial atención
> al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas;
> - hacer y evaluar conjeturas y argumentos matemáticos;
> - dar validez a sus propias ideas;
> - apreciar la utilidad y la potencia que tiene en toda situación el razonamiento como parte de las matemáticas”.

"En los niveles 9-12, el currículo de matemáticas debe incluir experiencias numerosas y variadas que refuercen y amplíen las destrezas de razonamiento lógico para que todos los estudiantes sean capaces de:
- elaborar y comprobar conjeturas;
- formular contraejemplos;
- seguir argumentos lógicos;
- juzgar la validez de un argumento;
- construir argumentos sencillos validos".

3.3. Valor de la demostración matemática en el aula

El valor de la enseñanza de la demostración matemática en el aula varía de unos niveles educativos a otros, como se puede deducir de la lectura de los apartados anteriores, pero su valor general es de ayudar a comprender la necesidad de validar las diferentes proposiciones matemáticas que se aprenden en el aula, dentro de un objetivo más amplio cual es el de ayudar a comprender la necesidad de validar modo objetivo el conocimiento científico.

Es la prueba científica -la demostración matemática en nuestro ámbito- la que diferencia el conocimiento científico de la mera creencia, de la simple intuición.

En nuestro marco sociocultural hay una cierta tendencia a rutinizar el aprendizaje matemático, a enseñar a usar los teoremas matemáticos, a aplicarlos en la resolución de problemas, pero sin ayudar a comprender adecuadamente cómo se obtienen dichos teoremas, cómo se demuestran. Por ejemplo, se enseña a usar calcular las áreas de las figuras, sin permitir comprender el por qué de dichos algoritmos, el por qué de esas fórmulas. Con lo que se obtiene un aprendizaje mecánico, sin fundamento teórico, sin base, que establece una distancia abismal entre el alumno y el "saber sabio", el saber institucional. La matemática aparece, así, para los alumnos algo que no se puede llegar a entender, que es útil, pero que no es comprensible, que hay que aprender "de memoria".

La utilidad formativa de la demostración matemática aparece, para nosotros, como parte de una utilidad más general, cual es la de aprender a razonar en matemáticas. A razonar de forma operativa, para resolver problemas, y para justificar el cumplimiento generalizado de las proposiciones matemáticas que usan en dichos procesos de resolución de problemas, lo que ayuda a los estudiantes a construir un edificio matemático inteligente, lógico y no sólo funcional.

NUEVAS PERSPECTIVAS TEÓRICAS PARA LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA. CONSIDERACIONES SEMIÓTICAS

4.1. Introducción

En línea con el interés creciente de la comunidad de investigadores en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas anteriormente comentado, Godino y Batanero (1994, 1998) y Godino (1999) vienen desarrollado un modelo sobre el significado de los objetos matemáticos, desde presupuestos semióticos. Inspirados en ese modelo, nosotros venimos elaborando uno propio que permita integrar la noción de demostración matemática.

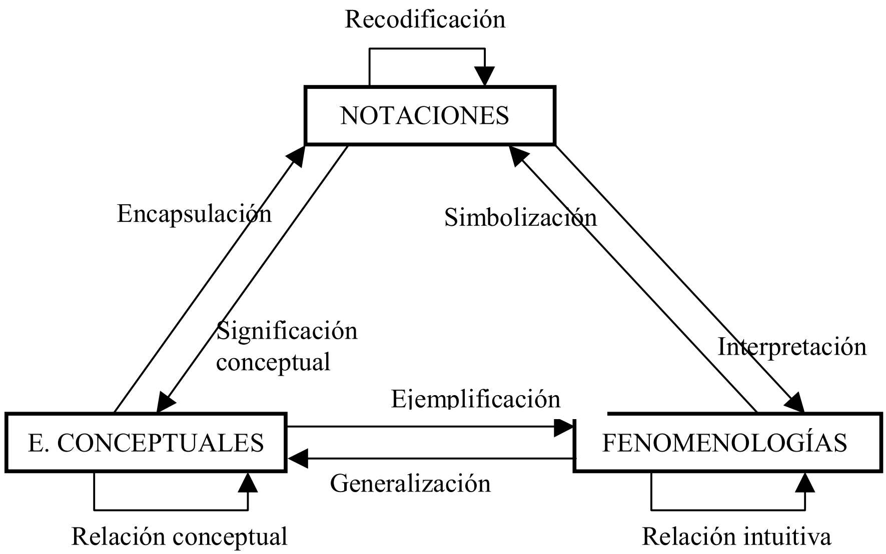
En nuestro modelo, cada objeto matemático es un complejo de entidades elementales, de los siguientes tipos:

- *Notaciones,* incluyendo en esta denominación todo tipo de sistemas de representación usados en la descripción del objeto (términos, expresiones, enunciados, símbolos gráficos, tablas, diagramas, etc.)
- *Fenomenologías,* considerando como tales las diferentes situaciones-problemas de tipo matemático -que matematizan situaciones y fenómenos de la vida cotidiana, del mundo natural y social, así como de la propia matemática-, a las que el objeto puede ser aplicado.
- *Elementos conceptuales,* es decir, las diferentes abstracciones (conceptos, esquemas conceptuales, procedimientos algorítmicos, proposiciones, teorías, etc.) que conforman la expresión teórica del objeto matemático.

Las categorías de entidades se relacionan con las que aparecen en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1982), para quien un concepto es una tripleta formada por el "*conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere*" (p. 36)

Las relaciones entre los elementos conceptuales, los signos usados para representarlos y los contextos fenomenológicos a los que matematizan han sido modelizadas por muy diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas destacan el triángulo semiótico que presenta Steinbring (1997). Los elementos que incluye Steinbring son *concepto*, *signo/símbolo* y *objeto/contexto de referencia*.

Inspirados en esta tríada, podemos a esbozar un modelo de relaciones entre las entidades básicas, que conforman cualquier objeto matemático, que expresamos mediante el siguiente diagrama:



Los elementos notacionales permiten *simbolizar* las entidades fenomenológicas y *encapsular* -en el sentido de Dubisnky, (1991), como variables-, las entidades conceptuales. Los procesos de *recodificación* permiten traducir unos sistemas de representación en otros (enunciados verbales mediante gráficos, etc.).

Las fenomenologías permiten *interpretar* los elementos notacionales y también *ejemplificar* las entidades conceptuales.

Las entidades conceptuales aportan *significación conceptual* a los elementos notacionales, mediante un proceso de *generalización,* a partir de variadas situaciones fenomenológicas. Las *relaciones intuitivas* que emergen de las situaciones fenomenológicas constituyen conjeturas, que inducen *relaciones teóricas* entre entidades conceptuales.

4.2. La demostración matemática como cadena de relaciones semióticas

Hemos analizado en el capítulo 2 la variedad de aspectos que conforman la demostración matemática, desde la sencilla argumentación informal que acompaña la formulación de conjetura, hasta la rigurosa demostración deductiva formal que constituye la forma validativa propia de la matemática profesional.

Entendemos que el modelo semiótico presentado en el apartado anterior permite integrar de forma operativa esos diferentes aspectos de la demostración matemática en un todo, en una misma entidad. En concreto, proponemos considerar la demostración como una *cadena de relaciones semióticas*.

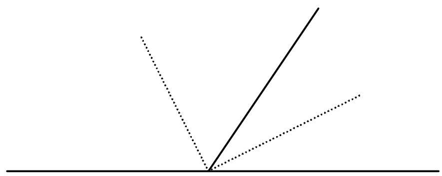
Entendemos que la realización de una demostración desencadena en primer lugar procesos interpretativos (respecto al enunciado del teorema a demostrar) por parte de la persona que ha de desarrollar la demostración. Para efectuar la *interpretación* del enunciado el resolutor ha de relacionar el enunciado con un contexto *fenomenológico* que le resulte familiar. La *simbolización* de los objetos fenomenológicos introduce una *recodificación* del enunciado del problema. La interpretación fenomenológica utilizada favorece el surgimiento de sencillas *relaciones intuitivas,* conjeturas, relacionadas con el teorema a probar. Esas conjeturas se puede comprobar, mediante procedimiento empírico-inductivos, mediante *ejemplificaciones* en casos concretos, a partir de las cuales puede efectuarse un proceso de *generalización*, de desarrollo de *relaciones teóricas*, que puede conducir a la *encapsulación* de elementos implicados en la demostración, a su sustitución por variables simbólicas, prescindiendo de su *significación conceptual*, dando lugar al desarrollo formalizado de la demostración.

A continuación vamos a aplicar estas ideas a una demostración concreta, tomada como ejemplo, para explicar de forma concreta el modelo. Se trata de la demostración de una proposición geométrica elemental, que aparecía como problema incluido en el cuestionario anteriormente considerado para caracterizar esquemas de demostración.

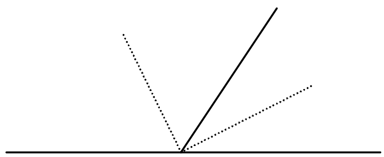
Problema: *Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes cualesquiera forman un ángulo recto. (Recuerda que dos ángulos son adyacentes si tienen el vértice y un lado en común y suman un ángulo llano, es decir 180º. Un ángulo recto mide 90º. La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos partes iguales).*

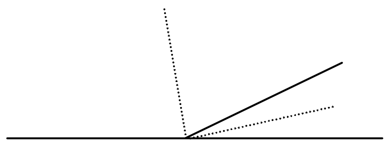
Desde el punto vista semiótico, la tarea propuesta por el investigador (emisor) desencadena en primer lugar procesos interpretativos por parte de los estudiantes (destinatarios) de la misma. Las palabras y expresiones que desencadenan procesos interpretativos son las siguientes: *demuestra, ángulo, vértice de un ángulo, lados de un ángulo, semirrecta, bisectriz de un ángulo, ángulo recto, ángulo llano, ángulos adyacentes, división de un ángulo en partes, suma de ángulos, igualdad de ángulos, medida de ángulos, el grado como unidad de medida de ángulos, 180º, 90º.*

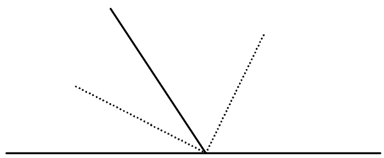
Para efectuar la *interpretación* del enunciado se suele relacionar éste con un contexto *fenomenológico* habitualmente usado para la geometría euclídea elemental, cual es el de las representaciones gráficas mediante papel y lápiz. Esta interpretación permite una *recodificación* del enunciado del problema mediante la aplicación de diagramas como los aportados por los estudiantes a los que se aplicó la prueba. La interpretación fenomenológica utilizada favorece el surgimiento de sencillas *relaciones intuitivas*, de conjeturas elementales, como que el ángulo formado por las bisectrices es recto, por simple inspección ocular:

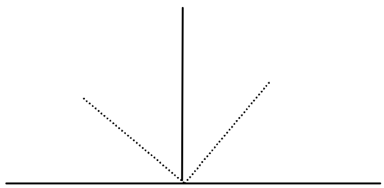


Esa conjetura se puede comprobar, mediante un procedimiento empírico-inductivo, considerando distintos casos concretos, que constituyen *ejemplificaciones* del enunciado general:









Esas ejemplificaciones pueden hacerse más matizadas, introduciendo medidas numéricas. Así, si un ángulo es de 120º y otro es de 60ª, sus bisectrices forman ángulos de 60º y 30º, que suman 90º. Análogamente para ángulos de 150º y 30º, ángulos de 90º (ambos), etc.

Puede iniciarse un comienzo de *generalización*, usando símbolos para designar a los ángulos. Se representan los ángulos por las letras *a* y *b*, de forma que, por ser ángulos adyacentes, ha de cumplirse que *a + b = 180º.* Entonces los casos anteriores se representan como:

a = 120º, b = 60º, a/2 + b/2 = 60º + 30º = 90º

a = 150º, b = 30º, a/2 + b/2 =75º + 15º = 90º

a = 90º, b = 90º, a/2 + b/2 = 45º + 45º = 90º

apareciendo sintetizado el resultado como el resultado como:

a + b = 180º; a/2 + b/2 = 90º

Puede efectuarse un proceso de abstracción mayor, considerando las letras como variables genéricas, representativas de ángulos cualesquiera. Lo que se traduce en un proceso de *encapsulación* de los conceptos representados por dichos símbolos. Encapsuladas los conceptos, el proceso de demostración se hace formal, se efectúa teniendo en cuenta sólo las reglas de transformación de expresiones propias del campo en cuestión (álgebra elemental), sin necesidad de tener en cuenta la *significación conceptual* de tales símbolos algebraicos, en el contexto del problema en cuestión:

a + b = 180º, a/2 + b/2 = (a + b)/2 = 180º/2 = 90º

La demostración aparece, así, como una concatenación de procesos, como una cadena de relaciones semióticas entre los objetos implicados, de forma que la demostración estrictamente deductiva no es sino la última fase de una argumentación que ha comenzado por la interpretación del enunciado del teorema a demostrar, formulación de conjeturas, etc.

REFERENCIAS

Dieudonné, J. (1987). The concept of 'rigorous proof'. *The Mathematical Gazzete* 80: 204-206.

Dubinski, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall. (Ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer A.P.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics,* 3 (2): 9-24.

Godino, J. D. (1999). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. (Trabajo presentado en el Grupo de Trabajo "*La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica*". III Simposio de la SEIEM, Valladolid) (http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm)

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof *For the Learning of Mathematics* 15 (3): 42-49

Harel, G. y Sowder, L.: 1998, Students' Proof Schemes. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education*, Vol.III, pp.234-283, A.M.S.

Kline, M. (1980). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* Madrid: Siglo XXI[1985] .

Knowless, M. H. (1998). What is "Proof"?! - in mathematics. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (URL: http://www.cabri.net/Preuve)

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Editorial [1978].

Livingston, E. (1987). *The ethnomethodological foundations of mathematics.* London: Routledge.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (1): 41-51.

M.E.C. (1991). *Curriculo de Educación Secundaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Miller-Jones, D. (1991). Informal Reasoning in inner-city children. En J. F. Voss, D. N. Perkins y J. W. Segal (Ed.): *Informal Reasoning and Education*. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum, A. P.

NCTM. (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics*, Reston, Va: The Council. Sociedad Andaluza de Educación Matemática [1991].

Recio, A. M. y Godino, J. D. (1996). Assessment of university students' reasoning capacities. En R. Luengo (Ed.): *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (p. 280), Sevilla.

Recio, A.M. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Servicio de Publicaciones. Universidad de Córdoba.

Resnick, M. D. (1992). Proof as a source of truth. En: M. Detlefsen (Eds.): *Proof and knowledge in mathematics* (pp. 6-32). London: Routledge.

Robinet, J. (1983): Un experience d´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 4.3, 223-292.

Schwichtenberg, H. (1992). *Proof as programs, Collection: Proof Theory* (Leeds, 1990). Cambridge Univ. Press, 79-113.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher* 78: 448-456.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics* 32: 49-92.

Tall, D. (1996): Functions and Calculus. En Bishop, A.(ed.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer, 289-325.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and development psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, 2: 31-41.

SOBRE CONJETURAS Y DEMOSTRACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CÉSAR SÁENZ CASTRO
Universidad Autónoma de Madrid (UAM)

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

SOBRE CONJETURAS Y DEMOSTRACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

❧

CÉSAR SÁENZ CASTRO
Universidad Autónoma de Madrid (UAM)

RESUMEN

En este trabajo establecemos la siguiente hipótesis: el sistema conjeturas-pruebas-refutaciones constituye la lógica del descubrimiento matemático escolar; bien entendido que en las matemáticas de la enseñanza secundaria el énfasis no puede situarse en la frontera móvil que Lakatos (1978) ha señalado en el trabajo de los matemáticos profesionales, esto es, la frontera demostraciones/refutaciones sino más bien en la frontera anterior, conjeturas/demostraciones. Dicho sistema supera didácticamente al enfoque unidimensional de demostración como prueba formalizada, enfoque tradicional del estilo deductivista en la enseñanza de las matemáticas.

Esta hipótesis surge del análisis de las dificultades epistemológicas, cognitivas y didácticas del concepto de demostración (en particular, de la demostración por reducción al absurdo) y de la revisión de algunos estudios experimentales sobre la práctica escolar de la demostración.

ABSTRACT

In this work we establish the following hypothesis: the conjectures-proofs-refutations system constitutes the logic of school mathematical discovery; on the understanding that in secondary school mathematics the emphasis cannot be placed in the mobile frontier pointed out by Lakatos (1978) about the work of professional mathematicians, that is, no the proof/refutations but more properly in the previous frontier, conjectures/proofs. Such system, in didactic, exceeds the unidimensional feature of proof as formalized demonstration, traditional deductivist style overview of the mathematics education.

This hypothesis emerges from the analysis of epistemological, cognitive, and didactic difficulties about the concept of proof (in particular, the proof by reduction to absurd) and the review of some experimental studies about the school practice of proof.

INTRODUCCIÓN

La demostración es la base del edificio matemático. En el empeño por poner bases sólidas a este edificio los matemáticos se encontraron con la incompletitud y la inconsistencia de la matemática. El concepto de demostración ha variado con el tiempo. La demostración rigurosa que hoy se requiere en cualquier investigación resultaría excesiva para eminentes matemáticos anteriores al siglo XIX. En definitiva, hay controversias sobre la naturaleza de la demostración matemática y problemas con el propio concepto: estas controversias y problemas (con consecuencias didácticas) serán objeto de análisis en el apartado 2 de este artículo.

Nos interesa mucho enfatizar las relaciones, en el quehacer matemático, entre el razonamiento demostrativo y el razonamiento plausible (en el sentido de Polya), entre la demostración y la intuición. Partimos de la afirmación de Wilder (1944): "Demostrar es contrastar, poner a prueba los productos de nuestra intuición... Es obvio que no poseemos y probablemente nunca poseeremos ningún criterio de demostración que sea independiente del tiempo, de la cosa que ha de demostrarse o de la persona o escuela de pensamiento que lo emplea. En estas condiciones, lo sensato parece ser el admitir que no hay, generalmente, eso que se llama absoluta verdad (demostración) en matemáticas, piense lo que piense el público".

Es necesario insistir en que los matemáticos hacen sus descubrimientos escalonadamente y atendiendo más bien a lo "sustantivo" que a lo formal, prevaleciendo este último aspecto en lo que respecta a la presentación sistemática de resultados, a la reconstrucción y a la instrucción. Las demostraciones no suelen ser un acto de visión o de corazonada. El cómo se hace la conjetura en una primera instancia, cómo se construye la demostración o cómo se llega a entender, son cuestiones que pertenecen a la lógica del descubrimiento. Este proceso de conjetura, prueba, refutación y modificación relaciona la génesis de la demostración con historia y contexto social y cultural. Un todo en devenir dialéctico que, como tal, debe ser contemplado en la enseñanza de las matemáticas.

El reconocimiento de que la intuición, la conjetura intuitiva, desempeña un papel fundamental en la consecución de las verdades matemáticas y de que la demostración desempeña un papel de apoyo justificativo y explicativo nos sugiere una propuesta didáctica de la demostración que consiste fundamentalmente en la presentación de un sistema de conjetura, pruebas y refutaciones como base del trabajo con el concepto de demostración en la enseñanza, concretamente en la educación secundaria. Esta propuesta la presentamos en el apartado 3, a partir del análisis de tres problemas seleccionados de un trabajo de investigación de Hernán (1982).

La demostración por reducción al absurdo es un método de razonamiento deductivo de especial transcendencia en el quehacer matemático y presenta una problemática epistemológica, cognitiva y también didáctica de sumo interés para la investigación en educación matemática. Por ello, dedicamos el apartado 4 a profundizar en esta problemática. A la luz de estos problemas y de la indagación sobre el tratamiento tradicional de este tópico en la enseñanza secundaria establecemos el bosquejo de una nueva didáctica de la demostración por reducción al absurdo

SOBRE LA NATURALEZA DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Si en algo coincide la opinión pública con la opinión de los matemáticos es que la demostración es muy importante en matemáticas. Por demostración se entiende el procedimiento en que partiendo de unas ciertas hipótesis y mediante razonamientos lógicos se consigue la conclusión deseada, muchos de los resultados de *Los Elementos* de Euclides están conseguidos de esta manera. Un caso especial es la demostración por reducción al absurdo, de la que hablaremos en el último apartado de este artículo: se supone que lo que se desea demostrar no es cierto y mediante una sucesión de razonamientos lógicos y con el uso de las hipótesis que se hayan establecido se llega a una contradicción flagrante; la consecuencia de esta contradicción es la certeza de la tesis. El propio Euclides demostró que el número de primos es infinito partiendo de que solamente había una cantidad finita de ellos.

Cuando se trata con el infinito algunas demostraciones usan el Principio de Inducción. Para poder usarlo la propiedad que se quiere demostrar tiene que estar ligada a los números naturales. Se comienza demostrando el resultado para un número pequeño, usualmente el 1. Después se asume que el resultado es cierto para un número cualquiera n y se intenta deducir que también será cierto para el número siguiente $n+1$. Si esto se consigue, la propiedad queda demostrada para los infinitos números.

Hernández (1997) distingue entre demostraciones matemáticas sencillas y complicadas. Algunas sencillas ni siquiera necesitan palabras. Por ejemplo Nelsen (1993) da la siguiente demostración gráfica de la fórmula para la suma de los n primeros números impares: $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

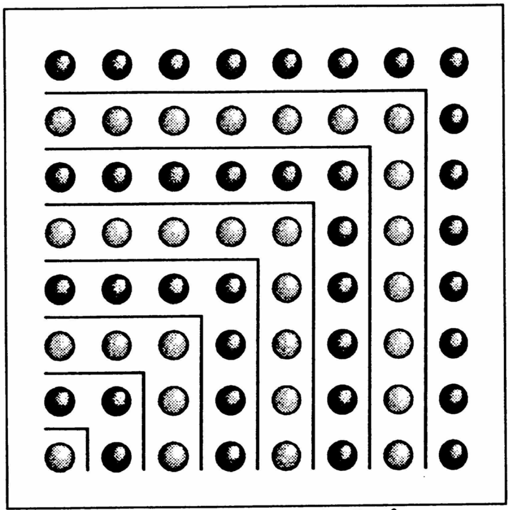


Figura 8. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Por supuesto que hay demostraciones muy complicadas, como la del célebre Teorema de Fermat (1637, aproximadamente): "Es imposible que un cubo pueda ser escrito como suma de dos cubos o una cuarta potencia pueda ser escrita como suma de dos cuartas potencias o, en general, para cualquier número que sea una potencia mayor que la segunda escribirlo como suma de dos potencias similares". Eminentes matemáticos afrontaron el problema pero ninguno lo consiguió hasta que en 1995 Wiles, matemático inglés que trabaja en la Universidad de Princeton, publicó en *Annals of Mathematics* un artículo de 100 páginas con la demostración (el artículo va acompañado de otro más corto que también forma parte de la demostración). Un grupo reducido de matemáticos se repartió el trabajo de comprobar que todas las partes del artículo de Wiles eran correctas antes de que fuera aceptada su publicación.

Una cuestión que suscita gran controversia en la comunidad matemática es la aceptación de una demostración realizada con un ordenador. La cuestión surgió cuando en 1976 Apple y Haken, matemáticos de la Universidad de Illinois, presentaron una demostración con un ordenador de una conjetura contra la que se habían estrellado los matemáticos durante más de 100 años: El problema de los 4 colores consiste en demostrar que todo mapa en un plano puede ser coloreado usando sólo cuatro colores; se exigen los siguientes requisitos: a) dos regiones que tienen frontera común no deben tener el mismo color; b) si dos regiones solamente tienen en común un punto pueden ser coloreadas del mismo color;

c) las regiones pueden tener cualquier forma pero cada una de ellas debe ser un solo trozo conexo. Apple y Haken redujeron el problema a comprobar que cerca de 1800 mapas de tipos esencialmente diferentes se podían colorear con cuatro colores; si lo hacían ellos no terminarían en mucho tiempo, programado en una máquina el resultado se consiguió en varios días.

Hernández (1997) se pregunta si es ésta una verdadera demostración. Argumenta que aunque se pueda repetir el experimento en varias máquinas no podemos estar seguros de que no se haya cometido un fallo en su diseño de modo que el resultado sea sólo aparentemente correcto. Cita el error de una de las primeras remesas de procesadores Pentium del que nadie se hubiera dado cuenta a no ser por los experimentos realizados por un matemático con números muy grandes para comprobar algunas propiedades que él conocía de antemano ¿Qué sucedería si este error no se descubre y alguien presenta una demostración que hace uso fundamental de ese procesador? La demostración con ordenador es una forma diluida de demostración. Mientras que unos la usan y apoyan, otros (el mismo Wiles) prefieren encontrar argumentos tradicionales aunque utilicen el computador para buscar sus conjeturas y hacerse una idea de qué caminos pueden conducir a la demostración.

Hasta el S. XX, la demostración matemática fue un proceso supuestamente claro e indiscutible. Como dice Kline (1985), había sido ignorada durante siglos pero los matemáticos eran absolutamente conscientes de este hecho. El concepto estaba ahí y era considerado como el paradigma y la referencia a la que se adhirieron los matemáticos más o menos explícitamente.

¿Qué fue lo que produjo preocupación e incluso enfrentamiento por la demostración? Los matemáticos se dieron cuenta de que los principios de la lógica tal como los codificó Aristóteles y tenidos como verdades absolutas durante 20 siglos, eran producto de la experiencia tanto como lo eran los axiomas de la geometría euclídea. A partir de aquí se produjo cierta intranquilidad sobre lo que son unos principios sólidos. Así, los intuicionistas se creyeron justificados para restringir la aplicación de la ley del tercio excluso.

Un segundo problema relativo a la demostración, que surgió con la escuela logicista, es el de qué abarcan los principios de la lógica. Aunque Russell y Whitehead no dudaron en introducir los axiomas de infinitud y elección como axiomas de la lógica en la primera edición de los *Principia Mathematica*, en la segunda esos dos axiomas no eran citados al comienzo y su utilización era específicamente mencionada cuando se necesitaba para probar ciertos teoremas.

Otro problema es el concepto de existencia. Por ejemplo, una demostración de que toda ecuación polinómica debe tener al menos una raíz, establece un teorema de existencia. Cualquier demostración que sea consistente es aceptable para los logicistas, formalistas y conjuntistas. Sin embargo, aún cuando una demostración no utilice la ley del tercio excluso, puede no dar un método para calcular el objeto cuya existencia se demuestra. De aquí que tales demostraciones de existencia sean inaceptables para los intuicionistas que por esta razón son renuentes a aceptar los cardinales y los ordinales transfinitos (además, no son objetos intuitivos).

Siguiendo a Kline (1985) diremos que las matemáticas se desarrollan a través de una serie de grandes avances intuitivos que son establecidos no de una sola vez sino mediante una sucesión de correcciones de descuidos y errores hasta que la demostración alcanza el nivel de demostración aceptado en la época correspondiente. Ninguna demostración es definitiva. Nuevos contraejemplos socavan las viejas demostraciones. Las demostraciones son entonces revisadas con lo que se consideran erróneamente probadas para siempre. Pero la historia dice que lo único que esto significa es que aún no ha llegado la hora de un examen crítico de la demostración. A menudo tal examen es deliberadamente aplazado porque los matemáticos están mucho más interesados en establecer sus propios teoremas que en encontrar fallos en los resultados existentes.

De hecho, los matemáticos no confían en las demostraciones rigurosas hasta el punto que generalmente se supone. La intuición puede producir incluso más satisfacción y seguridad que la lógica. Kline (1985) afirma que una demostración rigurosa no significa nada para un matemático si el resultado no tiene sentido desde un punto de vista intuitivo. Si no lo tiene, examinará muy críticamente la demostración. Si la demostración le parece correcta entonces tratará de encontrar lo que está equivocado en su intuición. Los matemáticos desean saber la razón interna del éxito de una cadena de silogismos y sienten que un teorema debe ser verdadero antes de que se haya logrado su demostración lógica; por eso, con frecuencia se contentan con una mera indicación de la demostración, como de hecho hacen, a veces, Fermat y Newton.

El surgimiento de filosofías de las matemáticas opuestas entre sí cada una de las cuales insiste en sus propios criterios de demostración, ha fomentado el escepticismo sobre el valor de la misma pero los ataques a la idea de demostración comenzaron a aparecer antes. Así ya Hardy en 1928 decía: "No hay estrictamente hablando algo que pueda llamarse una demostración matemática... no podemos, en último análisis, hacer otra cosa que señalar, indicar;.....las demostraciones son gas, florituras retóricas diseñadas para afectar a la psicología, dibujos en la pizarra durante las explicaciones, estratagemas para estimular la imaginación de los alumnos" .

Eddington decía una vez: "La demostración es un ídolo ante el que los matemáticos se torturan". Preguntas pertinentes serían: ¿Por qué han de continuar haciéndolo?, ¿Deberían los matemáticos abandonar la demostración deductiva y recurrir simplemente a los argumentos convincentes e intuitivamente sólidos como los de las ciencias físicas?

Nadie que haya estudiado las contribuciones de las matemáticas al pensamiento humano sacrificaría el concepto de demostración. Hay que admitir que la lógica desempeña un papel. Kline (1985) utiliza una analogía: Si la intuición es la señora y la lógica la sirvienta, la sirvienta ha de tener algún poder sobre la señora. La lógica sujeta a la intuición desenfrenada, la intuición puede ser engañosa y la demostración nos proporciona una seguridad relativa. En palabras de Wilder (1944), la demostración es un proceso de comprobación que aplicamos a lo que la intuición nos sugiere. Parece que la demostración sí parece desempeñar un papel importante: minimiza el riesgo de contradicciones. En este sentido, Weil dice que la lógica es la higiene que el matemático practica para mantener sus ideas sanas y fuertes.

En definitiva, el sucinto repaso que hemos dado en esta apartado al concepto de demostración nos muestra que es un concepto poliédrico, complejo, controvertido histórica y epistemológicamente. Ello debe tener consecuencias didácticas en la enseñanza de las matemáticas, consecuencias que abordaremos en los siguientes apartados.

SOBRE EL SISTEMA CONJETURAS-PRUEBAS-REFUTACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Polya (1966) explica que aseguramos nuestro conocimiento matemático mediante el razonamiento demostrativo pero apoyamos nuestras conjeturas, nuestras intuiciones por medio del razonamiento plausible. Una prueba matemática es razonamiento demostrativo pero la evidencia intuitiva del físico, la circunstancial del abogado, la documental del historiador y la estadística del economista pertenecen al razonamiento plausible.

Hay grandes diferencias entre las dos clase de razonamiento. El razonamiento demostrativo es seguro, definitivo, y está más allá de toda controversia. El razonamiento plausible es azaroso, discutible y provisional. Aquél es incapaz de producir un conocimiento esencialmente nuevo sobre el mundo; para aprender algo nuevo necesitamos el razonamiento plausible que es la única clase de razonamiento que utilizamos en nuestra vida cotidiana. El razonamiento demostrativo tiene modelos rígidos, codificados y aclarados por la lógica (formal o demostrativa), que es la teoría del razonamiento demostrativo. Los modelos del razonamiento plausible son fluidos y no hay teoría de este razonamiento que pueda ser comparada a la lógica demostrativa en claridad o que tenga un consenso comparable.

Sabemos que las matemáticas ofrecen una excelente oportunidad de aprender el razonamiento demostrativo pero los programas usuales de las escuelas no ofrecen una oportunidad semejante de aprender el razonamiento plausible. Desde luego hay que aprender a probar pero también hay que aprender a intuir. Lo importante no será tanto señalar el carácter axiomático subyacente como el carácter de inferencia, mejor aún de explicación, que tiene una demostración. Esto es, demostrar algo será llegar a ello a partir de otros supuestos, generalmente de nivel más bajo, pero sin estar excesivamente preocupado por una rígida ordenación de los niveles. La tarea principal será la de subrayar ese carácter explicativo y no la de llegar a los más elementales supuestos o axiomas.

Los dos razonamientos (demostrativo y plausible) no se contradicen entre sí, se completan uno al otro. En el demostrativo lo principal es distinguir una prueba de una intuición, una demostración válida de un intento sin validez. En el razonamiento plausible lo importante es distinguir entre intuiciones, unas más y otras menos razonables.

Un estudiante seriamente interesado en matemáticas, que pretenda dedicar a ellas su vida, debe aprender el razonamiento demostrativo; es su profesión y el signo distintivo de su ciencia. Sin embargo, para obtener un éxito real debe también aprender el razonamiento plausible; de él dependerá su labor creadora. El estudiante no volcado a las matemáticas debería aficionarse también al razonamiento demostrativo: quizá tenga poca necesidad de usarlo directamente pero con él adquirirá una destreza para identificar las supuestas evidencias de todas clases con que se enfrentará en la vida moderna. Sin embargo, en todos sus esfuerzos necesitará del razonamiento plausible.

Como corolario, diríamos que hay que hacer demostraciones en la clase de matemáticas. Y ello porque la especial contribución de las matemáticas y quizás la justificación última para incluirlas en los programas está en que no tratan de hechos aislados sino que las verdades de las matemáticas dependen lógicamente unas de otras. Este corolario no implica que haya que dedicarse a demostrar lo obvio como sucede a veces en nuestras clases, eso hay que evitarlo.

Hernán (1982) ofrece un esquema operativo para que un estudiante de matemáticas aprenda las dos clases de razonamiento. Afirma que, desde un punto de vista heurístico, pueden señalarse en el proceso de demostración las siguientes etapas:

- descubrimiento de la regularidad de una situación
- sistematización de los ejemplos
- conjetura
- crítica de la conjetura (excepciones, falta de generalidad, imprecisión, casos límite,...)
- nueva conjetura
- demostración de la conjetura
- crítica de la demostración

En el marco de este esquema procesual son varias las preguntas pertinentes para la investigación en Didáctica de las Matemáticas:

- ¿Qué etapas son alcanzadas por los alumnos y cuándo?
- ¿Es la etapa “natural” en la educación secundaria la conjetura o lo es la demostración?
- ¿Qué condiciones han de cumplirse para el aprendizaje de estos aspectos procesuales de las matemáticas?
- ¿Pueden conseguirlo la mayoría de los alumnos?

Vamos a intentar dar algunas respuestas a estas preguntas mediante el análisis de tres problemas que tienen como objetivo preferente estudiar el sistema conjetura-demostración, utilizado por estudiantes de secundaria.

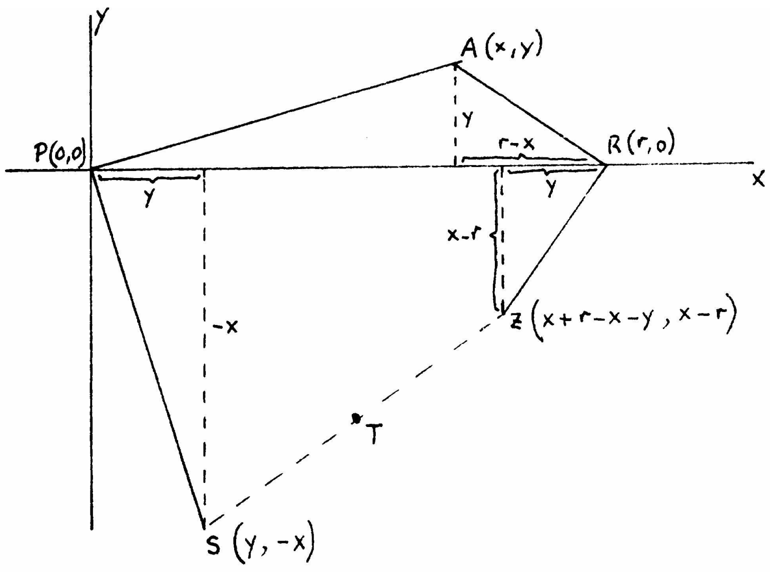
1. El tesoro y el abedul

Roberto ha encontrado un pergamino que muestra una isla desierta donde está enterrado un tesoro. En dicha isla hay tres árboles: un abedul, un roble y un pino.

El pergamino dice así: " Desde el abedul, camina hacia el roble contando los pasos: Bajo el roble debes girar un ángulo recto hacia la derecha y dar el mismo número de pasos. Marca una cruz en el suelo. Vuelve al abedul y camina hacia el pino contando los pasos. Bajo el pino gira un ángulo recto hacia la izquierda y camina el mismo número de pasos. Marca otra cruz en el suelo. Cava en el punto medio de las dos cruces. Allí está el tesoro."

Al ir a buscar el tesoro, Roberto encontró que el abedul había desaparecido, sólo quedaban el pino y el roble. ¿Podrías ayudarle a encontrar el tesoro?

El trabajo fue propuesto a un grupo de 14 alumnos de 3º de BUP, para realizar en casa sin limitación de tiempo y de forma voluntaria. Hubo en la realización de la tarea conjeturas ("el tesoro parece estar en tal punto..."), tanteos, comprobaciones pero ninguna demostración. Es destacable que ninguno de los alumnos tuvo la idea de emplear el método de las coordenadas, cuando se había trabajado ya la geometría analítica.



Hay varias consecuencias didácticas que conviene explicitar:

Demostrar sin intuiciones previas o sin conjeturas trabajadas es una coartada para tener ocupada a una clase. En el caso del problema del tesoro la demostración añade algo porque ya se tiene la intuición del resultado. Es entonces cuando produce una apertura metodológica y una satisfacción intelectual.

Las demostraciones han de ser "intuitivamente" convincentes. Debería procurarse excluir de ellas es carácter "teológico" y hermético que poco contribuye a animar hacia las matemáticas a la inmensa mayoría de los estudiantes.

Hay que educar al alumno en el gusto por la certeza y el alumno ha de ser consciente de la necesidad de demostración. Por ejemplo, en el problema del tesoro es indudable que el procedimiento de resolución utilizando coordenadas demuestra que el tesoro está donde está y justifica y explica por qué la desaparición del abedul no afecta a la búsqueda del tesoro. Hay que insistir con el alumno que el procedimiento *demuestra, justifica y explica.*

El gusto por la certeza y el sentimiento de la necesidad de demostración no son cosas que puedan identificarse (desde un punto de vista psicológico) y las estrategias didácticas para alcanzar uno u otro no han de presentar las mismas características. La convicción de la certeza aparece muy generalmente entre estos alumnos bien cuando han hecho una conjetura razonable, bien cuando la casualidad o la suerte les ha llevado a un lugar de su campo de visión lo suficientemente prominente como para considerarlo único y en el que se detienen como el punto deseado de llegada, sin preguntarse por las condiciones que le confieren ese valor. Piensan, no sin razón, que lo importante es haber hallado el tesoro, no el modo de hallarlo.

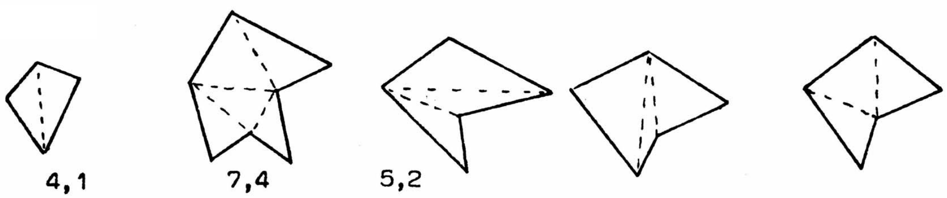
2. Polígonos

1ª Parte:

a) Dibuja varios polígonos. Dibuja en cada uno de ellos tantas diagonales como puedas (sin que ninguna corte a otras salvo en los vértices).

b) ¿Ves alguna relación entre el número de lados del polígono y el número de diagonales que no se cortan?

2ª Parte:



Parece que el número de diagonales (que no se cortan) que pueden trazarse en un polígono es igual al número de lados menos tres. ¿Es cierta esta afirmación para todos los polígonos? Investígalo a fondo y luego expón tus conclusiones y tus razones.

Con el objeto de evitar que la 2ª parte del enunciado influyese en la primera, la 2ª parte sólo era entregada al alumno una vez que éste había dado por terminada la primera.

Hernán (1982) resume los resultados conseguidos:

	Conjetura	Crítica de la conjetura	Demostración	Crítica de la demostración
De los 15 alumnos de 2ºBUP	11	2	5	0
De los 7 de 3ºbuenos	6	0	4	0
De los 18 de 3º malos	2	0	1	0
De los 29 de COU	23	6	1 (y otros 4 intentos incompletos)	0

	Han dibujado sólo polígonos convexos	Han trazado diagonales sólo radiales
De los 15 de 2º	11	10
De los 7 de 3º	7	6
De los 29 de COU	19	12

En la 2ª parte del problema, en la que ya se daban dibujados polígonos no convexos ha sido muy frecuente utilizar la terminología "polígono regular" para significar polígono convexo y "polígono irregular" para significar polígono no convexo.

A título explicativo diremos que Hernán considera crítica de la conjetura ("el número de diagonales es tres unidades inferior al número de lados") la realización de preguntas como "¿He contado todas las diagonales?", "¿Qué es una diagonal?" En los dos tipos de demostración que aparecieron en los trabajos, la "radial" y la de "triangulación", la crítica de la demostración podría tomar las siguientes directrices: el procedimiento de diagonalización radial ¿es el único posible?, si sigo otro procedimiento ¿obtendré otro resultado? Se podrían hacer preguntas análogas para el procedimiento de triangulación.

Hay varias consecuencias didácticas que se desprenden del análisis de este problema:

El concepto ingenuo de diagonal (segmento interior al polígono y que une dos vértices no consecutivos) y el concepto ingenuo de polígono (polígono convexo) se han de transformar en conceptos mejor definidos. Pero la definición no debe venir de la nada, caer sobre el alumno que no ha participado en ella.

Dice Lakatos (1978): "En el estilo deductivista, las definiciones generadas en el curso de las demostraciones son desgajadas de sus ´demostraciones antepasadas´, se presentan esas definiciones de un modo artificial y autoritario como llovidas del cielo. Se ocultan así los contraejemplos globales que indujeron a su descubrimiento. El estilo heurístico, por el contrario, ilumina estos factores. Pone de relieve la situación-problema: subraya la ´lógica´ que dio nacimiento al nuevo concepto".

La crítica de la definición y la crítica de la conjetura van, pues, unidas. Por otro lado, la crítica de la definición y de la conjetura pueden llevar a la crítica de la demostración aunque, en el caso del problema de los polígonos, la crítica de la demostración no ha sido intentada por nadie. Es como si encontrada primero la conjetura y después la demostración de ella, la gratificación psicológica que ello supone inhibe la posterior crítica.

Son muchos los alumnos que estiman como demostración la mera reafirmación de la conjetura. La evidencia empírica parece eximirles de la demostración. Sin embargo, la conjetura es anterior y diferente a la demostración. La práctica tan habitual según la cual el profesor expone demostraciones a alumnos que no han tenido ocasión de hacer conjeturas destina a los alumnos a mirar, hurtándoles la práctica matemática real que es hacer. Y la acción, es decir, el compromiso matemático del sujeto, está en conjeturar y demostrar él. Después puede ser ayudado en la crítica de sus propias conjeturas y demostraciones.

Para criticar los trabajos de otros (los teoremas de los libros de texto) no hay lugar ni tiempo (salvo casos excepcionales) en la enseñanza secundaria. En este punto es ilustrativo reproducir la historia de Mantecón en las memorias de Buñuel (Mi último suspiro): “Recuerdo también las clases de Filosofía, en las que el profesor nos explicaba, con una media sonrisa compasiva, la doctrina del pobre Kant, por ejemplo, que se había equivocado tan lastimosamente en sus razonamientos metafísicos. Nosotros tomábamos notas apresuradas. En la clase siguiente, el profesor llamaba a uno de los alumnos y le decía: ¡Mantecón! ¡Refúteme a Kant!. Si Mantecón llevaba la lección bien aprendida, la refutación duraba menos de dos minutos”.

En definitiva, queda claro, a nuestro juicio, que una vez que el estudiante ha conseguido poner en pie una conjetura fuerte muestra una gran proclividad a mantenerse en ella, a considerar que tiene el carácter de una demostración. Y cuando ha elaborado una demostración (o una explicación) de la conjetura parece haber agotado sus recursos. La crítica de las demostraciones propias (en los pocos casos en que tiene lugar) es un proceso ulterior y metodológicamente muy distinto. Conviene advertir que la capacidad de falsar nuestras propias hipótesis es una destreza de alto nivel cognitivo, sujeta a fuertes sesgos del sistema de procesamiento humano (por ejemplo, el sesgo confirmatorio); esta cuestión la trataremos en el apartado 4 al analizar la tarea de las cuatro tarjetas.

3. El número de regiones

N rectas distintas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos distintos. Se parte así el plano en p regiones distintas. Decir si:

$P = 2n$

$P = 2n+1$

$P = n(n+1)/2 +1$

$P =4n-5$

Ninguna de esas cosas.

Da razones

22 alumnos de 2ºBUP y 14 alumnos de 3ºBUP, de forma voluntaria, resuelven el problema en casa sin marcarles límite de tiempo.

En cuanto a los resultados, 20 alumnos de 2º deciden que la 3ª expresión es la correcta y 2 afirman que “ninguna es válida” (después de hacer comprobaciones equivocadas). La comprensión correcta del papel de los contraejemplos parece, pues, sólidamente adquirida. Hay 10 alumnos que se limitan a dar por válida la fórmula 3ª mediante la técnica comprobación-contraejemplo. Hay otros 9 que intentan dar algún tipo de demostración, es decir, que quieren aportar otras razones independientes de esa comprobación. Ninguno consigue, sin embargo, una demostración acabada, sino que se limitan a una inducción incompleta.

Por lo que respecta a los alumnos de 3º, 12 consideran la 3ª expresión como válida. De los 2 restantes, uno dice que todas las fórmulas son válidas y el otro que ninguna lo es. 4 de los 12 se dan por satisfechos con la comprobación-contraejemplo. Los otros 8 intentan demostraciones, varias de ellas de gran calidad y alguna muy original.

En cuanto a las implicaciones didácticas de estos resultados, conviene enfatizar el dato de que la diferencia entre comprobación y demostración y la consiguiente necesidad de demostración fue apreciada por 9 alumnos de 2º y por 8 alumnos de 3º. Sin embargo, las razones dadas por los alumnos pertenecen más a la categoría de explicaciones que a la de demostraciones. Dicho de otro modo, se acepta la plausibilidad de la conjetura "cada nueva recta añade tantas regiones a las que ya había como rectas haya" pero ninguno de los alumnos demuestra su conjetura de manera suficientemente satisfactoria, desde el punto de vista lógico. Con lo que vuelve a confirmarse que una vez descubierta por uno mismo la conjetura, la necesidad de una demostración ´acabada´ es un paso bien distinto y de otro orden de dificultad.

La profundidad que muestran los mejores trabajo de 3º es superior a la que logran sus homólogos de 2º. Hay motivo para pensar que una razón para ello es la superior potencia de atención y concentración en una tarea altamente abstracta de la que, en igualdad de condiciones, son capaces los alumnos de 3º.

Como resumen del análisis que acabamos de hacer de los tres problemas, podemos decir que las tareas matemáticas de explorar, formular preguntas, conjeturar y reorganizar las conjeturas, son las áreas más atractivas y aquellas por las que el aprendizaje de las matemáticas puede ser de utilidad para todos. Con todo, es cierto que el pensamiento reproductivo, es decir, el hábito de usar respuestas aprendidas, tiene dos ventajas: es más fácil de enseñar y es más fácil de someter a exámenes. Mientras que el pensamiento productivo, que consiste en crear nuevas situaciones y en usar nuevas organizaciones, es más difícil de enseñar, requiere más tiempo y necesita de otros esquemas de temporalización de la enseñanza y estructura de las clases. Con estos datos hay que contar a la hora de la toma de decisiones didácticas.

En todo caso, con estos tres ejemplos queda bien establecida, a nuestro juicio, la necesidad de trabajar el sistema de conjeturas- pruebas- refutaciones, como metodología de encuentro del razonamiento demostrativo con el razonamiento plausible en la enseñanza secundaria.

OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

Obstáculos epistemológicos

Mediante una demostración en matemáticas se trata de hacer una reconstrucción, a la medida, de ciertas parcelas de pensamiento con el fin de poder comunicar la validez de la construcción o existencia, según los principios filosóficos asumidos, de un objeto abstracto. Usamos una reconstrucción lógica para hacer demostraciones objetivas, que se puedan repetir y contrastar inter-subjetivamente. Poincaré (1902) considera que el entendimiento en su proceder requiere de algún acto adicional: "Es preciso aceptar entonces que el razonamiento matemático tiene por sí mismo una especie de virtud creadora y que, por consiguiente, se distingue del silogismo" .

Un caso singular entre los métodos de razonamiento utilizados para transmitir la validez del discurso matemático, que merece una atención especial, es el de *reducción al absurdo.* Se admite normalmente, a veces sin reflexionar demasiado, por la mayoría de los matemáticos y profesores de matemáticas, que para probar la proposición A se supone que es cierta –A, y si sacamos de esta suposición cualquier absurdo, cualquier contradicción con las verdades ya establecidas, se concluye que A es cierta.

El esquema de razonamiento por reducción al absurdo se identifica con el razonamiento hipotético: Sea A el enunciado que pretendemos deducir a partir de los enunciados ya admitidos (T). Suponemos que (-A) entra a formar parte de la base establecida con lo que los enunciados admitidos pasan a ser T+(-A). La estrategia de demostración consiste en deducir un enunciado B formalmente contradictorio con un enunciado ya deducido en T. Es decir, se obtiene en T+(-A) un B tal que su negación (-B) está ya probada en T. Llegados aquí, concluimos que A es deducible en T.

Ahora bien, si $((-A) \rightarrow B)$ es deducible, resulta por la regla de inferencia del modus tollens que $((-B) \rightarrow -(-A))$ se puede deducir, con lo cual -(-A) es un teorema de T. En todo rigor, si de la hipótesis suplementaria (-A) deducimos un enunciado contradictorio con cualquier enunciado ya establecido, entonces la negación de la negación de A es deducible. Para concluir la deductibilidad de A se necesita asumir alguna hipótesis suplementaria como por ejemplo $-(-A) \longleftrightarrow A$, lo que los intuicionistas rechazan sin remisión. Esta cuestión es una de las que genera una ruptura dentro de la epistemología de las matemáticas: para un formalista, el enunciado A es absolutamente sustituible por el enunciado -(-A) mientras que para un intuicionista A y -(-A) son cosas distintas.

Obstáculos cognitivos

El ser humano, analizado como un sistema de procesamiento de información, se enfrenta a un problema masivo de reducción de información. Tanto la formación como la manipulación de representaciones mentales deben realizarse de un modo muy selectivo (de información) usando alguna forma de procesamiento heurístico. De manera similar, debemos tener estrategias de búsqueda selectivas, inteligentes, para recuperar de nuestra vasta memoria de conocimientos factuales y procedimentales justo aquellos ítems relevantes al problema a resolver. Por ello es poco sorprendente que un sistema cognitivo tal sea vulnerable a sesgos y errores.

Evans (1989) analiza en profundidad varios estudios experimentales con tareas de razonamiento deductivo e inductivo muy conocidas en la psicología cognitiva, que son consistentes con lo que acabamos de decir. Así, frecuentemente la gente es capaz de comprender y usar bien un principio lógico en una situación e ignorarlo o usarlo mal en otra situación. Otras veces, particularmente en tareas de razonamiento estadístico, parece que los sesgos pueden reflejar una comprensión defectuosa de los principios implicados (una revisión de algunos sesgos del razonamiento probabilístico puede encontrarse en Sáenz, 1998).

La Tarea de Selección de Wason (1966), también conocida como tarea de las cuatro tarjetas, es un buen ejemplo de un tipo de sesgo del razonamiento deductivo (base de la demostración) que viene originado por no aplicar bien un principio que, sin embargo, es comprendido. Efectivamente, aunque los sujetos tengan una razonable comprensión de las condiciones de verdad de un enunciado condicional $(A \rightarrow B)$, fracasan sistemáticamente en la formulación de una estrategia efectiva para verificar dichas condiciones en la versión estándar de la tarea que dice así:

Hay cuatro tarjetas. Cada tarjeta tiene una letra impresa en un lado y un número impreso en el otro. Dos de las tarjetas muestran letras (una consonante y una vocal) y las otras dos muestran números (uno par y otro impar), así:

A	*H*	*4*	*7*

Se enuncia la siguiente regla: "Si una tarjeta tiene una vocal en un lado, entonces tiene un número impar en el lado opuesto". ¿A qué tarjetas hay que darle la vuelta obligatoriamente para saber si la regla es verdadera o falsa?

Esta tarea se ha convertido en uno de los problemas más estudiados en la historia de la investigación en razonamiento humano. Resulta engañosamente simple pero la gran mayoría de personas no da la solución correcta: dicen, o bien que sería suficiente con darle la vuelta a la tarjeta A, o bien, que sería necesario girar la A y la 7. Sin embargo, las tarjetas que hay que girar son la A y la 4 (o bien, las cuatro tarjetas, dependiendo de cómo se interprete la regla).

¿Por qué es tan difícil la tarea de selección? Una explicación que deberíamos rechazar rápidamente es que se debe a la ambigüedad de la regla. Aunque se dice que una vocal debe tener un impar en el reverso, el sujeto podría interpretar que un impar debe tener también una vocal en el reverso. En este caso el sujeto estaría leyendo la regla condicional como una equivalencia más que como una implicación. Eso no justificaría la selección de A y 7 porque si la regla es interpretada como equivalencia la solución correcta sería elegir obligatoriamente las 4 tarjetas y esa opción no la toma prácticamente ningún sujeto.

La explicación original de Wason (1966) fue que los sujetos mostraban lo que en psicología cognitiva se llama el sesgo de confirmación. En otras palabras, que su error se debía a que intentaban encontrar evidencia que confirmase la regla más que encontrar evidencia que la falsase. (Se ha demostrado que los científicos, con frecuencia, caen en el sesgo confirmatorio, cuestión muy grave para la práctica del método científico).

El problema es que en el método de demostración por reducción al absurdo hay que falsar la tesis como punto de partida y comprender en profundidad un enunciado condicional. A la luz de lo dicho hasta aquí, se puede atisbar lo ilusorio que es pensar que, por ejemplo, el argumento pitagórico acerca de la irracionalidad de la diagonal de un cuadrado (utilizando el método de demostración por reducción al absurdo) constituya una demostración para los estudiantes (de secundaria). A este propósito cabe recordar lo que Hume decía refiriéndose a los argumentos de Berkeley: que no admitían la menor réplica y que no causaban la menor convicción. Nunca hay que dar por supuesto el dominio o la familiaridad con los elementos lógicos que se utilicen en la demostración.

Obstáculos didácticos

En definitiva, si en los campos de la filosofía y de la psicología de las matemáticas hay problemas con el método de demostración por reducción al absurdo, también los hay en el campo de la enseñanza. Cualquiera que haya utilizado este método de demostración en el bachillerato y se haya preocupado un poco de captar las reacciones del alumnado se habrá encontrado con un nivel de desconcierto casi absoluto. La cosa no es para menos: El profesor empieza su discurso diciendo que quiere demostrar que determinada proposición p es cierta y para ello va a partir de la hipótesis de que p es falsa. El pensamiento inmediato del alumno lo lleva a considerar lo absurdo de la propuesta sobre todo cuando tiene acceso a una aproximación heurística de la proposición.

Pero eso no es lo más grave; si la cadena deductiva conduce con éxito a la contradicción, ocurre que ésta tanto se puede referir a la negación de alguna de las hipótesis como a alguno de los resultados obtenidos en los pasos intermedios del razonamiento o incluso a algunos de los teoremas del corpus matemático anteriormente demostrados. Al final, el alumno, que se debate entra la posición autoritaria del profesor y cierta magia del método, aprende la demostración de memoria pero lo cierto es que en el aislamiento de la contradicción no ve temblar el edificio matemático por ninguna parte.

Efectivamente, la utilización del método de demostración por reducción al absurdo no es única y profesores y libros de texto siguen los más diversos patrones de razonamiento cuando invocan el método. García Suárez (1999) dentro de un trabajo experimental preguntó a 50 profesores de bachillerato: "¿Crees que el método de reducción al absurdo debe utilizarse en alguna demostración en BUP o COU? En caso afirmativo cita dos teoremas en los que utilices el método."

Un 52% de los profesores se mostraron partidarios de la utilización del método y entre los teoremas más citados aparecieron los siguientes:

-Irracionalidad de la $\sqrt{2}$

-Unicidad de la expresión de las coordenadas de un vector respecto a una base

-Unicidad del límite

-Teorema de Euclides (no existe un número primo máximo)

-Teorema de Bolzano

A continuación el autor analiza los esquemas de demostración utilizados en cada caso tomando como fuente los libros de texto al uso en los correspondientes niveles:

1. Unicidad de las coordenadas: Sea V un espacio vectorial y $B=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base. Supongamos que $v\in V$ admite las dos expresiones: $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$ y $v = b_1 v_1 + b_2 v_v + ... + b_n v_n$, entonces $0 = (a_1 - b_1)v_1 + ... + (a_n - b_n)v_n$, => (independencia lineal) => $(a_1 - b_1) = 0, ... (a_n - b_n) = 0$ => $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$.

Ésta no es una demostración por reducción al absurdo porque no hay ninguna contradicción

2. Unicidad del límite:

Supongamos que existen dos límites l_1 y l_2 y sea $\in < ABS\,(l_1 - l_2)/2$, atendiendo a la definición de límite existen d_1, d_2 tales que:

$x\in E^* (a,d_1) => f(x) \in E(l_1,\in)$

$x \in E^* (a,d_2) => f(x) \in E(l_2,\in)$

$d = min\,(d_1, d_2) => f(x) \in E(l_1, \varepsilon) \cap E(l_2, \in) = \Phi$

Contradicción: el vacío no tiene elementos, como se ve la contradicción se establece en el nivel de los fundamentos (definición de función, de conjunto vacío)

3. Teorema de Euclides: Queremos demostrar que no existe un número primo máximo x. Supongamos que tal x existe. Sea $y = 2.3.5....x + 1$. Si y es primo entonces x no sería el máximo primo. Si y es compuesto deberá tener un divisor z distinto de $2, 3, 5, ..., x$. Pero y es primo o compuesto (principio del tercio excluso) => en cualquiera de los dos casos x no sería el máximo primo.

Éste es el esquema clásico de demostración por reducción al absurdo donde la contradicción se da al negarse la negación de la tesis que se pretende establecer.

Como se desprende del análisis de estos tres casos, al hablar de una demostración por reducción al absurdo se presupone la equivalencia de mecanismos de demostración bastante diferentes entre sí, lo que dificulta la comprensión por parte de los estudiantes. Conclusión: sería necesario introducir en el bachillerato y primeros cursos de facultad contenidos matemáticos dirigidos a conseguir un mínimo adiestramiento en el esquema de demostración. Estos contenidos deben presentarse en bloques compactos para que los objetivos operativos (aprendizaje de contenidos) no eclipsen los metodológicos.

Generalmente, la primera vez que un alumno de secundaria se enfrenta con el método de demostración por reducción al absurdo es para demostrar de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Los libros de texto normalmente hacen una demostración estrictamente formal y concisa de dicho teorema. Un procedimiento típico es el siguiente: Queremos demostrar que no existe ninguna fracción tal que su cuadrado sea igual a 2. Supongamos que si existe y sean *p* y *q* números enteros para los cuales $(p/q)^2=2$, donde podemos suponer que *p* y *q* no tienen factores comunes porque en otro caso podríamos simplificar la fracción. Pero si $(p/q)^2=2$, entonces $p^2=2q^2$ y por tanto *p* es divisible por 2. En este caso p^2 es también divisible por 4, puesto que es el cuadrado de un número par. Así $p^2=4q_1$; esto es, $2q^2=4q_1$ y $q^2=2q_1$. De esto se sigue que *q* debe también ser divisible por 2. Pero esto contradice la suposición de que *p* y *q* no tienen factores comunes. Esta contradicción demuestra que el cociente *p/q* no puede ser expresado mediante un número racional.

Frente a esta demostración estándar y abstracta existen posibles alternativas más adecuadas al desarrollo intelectual de un alumno de secundaria. Por ejemplo la que ofrece Hernán (1982): Si $\sqrt{2}=a/b$, donde *a* y *b* son primos entre sí, entonces $2=a^2/b^2$; $a^2=2b^2$; $b^2=a^2/2$, Ahora bien,

Si *a* termina en	a^2 termina en	b^2 termina en	*b* termina en
1	1; imposible		
2	4	2; imposible	
3	9; imposible		
4	6	3; imposible	
5	5; imposible		
6	6	3; imposible	
7	9; imposible		
8	4	2; imposible	
9	1; imposible		
0	0	5 o en 0	5 o en 0

Así pues, la única posibilidad es que *a* termine en 0 y *b* termine en 0 o en 5, en cuyo caso *a* y *b* tienen como divisor común el 5, contradictorio con el hecho de que *a* y *b* sean primos entre sí.

En resumen, se debe tener presente al tratar de introducir a un alumno en el método deductivo, que en sus esquemas de pensamiento no tiene integrada ninguna de las reglas admitidas para la obtención de teoremas (el modus ponens, el modus tollens,...), tal como hemos señalado al hablar de los obstáculos cognitivos. Por ello, la invitación a la utilización normativa de las reglas de derivación debe ser forzada por alguna cuestión externa al sistema formal, a poder ser, susceptible de reinterpretación física. Así, la demostración del Teorema de Euclides ("no existe un número primo máximo") puede venir motivada por la aplicación que tiene la propiedad enunciada para los mensajes cifrados o las telecomunicaciones debido a la dificultad de descifrar códigos que dependan de la factorización de números obtenidos cómo producto de primos del orden de cien o más cifras.

REFERENCIAS

Evans, J.St.B.T. (1989). *Bias in human reasoning. Causes and consequences*. Hove and London (UK): Lawrence Erlbaum Associates.

García Suárez, X. (1999). *Interacciones contextuales en la didáctica de las matemáticas*. Vigo: Publicaciones de la Universidad de Vigo

Hernán, F. (1982). *Estrategias, conjeturas y demostraciones*. Valencia: Institut de Ciencies de l´Educació. Universitat de Valéncia

Hernández, E. (1997). *Algunos conceptos de la matemática del Siglo XX*. Seminario de Trabajo. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI Editores

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial

Nelsen, R.B. (1993). *Proofs whithout words*. The Mathematical Association of America

Poincaré, H. (1902). *La Science et l'Hypothèse*. París: Alcan (Traducción: *Ciencia e Hipótesis*. Madrid: Austral, 1963)

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos

Sáenz, C. (1998). Sesgos en el razonamiento probabilístico y efectos de la instrucción estadística elemental. *SUMA*, 28. Pp. 37-52

Wason, P.C. (1966). Reasoning. En B.M. Foss (Ed.). *New horizons in psychology I.* Harmandsworth: Penguin Books

Wilder, R. (1944). The nature of mathematical proof. *The American Mathematical Monthly,* 51. Pp. 309-23

DEBATE DEL SEMINARIO I: PRUEBA Y DEMOSTRACIÓN: RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Tomás Ortega

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

DEBATE DEL SEMINARIO I:
PRUEBA Y DEMOSTRACIÓN: RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

❧

Tomás Ortega

Se presenta un resumen de las notas tomadas en el transcurso del debate siguiendo el orden de las intervenciones y citando a los autores de las mismas.

Comienza el Seminario de Investigación a las 9:45 h con la exposición de Marcelino Ibañes, a continuación intervienen César Sáez y Ángel Martínez, que cierra el turno de ponencias. A continuación, en el turno de réplica, interviene José Manuel Matos, que deja planteadas 3 cuestiones para el debate: la primera es de tipo curricular y en ella se pregunta si todos los alumnos deben estudiar demostraciones, y si algunos tipos de alumnos revelan mayores dificultades con las demostraciones; la segunda es de naturaleza didáctica y plantea qué características debe reunir una cultura de aula para que se desarrolle el aprendizaje de la demostración; la tercera es ideológica cuestiona la relación entre la demostración y una racionalidad de génesis europea.

Los tres ponentes dan respuestas afirmativas a la primera pregunta. Cesar apuesta por el esquema de Lakatos, indica que debemos clarificar el concepto de demostración matemática y que si ésta debe ser lógico-deductiva, entonces no debe ser el único camino a seguir en Educación Secundaria. Marcelino comenta que su exposición está basada en un trabajo de investigación mucho más amplio en el que sí que se ha tenido en cuenta la vertiente currícular, y ello desde distintos enfoques, y que, incluso, se dan orientaciones curriculares precisas.

Interviene Juan Díaz Godino afirmando que el campo de la Investigación en Educación Matemática, que es muy amplio, se centra en un enfoque unidimensional, cognitivo-ideológico, pero el campo didáctico, el campo de la acción, requiere procesos instrumentales. La investigación tiene que pasar al campo de la acción y aquí son muy importantes las situaciones de validación.

Eduardo Lacasta indica que quizás Ibañes se ha centrado más en un enfoque cognitivo; pero que si uno piensa en la filosofía Piagetiana, más allá de los 12-13 años los alumnos están preparados para el pensamiento matemático lógico-deductivo. Sin embargo, según lo que se ha mostrado parece que esta demostración no puede hacerse.

Toma la palabra César Sáez y afirma que la teoría de los estadios de Piaget está superada y que las investigaciones actuales indican que la demostración lógico matemática no se puede abordar, hay que ir a un concepto mucho más amplio, más abierto, y admitir demostraciones menos formales.

Ángel Martínez abunda en este planteamiento y afirma que en Bachillerato deben admitirse demostraciones informales.

Interviene Modesto Sierra postulando que los alumnos de Bachillerato deben hacer demostraciones y que las demostraciones matemáticas que estos alumnos deben hacer son las que aparecen en los libros buenos de matemáticas, y hace la distinción entre finitistas, que son propias de la Geometría, y no finitistas, que son propias del Análisis.

María Lluisa Fiol destaca que la demostración presenta una matemática muy árida y muy rígida, ya cristalizada, le parece que la demostración bloquea al estudiante. Termina su intervención preguntando cuál es el camino por el que se debe llevar a la gente para que los alumnos pongan en marcha la imaginación y el aspecto creativo.

Tomás Ortega hace referencia a los estilos de la demostración, que tienen que ver con el tipo de inteligencias de los alumnos y afirma que un tipo de demostración adecuada al tipo de inteligencia puede favorecer la creatividad y la imaginación. Como ejemplo cita la propiedad citada por Ángel Martínez del ángulo de las bisectrices de dos ángulos adyacentes y afirma que echa en falta un estilo geométrico, que para muchos alumnos podía ser más interesante. Después, citando la tesis de Marcelino Ibañes, indica la conveniencia de distinguir la demostración matemática de otros procesos, ya presentes en la literatura como vías intermedias entre la explicación intuitiva y la demostración formal, destaca Harel y Showder (1998) utilizan el término de *esquema de prueba* desde la perspectiva del alumno y hacen una clasificación, que es completada por Ibañes en 2001, T. Ortega propone la utilización de esta terminología, ya establecida.

Mª Victoria Sánchez propone pasar a debatir el punto que hace referencia a la cultura de aula y propone que se promueva el aprendizaje de la demostración.

Carlos Castro indica que él lo plantearía en términos de contrato didáctico y que sí que pediría a los alumnos de Bachillerato que "probaran algo", ahora, esto se hace de forma muy mutilada.

José Manuel Matos afirma que si pensamos en la demostración con perspectivas de futuro, entonces, ésta tiene que ver, como proceso, con otras características, y sí que se deben hacerse demostraciones porque éstas son el único vehículo para establecer matemáticas. Sin embargo, sólo los alumnos que van a cursar "Ciencias" en la Universidad son los que necesitan estudiar el tipo clásico de demostraciones. Termina su intervención haciendo referencia a los tipos de alumnos, afirmando que hay relaciones de tipo epistemológigo que se reflejan más en los alumnos de la periferia de las grandes ciudades.

Nuria Rosich postula que el tema de las demostraciones se plantea desde el punto de vista de los que enseñamos y, si bien es verdad que muchas veces se pretende despertar la imaginación y la creatividad en los alumnos, muchas otras se plantea la clase sin la finalidad clara de que los alumnos razonen, justifiquen, construyan, etc.

Juan Díaz Godino lanza como hipótesis de trabajo que hay una postura de "confusión argumentativa" en el seno de la clase de matemáticas, de tal manera que en las fases exploratorias de resolución de problemas, es necesario utilizar cualquier tipo de recurso exploratorio (incluyendo razonamientos de tipo inductivo, analógico, etc.). Pero en la fase de institucionalización de los conocimientos la argumentación que se requiere es de tipo deductivo. Los alumnos no discriminan de manera inmediata las circunstancias en las que es pertinente cada tipo de argumentación.

Se producen otras intervenciones apuntando que hay una orientación corriente en la que se ha pasado de una matemática universal a otra muy concreta, del "2+2" al "dos cosas concretas + dos cosas concretas". En algún punto hay que basarse en el razonamiento matemático, porque es el fundamento del conocimiento matemático, y el pensamiento abstracto es el núcleo y la base de la matemática.

Finaliza el debate con la intervención de T. Ortega indicando que el razonamiento matemático no es sinónimo de demostración matemática y señala la dificultad que ésta entraña y hace una reflexión en voz alta preguntándose el porqué buen número de sus alumnos del CAP, que se han pasado cinco años demostrando, no consiguen demostrar que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Siendo las 13:30 el coordinador agradece el trabajo realizado a los tres ponentes y al reactor, lamenta la incomparecencia de Philippe R. Richard, y da por terminado el Seminario de Investigación. Este Seminario ha tenido una asistencia de 58 personas.

V SIMPOSIO SEIEM

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II:

METODOLOGÍA

UN ESTUDIO CUALITATIVO DE CORTE INTERPRETATIVO EN EL ÁMBITO DEL PENSAMIENTO DEL PROFESOR DE SECUNDARIA

LUIS CARLOS CONTRERAS

Universidad de Huelva

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

UN ESTUDIO CUALITATIVO DE CORTE INTERPRETATIVO EN EL ÁMBITO DEL PENSAMIENTO DEL PROFESOR DE SECUNDARIA

❧

LUIS CARLOS CONTRERAS
Universidad de Huelva

RESUMEN

Este trabajo expone el punto de partida de una investigación cualitativa de corte interpretativo, delimitando el objeto de estudio, los sujetos de los que se obtendrá la información y caracterizando todo el proceso utilizando los términos al uso. Se entra en detalle, después, en los instrumentos de la investigación, particularmente en los diseñados "ad hoc", entendiendo que los otros son de uso común dentro de la investigación cualitativa y están suficientemente descritos y estudiados.

ABSTRACT

This paper shows the starting point of a qualitative and interpretative research process, focusing on the object of the study and the subjects who contribute information. It presents too a characterization of the whole process applying usual terms in qualitative research. One deals after with the research instruments, mainly with those which were designed "ad hoc" as they might promote a deep discussion at this seminary.

INTRODUCCIÓN

Entiendo que es objetivo de este seminario aportar, a través de investigaciones realizadas desde paradigmas diferentes, elementos que permitan a medio plazo ayudar a caracterizar componentes de un cuerpo teórico en la investigación en Educación Matemática.

Me era difícil encontrar un discurso compartido con los demás participantes, en el sentido de encontrar un mismo "problema" que, al ser resuelto para cada uno de nosotros, pusiera en evidencia los puntos de encuentro, las características diferenciales y suficientes elementos para debatir.

Sugerí, entonces, al coordinador del seminario que cada uno de nosotros sintetizara un proceso de una investigación dentro de su paradigma, usara unos descriptores genéricos para exponerla y planteara algunas cuestiones al debate desde su propia percepción de posibles debilidades del proceso.

Esa ha sido mi opción, por tanto. Procuraré, brevemente, exponer el punto de partida de una investigación, delimitaré el objeto de estudio, los sujetos de los que se obtendrá la información y caracterizaré todo el proceso utilizando los términos al uso. Me detendré después, un poco más, en los instrumentos de la investigación, particularmente en los diseñados “ad hoc”, entendiendo que los otros son de uso común dentro de la investigación cualitativa y están suficientemente descritos y estudiados.

Entiendo que la investigación en Educación Matemática comparte presupuestos y métodos comunes a gran parte de la investigación que se realiza dentro de las Ciencias Sociales como ámbito, concretamente el *modelo interpretativo* (cuyos orígenes se remontan al siglo XVIII, aunque como alternativa a la corriente positivista no se extiende hasta la segunda mitad del siglo pasado) (Erickson, 1989). Es posible que, a medio plazo, consigamos un “corpus” teórico suficiente para minimizar el grado de dependencia con aquél. Creo que, en definitiva, ese es uno de los objetivos de este seminario.

CARACTERIZANDO UNA INVESTIGACIÓN

La investigación, cuyos elementos caracterizaré brevemente a continuación, parte de un hecho puesto de manifiesto en trabajos anteriores: *Las concepciones y creencias de los profesores condicionan su desarrollo y actuación profesional.*

A) Objeto de estudio

Desde esa perspectiva, se pretendió realizar un acercamiento a las concepciones y creencias del profesor, con un énfasis metodológico; es decir, que aunque se perseguía elaborar un perfil de los profesores participantes, la investigación no pretendía establecer patrones generales entre el profesorado ni incidir, a corto plazo, sobre los profesores que se iban a estudiar en la misma a raíz de la información obtenida. Por tanto, en esencia, tenía una relevancia mayor la *elaboración de medios para obtener, interpretar y analizar la información.*

B) Sujetos de estudio (informantes)

Los sujetos de estudio a los que, en adelante, llamaré *informantes* para no utilizar términos cuyo significado adquiere sentido dentro de otro paradigma de investigación, fueron tres profesores de matemáticas de Educación Secundaria. En el apartado siguiente comentaré un poco más su selección.

C) Características de la investigación

Los referentes teóricos, dentro de la investigación educativa, que se utilizaron (cuyos términos usaré para exponer las características del proceso) fueron los trabajos de Wittrock (1989), Lincoln y Guba (1985), Bardin (1986), Arnal y col. (1992) y, fundamentalmente, Goetz y LeCompte (1988).

Desde esos presupuestos teóricos, la investigación realizada fue:

- *Etnográfica*; se pretendió *comprender* los acontecimientos tal y como los concebían los informantes, mediante una inmersión en su *pensamiento* y en su *acción*. En ese sentido, es también de corte *interpretativo*.
- *Longitudinal*; los informantes fueron ofreciendo información a lo largo de un período aproximado de 18 meses.
- Tuvo componentes tanto de *campo* como de *laboratorio*, ya que la información se obtuvo tanto en el hábitat profesional natural de los informantes como fuera de él.

Estas primeras características *condicionaron* la elección de los informantes. Era preciso disponer de profesores que:

a) Confiaran en el equipo de investigación. Ello implicaba que cada parte tuviera un conocimiento personal y profesional de la otra.
b) Consintieran de forma consciente a la utilización de parte de su tiempo libre por parte de los investigadores, así como a la intromisión en sus tareas docentes (observación, análisis de documentos de trabajo,…)
c) Mostraran disposición e interés hacia la problemática de la enseñanza y la investigación en el área.

Esta elección, por tanto, no fue realizada bajo ningún criterio estadístico.

· *Inductiva*; las herramientas que se utilizaron (obtención-interpretación-análisis) no estaban diseñadas totalmente a priori. Se disponía de una versión inicial depurada pero se admitía su modificación durante el proceso. Ello exigió la inclusión de procesos de revisión o "feedback". También, por ello, la investigación tuvo un carácter *subjetivo*.

El carácter longitudinal permitió obtener información en distintos momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje: antes, durante y después de los actos de enseñanza.

Por todo lo anterior, la investigación puede calificarse de *descriptiva, generativa* y *constructiva.*

D) Instrumentos utilizados

D.1) *De recogida de información (primer orden):* Con la intención de obtener un "acercamiento por planos" al pensamiento de los informantes, se diseñó un proceso *recursivo* cuya primera fase fue general y el resto personalizada. Ello supuso un análisis de cada fase previo al diseño de la siguiente.

El instrumento inicial de análisis (modificable por el proceso, como ya se ha dicho) sirvió de base para la elaboración de dos cuestionarios (primeros instrumentos de primer orden), uno tipo Likert y otro semiabierto. Ese instrumento de análisis (de segundo orden), que se fundamenta en un modelo teórico elaborado sobre la base de una revisión profunda de las investigaciones en este ámbito, sí se tiene a priori en una primera versión.

La versión de los cuestionarios que fue cumplimentada por los informantes fue precedida de otras versiones que sufrieron sucesivas modificaciones, fundamentalmente de carácter semántico y sintáctico, al ser analizados por expertos. En la elaboración de estas versiones fueron utilizados otros cuestionarios disponibles en la literatura al uso.

Los cuestionarios, que funcionaron como detonantes, fueron seguidos de varias entrevistas:

· Una primera, informal (sin guión) a la entrega de los cuestionarios.
· Otra tras el análisis de estos (personalizada y semiestructurada).
· Otra tras las observaciones de aula (evocación del recuerdo).
· Otra durante el análisis, por parte del informante, de una grabación en vídeo de otro profesor.

Son también de primer orden las observaciones de aula y los artefactos (programaciones, pruebas y valoración de éstas).

D.2) *De análisis de la información (segundo orden)*: Las denominadas tablas CEAM[1] y CRP[2] son, en su inicio, modelos teóricos de categorías/subcategorías e indicadores (descriptores de éstas) elaborados, como se ha dicho, sobre la base de la investigación en este ámbito. El informe de la investigación (Contreras, 1998, 1999) destina dos capítulos para la explicación detallada del proceso de elaboración de cada uno de estos modelos, respectivamente. Estos dos capítulos (http://www2.uhu.es/luis.contreras/Investigacion/Inicio.htm, capítulos 2 y 3) confieren a esta investigación un énfasis en el *contexto de des-*

[1] Sobre Concepciones acerca de la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.

[2] Sobre Concepciones acerca del papel de la Resolución de Problemas en el aula.

cubrimiento (Echevarría, 1995). En la elaboración de estos modelos se utilizó una amplia bibliografía teórica y empírica. Cabe destacar el clásico de Howson, Keitel y Kilpatrick (1981).

D.3) *De clasificación e interpretación de la información* (*tercer orden*): Sirvieron para catalogar (interpretar) y presentar, de forma organizada para su posterior contraste, los datos obtenidos mediante una previa selección de *unidades de información.*

D.4) *De presentación de los datos (cuarto orden)*: Fueron informes personalizados de los informantes a la luz de los indicadores obtenidos en cada una de las categorías antes citadas. Para la redacción de este informe se tuvo, previamente, una sesión con cada informante para comunicarle su perfil y ver su grado de conformidad con el mismo (*consenso*). La información obtenida a través de los cuestionarios no se utilizó en los instrumentos descritos en los dos apartados anteriores.

No parece relevante para los objetivos de este seminario entrar en detalle en los instrumentos de primer orden, sobre todo porque pertenecen a un campo de investigación muy definido y la literatura ofrece suficientes recomendaciones para su elaboración y uso. Tampoco es momento de entrar en detalle sobre el proceso de elaboración de los modelos teóricos que condujeron a las tablas CEAM y CRP, y que básicamente, están compuestos por un total de 6 *categorías* (metodología, sentido de la asignatura, concepción del aprendizaje, papel del alumno, papel del profesor y evaluación) elaboradas sobre la base de los caracterizadores de un modelo didáctico de Gimeno (1985). Estas categorías son, posteriormente, desarrolladas en 35 y 29 *indicadores*, respectivamente, para cada una de las cuatro *tendencias didácticas* de referencia (tradicional (TR), tecnológica (TE), espontaneísta (E) e investigativa (I)). Sí parece relevante, sin embargo, ejemplificar su uso y el proceso de clasificación e interpretación posterior. Me refiero a los instrumentos de tercer y cuarto orden y a los controles de calidad que se incluyeron (*proceso de revisión*).

INSTRUMENTOS DE TERCER Y CUARTO ORDEN. PROCESO DE ELABORACIÓN Y REVISIÓN

En los datos obtenidos a través de los instrumentos de primer orden el primer paso fue delimitar, como se muestra en el siguiente ejemplo (marcada en cursiva en la trascripción), las unidades de información, entendidas como aquellos enunciados correspondientes a una misma cuestión base con una ligazón sintáctica y/o semántica. Podemos encontrarlas dentro de una respuesta concreta o a través de varias coordinadas. En una misma unidad, el informante puede aportar datos sobre uno o más parámetros (indicadores y/o categorías):

> PG: Y que luego tienen unos resultados buenísimos.
> E: ...buenísimos...
> PG: ... y después tú eres más mala que un...
> E: Hay otros, sin embargo, que han estado haciendo unas ciertas cosas en clase, y luego hacen todo lo contrario, en el examen les piden todo lo contrario, supongo que también lo has conocido, en la facultad o en algún sitio...
> PG: Sí...
> E: Gente que lo que pone en el examen, aparentemente al menos, no tiene ninguna relación, es decir, nos encontramos ambos polos. ¿Tú dónde te sitúas?, ¿hacia dónde te inclinas?

PG: Hombre, yo creo, que yo *pongo los exámenes*..., pues más o menos *cosas como las que hacemos en clase*, vamos, no el mismo problema, pero sí *del mismo tipo*. E 25
E: Es decir, que un poco la clase es un entrenamiento...
PG: Sí, yo intento que lo sea...
E: ...para el examen.
PG: Sí.
E: Hay veces que tienes la idea de que lo has hecho muy bien, pero por lo que sea el control te dice que no es así, es decir, que hay muchas veces que lo que nosotros creemos que es una buena enseñanza no ha conducido a que los alumnos aprendan, ¿a qué achacas tú este tipo de situación?
PG: Pues *generalmente a que los alumnos no tenían los conocimientos previos necesarios para asimilar ese tema que se ha dado, o porque no tienen interés*, no están motivados para entender eso que tú le estás explicando nuevo.... No sé, una de esas cosas...me imagino...lo que te dije antes, ¿no? E 26
E: Hay veces que estás con un resultado que tiene una prueba muy sencilla, muy elemental, de manera que el alumno lo llega a entender, comprende cada paso que tú has dado, pero no se lo cree. Como por ejemplo, lo que pusimos antes del algoritmo de conversión de 0, 9 periódico a 1, ¿te parece importante que los alumnos se lo crean?, ¿no te importa que los alumnos se lo crean, lo que te importa es que los alumnos lo entiendan, lo comprendan?, ¿lo acepten?
PG: Yo ya te decía que *si ellos no están convencidos*, que no importa. Que...hombre, de alguna manera sí que *se lo tienen que creer, porque se ha probado y se ha demostrado*. Pero que si no lo comprenden, que ya lo comprenderán...más adelante, que no hace falta entenderlo todo...bueno, o estar convencido de...de cualquier cosa en el momento, sino que ya... hombre, que a la hora de utilizarlo, si es verdad que lo tienen que utilizar y que se lo tienen que creer, pero aunque sea como un acto de fe, pero que ya lo irán entendiendo en su momento. Que no me preocupa que no estén convencidos, y que ...no sé, al revés me parece bueno, por lo menos ahí hay un criterio, una posición crítica ante algo, ¿no? E 27

Después se procedió a su interpretación, es decir, a la asignación de indicadores de las tablas CEAM o CRP (en el ejemplo anterior figuran marcados en el margen derecho), previo acuerdo entre investigador y co-investigadores. Una vez efectuada dicha asignación se procedió a la constatación escrita de las unidades de información clasificadas[3] por categorías, colocando al comienzo su número de orden precedido de un código distintivo del instrumento utilizado para su obtención (D-declaración-, E-entrevista-, O-observación-, EV-evocación-, VV-visionado de vídeo) y al margen derecho el indicador asignado con su descripción (empleando abreviaturas por cuestiones de formato), como se ejemplifica en el cuadro 1.

[3] Los códigos de cada uno de ellos se componen de la sigla tendencia didáctica (TR; TE; E; I) seguida de un número de 1 a 35, en el caso de CEAM, o de 1 a 29 en el de CRP.

UNIDADES DE INFORMACIÓN DE PG (CEAM)	PAPEL DEL ALUMNO
D4. [El número de aprobados es un indicador fiel del éxito] del plan trazado por el profesor y acatado por los alumnos...la clase no es sólo el profesor...	T15+TR16: No participa en el diseño didáctico + Único responsable de la transferencia E-A. Sumisión
VV3. [En la dinámica de la clase] el profesor modera, los alumnos siguen las pautas del profesor; tienen la iniciativa (salen a la pizarra).	T15: No participa en el diseño didáctico
D5. [ante malos resultados] les invito a que vuelvan a estudiarse los temas.	TR16: Único responsable de la transferencia E-A. Sumisión
E26. [Si una buena enseñanza no conduce a un buen aprendizaje se debe] generalmente a que los alumnos no tenían los conocimientos previos necesarios para asimilar ese tema que se ha dado, o porque no tienen interés...	TR16
EV6. [Si los resultados son bajos] intentaré hacer más ejercicios sobre esa parte...si el resultado es bajo pues tendrán que...vamos, ya después tendrán oportunidad de subirlos o de recuperarlos...los que no han aprobado el examen, se van estudiando la recuperación y las dudas que van teniendo me las van preguntando allí en la misma clase...Pero, generalmente, esto no se da...	TR16
E22. Si...estoy explicando un tema, y...veo que nadie se entera, pues voy más despacio...Procuro adaptarme a ellos en ese sentido. Pero si...tú vas siguiendo el ritmo de la clase...los típicos que estudian solamente para el examen...no te pueden ir siguiendo todos los días, yo...no me paro a contemplarlos...	TR/TE16: Único responsable de la transferencia E-A. Sumisión/Responsable principal (motivación por el contexto)
E9. [En clase] yo siempre llego preguntando si hay algo que preguntar de lo que no se haya entendido de lo anterior....pues primero...cuando empiezo un tema pues darle un poco de teoría y después hacer ejercicios...sobre todo este año...que estoy siguiendo el libro, todos los ejercicios del libro...se consideran propuestos, entonces la gente, la poca gente que trabaja siempre tiene alguna duda y entonces siempre vamos haciendo ejercicios, los ejercicios que van preguntando....hay otras veces que, según como vea al personal...es que tengo un jueves a las dos y media y...pues, "venga, vamos a hacer problemas" y ya está, ¿no?, "sacad los libros y...empezamos por aquí...", si a mí me parecen algunos interesantes se los señalo y si no que ellos vayan haciendo problemas y..., y en otros momentos, cuando yo llego y está la gente insoportable, pues borro la pizarra inmediatamente y empiezo a explicar para que se callen...	TR17+T18: Escucha y copia + Atiende
O2. Los alumnos atienden y copian	TR17: Escucha y copia
E27. Si ellos no están convencidos [de algo que se ha probado] se lo tienen que creer...porque ya se ha probado y se ha demostrado...	TR/TE21: Acepta/cree

Cuadro 1. Extracto de la organización de datos, dentro de la categoría *Papel del Alumno* con el instrumento de tercer orden.

A continuación, se procedió a señalizar cada uno de los indicadores afectados en las tablas (instrumentos de segundo orden). Con ello se iba obteniendo una aproximación al perfil de cada individuo que se iba representando, simplificado, en un cuadro en el que estaban ausentes los nombres de los indicadores (cuadro 2).

Sería poco honesto omitir la secuencia real de esta parte del proceso, que aquí aparece con una linealidad nada comparable al recorrido con vericuetos y continuos "avance-retroceso" que lo caracterizaron.

La selección de las *unidades de información* es uno de los aspectos más delicados de este proceso de análisis cualitativo. Si la hace un único investigador está amenazada por la subjetividad; si la hacen varios es imprescindible una fuerte compenetración y coherencia que es difícil conseguir fuera de un grupo de trabajo suficientemente consolidado. En nuestro caso, el análisis y la interpretación de la información han sido llevados a cabo por tres investigadores. Así, la selección era hecha individualmente y discutida después y, de esta forma, la compenetración antes aludida fue aumentando a medida que avanzaba el proceso.

Una vez decididas las unidades del texto que aportaban información, se procedió a su catalogación. Aquí también fue elaborada una propuesta por cada uno de los investigadores y consensuada después. Ninguna unidad fue catalogada sin aprobación por parte del equipo de investigación.

CATEG.	IND\TEND	**TRADICIONAL**	**TECNOLOG.**	**ESPONT.**	**INVEST.**
METODOLOGÍA	1				
	2				
	3				
	4				
SENTIDO DE LA ASIGNATURA	5				
	6				
	7				
CONCEPCIÓN DEL APRENDIZAJE	8				
	9				
	10				
	11				
	12				
	13				
	14				
PAPEL DEL ALUMNO	15				
	16				
	17				
	18				
	19				
PAPEL DEL PROFESOR	20				
	21				
	22				
	23				
	24				
EVALUACIÓN	25				
	26				
	27				
	28				
	29				
	30				
	31				
	32				
	33				
	34				
	35				

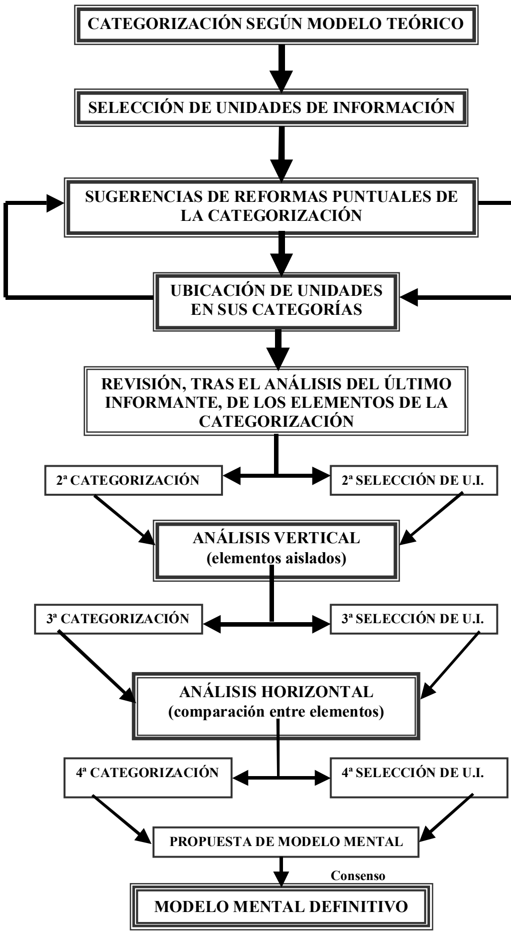
Cuadro 2: Perfil[4] concepción de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática de PG tras incorporar los elementos de la tabla anterior. En este caso se visualiza el estado del perfil, en este momento, de la categoría *Papel del Alumno*.

[4] En una tabla similar, sobre 29 indicadores, se ubicarían los elementos para la obtención del perfil sobre la concepción del papel de la Resolución de Problemas de un informante, tras haberlas clasificado en una tabla como la mostrada en el cuadro 1, pero para CRP.

Finalmente, este proceso sufrió varias revisiones que, a su vez, supusieron una revisión del sistema de categorías e indicadores (modelo teórico). Una de estas revisiones -que hemos llamado revisión vertical en concordancia con Carrillo (1998)- consistió en comparar, en un mismo individuo, todas las unidades catalogadas bajo un mismo indicador, así como todos los indicadores obtenidos, no con el propósito de eliminar incoherencias, sino con el de evitar aquéllas que hubieran sido motivadas por errores de apreciación de los investigadores; en la otra -que llamaré revisión horizontal, también en concordancia con Carrillo (1998)-, la comparación fue en el mismo sentido pero entre todos los individuos, indicador por indicador. Con ambas pretendí tanto reducir el margen de posibles respuestas caracterizadas bajo un mismo indicador, como minimizar las diferencias interpretativas debidas a las alteraciones que podrían haberse derivado de no simultanear todos los análisis, cuestión por otro lado insoslayable. Finalmente, se puso en conocimiento de los individuos estudiados su modelo mental (o perfil, entendido como la traslación que efectúa el investigador de la imagen mental que da a conocer un informante sobre algún aspecto de su conocimiento).

Esta última fase condujo a una enriquecedora negociación. Cabe comentar, en este sentido, el elevado grado de acuerdo existente con los tres sujetos.

El proceso de elaboración y revisión descrito se visualiza en el cuadro 4.



Cuadro 4

Por último, como suele ser común sobre todo en los estudios cualitativos, se elaboró un informe descriptivo de la concepción de la enseñanza de la matemática y de la resolución de problemas de cada individuo. A su vez, estos informes se utilizaron como variables a la hora de realizar el informe final (instrumentos de cuarto orden), en el que se buscaron relaciones entre ambas en cada uno de los sujetos analizados.

A MODO DE SÍNTESIS

El proceso de investigación que se ha descrito y que puede encuadrase dentro del modelo interpretativo de investigación educativa[5], parte de la base que el comportamiento humano puede ser explicado de distinta forma a la empleada para otros fenómenos característicos de las ciencias experimentales. Se trata de una investigación que requiere la participación intensiva en el contexto, un cuidadoso registro a través de notas de campo, grabaciones,… y una reflexión analítica que culmina con la elaboración de un informe.

A diferencia de modelos de corte positivista, el investigador no se mantiene al margen, sino que se implica en el proceso de relaciones humanas que conlleva la investigación produciéndose constantes interacciones e influencias. Biddle y Anderson (1989) afirman que al sumergirse en la dinámica de una entidad social, el investigador puede descubrir hechos o procesos que posiblemente pasarían por alto si se utilizaran otros métodos más estandarizados.

"La finalidad de la investigación científica será comprender los fenómenos educativos, a través del análisis de las percepciones e interpretaciones de los sujetos que intervienen en la acción educativa" (Colás y Buendía, 1994, p.50). En estos casos no se busca la generalización de resultados; a lo sumo teorías inductivas de carácter orientativo derivadas de específicas universalidades de distintos estudios de caso.

Para garantizar criterios de calidad, Zabalza (1991) argumenta que una correcta fundamentación teórica, una adecuada utilización de diversos instrumentos (diarios, entrevistas, etc.) y con la triangulación de los datos es suficiente. Una adecuada *"combinación de métodos en el estudio del mismo fenómeno"* (Marcelo, 1994, p. 39) aporta suficientes elementos de validación.

ALGUNAS CUESTIONES PARA EL DEBATE

Termino planteando algunas cuestiones para las que no ofrecí una respuesta durante el simposio. Alguna de ellas me las plantee durante el proceso de investigación, otras a posteriori. En cualquier caso, pienso que, de cara a los objetivos de este seminario, era interesante contrastar opiniones sobre ellas y, por ello, no ofrecí mi punto de vista sobre las mismas. Sin embargo creo que quien se acerque a este trabajo con la intención de replicarlo sí debería, en algún momento, darle respuestas.

1. ¿Hasta qué punto es relevante en este tipo de investigaciones la determinación del número de informantes? Es cierto que no se utilizaron elementos cuantitativos en el análisis (herramientas estadísticas), ¿implica ello que la determinación del número de informantes queda libre de ataduras?, ¿es interesante considerar posibles abandonos y preverlos?, ¿hubiera aportado un mayor número de informantes más elementos constructivos a este proceso generativo-inductivo?
2. ¿Es la vía utilizada para el estudio la óptima para alcanzar los objetivos pretendidos?
3. ¿Qué relevancia pueden tener los hallazgos?, ¿qué grado de reproductibilidad tiene este tipo de estudio?

[5] Y, más genéricamente dentro de la tradición científico-empirista desde una óptica antropológica.

4. ¿Es relevante que los informantes tengan un grado similar de experiencia educativa?
5. ¿Deben ser consideradas al mismo nivel las informaciones obtenidas desde diversas fuentes?
6. ¿Es realmente necesaria la presencia del co-investigador?

REFERENCIAS

Arnal, J. y col.(1992). *Investigación Educativa. Fundamentos y Metodología*. Labor: Barcelona.

Bardin, L. (1986). *El análisis del contenido.* Akal: Madrid.

Biddle, B.J. y Anderson, D.S. (1989). Teoría, métodos, conocimiento e investigación sobre la enseñanza. En Wittrock, M.C. (Coord.) *La investigación de la enseñanza, I, II y III. Métodos cualitativos y de observación* .Paidos & MEC: Barcelona.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza.* Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Colás, P. y Buendía, L. (1994). *Investigación educativa.* Alfar: Sevilla.

Contreras, L.C. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula.* Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

Contreras, L.C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Echevarría, J. (1995). *Filosofía de la Ciencia.* Akal: Madrid

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En Wittrock, M.C. (Coord.) *La investigación de la enseñanza, I, II y III. Métodos cualitativos y de observación* .Paidos & MEC: Barcelona.

Gimeno, J. (1985). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del curriculo.* Anaya*:* Madrid.

Goetz, J.P. y LeCompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo.* Morata: Madrid.

Howson, G., Keitel, C. y Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics.* Cambridge University Press: New York.

Lincoln, Y.S. y Guba, E.G. (1985). *Naturalistic Inquiry.* Sage: Beverly Hills.

Marcelo, C. (1994). Estrategias de análisis de datos en investigación educativa. En Villar, L.M. (Coord.) *Manual de entrenamiento: evaluación de procesos y actividades educativas.* PPU: Barcelona.

Wittrock, M. (1989). *La investigación en la enseñanza. Métodos cualitativos y de observación.* I, II y III. Paidós & MEC: Barcelona.

Zabalza, M.A. (1991). *Los diarios de clase.* PPU: Barcelona.

ESTRATEGIAS DE INVESTIGACIÓN CUANDO LOS MARCOS TEÓRICOS EXISTENTES NO SON ÚTILES

ANGEL GUTIÉRREZ

Universidad de Valencia

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

ESTRATEGIAS DE INVESTIGACIÓN CUANDO LOS MARCOS TEÓRICOS EXISTENTES NO SON ÚTILES

ANGEL GUTIÉRREZ
Universidad de Valencia

RESUMEN

En este texto se reflexiona sobre la problemática que surge cuando, al planificar o realizar una investigación, nos damos cuenta de que los marcos teóricos pertinentes existentes no cubren nuestras necesidades. También se muestran dos ejemplos, que permiten observar este fenómeno, de investigaciones en las que sus autores tuvieron que elaborar un nuevo marco teórico porque los existentes eran, en un caso, inadecuados y, en el otro caso, incompletos.

ABSTRACT

This paper is a reflection on the problem raised when, while planing or elaborating a research, researchers realize that available theoretical frameworks don't fit their necessities. Two examples of research were such problem may be observed are presented. In both researches, authors had to elaborate a new theoretical framework because the available ones were either inappropriate or incomplete.

INTRODUCCIÓN

Es normal que un campo de investigación interesante atraiga la atención de diversos equipos, generalmente ubicados en países diferentes. Aunque los equipos se conozcan e intercambien información de vez en cuando, lo más habitual es que cada uno tenga su línea de investigación y sus objetivos, métodos de trabajo, etc., lo cual se traduce en resultados y propuestas diferentes. Esta situación, que por sí misma es enriquecedora, puede llevar a otros investigadores posteriores a tener que resolver algunos conflictos en el momento de determinar un marco de referencia para su propio trabajo:

En algunos casos conviven marcos teóricos diferentes que, al menos en cierta medida, son contradictorios o incompatibles. A los investigadores que empiezan a trabajar en este campo no les queda más remedio que adoptar un marco y rechazar el otro, o rechazar ambos y definir el suyo propio, diferente.

En otros casos, las propuestas publicadas previamente, aunque dentro del mismo marco teórico global, corresponden a diferentes aproximaciones al problema de investigación (por ejemplo, referidos a estudiantes de diferentes niveles educativos, o a distintas variables relevantes). Aquí los nuevos investigadores suelen empezar adoptando una de las líneas de trabajo pre-existentes, pero en ocasiones, una vez que empiezan a analizar los datos que han recogido, se dan cuenta de que ni esa ni ninguna otra aproximación previa les permite obtener respuestas suficientemente satisfactorias para sus cuestiones de investigación.

Ante situaciones como las descritas en los párrafos anteriores, creo que la postura más razonable y productiva es coger el toro por los cuernos, abandonar el refugio cómodo de los trabajos previos y desarrollar nuestro propio marco creando los elementos necesarios para llevar la investigación adelante. En las siguientes páginas describiré dos ejemplos, un de cada tipo, sacados de mi propia actividad. Al primero me referiré brevemente, pues se trata de una investigación que tuvo lugar hace algunos años, es suficientemente conocida por los interesados en este tema, y mi mala memoria no me permite recordar con suficiente detalle algunos momentos clave del proceso. El segundo ejemplo puedo describirlo con más detalle, pues estoy trabajando en él actualmente y, por tanto, tengo todos los detalles a mi alcance.

FRENTE A MARCOS TEÓRICOS INADECUADOS, UN MARCO TEÓRICO DIFERENTE

El "descubrimiento" del modelo de razonamiento matemático de Van Hiele por los investigadores de los países occidentales tuvo lugar tras la publicación de "Mathematics as an educational task" (Freudenthal, 1973) y de una conferencia de I. Wirszup (1976). Durante la década siguiente, vieron la luz resultados de diversas investigaciones dirigidas a estudiar varias componentes de los niveles de Van Hiele y a observar su aplicación a la enseñanza. Las investigaciones más influyentes de esa época (Usiskin, 1982; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Burger y Shaughnessy, 1986) utilizan criterios de evaluación del razonamiento de los estudiantes muy diferentes, basados en tests escritos de elección múltiple en el primer caso o en entrevistas clínicas en los otros.

A pesar de las claras diferencias metodológicas entre las tres investigaciones, comparten el mismo marco teórico, que tiene dos características destacables: i) El resultado de la evaluación del razonamiento de un estudiante es su asignación a *uno* de los niveles de Van Hiele. ii) Hay dificultades para asignar algunos estudiantes a un nivel de razonamiento porque éstos muestran claramente en sus respuestas la presencia de *dos* niveles de razonamiento consecutivos. En las tres investigaciones, los autores justifican estos casos, atípicos pero en cantidad significativa, aludiendo a la posibilidad de que los estudiantes estuvieran en la transición de un nivel al siguiente, pero no van más allá de esta rápida conjetura y no desarrollan el concepto de transición. Por tanto, a pesar de sus diferencias, las tres investigaciones se sitúan en un marco teórico que interpreta los niveles de razonamiento de Van Hiele como una sucesión discreta en la que sólo cuando se ha desarrollado por completo un nivel es posible que comience a desarrollarse el siguiente y en la que, por tanto, la transición de un nivel al siguiente es muy rápida.

Las demás investigaciones sobre el modelo de Van Hiele publicadas en los 80 y principios de los 90 que conozco utilizan de forma más o menos directa la metodología de alguna de las tres publicaciones mencionadas antes, y todas asignan sus estudiantes a un determinado nivel de Van Hiele.

Alrededor de 1988, J.M. Fortuny inició una investigación sobre los niveles de razonamiento de Van Hiele en geometría espacial a la que nos unimos poco después A. Jaime y yo. Aplicar los métodos conocidos de asignación de niveles de Van Hiele no nos resultaba satisfactorio, pues notábamos que debíamos poner "en el mismo cajón" respuestas demasiado diferentes. Además, algunos de los problemas planteados en nuestros experimentos planteaban varias preguntas encadenadas, encontrando casos de estudiantes que mostraban niveles de razonamiento diferentes en las sucesivas respuestas al mismo problema, por lo que no nos parecía razonable asignar estos estudiantes a un nivel de razonamiento despreciando parte de sus respuestas.

Así pues, nos encontramos con la falta de un marco teórico previo adecuado. Como consecuencia de nuestro esfuerzo para avanzar en la investigación, surgió un marco teórico basado en una interpretación de los niveles de Van Hiele con dos características clave que lo diferencian del anterior: i) Reconocer que la transición de un nivel al siguiente puede ser lenta, larga en el tiempo y, por tanto, observable y evaluable. ii) Asumir la estructura jerárquica de los niveles de Van Hiele, pero reconocer la realidad escolar, en la cual es posible que comience a desarrollarse un nivel de razonamiento antes de que el nivel anterior esté completamente desarrollado.

La aplicación de este nuevo marco teórico dio lugar al concepto de los "grados de adquisición" de los niveles de Van Hiele y a una metodología de asignación de estudiantes a los niveles completamente diferente de la usada hasta ese momento. No explicaré aquí en qué consiste esta metodología ni mostraré un ejemplo de aplicación, pues no es mi objetivo en este texto. Ver Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) y Jaime (1993).

A pesar del avance que supuso la definición de este marco teórico, todavía no estaba justificada la posibilidad de que los estudiantes inicien la adquisición de un nivel de razonamiento antes de haber completado la adquisición del anterior. Esto se logró en investigaciones posteriores (Jaime y Gutiérrez 1994; Gutiérrez y Jaime 1995), en las que consideramos cada nivel de razonamiento como integrado por varias habilidades (describir, clasificar, definir, demostrar) que los estudiantes deben desarrollar para adquirir plenamente dicho nivel. Ocurre con frecuencia que la enseñanza escolar potencia unas habilidades más que las otras, por lo que los estudiantes progresan más en el desarrollo de las primeras y, antes de completar la adquisición de un nivel, inician la adquisición del nivel siguiente.

FRENTE A MARCOS TEÓRICOS INCOMPLETOS, UN MARCO TEÓRICO QUE LOS INCLUYA

Un tema por el que la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas mantiene un interés sostenido desde hace muchos años es el de la adquisición de la capacidad de razonamiento formal y el aprendizaje de los métodos de demostración formal en matemáticas. Rastreando en las bases de datos, se pueden encontrar numerosas publicaciones relacionadas con este tema, si bien sólo unas pocas incluyen aportaciones realmente útiles para entender a los estudiantes de Secundaria y Universidad. Centrándonos en los últimos 25 años, y sin ánimo de ser exhaustivos, podemos considerar el trabajo de Alan Bell como el primero que va más allá de la consideración estricta de las demostraciones formales como único modo admisible de demostración.

Bell (1976 b) plantea que la demostración (formal o no[1]) puede tener diversos objetivos en matemáticas: "Verificación", cuando intenta asegurar la veracidad de una afirmación. "Iluminación", cuando, además de asegurar su veracidad, permite entender por qué es cierta una afirmación. "Sistematización",

[1] Las publicaciones internacionales sobre este tema usan de manera unánime el término "demostración" para referirse a las demostraciones matemáticas formales, pero hay un pequeño caos en el uso de la terminología al referirse a las maneras no formales de convicción: Términos como "explicación", "verificación", "justificación" o "demostración" se usan unas veces para referirse al mismo concepto y otras veces para referirse a conceptos diferentes. En la literatura en español la cosa se complica más porque aparece también "prueba". Mi opción personal es, cuando tengo que elegir uno de los términos anteriores, quedarme con "justificación", aunque creo que deberíamos hablar de "demostraciones formales", "demostraciones no formales" y "demostraciones" (para aludir a ambos tipos a la vez), pues es necesario transmitir al mundo de la enseñanza la idea de que no hablamos de dos cosas diferentes sino de dos aspectos de una misma cosa, la demostración en matemáticas, y ayudar de esta forma a desmitificarla y a que estudiantes y profesores le pierdan el miedo.

cuando permite organizar el enunciado demostrado en un sistema de axiomas, definiciones y otros teoremas. Michael de Villiers desarrolla posteriormente esta línea de investigación describiendo nuevos objetivos para la realización de una demostración (De Villiers, 1993): "Descubrimiento", cuando la demostración conduce al descubrimiento o invención de nuevos conceptos o teoremas. "Comunicación", cuando la demostración tiene como objetivo transmitir conocimientos matemáticos a otras personas. No obstante, con frecuencia los estudiantes no se sienten identificados con ninguno de los objetivos anteriores de las demostraciones. Un elemento clave para entender por qué un estudiante resuelve los problemas de demostrar como lo hace es conocer sus creencias al respecto, es decir qué tipos de argumentos considera convincentes y cuáles no (De Villiers, 1991). En este sentido, un objetivo de la enseñanza de las matemáticas es inducir un cambio en las concepciones de demostración de los estudiantes. Esta línea de investigación queda fuera de mis trabajos, por lo que no me referiré más a ella.

Desde una perspectiva complementaria a la anterior, Bell (1976 a, 1976 b) hace una descripción de diversos tipos de demostraciones no formales producidas por los estudiantes, las cuales representan puntos en el camino hacia el razonamiento y la demostración formales. Identifica dos categorías de demostraciones, las "empíricas", caracterizadas por el uso de ejemplos como elemento de convicción, y las "deductivas", caracterizadas por el uso de elementos deductivos abstractos para conectar los datos (o hipótesis) y la conclusión. En las demostraciones empíricas Bell describe diferentes tipos, que van desde aquéllas que usan ejemplos sin relación directa con el enunciado planteado hasta las que consisten en la verificación sistemática del enunciado en todos los ejemplos posibles (conjunto finito). En cuanto a las demostraciones deductivas, su tipología se basa en diferentes grados de completitud al construir las cadenas de argumentos, desde las fallidas, en las que realmente no existe tal cadena, hasta las completas, cuando se produce una deducción matemáticamente correcta. En la base del estudio de Bell está la concepción de que cada enunciado matemático lleva asociado un conjunto de ejemplos (finito o no) y que para demostrar la veracidad del enunciado hay que verificar todos sus ejemplos. Por este motivo, su tipología analiza la completitud de los conjuntos de ejemplos usados por los estudiantes.

Otra de las referencias obligadas en la investigación sobre los procesos de aprender a demostrar es el trabajo de Nicolas Balacheff. En su tesis doctoral (Balacheff, 1988), este autor da un paso adelante sobre los resultados de Bell introduciendo una clasificación más amplia de tipos de demostración, en la cual el énfasis no está sólo en la relación entre los ejemplos usados y el enunciado que se quiere demostrar, sino en el motivo por el que los estudiantes usan los ejemplos. Esta investigación se basa en un experimento cuyo fin es analizar las respuestas de un grupo de estudiantes a varios problemas de demostrar. Balacheff identifica dos categorías de demostraciones, las "pragmáticas", basadas en manipulaciones o en ejemplos concretos, y las "conceptuales", basadas en la formulación abstracta de propiedades matemáticas y de relaciones deductivas entre ellas. En la categoría de demostraciones pragmáticas describe los tipos de "empirismo naïf", basado en la verificación del enunciado que hay que demostrar en unos pocos ejemplos, normalmente elegidos de manera aleatoria, "experimento crucial", basado en la selección cuidadosa de un ejemplo con el convencimiento de que si la conjetura es cierta en este ejemplo, lo será siempre, y "ejemplo genérico", basado en la selección y manipulación de un ejemplo que actúa como representante de su clase, por lo que la demostración, aunque sea particular, pretende ser abstracta y tener validez para toda la clase representada. Entre las demostraciones conceptuales, Balacheff distingue el "experimento mental", cuando los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente observación de ejemplos), las disocian de esas acciones concretas y las convierten en argumentos abstractos deductivos, y el "calculo simbólico", cuando la demostración se basa en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Probablemente porque los resultados proceden de experimentos con estudiantes de secundaria, no suficientemente avanzados, la tipología de Balacheff no analiza en profundidad las demostraciones formales.

Más recientemente, Harel y Sowder (1998) han propuesto varios "esquemas de demostración", tipos de justificaciones que convencen a los estudiantes y que ellos usan para convencer a otros estudiantes y al profesor. Estos autores identifican tres categorías de esquemas de demostración: Los de "convicción externa", aquéllos en los que se alude a una autoridad externa al propio problema, los "empíricos", cuando la justificación está formada por ejemplos, y los "analíticos", cuando la justificación se basa en argumentos abstractos y deducciones lógicas. En los esquemas de convicción externa, estos autores distinguen entre los "autoritarios", basados en la autoridad de un profesor, libro de texto, etc., los "rituales", basados en la forma como está presentada la demostración, y los "simbólicos", basados en la manipulación algorítmica de símbolos y expresiones. En los esquemas empíricos distinguen los "perceptivos", basados en la observación de ejemplos concretos de tipo gráfico, y los "inductivos", cuando la demostración consiste en comprobar la validez del enunciado en uno o varios ejemplos concretos. Finalmente, en los esquemas analíticos distinguen los "transformativos", basados en operaciones sobre objetos y anticipación de su resultado, que luego son convertidos en argumentos deductivos, y los "axiomáticos", formados por cadenas deductivas basadas en elementos de un sistema axiomático.

A modo de resumen global, podemos observar que las tres clasificaciones de demostraciones descritas son coherentes entre sí, útiles para analizar las respuestas de los estudiantes, pero parciales: Bell plantea sólo dos tipos válidos de demostración, verificación más o menos exhaustiva de ejemplos y demostración formal, en una propuesta que ignora la importante componente cognitiva del significado que tienen las demostraciones para los estudiantes. Balacheff analiza detalladamente las demostraciones pragmáticas (empíricas), observando cómo y por qué se seleccionan los ejemplos, pero no hace lo mismo con las conceptuales (deductivas), pues no presta atención a las formas de usar los ejemplos para organizar argumentaciones deductivas ni a las formas de construir demostraciones formales. Por último, Harel y Sowder analizan detalladamente los esquemas analíticos (deductivos), observando diferentes operaciones mentales que dan lugar a estas demostraciones, pero no hacen lo mismo con los esquemas empíricos, en los que sólo distinguen si se utilizan ejemplos visualmente o matemáticamente.

La tendencia actual de la didáctica de las matemáticas a prestar atención destacada a los aspectos psicológicos y cognitivos del aprendizaje indica que los modelos de Balacheff y Harel y Sowder son los que resultan más útiles como marco para el aprendizaje de los procesos de demostración. Por tanto, es razonable intentar integrar estos modelos en uno sólo, si bien esta integración no puede hacerse simplemente superponiendo un modelo a otro. En un proyecto de investigación desarrollado en la Universidad de Valencia, hemos analizado la actuación de estudiantes de ESO al resolver problemas de demostrar en un entorno Cabri. Al iniciar las primeras etapas de dicho análisis, nos dimos cuenta de que ninguno de los modelos que acabo de describir nos resultaba útil, por lo que decidimos definir una nueva clasificación de demostraciones que contuviera las anteriores pero que las desarrollara, teniendo en cuenta también las lagunas que habíamos detectado en ellas.

1) En primer lugar, igual que los investigadores citados, nosotros consideramos dos grandes categorías de demostraciones:

a) *Demostraciones empíricas:* Demostraciones en las que el elemento de convicción es la verificación de la propiedad en ejemplos.

b) *Demostraciones deductivas:* Demostraciones en las que el elemento de convicción son argumentos descontextualizados de ejemplos concretos y basados en propiedades generales, operaciones mentales abstractas y deducciones lógicas.

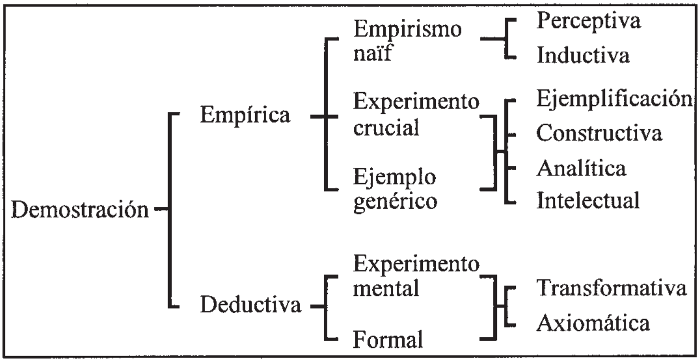
2a) Distinguimos tres familias de demostraciones empíricas, dependiendo de la *forma de selección de los ejemplos,* cada una de las cuales, a su vez, incluye varios tipos correspondientes a diferentes *formas de uso de los ejemplos* seleccionados en la demostración:

- Empirismo naïf: Los estudiantes seleccionan varios ejemplos sin ningún criterio específico. En unas ocasiones la verificación de la propiedad se hace táctil o visualmente (tipo "perceptivo") y en otras se hace observando propiedades o elementos matemáticos del ejemplo (tipo "inductivo").
- Experimento crucial: Los estudiantes son conscientes de la necesidad de generalización y la resuelven mediante la selección cuidadosa de un ejemplo "lo menos particular posible" (Balacheff, 1987), convencidos de que si el enunciado es válido en este ejemplo, lo es siempre (Balacheff, 1988), si bien éste no deja de tener carácter de ejemplo específico. Los experimentos cruciales pueden ser "ejemplificación", cuando la demostración consiste sólo en mostrar la existencia del ejemplo crucial, "constructivo", cuando la demostración incide en la forma de obtención del ejemplo, "analítico", cuando la demostración se basa en propiedades matemáticas observadas empíricamente, e "intelectual", cuando la demostración intenta separarse de las observaciones empíricas y se basa en propiedades matemáticas aceptadas y relaciones deductivas entre elementos del ejemplo.
- Ejemplo genérico: Los estudiantes, conscientes de la necesidad de generalización, seleccionan un ejemplo al que dan el carácter de representante de su clase. La demostración está formada por razonamientos abstractos referidos a propiedades y elementos generales de la clase pero obtenidos a partir de operaciones o transformaciones hechas con el ejemplo. En los ejemplos genéricos distinguimos los mismos tipos que en los experimentos cruciales (ejemplificación, constructivo, analítico e intelectual), si bien en este caso las demostraciones no se limitan a reflejar la actividad empírica, sino que la transforman en referencias a propiedades abstractas de la clase del ejemplo y a razonamientos deductivos que las ligan.

2b) Distinguimos dos familias de demostraciones deductivas, dependiendo de la forma de construirlas:

- Experimento mental: La demostración, aun siendo deductiva y abstracta, está organizada con la ayuda de un ejemplo, lo cual se nota a veces en que la demostración tiene un desarrollo temporal. Distinguimos dos tipos de experimentos mentales, los "transformativos", cuando la demostración se basa en una transformación del enunciado o conjetura inicial en otro equivalente, y los "axiomáticos", cuando la demostración es una cadena de implicaciones lógicas basada en definiciones, axiomas o propiedades aceptadas. El ejemplo ayuda, respectivamente, a prever las transformaciones más convenientes y a organizar la cadena de implicaciones.
- Demostración formal: Es el tipo de demostración, formada por cadenas de deducciones lógicas formales y sin soporte de ejemplos, usual en los trabajos de los matemáticos profesionales. También ahora es posible encontrar los dos tipos anteriores de demostración (transformativo y estructural), con la diferencia de que en las demostraciones formales no se usa ningún ejemplo como ayuda.

El siguiente diagrama resume la clasificación que acabo de describir. Como indicaba más arriba, se trata de una clasificación que contiene y desarrolla las clasificaciones de Balacheff y Harel y Sowder, pues intenta ser completa y englobar todo tipo de demostraciones. Al mismo tiempo, es suficientemente detallada como para permitir hacer distinciones finas entre unas demostraciones y otras y ser útil a investigadores y profesores que quieran valorar la habilidad de realización de demostraciones matemáticas de estudiantes y su progreso en la realización de demostraciones matemáticas.

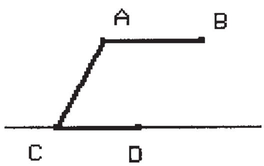


Para completar la descripción de este modelo de clasificación de demostraciones, presento un ejemplo de la resolución de un problema de demostrar por una pareja de estudiantes y el análisis de esta demostración. Dicho ejemplo forma parte de una unidad de enseñanza de geometría para estudiantes de 4º de ESO basada en el uso de Cabri y formada por 30 actividades. En este experimento tratábamos de verificar la utilidad del software de geometría dinámica para ayudar a los estudiantes a mejorar sus destrezas de demostración. Se trataba de estudiantes que nunca antes habían tenido contacto con otro tipo de demostraciones que no fuera el empirismo naïf, en particular mediante arrastre en la pantalla de Cabri.

El experimento se realizó en un grupo completo como parte de sus clases normales. Los estudiantes trabajaban por parejas y se les pedía que dieran una respuesta común de la pareja. La recogida de datos se realizó mediante varias fuentes de información: Las respuestas escritas de los estudiantes, los archivos de Cabri con las construcciones realizadas, los registros de pantalla realizados por el comando “sesión”, y entrevistas, grabadas en video, a algunas parejas después de resolver determinados problemas. Más información sobre esta investigación puede encontrarse en Marrades y Gutiérrez (1998). Uno de los problemas propuestos (actividad 20) es el siguiente:

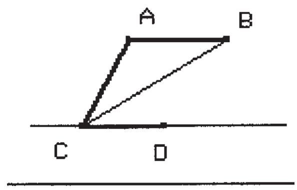
DIBUJA una figura que cumpla las siguientes condiciones:

1. El segmento AB es paralelo al segmento CD (es decir, AB//CD).
2. El segmento AB mide lo mismo que el segmento AC (es decir, AB = AC).



Asegúrate de que la figura construida sigue cumpliendo las condiciones de partida sea cual sea la transformación debida a la acción de ratón arrastrando diferentes puntos.

3. Dibuja el segmento CB.



INVESTIGA: ¿Es el segmento CB la bisectriz del ángulo ∠ACD?

DEMUESTRA la respuesta afirmativa o negativa a la pregunta anterior. Se supone que la conclusión a la que has llegado es cierta, pero ¿POR QUÉ ES CIERTA? Es necesario basarse en propiedades geométricas ya estudiadas y aceptadas en clase.

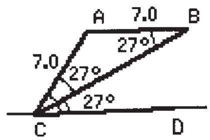
Los siguientes párrafos resumen la resolución de este problema por una pareja de estudiantes. Los textos entre corchetes son míos para ayudar a entender las respuestas de los estudiantes.

(1) Los estudiantes empiezan intentando crear la figura pedida. Utilizan el arrastre para verificarla, detectan algunos errores de construcción, los corrigen y usan el arrastre de nuevo.

(2) Cuando la figura ya está bien construida, añaden las medidas de AB, AC, ∠BCA y ∠BCD, y construyen el segmento BD para verificar si la conjetura es cierta en los paralelogramos. Sin embargo, al arrastrar puntos de la figura, los estudiantes descubren que a veces ABDC no es un paralelogramo, por lo que borran BD y comienzan de nuevo.

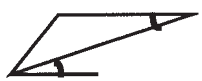
Durante la entrevista, los estudiantes explican que habían añadido el segmento BD por *la regla del paralelogramo, que estos dos triángulos* [ΔABC y ΔBCD] *son siempre iguales.*

(3) Los estudiantes añaden la medida de ∠ABC [ver la figura]. Mediante arrastre, comprueban que ∠ABC, ∠ACB y ∠BCD son siempre congruentes.



(4) A continuación, los estudiantes dibujan la figura y escriben una demostración de la congruencia de ∠ABC y ∠BCD:

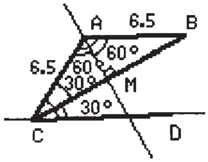
- *∠BCD = ∠ABC porque son alternos internos.*
- *(∠ACB + ∠ext C) + ∠ABC = 180° (interiores consecutivos).*
- AB = AC.
- AB // CD.



Con ∠ext C denotan el suplementario de ∠ACD. Después de demostrar la congruencia de esos dos ángulos, consideran que la medida de ∠ABC ya no les hace falta y la borran. Es interesante observar que, en las líneas anteriores, los estudiantes tienen todos los elementos necesarios para completar la demostración de la congruencia pedida, pero no se dan cuenta de que ΔABC es isósceles.

En la entrevista, los estudiantes explicaron que creían que ya podían escribir una demostración: *Después de tener esto* [la congruencia de los ángulos], *intentamos demostrar que ∠ACB es igual a ∠ABC y lo hacemos por construcción.*

(5) Los estudiantes construyen la recta perpendicular a BC por A, marcan el punto M de corte de esta recta con BC, y miden los ángulos ∠CAM, ∠BAM y ∠AMB [ver la figura]. A continuación comprueban, mediante arrastre, que AM es la bisectriz de ∠CAB observando que ∠CAM y ∠BAM son siempre congruentes.



(6) Por último, los estudiantes escriben en su hoja de respuestas una demostración:

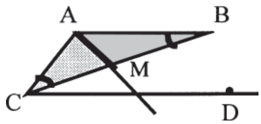
- Si AB = AC y AB // CD entonces ∠BCD = ∠ABC por alternos internos y ∠ACB = ∠ABC por el 2º criterio [de congruencia] *= dos lados y un ángulo comprendido: (*)*

AB = AC un lado.

AM común.

∠CAM = ∠BAM el ángulo comprendido.

Por tanto, si (*) entonces ∠ACB = ∠ABC.



En esta solución podemos identificar dos partes: En la primera, (2) a (5), los estudiantes añaden algunos elementos auxiliares (rectas o segmentos) y realizan mediciones para verificar empíricamente igualdades de segmentos o de ángulos. Durante este proceso encuentran algunos datos útiles, (3) y (5), que les permiten escribir una demostración completa (6). La demostración está organizada siguiendo un esquema deductivo, con justificaciones abstractas basadas en propiedades generales aceptadas previamente, independientes de los valores específicos de los ángulos en la pantalla, y sin referencias a las igualdades observadas empíricamente como fuente de certeza. La única excepción es la congruencia de ∠CAM y ∠BAM, comprobada empíricamente en (5) y usada en (6) como una propiedad cierta, pero no demostrada explícitamente. Por lo tanto, se trata de una demostración empírica mediante ejemplo genérico de tipo intelectual.

La catalogación de las respuestas a este problema mediante la clasificación de demostraciones propuesta por Balacheff es menos fina que la planteada por nuestra tipología, pues podemos encontrar respuestas de estudiantes a este problema que quedan incluidas en la misma clase de Balacheff, por ejemplo ejemplos genéricos, pero que, debido a que hacen distintos usos de los ejemplos, corresponden a distintos tipos en nuestra clasificación. Algo parecido ocurre con la clasificación de Harel y Sowder, pues estos autores no analizan suficientemente los esquemas de demostración empíricos. En cuanto a la clasificación de Bell, no es aplicable a este problema debido a que el entorno Cabri impone unos modos de uso de los ejemplos diferentes de los subyacentes en el marco de Bell.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège,* 2 vols. Tesis de estado. Univ. J. Fourier, Grenoble, Francia.

Bell, A.W. (1976 a). *The learning of general mathematical strategies.* Tesis doctoral. Shell Center for Mathematical Education, Nottingham, G.B.

Bell, A.W. (1976 b). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7* (1), 23-40.

Burger, W.F., y Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (1), 31-48.

De Villiers, M. (1991). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras, 26,* 18-27.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26,* 15-29.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Fuys, D., Geddes, D., y Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 3.*

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the student's reasoning in geometry. En *Proceedings of the 19th PME conference, 3,* 11-18.

Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (3), 237-251.

Harel, G., y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia, Valencia.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. En *Proceedings of the 18th PME conference, 3,* 41-48.

Marrades, R., y Gutiérrez, A. (1998). Organizing the learning in a Cabri environment for a journey into the world of proofs. En *Proceedings of the 22th P.M.E. Conference, 4,* 276.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Columbus, EE.UU.: ERIC.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. En J.L. Martin, y D.A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry* (pp. 75-97). Columbus, EE.UU.: ERIC.

ANÁLISIS DE DATOS E INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA. UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES

PILAR ORÚS BÁGUENA

Universidad Jaume-I, Castellón

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

ANÁLISIS DE DATOS E INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA. UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES

❧

PILAR ORÚS BÁGUENA
Universidad Jaume-I, Castellón

RESUMEN

Esta ponencia contiene dos partes diferenciadas. La primera parte presenta algunos aspectos característicos de la utilización del análisis de datos en la teoría de situaciones. La segunda parte, analiza un ejemplo de funcionamiento del análisis de datos en situación escolar - la problemática y posibles soluciones propuestas desde la ingeniería didáctica y la Teoría de Situaciones -, mostrando a su vez utilizaciones diversas del análisis de datos en un mismo trabajo de investigación en didáctica de las matemáticas (Orús, 1986-2001).

ABSTRACT

This report contains two differentiated parts. The first part presents some characteristic aspects of the use of the analysis of data in the theory of situations. The second part, analyzes an example of operation of the analysis of data in school situation -the problem and possible solutions proposals from the didactic engineering and the Theory of Situations -, showing diverse uses of the analysis of data in turn in oneself investigation work in didactics of the mathematics (Orús, 1986-2001).

I -UTILIZACIÓN DEL ANÁLISIS DE DATOS EN LA TEORÍA DE SITUACIONES

I-1. La teoría de situaciones: historia de un proceso empírico de investigación

Ya en los prolegómenos de la *Teoría de situaciones*[1] se puede observar, hasta que punto la teorización propuesta es el resultado de un proceso empírico, en el cual el análisis de datos ha sido siempre un factor básico de la metodología de elaboración y validación de la teoría.

Desde la primera publicación de Brousseau (1969) sobre las matemáticas del último curso de la escuela maternal y primer año de la escuela infantil, éste muestra su preocupación constante por la progresión en las adquisiciones de los conocimientos matemáticos de los alumnos y la problemática que suscita la observación de dicho proceso.

[1] Este apartado es un breve resumen extraído y traducido por la autora, de la tesis de Brousseau (1986) (pp. 4-10).

Deramecourt y Houziau[2] (1969), proceden a recoger las lecciones propuestas Brousseau, junto a la elaboración y utilización de las primeras fichas de observación de lecciones, 80 fichas que fueron utilizadas en 15 clases de la Dordoña francesa, con sus matrices de datos correspondientes (30x30), que permitían tener en cuenta diversas condiciones de dependencia que Brousseau proponía, tanto entre los diferentes conceptos ligados en lecciones sucesivas, como entre las formas de conocimiento bajo las cuales se presentaban estos conceptos. Para cada tipo de dependencia que se esperaba probar, una matriz indicaba todas las parejas de lecciones que se encontraban ligadas a priori y estas matrices a priori debían poder superponerse con la matriz de correlaciones observadas, para ver si los valores de los coeficientes de correlación para las parejas identificadas diferían de los otros valores a priori.

El DEA de Franchi-Zanetecci[3] (1978) continua este trabajo sobre la construcción de secuencias de actividades para la enseñanza de las matemáticas, pero Brousseau abandona, este método de análisis global estadístico, demasiado costoso y que no le aporta los resultados esperados, sintiendo la necesidad de conocer mejor los procesos de enseñanza, para poder intentar responder a su pregunta inicial sobre el orden seguido en el proceso de adquisición de los conocimientos. Por todo ello, el siguiente trabajo que se planteó Brousseau fue la reforma de las propias lecciones observadas, y esto a su vez le condujo a replantearse los objetivos de la enseñanza de las matemáticas: es el origen de los *estudios sobre las motivaciones y el sentido*.

En 1972, en su artículo *Processus de mathématisation*, Brousseau propone por primera vez un marco teórico para analizar y observar las situaciones de enseñanza. Dicho marco debe permitir la búsqueda sistemática de las condiciones motivadoras para utilizar cada noción matemática, su ordenación y examen progresivo. Se trataba pues de concebir situaciones que cumpliesen un máximo de exigencias sobre las motivaciones y a continuación mostrar que éstas son realizables en las clases y que provocan los aprendizajes esperados.

Muy pronto se pone en evidencia una nueva dificultad, en esta nueva línea de investigación: el proceso de elaboración de las lecciones es muy largo y complejo y se necesita un tiempo y un lugar adecuados para poder abordar este trabajo en condiciones. Surge el proyecto de *l'Ecole J. Michelet (Talence)*, como una escuela para la observación.

I-2. Una escuela para la observación de las actividades didácticas

I-2.1. La escuela J. Michelet, un dispositivo experimental para la observación

El COREM y la escuela J. Michelet constituyen el dispositivo experimental, propuesto y creado por Brousseau y colaboradores en 1972, que permite la elaboración y observación sistemática y sistémica de secuencias didácticas, y el análisis de los datos recogidos a partir de dichas observaciones. El objetivo básico de este complejo dispositivo creado en torno a la escuela Michelet, era permitir la preparación de los protocolos de experimentación de forma satisfactoria desde una doble aproximación pedagógica (de enseñanza) y científica (de investigación).

Brousseau identifica la metodología que permite realizar la escuela Michelet, como un "método espiral" en la investigación en DM. Según sus propias palabras[4] *"cada realización y cada observación de lección son la ocasión de poner a prueba las concepciones teóricas y la tecnología didáctica que las acompañan, los métodos de estudio y de análisis, los resultados experimentales ya obtenidos y la formulación realizada por los*

[2] Referencia bibliográfica completa en Brousseau (1986) (pp. 32).

[3] Referencia bibliográfica completa en Brousseau (1986) (pp. 32).

[4] Ibíd. (pp. 18).

maestros de las proposiciones de enseñanza". La escuela Michelet marcará e identificará metodológicamente los trabajos de investigación, realizados en el marco de la Teoría de situaciones. El control del curriculum de la escuela Michelet se realiza mediante diversos mecanismos complejos y complementarios, *la observación de las lecciones y la evaluación de la enseñanza* y ambos a diferentes niveles, y *los medios informáticos y estadísticos de tratamiento de datos*. Estos mecanismos han proporcionado la obtención y almacenamiento sistemáticos de datos que han sido y continúan siendo un material experimental sin precedentes para la investigación en DM.

· *La observación de las lecciones* se realiza por los enseñantes del nivel (3 profesores comparten dos grupos de alumnos del mismo nivel escolar) y de otros niveles, o por los investigadores.

La elaboración de los protocolos de experimentación y observación se realiza mediante las *fichas didácticas*[5]. Existen dos tipos diferentes de fichas: las de las lecciones llamadas "corrientes", elaborados en equipo entre los maestros y los PEN (Profesores de Escuela Normal) que garantizan la progresión matemática del nivel y las fichas elaboradas por los investigadores, propuestas y debatidas con el equipo enseñante del nivel. Pero todas las fichas de observación comprenden la misma información: las crónicas de la lección - desarrollo cronológico en relación con el tiempo de expresión verbal del profesor -, consigna exacta, tiempos de trabajo real de los alumnos, etc., relación de los comportamientos de los alumnos: diferentes intentos para resolver una pregunta, diferentes estrategias elaboradas, comentarios entre los alumnos al realizar las actividades, etc. El análisis de estas observaciones y los debates que se derivan de ellos permiten a los enseñantes tomar decisiones de orden pedagógico o didáctico y a los investigadores cimentar su investigación experimental y plantear los problemas de investigación teórica.

La observación en la escuela Michelet es el resultado del trabajo en equipo, siempre con un doble compromiso, el derivado de los problemas que plantea la enseñanza y los objetivos de la investigación fundamental. Contribuyen distintos grupos: *el didáctico*, *el de registro*, *el grupo crónica*, *el de evaluación y observación*. Al final de la lección, los trabajos de los alumnos son recogidos, así como las crónicas y las tablas de observación; todo ello se analiza conjuntamente en una mesa redonda posterior a la observación, en la que también participa el profesor observado. Es donde se determina si los objetivos planteados han sido alcanzados.

· *La evaluación de la enseñanza* se realiza mediante el análisis de los resultados de los alumnos respecto de conocimientos, en momentos diferentes de su proceso de adquisición: durante el proceso de aprendizaje y también al final de las secuencias de aprendizaje (controles periódicos, los CAS[6] y los TAS[7]) y el balance escolar de fin de curso donde se reúnen, durante 3 días, todos los miembros que intervienen en la escuela J. Michelet. Para analizar el balance del curso escolar.

Las *evaluaciones de los resultados en proceso de aprendizaje*[8] permiten, por una parte, tomar decisiones inmediatas y rápidas respecto a dicho proceso y por otra parte proporcionar material para los investigadores y estudiantes de DM. La evaluación aporta, por una parte, información sobre variables pedagógicas determinadas a priori y ya conocidas por el maestro y por otro lado, variables nuevas que hay que saber identificar. Para ello se trata de saber, por parte del profesor: qué resultados observa, qué informaciones obtiene y respecto a qué tipo de decisiones plantea la evaluación.

[5] Información extraída del curso impartido en Namur (1988) por G. Brousseau y D. Greslard (Directora y maestra de la escuela J. Michelet), y que contiene una información muy detallada y concreta de diversos aspectos relacionados con la regulación del curriculum de la escuela Michelet. Particularmente interesante, el detalle y la concreción sobre las fichas didácticas y el tratamiento de los datos de evaluación de loa alumnos.

[6] CAS: Controles de Adquisiciones Escolares, elaborados por los equipos de nivel y didáctico, de final de trimestre y de año.

[7] TAS: Tests de Adquisiciones Escolares, elaborados a nivel nacional en Francia y que permiten un contraste de los datos de la escuela J. Michelet con el resto de escuelas públicas francesas.

[8] Un ejemplo de este tipo de análisis y decisiones se encuentra en Brousseau, G. y Greslard, G. (Namur,1988).

En *las jornadas de balance de fin de curso*, se utilizan todos los controles de evaluación así como las informaciones aportadas por los diferentes equipos que participan: los equipos pedagógicos de nivel, el equipo didáctico, los grupos de investigación que han intervenido ese curso, etc. Las informaciones aportadas por el tratamiento estadístico-informático de los datos recogidos deben servir para justificar las decisiones tomadas por los diferentes grupos –tanto las decisiones pedagógicas, como las relativas a la investigación- y también para poder identificar conjuntamente los aspectos que hayan podido escapar al control de cada grupo, así como para plantear nuevas cuestiones pedagógicas, didácticas, organizativas, curriculares, etc. Es el momento, tras estos debates, en el que los enseñantes formulan a menudo las peticiones de formación continua sobre los temas abordados (por ejemplo respecto a la geometría, o a la numeración, respecto a la teoría de situaciones, etc.).

· *Los medios informáticos y estadísticos de tratamiento de datos* que se utilizan y producen en la escuela J. Michelet, están en función de las necesidades de investigación en didáctica y las reflexiones sobre la enseñanza que los diversos equipos que conforman el COREM. Este sistema informático comprende los programas y las modificaciones específicas de éstos, que permitan adecuarlos a sus necesidades: la elaboración, recogida y el tratamiento estadístico de los datos.

La elaboración y almacenamiento sistemático de datos ha exigido, en primer lugar definir los datos, y posteriormente codificarlos (conjugando la confidencialidad y la posibilidad de identificación necesaria de los datos, junto a las necesidades técnicas informáticas y la facilidad de los enseñantes para poderlos informatizar). La definición de los datos ha exigido caracterizar así mismo, cada actividad matemática (en el tiempo, en la progresión, forma de la actividad, etc.) identificando para cada alumno los resultados, los comportamientos y las estrategias utilizadas.

Se realizan tratamientos estadísticos básicos sobre cada matriz de datos: por cada actividad (efectivos y porcentajes de aciertos, fracasos respecto a los efectivos de comportamientos satisfactorios, no satisfactorios, inesperados ...), por cada alumno (número de aciertos, de fracasos, en la medida en que los comportamientos son "comparables", o "integrables", elaboración de comportamientos nuevos, sus efectivos, etc.).

I-2.2. La observación y la investigación

La observación y el estudio de las actividades didácticas realizadas en la escuela J. Michelet, ha exigido gran variedad tanto en el tipo de datos observados como en los métodos de análisis utilizados: siempre en función del tipo de datos y éstos a su vez, en función de la problemática planteada y de la investigación fundamental en cuyo marco se lleva a cabo la investigación.

· En *"L'observation des activités didactiques"*, uno de los primeros textos que trata esta problemática, Brousseau (1978) realiza un recorrido por los métodos importados de otras disciplinas próximas para describir los "hechos de observación" y plantea las bases de un método de modelización propio de investigación en DM, de la llamada teoría de situaciones didácticas, que posteriormente presentará en la tesis *"Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques"* (Brousseau, 1986).

En el primer artículo, se plantean tres preguntas iniciales -¿qué es un hecho didáctico?, ¿Por qué observar esos hechos?, ¿Cómo posibilitarlos?- cuyas respuestas pueden ser consideradas como pasos previos para poder abordar la observación: una primera delimitación del objeto de estudio, la aproximación al "rôle" de la observación en las investigaciones en didáctica y el estudio de las condiciones fundamentales de las relaciones entre los observadores y los hechos didácticos observados. Las respuestas a estas cuestiones constituyen *"las condiciones de la observación de los hechos didácticos"*. Brousseau distingue tres tipos de observación diferentes (tanto en sus fines como en sus métodos) sobre todo en función del tema abordado: la *recogida sistemática de informaciones codificadas*, identificadas previamente en el marco de una posición teórica coherente y explícita; el *control didáctico y científico de las observaciones* cuyo objetivo fundamental es percibir lo esencial de los hechos observados, restaurando su significación y sentido; la *formación del investigador* y el *mantenimiento del paradigma investigador*, del sistema de referencia en el que se enmarcan las observaciones.

Los problemas de la observación en didáctica de las matemáticas, son planteados en una segunda parte, como problemas de adecuación de los medios a los objetivos y que por lo tanto resulta prácticamente imposible hablar de los medios independientemente de las investigaciones planteadas. Con esta misma dificultad nos encontramos en esta ponencia, y por ello no podemos detallar los diferentes tipos de observación que Brousseau plantea en función del método de recogida de datos, ni tampoco los *problemas de semiología* relativos a la determinación de los objetos de estudio. Solamente señalamos algunos de ellos: la interpretación de fenómenos a partir de procesos didácticos y el establecimiento de la pertinencia de determinados hechos a partir de las dependencias observadas; la obtención por procedimientos objetivos de los resultados de la observación; y la búsqueda de las condiciones óptimas para la observación, que Brousseau identifica con la búsqueda de la modelización teórica de los sistemas observados: los modelos de los alumnos, del maestro, del proyecto didáctico, del conocimiento matemático, de los procesos de aprendizaje. Todo ello determinará el carácter sistémico de las observaciones, permitiendo explicar los hechos producidos y los factores sobre los cuales se puede incidir para hacer surgir los cambios e incluso la optimización.

I-3. Variedad y especificidad de métodos de análisis de datos en la teoría de situaciones

Presentado el momento inicial de "importación" de métodos desde otras disciplinas (Brousseau, 1978) y la adecuación y la adaptación para la DM propuestas por Brousseau (1986), citaremos algunos otros momentos significativos de este proceso.

· El *estudio de la dependencia entre las actividades didácticas* –como la mayor parte de los objetos de estudio de DM- exigió la construcción de una metodología estadística apropiada, que en este caso se basaba en la naturaleza disimétrica de los fenómenos de dependencia. El papel determinante que la disimetría juega en los procesos de la enseñanza y en la adquisición de los conocimientos, fue establecido por R. Gras (1979) en su tesis y los trabajos[9] de Vinrich (1977), D. Coquin (1982) y H. Londeix (1985) contribuyen en esta línea de investigación. La disimetría de las variables observadas, mostró la insuficiencia de los análisis multivariantes al uso, basados en el carácter simétrico de los índices de distancias y/o proximidades (ANAFAC, ACP, análisis jerárquico de similaridad, etc.) y la necesidad de un índice estadístico de "quasi-implicación", que marcará el método implicativo.

La *clasificación jerárquica*, construida partir del índice de similaridad entre atributos o variables de Lerman (1981), muestra relaciones simétricas (de proximidad o distancia) entre estas variables o entre los sujetos que las verifican; mientras que la *clasificación implicativa*, se basa en un índice estadístico que expresa la noción de "casi-implicación" entre variables [Lerman, Gras, Rostam (1981)] y que mide esa intensidad de implicación, plasmándola en un grafo implicativo - y por tanto disimétrico -, imagen de la relación de preorden parcial que se establece entre las variables (o los sujetos). Las propiedades de esta intensidad de implicación comenzaron a ser estudiadas por Larher (1991) en su tesis; trabajos posteriores profundizaron en diversos aspectos de este método de análisis dando lugar a los trabajos de Gras y

[9] Referencia bibliográfica completa en Brousseau (1986) (pp. 34).

Larher (1992) y a las tesis de Larher (1992), Totohasina (1992), Bailleul (1994). A destacar la elaboración y utilización del *programa informático CHIC* (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) de tratamiento numérico y gráfico relativos a los métodos estadísticos clasificatorios e implicativos descritos anteriormente, recogidos en las tesis de Almouloud (1992), Ratsimba-Rajohn (1992) y posteriormente reformulado por Couturier (2000).

La originalidad de todos estos trabajos no reside solamente en la creación y el estudio de los índices estadísticos nuevos de tratamiento de datos, sino en su aplicación en el campo de la DM: por Ej. Larher en su tesis pudo poner en evidencia una tipología de errores que los alumnos cometían en situaciones de aprendizaje de la demostración matemática y mostrar una epistemología artificial de la inferencia, a partir del examen de las clasificaciones jerárquicas de las similaridades y de las implicaciones.

Estos métodos de análisis estadísticos, de *clasificación jerárquica y clasificación implica*tiva, marcan los trabajos realizados fundamentalmente en el IREM e IRMAR de Rennes bajo la dirección y colaboración del profesor R. Gras. En la actualidad siguen siendo muy utilizados, tal y como se puede apreciar en las Actas de los dos coloquios celebrados en Caen (1995 y 2000).

· Una de las más recientes reflexiones sobre la utilización del análisis de datos en la teoría de situaciones, se puede encontrar en las actas del Coloquio de Caen (1995) *"Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques"*, en la comunicación *"L'analyse statistique des situations didactiques"* de Brousseau y Lacasta. A través de un ejemplo ilustran *la utilización de los métodos clásicos del análisis de datos* (conjetura, experiencia, resultados, estudio de factores, plan de experiencia, análisis multivariante, y test de contraste de hipótesis, etc.); se muestra así mismo *la necesidad del análisis de modelos explicativos* e ilustra la confrontación de diversos modelos con los comportamientos observados; por último *resitua algunas de las investigaciones precedentes* más significativas de la Teoría de Situaciones en este terreno, en un marco más amplio del análisis estadístico de las crónicas didácticas.

El *estudio experimental de una conjetura*[10] simple ("primitiva") formulada por el investigador, toma forma de confrontación entre observaciones de datos contingentes, obtenidos mediante un cuestionario sobre las concepciones de los alumnos, y el modelo teórico más o menos preciso y formalizado de la conjetura. El ejemplo analizado exige previamente a su experimentación, la determinación de los saberes matemáticos a observar, identificar los conocimientos correspondientes a esos saberes e imaginar dos clases de situaciones (las secuencias de observación) donde estos conocimientos puedan manifestarse mediante comportamientos observables. Una vez identificados éstos, se convierten en los caracteres que deben identificar a las cuestiones y debe guiar la elaboración del cuestionario y el plan de la experiencia: las cuestiones seleccionadas, los caracteres explicativos controlados ligados a las situaciones, y a los alumnos. Constituyen la matriz explicativa de control del cuestionario (incidiremos en este concepto en el siguiente párrafo). La estructura empírica de las observaciones, se pone de manifiesto en este artículo, mediante el análisis en componentes principales y el análisis factorial de correspondencias de la contingencia y para la presentación de resultados se utilizan los porcentajes de éxito de cada pregunta, el número de éxitos por ocasión de respuesta (según un criterio del cuestionario), la aplicación del test de homogeneidad (Test de Student) para analizar las diferencias entre los éxitos de las respuestas, en función de dicho criterio.

Respecto a la utilización del *método de análisis factorial de correspondencias*[11], Brousseau había señalado ya en 1985 y 1986, que se pueden encontrar relaciones bien establecidas entre los resultados y comportamientos de los alumnos –mediante experimentaciones convincentes y con resultados interesantes a nivel local- pero que presentan a veces dificultades interpretativas ya que puede resultar difícil dis-

[10] Brousseau y Lacasta (1995) (pp. 53-78)

[11] Bastante utilizado en la didáctica francesa; en esta línea se pueden situar los trabajos de F. Pluvinage (1977) y del IREM de Estrasburgo, entre otros.

tinguir las relaciones ya introducidas a priori por los caracteres del cuestionario y las relativas al comportamiento de los alumnos. Brousseau[12] proponiendo un método de control de esos fenómenos que consiste en el establecimiento de las matrices a priori de los cuestionarios con caracteres explicativos de las cuestiones y realizar los análisis de dicha matriz explicativa: el análisis factorial de correspondencias, y el análisis en componentes principales. Esta propuesta ha marcado gran parte de los análisis de datos realizados en el marco de la teoría de situaciones. En las actas del citado Coloquio de Caen (1995) podemos encontrar también el trabajo de Batanero, Estepa y Godino, relacionado con este tema.

Un ejemplo de esta *confrontación entre las variables explicativas y la contingencia*, se puede encontrar en otra de las partes de la comunicación de Brousseau y Lacasta (1995): muestra cual es el valor de las variables explicativas en un espacio contingente: permite identificar variables explicativas de los datos observados (habiendo estado determinadas a priori como tales), permite construir una variable explicativa contingente, analiza el valor explicativo de las variables suplementarias y de las observaciones suplementarias, así como las precauciones para determinar ese valor explicativo sea de una variable activa o suplementaria y cuando se obtienen de la contingencia otras variables no activas a priori. También muestra cómo el análisis de los datos de las matrices suplementarias (variables y observaciones) permiten verificar la calidad de la experiencia a realizar con relación a las explicaciones esperadas, ayudando a mejorarla y a preparar su interpretación posterior.[13]

II- EL ANÁLISIS DE DATOS EN SITUACIÓN ESCOLAR: PROBLEMAS Y SOLUCIONES DESDE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA Y LA TEORÍA DE SITUACIONES

La mayor parte de las investigaciones elaboradas en el marco de la teoría de situaciones presentan ejemplos de la utilización de esta diversidad de métodos de análisis de datos expuesta anteriormente, en esta segunda parte vamos a presentar, una de estas investigaciones que por el contenido de la familia de situaciones didácticas propuestas –la clasificación y el análisis de datos en la enseñanza obligatoria -, nos permite abordar el tema de la ponencia, desde diversos aspectos.

II-1. El análisis de datos: de un problema pedagógico a un problema didáctico

Nuestro trabajo tiene su origen en las dificultades de un maestra de CM2 (10-11 años), tras un salida escolar al bosque. Los alumnos habían recogido hojas y plantas y comparándolas querían "clasificarlas". Se trataba solamente, para ellos, de conjugar caracteres simples.

El enseñante esperaba poder definir algunos criterios usuales en las plantas ("nervios paralelos", "nervios ramificados", dic.), proponer un esbozo de clasificación de las plantas según el sistema de reproducción (plantas con flor, etc.) e introducir algunos términos propios a las clasificaciones (clases, subclases, especies, etc.).

Los desacuerdos, las incertidumbres y las preguntas de los alumnos sobre la elección de los criterios, del objetivo de la clasificación y de los métodos para obtenerla, han producido las dificultades del enseñante y han justificado el inicio de nuestro trabajo sobre la clasificación (Orús, 1986).

[12] Brousseau [(1986), pp. 391-398, (1995), pp. 62-78].

[13] Una primera aproximación a la utilización del espacio explicativo en el análisis de datos en DM, aparece en la tesis de Brousseau (1986) (pp. 391-398): *"Méthode de contrôle de l'analyse factorielle des correspondances par l'analyse de l'espace expliactive"*.

La aproximación al problema, desde el marco de la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1986) plantea, como método de investigación, la necesidad de buscar en la naturaleza matemática de los contenidos la dificultad de este proceso así como sus posibles soluciones. En consecuencia, la búsqueda de una situación fundamental que dé un sentido a la clasificación en la escuela elemental (CM-2), ha conducido, a profundizar en el estudio de los objetivos y métodos de la clasificación (análisis clasificatorio), y todo este proceso ha permitido ampliar nuestra problemática pedagógica inicial, y sumergirla en una problemática didáctica mucho más amplia: la gestión del razonamiento personal de los alumnos en la relación didáctica.

La dificultad abordada en profundidad en la tesis (Orús 1992) es la gestión del razonamiento natural de los alumnos en la relación didáctica, que caracterizaremos como una situación paradójica en la cual el enseñante carece de medios para poderla abordar, siendo intrínseca a la enseñanza misma de las matemáticas y no identificable a un único concepto matemático. Una vez establecido que este RN de los alumnos es solicitado por los enseñantes de diferentes maneras, en la relación didáctica, pero que el contrato didáctico impide habitualmente que éste RN sea un objeto de enseñanza, se ha procedido a realizar el estudio de la posibilidad de mejorar el razonamiento natural (RN) de los alumnos por una iniciación al análisis clasificatorio.

II-2. El análisis de datos: instrumento de negociación didáctica para el profesor y objeto transacional para el razonamiento de los alumnos

Si se trata de un problema de contrato didáctico, es necesario actuar sobre él, modificarlo. Nuestra propuesta consiste en actuar sobre la práctica de los profesores mediante la "ingeniería didáctica" (en el sentido de Brousseau: mediante la búsqueda de las condiciones / variables que permiten modelizar y desarrollar los conocimientos de los alumnos): propone una familia de lecciones y situaciones que permitan actuar sobre el sentido de las adquisiciones de los alumnos y que estas situaciones conduzcan a una negociación del estatus de los conocimientos espontáneos de los alumnos.

Hemos continuado la investigación de un acceso diferente de los niños a la lógica, trabajo ya comenzado por Digneau (1980), Maudet (1982) y los diversos trabajos de J. Peres[14] (1979-1985-1989) en el COREM de l'Université de Bordeaux-I. Ellos han estudiado el funcionamiento a-didáctico de la adquisición de diferentes conceptos de la lógica; nuestro trabajo continua estudiando la gestión didáctica de esta adquisición y los posibles obstáculos que el pensamiento natural del niño puede presentar en este proceso.

Para desarrollar esta ingeniería, hemos tenido necesidad de hacer "aparecer" este P.N. ofreciéndole un espacio en situación escolar, permitiendo su modo de funcionamiento: vamos a modelizar ese P.N. de los alumnos mediante el funcionamiento de la agregación de datos (el análisis clasificatorio o tipológico). Además las tablas de datos que utiliza el análisis tipológico, permiten representar de la misma manera, con un mismo instrumento, este P.N. utilizado por los alumnos y los profesores, y la lógica formal utilizada en las matemáticas, ofreciendo a su vez un campo común sobre el que se pueden distinguir, según su funcionamiento. Es decir las tablas de datos, van a ser el medio común de representar diferentes tipos de razonamiento (el P.N. la clasificación, la lógica, los juicios y argumentaciones, etc.), con reglas de manipulación diversas, pero actuando sobre las mismas tablas. (Ver Tabla-I, en Anexo-1).

Con las tablas, el alumno va a poder reconocer formalmente ciertas operaciones, ciertos juicios y argumentaciones que él realiza espontáneamente. Va a poder dar un estatus a los enunciados propuestos y discutirlos con los demás. También va a poder percibir la diferencia entre su

[14] Referencias bibliográficas completas en Brousseau (1986) (pp. 32-34).

P.N. y lo que se le pide aplicar como razonamiento lógico, en este sentido, la tabla funciona como un objeto transacional[15] (Winnicott, 1971). Va a poder clasificar y comparar sus clasificaciones con otras clasificaciones ya existentes.

En definitiva, el análisis tipológico ha sido utilizado como una metáfora general en la ingeniería didáctica: es un instrumento que para el alumno tiene un carácter metafórico de referencia y para el enseñante es un medio de negociación didáctica con los alumnos, sobre su razonamiento espontáneo creándole así un espacio en la enseñanza.

Las situaciones de estudio que hemos propuesto ilustran el uso extremadamente difundido de la agregación de datos: *la clasificación de plantas*, es ciertamente una de las más utilizada y la toma de decisión en función de los gustos y de las elecciones personales, nos ha parecido también muy interesante y lo hemos abordado en dos aspectos, el aspecto semántico con el *Juego del viaje* y el aspecto formal con el *Juego de coalición,* que simula los modos de toma de decisión en una sociedad democrática.

En este artículo no abordaremos ni el carácter global de la solución didáctica planteada, ni el papel que juega el instrumento matemático elegido en esta solución, el análisis tipológico; estos temas ya han sido realizados y presentados en trabajos anteriores que pueden ser consultados (Orús, 1986, 1992, 1993, 2001).

II-3. El análisis de datos, un instrumento de decisión en la investigación en DM

El *Juego del viaje* constituye la situación fundamental del conjunto de situaciones propuestas: es la construcción guiada de una jerarquía (sobre un conjunto de alumnos según sus gustos sobre las vacaciones), seguida de debates y reflexiones, generalmente de naturaleza lógica (implicaciones, clasificaciones, etc.). Pero fundamentalmente el Juego del viaje, supone evidenciar las reglas del juego de la clasificación que funcionarán en las diversas situaciones didácticas propuestas.

La situación elegida simula el funcionamiento de una agencia de viajes, que busca diferentes propuestas que realizar a sus clientes; es decir viajes con características diferentes – lugares y actividades que puedan realizarse- que les permitirán satisfacer los gustos diversos de sus clientes. Los alumnos juegan un doble juego: clientes potenciales y agentes de viaje. Como clientes, será necesario conocer sus gustos y por lo tanto elegir características de los lugares y actividades. Las cuestiones elegidas por los alumnos articulan un cuestionario que también debe ser contestado por cada alumno, con respuestas si-no. Como agentes de viaje, los alumnos deben organizar viajes teniendo en cuenta estos datos y las consignas propuestas.

II-3.1. La clasificación jerárquica en el estudio a priori de las situaciones didácticas

El conjunto de las situaciones didácticas propone hacer funcionar, a nivel de la acción[16] las tres primeras etapas del análisis tipológico, es decir: la recogida de datos que describen los sujetos u objetos mediante varias características o criterios, y que se representan en una tabla de doble entrada (o matriz); el cálculo de proximidades (o distancias) entre los pares de sujetos (u objetos), teniendo en cuenta los criterios de cada par comparado; y la construcción de grupos, si bien en cada una de las situaciones se dan ligeras variaciones, en las etapas a franquear

[15]. Objeto transicional: “Objeto intermediario entre la realidad interna propia del individuo y el medio exterior, un objeto que permite el paso a la objetividad”.

[16] Para la noción de *situación fundamental* y para la distinción entre los tipos de *situaciones a-didácticas* propuestas por BROUSSEAU: acción, formulación, y validación, ver (Brousseau, 1986).

En el Juego del viaje,[17] también está prevista una variante de la situación que incluye las etapas 4ª y 5ª - las etapas de representación interpretación y validación de las clasificaciones obtenidas - proponiendo a los alumnos, para su reconocimiento: e interpretación, la clasificación jerárquica realizada por el ordenador (utilizando el programa estadístico CHIC) a partir de los mismos datos con que los alumnos habían manipulado en las etapas anteriores del juego. El programa informático es utilizado, como un medio de ayuda en la decisión que deben tomar en el juego; un medio del que solo conocen el efecto que produce y esa producción –el árbol de la clasificación de los datos- puede ayudarles a tomar una decisión, con la información aportada, si ésta solución propuesta se adecua a las necesidades del problema planteado inicialmente, y en caso contrario, simplemente se rechaza este medio. En ambos caso es una ayuda en la interpretación de los datos, y permite una buena aproximación de la 5ª y última etapa del análisis tipológico: la validación de los resultados de la clasificación, en función del problema propuesto.

En Orús (2000)[18] se muestra más detalladamente la utilización a priori del método de análisis de las similaridades (mediante el índice de Lerman y el programa CHIC) y de los árboles de clasificación propuestos - tanto de los criterios del viaje como de los alumnos -, que ofrecen al profesor (y/o al investigador) informaciones y medios para tratar los datos objeto de la lección, proporcionándole una ayuda en la toma de decisiones –también al propio profesor -, en este caso decisiones didácticas respecto a las variables de las situaciones a proponer a los alumnos.

En la “Clasificación de plantas” las etapas 4ª y 5ª, son propuestas a los alumnos para su reconocimiento: a partir de la comparación de varios tipos de clasificaciones - las que los niños han hecho y dos clasificaciones botánicas ya existentes - se propone el análisis de las diferentes representaciones y su interpretación, y un inicio de validación pueda ser realizado.

II-3.2. El análisis implicativo y la ingeniería didáctica

El árbol de la clasificación jerárquica (de similaridades) de los criterios del Juego del viaje, mostraba dos ramas diferenciadas que podían caracterizarse como los Viajes A y B respectivamente, caracterizados cada uno de ellos con los criterios agregados en cada una de las clases (ramas). Esta clasificación, permite analizar varias soluciones posibles para el Juego del viaje (“*Buscar el viaje más satisfactorio para el mayor número de alumnos posible*”) (Anexos 2 y 3).

El análisis implicativo permite profundizar un poco más en estas soluciones: analizando tanto el árbol jerárquico implicativo como los grafos implicativos entre los criterios del viaje[19] se obtienen informaciones que pueden contribuir de forma decisiva en la preparación de la ingeniería didáctica de las situaciones.

El análisis del árbol jerárquico implicativo muestra los diferentes niveles de agregación de las clases implicativas, que a su vez muestran las parejas de criterios que presentan una cohesión implicativa maximal (Anexo-4).Cruzando esta información con otras informaciones sobre estas parejas (Qi, Qj) de cuestiones, como su implicación semántica, y la frecuencia del producto booleano o conjunción lógica de “Qi” y “noQj”, se obtiene una caracterización de los criterios del viaje, en función de su implicación semántica, lógica y estadística. Tras estos análisis, el Viaje B aparece más rico para las situaciones planteadas, desde el punto de vista didáctico, pues ofrece clases (o paquetes) de criterios (o cuestiones) que se implican estadísticamente entre ellas – es decir, se implican por la contingencia, por los efectivos es-

[17] “El Juego de la agencia de viajes” es la *situación fundamental* que modeliza el conjunto de las situaciones didácticas propuestas.

[18] (Orús, 2000) pp. 89-91.

[19] Ibid. Pp. 92-97

tudiados, que en este caso son los alumnos y sus respuestas al cuestionario- y cuya implicación lógica y semántica no están siempre garantizadas (siempre según los datos) (Anexo-5).

CONCLUSIÓN

A modo de conclusión, querríamos terminar, resaltando y resumiendo algunas cuestiones metodológicas expuestas en esta ponencia, sobre la utilización del análisis de datos, planteadas desde la Teoría de Situaciones.

· El carácter espiral de esta metodología de investigación: La elaboración de los datos y el posterior tratamiento de la información, obtenidos de la observación de hechos didácticos en situación escolar, define una metodología propia de investigación en DM que juega frecuentemente un "rôle" fenomenotécnico, de continuo cuestionamiento de las conjeturas iniciales y de los elementos teóricos de la modelización de la propia teoría de situaciones.

· La necesidad de realizar sólidos análisis a priori de los protocolos destinados a la obtención de datos (cuestionarios, fichas de observación, etc.) que se confrontarán con los resultados, para evitar la fuerte tendencia general de lectura empirista de los datos.

· La utilización generalizada de métodos de análisis estadísticos multidimensionales de datos - análisis factorial de correspondencias, análisis en componentes principales, clasificación y análisis jerárquico, y análisis implicativo- que permiten análisis cualitativos y no solo cuantitativos de los datos.

· Y por último resaltar la necesidad de concentrarse en las situaciones: el estudio y modelización de los conocimientos matemáticos en juego a través de la elaboración de las situaciones didácticas adecuadas, mediante la identificación y control de las variables que definen la situación, y la observación de estas situaciones elaboradas en un marco de ingeniería didáctica, o de secuencias didácticas más tradicionales, pero de las que se haya realizado a priori, la búsqueda de las variables didácticas, que permitan realizar una observación sistemática. Sólo en ese contexto cobra sentido y puede ser comprendido el análisis de datos que se realiza en el marco de la Teoría de Situaciones.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1969). *Mathématiques du cours préparatoire et école maternelle grande section*. Paris : Dunod.

Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *La Revue Française de Pédagogie*, nº 45.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* Thèse d'Etat, Université de Bordeaux-I . Talence : IREM de Bordeaux.

Brousseau, G.; y Greslard, D. (1988). *La régulation d'un curriculum : problèmes pratiques et théoriques*. Curso impartido en Namur. Talence: IREM de Bordeaux.

Brousseau, G.; y Lacasta, E. (1995). L'Analyse statistique des situations didactiques. *Actes du Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques.* (pp. 53-88), Caen. Rennes: Université de Rennes-I.

Chandon, J.L., y Pinson, S. (1981). *Analyse typologique. Théories et applications.* Paris: Masson.

Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et des certaines objectives didactiques en mathématiques*. Thèse d'état. Rennes : Université de Rennes.

Gras, R. (1980) *"Deux méthodes d'analyse des données didactiques: Classification implicative et classification hiérarchique – application à une situation réelle".* Rennes : IREM de Rennes.

Gras, R. (1992). L'analyse des données : une méthodologie de traitement des questions de didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1),* (pp. 59-72)

Gras, R. y cols. (1994). La méthode de l'analyse implicative en didactique. Applications. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 349-364). Grenoble : La pensée Sauvage éditions.

Gras, R. y cols. (1996). *L'Implication Statistique*. Collection Associée à « Recherches en Didactique des Mathématiques ». Grenoble: La Pensée Sauvage.

Gras, R. (2000). Les fondements de l'analyse statistique implicative *Actes des La fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative.* Caen 2000, (pp. 11-32). Rennes: Université de Rennes-I.

Groupe de Recherche sur l'Enseignement Elementaire (1975). *Les Observations et les Tables Rondes*. Talence : Coll. L'analyse de la didactique des mathématiques. IREM de Bordeaux

Lerman, I.C. (1970). *Les Bases de la Classification Automatique.* Paris: Gauthiers Villars.

Lerman, I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Paris : Dunod.

Lerman, I.C. (1995). Rôle de l'Inférence Statistique dans une Approche de l'Analyse classificatoire des données. *Actes du Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques.* (pp. 109-117) Caen. Rennes: Université de Rennes-I.

Lerman, I.C.; Gras, R.; y Rostam, H. (1981). Élaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires (I et II). *Mathématiques et Sciences Humaines* nº 74, pp. 5-33 et nº 75, pp. 5-47.

Orús, P. (1986a). *Informe sobre la escuela J. Michelet*. Memoria de la estancia en el COREM de l'Université de Bordeaux-I, financiada por la Conselleria d'Educació i Ciència de la Generalitat Valenciana.

Orús, P. (1986b). *L'enseignement des méthodes de classification. Proposition d'une ingénierie pour le cours moyen*. Coll. Études en Didactiques des Mathématiques. Bordeaux : IREM de l' Université de Bordeaux-I.

Orús, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire.* Thèse présentée à l'Université de Bordeaux-I. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

Orús, P. (1993) La utilización de un concepto matemático - el análisis tipológico- como útil didáctico en la escolaridad obligatoria. *Revista Internacional de Enseñanza de las Ciencias*. Bellaterra.

Orús, P. (2000). Utilisation didactique des tableaux des données y du logiciel "CHIC" à l'école élémentaire. *Actes des Journées sur La fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative.* Caen, Junio 2000 (pp. 85- 98). Nantes: Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes..

Orús, P. (2001) Classification et didactique, *Bulletin de la Société Francophone de Classification*, nº 14, Paris: Société Francophone de Classification.

Orús, P.; y Greslard, D. (1994). L'interaction sociale et la situation a-didactique dans la gestion du raisonnement naturel dans la relation didactique. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 268-275) . Grenoble : La pensée Sauvage éditions.

Wermus, H. (1976). Essai de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles. *Archives de Psychologie,* Genève, 44, nº171, pp. 205-221.

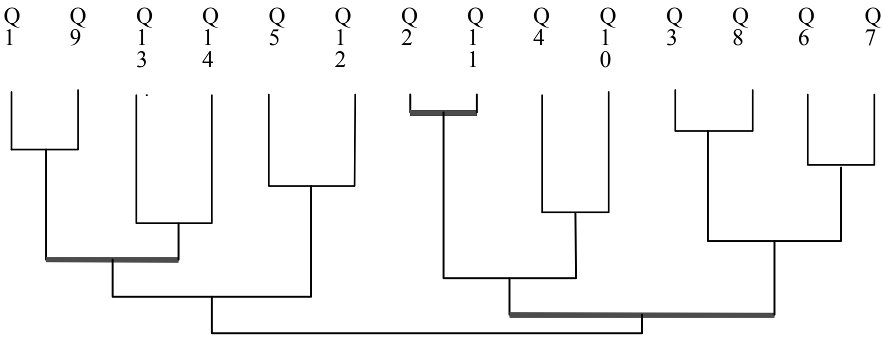
ANEXOS

Anexo-1

Aimes-tu ...	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1. aller dans un musée?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
2. aller à des compétions sport.?	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
3. faire du tennis?	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
4. te baigner?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
5. les croisières dans le Pacifique?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
6. aller en Espagne ap. l'espagnol?	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7. les montagnes?	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8. les marches en montagne	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
9. avoir des visites guidées?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
10.goûter les spécialités d'un pays?	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
11. faire du foot-ball?	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
12. faire du vélo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
13. aller en Italie visiter des musés?	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14. séjourner château Renaissance?	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla-1. Tabla del Juego del Viaje, de CM2A de l'école J. Michelet (Talence)

Anexo-2



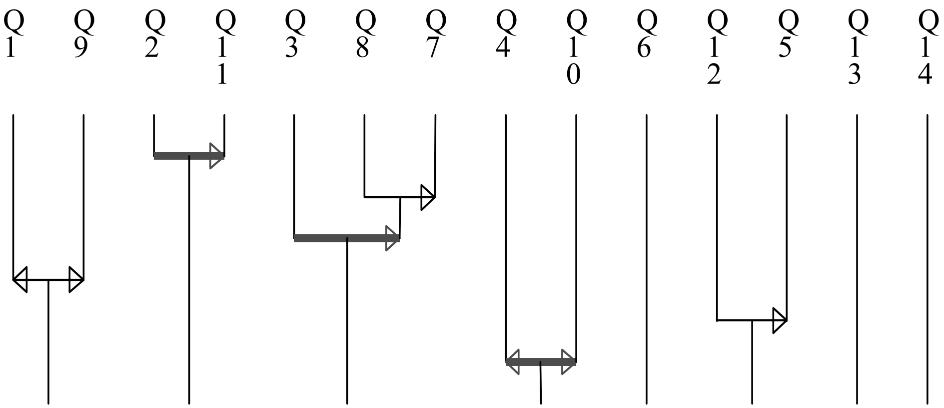
Arbol-IQ. Análisis de similaridad de las cuestiones, sobre la matriz de datos de la Tabla-I

Anexo-3

	VOYAGE A						VOYAGE B							
	mus	visit	Italie	châte	Crois	velo	sport	foot-	baige	speci	tennis	march	espag	mont
	Q1	**Q9**	**Q13**	**Q14**	**Q5**	**Q12**	**Q2**	**Q11**	**Q4**	**Q10**	**Q3**	**Q8**	**Q6**	**Q7**
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
4	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
5	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
6	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
10	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
11	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
13	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
14	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
20	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
22	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
24	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
ocurr	**16**	**16**	**21**	**20**	**22**	**20**	**16**	**18**	**21**	**21**	**15**	**17**	**18**	**19**

Tabla-2 : Reorganizacion de la Tabla-1, a partir del Arbol-1Q de similaridad

Anexo- 4



Arbre-2Q:Arbre hiérarchique (selon la théorie classique)

Anexo-5

NIVELES DE AGRÉGACIION DE CLASES IMPLICATIVAS	CLASES DE COHÉSION MAXIMAL (PAREJAS DE CUESTIONES)	$N(Q_i \bullet \overline{Q}_j)$
1*	Q2 $\Rightarrow$ Q11 spor $\rightarrow$ foot	CERO
2	Q8 $\rightarrow$ Q7 marc $\rightarrow$ mont	UNO
3	Q3 $\rightarrow$ Q8 ten $\rightarrow$ marc	UNO
4*	Q3 $\rightarrow$ Q7 ten $\rightarrow$ mont	UNO
5	Q1 $\leftrightarrow$ Q9 mus $\leftrightarrow$ visi	TRES
6	Q12 $\Rightarrow$ Q5 velo $\rightarrow$ croi	CERO
7*	Q4 $\leftrightarrow$ Q10 bai $\leftrightarrow$ spéc	UNO

Tabla-3: Cuestiones con cohesión implicativa maximal, segun el árbol jerárquico 2Q

* : Indica un nivel significativo

Qi $\Rightarrow$ Qj: Indica cohesión implicativa e implicación lógica [$N(Q_i \bullet \overline{Q}_j)$ = 0], entre les questions Qi, Qj.

Qi $\rightarrow$ Qj: Indica cohesión implicativa entre las cuestiones Qi, Qj.

CUESTIONES METODOLÓGICAS EN LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

ANGUSTIAS VALLECILLOS JIMÉNEZ

Universidad de Granada

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

CUESTIONES METODOLÓGICAS EN LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

❧

ANGUSTIAS VALLECILLOS JIMÉNEZ
Universidad de Granada

> Sería quizás prematuro especular en este momento sobre la cuestión de si los métodos de la ciencia abstracta podrán en el futuro ser útiles en la investigación de los problemas sociales en una medida equivalente a como lo han sido en varios campos de la investigación física. .... Mas que poseemos teóricamente en todos los casos, y prácticamente en la medida en que la requerida labor del cálculo puede ser suministrada, los medios de desarrollar a partir de los datos estadísticos las semillas de verdades generales que yacen enterradas entre la masa de números, es una opinión que puede afirmarse con toda seguridad.
>
> George Boole, *Investigación sobre las leyes del pensamiento,* pp. 25-26.

RESUMEN

En este trabajo pretendemos sintetizar algunas cuestiones de método aplicables a la investigación educativa. Para ello reflexionamos sobre el método seguido para la realización de una amplia investigación de referencia, Vallecillos (1994), que pertenece al campo de la educación estadística. Es un ejemplo de lo que podemos llamar 'método estadístico' que puede aplicarse como 'modelo' en la investigación educativa en general. Se incluyen también, a modo de ejemplo de su funcionamiento, los resultados obtenidos en esa investigación sobre la comprensión de un concepto clave en los contrastes de hipótesis como el nivel de significación.

ABSTRACT

In this paper we try to synthesize some methodological questions applicable to educational research. With this aim we reflect on the method followed in a wide reference research, Vallecillos (1994), that belongs to the field of statistical education. This research is an example of what we can call 'statistical method ' that can be applied as 'model' in educational research in general. We also include, as an example of its functioning, the results obtained in that research about the understanding of a key concept in hypothesis testing as is the significance level.

INTRODUCCIÓN

El método científico en la investigación

Entendemos por 'método' cualquier conjunto de acciones ordenadas con las que pretendemos conseguir unos resultados y por 'metodología' la aplicación coherente de un método. La problemática metodológica viene de antiguo, fue planteada por Bacon con su defensa de la inducción y un referente importante para nosotros es Descartes con su planteamiento de la duda metódica. En nuestro ámbito de la investigación es preciso citar también a Galileo que introdujo la medición como forma de observación exacta del mundo natural. Es de todos conocido que lo que hoy llamamos *método científico* es el método inspirado en la Física, ya que esta ciencia consiguió rápidos y excelentes resultados con su método y se convirtió así en ejemplo a seguir por todas las demás. En síntesis, este método consiste en observar los hechos significativos, sentar hipótesis que los expliquen satisfactoriamente, deducir de ellas consecuencias que puedan someterse a prueba por la observación para aceptar como provisionalmente verdadera aquella hipótesis que soporte mejor la prueba. El desarrollo de diversas ciencias a partir de la segunda mitad del siglo XVIII ha supuesto también el desarrollo de diversas metodologías específicas. La discusión sobre el método ha sido especialmente importante en las ciencias humanas por la complejidad de su objeto y por la coincidencia en ellas de sujeto y objeto del conocimiento lo que hace difícil o imposible la aplicación en ellas de los métodos de observación de otras ciencias; el hecho de que estas ciencias sean de desarrollo muy reciente hace que esta discusión esté todavía en gran parte abierta.

El método estadístico en la investigación en Didáctica de la Matemática

El campo de las matemáticas, como disciplina 'objetiva' ha sido siempre campo neutral para la observación de fenómenos educativos y eso ha hecho, por otra parte, que el área de la Didáctica de las Matemáticas sea un buen observatorio de fenómenos educativos e investigaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La investigación educativa puede afectar a un número de problemas tan grande y a su vez tan sumamente diferentes unos de otros que pretender encontrar un esquema metodológico válido para todo tipo de propósito investigador se nos antoja una idea poco realista. Existen ya clasificaciones más o menos exhaustivas de los tipos de investigaciones que pueden realizarse, atendiendo al método a emplear, a su grado de aplicación, al tipo de datos disponibles, al tipo de variables analizadas, al objetivo al que se dirigen, etc., como puede verse, por ejemplo, en Bisquerra (1989).

Se nos antoja bastante probable que, en general, una vez bien definido el problema de investigación, ningún esquema metodológico conocido sea totalmente adecuado a la situación concreta que tenemos planteada. Este es el momento en el que el investigador debe adaptar o diseñar una metodología a la medida de las necesidades de su propia investigación. Para ello, es necesario determinar los diferentes elementos a tener en cuenta, cuáles de ellos son indispensables y decidir entre los diseños metodológicos conocidos que aspecto de cada uno de ellos es pertinente al efecto de conseguir los objetivos que se persiguen. En caso contrario el investigador deberá diseñar su propio esquema metodológico que, probablemente, será una mezcla de elementos de otros esquemas anteriores con alguna parte original, de manera que pueda responder finalmente de una manera más adecuada a los objetivos concretos de investigación definidos en el problema planteado. En este sentido, considero que el esquema metodológico que se describe aquí, es completo ya que emplea distintos tipos de muestras, variables, técnicas de obtención de datos, tipos de análisis de los mismos, etc., que es posible que no sea necesario utilizar íntegramente en todo tipo de investigaciones, sino que también será aplicable utilizando solamente algunas de sus partes.

Se nos antoja difícil hablar de la investigación en abstracto, así que en este trabajo sólo pretendemos sintetizar algunas cuestiones metodológicas en relación con la investigación educativa sobre la base de nuestra propia experiencia investigadora y en nuestro campo concreto de investigación.

Lo que sigue es simplemente un intento de sistematización terminológica con el fin de conseguir un esquema metodológico aplicable a la investigación educativa, ejemplificado en una primera investigación concreta y que se está empleando en la actualidad en otras investigaciones en curso a través de Proyectos de Investigación subvencionados por el Ministerio de Educación español. Aunque la investigación de partida, que empleamos como base para 'teorizar' sobre ella, es un trabajo realizado en el campo concreto de la educación estadística, (Vallecillos, 1994), pretendemos abstraer los aspectos metodológicos de la misma con el fin de construir un esquema aplicable a la investigación en otros campos de la investigación educativa ya que podemos considerarla un ejemplo de *método estadístico*, de aplicación general. Se incluye, además, una parte de la investigación, la que se refiere al concepto de nivel de significación, para que se pueda valorar mejor la utilidad de la metodología seguida en orden a conseguir los objetivos previstos en el problema de investigación planteado.

DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN DE REFERENCIA

Esta investigación, (Vallecillos, 1994), tuvo como meta realizar una valoración comprensiva y sistemática de las concepciones, dificultades y errores de los estudiantes universitarios en el aprendizaje del tema del contraste de hipótesis estadísticas. Se llevó a cabo entre los años 1990 y 1994 y participaron en ella un total de 436 estudiantes de catorce grupos y siete titulaciones distintas de la Universidad de Granada. La toma de datos se realizó mediante un cuestionario sobre contenidos conceptuales y procedimentales que consta de 20 ítems y un problema de aplicación. En seis de los ítems se le pide al alumno que razone su respuesta con el fin de valorar mejor su comprensión del enunciado y nuestra interpretación de su respuesta.

Posteriormente se realizó una entrevista semiestructurada a un grupo de siete estudiantes seleccionados intencionalmente. El objetivo general pretendido es el de proporcionarnos información complementaria con el fin de profundizar en nuestra comprensión sobre algunos errores 'básicos' detectados en el aprendizaje de los alumnos, así como tratar de identificar sus causas. También pretendemos asegurarnos de la comprensión y de la interpretación que hemos dado a algunas de las respuestas de los alumnos y de la estabilidad de sus respuestas.

ESQUEMA METODOLÓGICO: ELEMENTOS MÍNIMOS QUE COMPORTA UNA INVESTIGACIÓN EN EL CAMPO DE LA EDUCACIÓN

Un correcto enfoque metodológico de la investigación educativa comporta el análisis detallado de los siguientes elementos mínimos: objetivos que se persiguen, instrumento de recogida de datos y análisis de los mismos. A pesar de que pretendemos ser muy sintéticos, es necesario que profundicemos un poco más en los diversos aspectos que cada uno de estos elementos conllevan.

El cierre del proceso es la elaboración de un informe final de la investigación que recoja con todo detalle todos los aspectos de antecedentes, planteamiento y ejecución del proyecto, decisiones tomadas en el curso de su desarrollo, limitaciones de las conclusiones obtenidas así como líneas abiertas a la continuación del trabajo e implicaciones en otros ámbitos como, en nuestro caso, para la enseñanza del tema objeto de la investigación.

A) Problema de investigación, objetivos, hipótesis, estado de la cuestión

Determinación del problema de investigación

Aún a riesgo de que esta afirmación parezca una perogrullada, la definición del problema de investigación es la primera cuestión a resolver. Muchas veces nos encontramos con un problema no bien definido que, por tanto, no podrá estar nunca bien resuelto. La total determinación y clarificación inicial del problema, nos llevará a una buena determinación del estado de la cuestión, hipótesis de partida, objetivos iniciales, etc., indispensables desde el punto de vista metodológico.

Esta es la fase de transformación de un interés inicial vago del investigador en un área problemática en un verdadero problema de investigación cuyos interrogantes estén perfectamente delimitados y concretados.

Estudio teórico previo

En nuestro trabajo el estudio teórico inicial se hizo con mucho detenimiento. Se estudió primero el aspecto conceptual del tema, los distintos enfoques en la teoría de los contrastes de hipótesis, Fisher y Neyman-Pearson, así como sus perspectivas histórica y epistemológica. Se estudio el problema de los contrastes también desde la perspectiva de la enseñanza analizando hasta seis elementos de significado, Godino y Batanero (1994), de síntesis de los conceptos implicados en ellos. También se hizo un minucioso análisis a priori de los contenidos incluidos en el estudio. Es especialmente destacable el análisis de contenido realizado por dos razones básicas: a) para delimitar claramente el problema de investigación a un contenido perfectamente concretado; b) para dotar de validez de contenido al instrumento utilizado en la toma de datos. Posteriormente, estos análisis teóricos sobre los distintos enfoques así como las cuestiones epistemológicas analizadas, nos han permitido entender mejor algunas de las respuestas de los estudiantes y 'explicar' en parte los múltiples problemas derivados del uso de las técnicas de contraste de hipótesis en la investigación experimental.

En general, creemos muy importante el estudio teórico previo del problema, que incluirá los aspectos de contenido científico, filosóficos, históricos y didácticos del tema. Además de situar el problema de investigación en su marco teórico y científico correspondiente, este tipo de estudios son indispensables para comprender las respuestas de los alumnos y profundizar en las dificultades de tipo epistemológico o didáctico, errores de aprendizaje, etc., presentes en todos los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Antecedentes de la investigación

Las investigaciones previas sobre el tema son el punto de partida de las nuevas, de manera que un análisis crítico de las mismas, clasificación, conceptos estudiados, aspectos complementarios, caso de otros niveles o situaciones de enseñanza, etc., es un trabajo minucioso pero indispensable para emprender cualquier trabajo de investigación. También servirá para evitarnos descubrir el Mediterráneo, ya descubierto.

Objetivos, variables e hipótesis

Una vez planteado claramente el problema de investigación, determinamos los objetivos generales y concretos a conseguir.

Las variables a considerar, número y tipo, se deducen de todo lo anterior. Usualmente en la investigación educativa las variables a observar son de tipo cualitativo o cuantitativo y, en cada caso, se llevará a cabo un tipo de análisis adecuado al caso. Existen distintas clasificaciones de las variables actualmente según su forma de medida y es necesario estar permanentemente atentos a esta cuestión ya que podemos considerar que, a medida que una disciplina avanza la medida de las variables implicadas es progresivamente más sofisticada. Una clasificación de las variables y su medida puede verse en Afifi y Azen (1990).

El papel de las hipótesis en la investigación experimental y educativa es un importante elemento a tener en cuenta. En general, una hipótesis es una afirmación que suponemos cierta, esto es, una afirmación que expresa nuestra interpretación de los hechos. Podemos establecerla como una simple *hipótesis de trabajo*, que se plantea como una guía de la investigación o bien con el ánimo de que sea sometida a verificación experimental. En este caso se trata de una *hipótesis científica.* Las hipótesis y los experimentos constituyen los dos polos de la actividad científica (Wartofsky, 1976) y, si queremos clarificar los aspectos metodológicos de la investigación, es preciso precisar, en primer lugar el *significado* de las mismas: *"No hay término científico que padezca mayor ambigüedad que la que aflige a hipótesis: podríamos preparar una lista de enunciados contradictorios acerca de las hipótesis, así como de la condición de que gocen y el uso que se les dé en los estudios científicos",* (Wartofsky, 1976, p. 241). Así, según este autor, las hipótesis pueden ser: generalizaciones provenientes de la experiencia; inferencias deductivas que realizamos a partir de premisas de orden superior; postulados o suposiciones creados libremente por la inteligencia para poder ordenar o derivar de ellos otros enunciados; intuiciones referentes a lo que parezca evidente o ineludible de creer, o bien a lo que se presente como plausible de alguna manera vaga pero insistente. También pueden entenderse distintos tipos de hipótesis según el alcance y el género de las mismas.

El concepto de *hipótesis*, aparentemente fácil, no se ha revelado como tal en nuestra investigación en donde hemos encontrado muchas dificultades y errores de aprendizaje, así como unas concepciones muy restrictivas sobre el tipo de hipótesis admisibles, especialmente en las aplicaciones (Vallecillos, 1997), lo que afecta de manera muy concreta a la investigación educativa.

En el contexto de la investigación educativa las hipótesis que se plantean son muy frecuentemente *hipótesis estadísticas*, esto es, afirmaciones que se refieren a parámetros de poblaciones. Las hipótesis estadísticas no tienen que ser necesariamente hipótesis científicas en su más amplia acepción, como hemos mencionado antes, si bien pueden considerarse una consecuencia lógica de ellas. Las hipótesis científicas son afirmaciones teóricas sobre poblaciones generalmente no existentes, porque sus elementos no están acotados en el espacio o en el tiempo y, por tanto, no existen en un lugar o momento dado. Sin embargo, las hipótesis estadísticas se refieren siempre a poblaciones existentes, esto es, a poblaciones de las que disponemos de muestras, (Henkel, 1976).

Las hipótesis de investigación son frecuentemente malinterpretadas, insuficientemente determinadas o vagamente expresadas. En palabras de Fox (1981), "*El tema de las relaciones entre las hipótesis y la estadística suele producir gran confusión entre los investigadores principiantes y esa confusión se suele producir, fundamentalmente, porque no se distingue con suficiente claridad entre las* hipótesis de investigación *y las* hipótesis estadísticas .... *Una hipótesis de investigación es la predicción que hace el investigador de una conclusión concreta ... Puede hacer una hipótesis de* no diferencia ... *En otros casos el investigador espera encontrar* alguna diferencia*, y esto se reflejará en su hipótesis de investigación ... Pero, ... sea cual fuere el método inferencial que elijamos, sólo podemos contrastar una* hipótesis estadística de no diferencia ... *[Esta] hipótesis estadística no se expresa formalmente del mismo modo como aparece realmente la hipótesis de investigación en la propuesta o el informe de un estudio. Basta con que el investigador se dé cuenta y comprenda que la hipótesis que está contrastando con el método inferencial es ésta. Si no lo entiende así se pueden producir problemas graves de interpretación"* (pág. 293).

B) Obtención de datos

El proceso de obtención de datos es clave en toda investigación experimental. Usualmente en la investigación educativa las muestras empleadas no son aleatorias, por imposibilidad material de que así sea, de manera que raramente podemos hablar de diseños experimentales que permitan generalizaciones controladas a las poblaciones correspondientes, sino cuasi-experimentales. Si no podemos disponer de muestras aleatorias es necesario por lo menos emplear muestras 'representativas' de las poblaciones en estudio y respetar muy mucho las limitaciones de los resultados obtenidos que no serán generalizables sino a lo sumo descriptivos y orientativos, dependiendo de otras características del diseño como, por ejemplo, el tamaño de las muestras.

Población y muestra

Es conveniente la realización de una prueba piloto con el fin de poner a prueba aspectos concretos de la investigación como, por ejemplo el cuestionario. Se empleará para ello una muestra piloto y se analizarán los resultados obtenidos. Este ensayo nos permite comprobar aspectos técnicos de la prueba como el tiempo necesario para su desarrollo, legibilidad del cuestionario, posibles dificultades para su aplicación en el aula, etc. El análisis de los resultados nos permitirá hacer una clasificación inicial de las variables, la categorización para las variables cualitativas así como el estudio de la fiabilidad y validez de la prueba. Para esto último ver, por ejemplo, Thorndike (1989). Con todos estos datos se determinan los criterios de revisión de la prueba piloto, se redacta la prueba final y se deciden todos los detalles para su aplicación en el aula.

Una vez terminada esta fase se pasa a la fase experimental con la realización de la prueba final con una muestra experimental, a ser posible, aleatoria.

Instrumentos de recogida de datos

Enumeramos los instrumentos empleados en Vallecillos (1994):

1. Prueba escrita general: cuestionario sobre aspectos conceptuales y un problema de aplicación de un test de hipótesis.
    1.1. Cuestionario sobre aspectos conceptuales: consta de 20 ítems, 5 de ellos de Verdadero / Falso y 15 con 4 opciones y sólo una correcta.
        1.1.1. Opción elegida.
        1.1.2. Argumento de apoyo: en 6 de los 20 ítems se pedía razonar la respuesta.
    1.2. Prueba de ensayo sobre contenidos procedimentales: se propuso un problema de aplicación con 4 preguntas.
2. Entrevista personal: a siete estudiantes seleccionados intencionalmente.
    2.1. Cuestionario escrito: 3 ítems y 2 problemas con tres preguntas cada uno.
    2.2. Explicación oral del trabajo realizado.

C) Análisis de los resultados

En nuestro caso, se realizó un primer análisis descriptivo de tipo cuantitativo, por titulaciones y global, de los resultados de tipo conceptual para cada uno de los 20 ítems de la prueba. Se determinaron así los principales errores y dificultades de aprendizaje de los estudiantes de la muestra sobre el aprendizaje del contraste de hipótesis observados en forma sistémica y no aisladamente.

Se realizó también un análisis de tipo cualitativo de las argumentaciones proporcionadas por los alumnos en los seis ítems en los que se les pidió que razonaran la respuesta y un análisis conjunto de respuestas y argumentos.

Finalmente, se realizó el análisis de la parte procedimental de la prueba y de la influencia de los errores de tipo conceptual en la resolución del problema propuesto.

Las conclusiones obtenidas se organizan en cuatro grandes bloques: errores conceptuales asociados a elementos concretos de significado, estructura de las respuestas al cuestionario, concepciones sobre conceptos básicos en el contraste de hipótesis y conocimiento procedimental.

Posteriormente se llevó a cabo una entrevista con un grupo seleccionado de siete estudiantes cuya metodología, objetivos e hipótesis fueron también previamente determinados. Los principales resultados de ella pueden verse en Vallecillos y Batanero (1997).

UN EJEMPLO: COMPRENSIÓN DEL NIVEL DE SIGNIFICACIÓN

A continuación describimos los datos relativos al estudio de la comprensión del concepto de nivel de significación en un test de hipótesis obtenidos en Vallecillos (1994), que es un concepto clave en este procedimiento. Pueden verse también Vallecillos (1998a; 1998b; en revisión) y Vallecillos y Batanero (1996a; 1996b; 1997).

Objetivos

En síntesis, los principales objetivos de la investigación referidos al concepto de nivel de significación son los siguientes:

- Analizar en forma sistémica el aprendizaje de los tests de hipótesis por estudiantes universitarios.
- Obtener evidencias empíricas acerca del aprendizaje del concepto de nivel de significación.
- Identificar dificultades de aprendizaje, interpretaciones incorrectas y las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de nivel de significación.

Obtención de datos: cuestionario

*Ítem 1: Un nivel de significación del 5% significa que, en promedio, 5 de cada 100 veces que rechazamos la hipótesis nula estaremos equivocados: V / *F*

Razona la respuesta.

*Ítem 2: Un nivel de significación del 5% significa que, en promedio, 5 de cada 100 veces que la hipótesis nula es cierta la rechazaremos: *V / F*

Razona la respuesta.

[Nota: con * la respuesta correcta]

Los dos ítems son sintácticamente muy parecidos, sin embargo, son completamente diferentes, el segundo de ellos es la definición del concepto de nivel de significación mientras que el primero no lo es. Con la comparación de estas dos expresiones verbales, pretendemos analizar el error de confusión de los dos sucesos, condicional y condicionado, que intervienen en la definición, descrito anteriormente por Birnbaum (1982) y Falk (1986).

Resultados

Comentamos en primer lugar los resultados obtenidos como respuesta a cada uno de los ítems separadamente y después los argumentos que los alumnos han dado como explicación de su respuesta. A continuación llevamos a cabo un análisis conjunto de los dos ítems con el propósito de detectar la coherencia entre las dos respuestas y profundizar así en la compresión del concepto de nivel de significación los alumnos participantes en la investigación.

Respuestas a los ítems

Los resultados están contenidos en la Tabla 1 a continuación.

En el ítem 1 la respuesta mayoritaria, de más de la mitad de los estudiantes, el 53%, es incorrecta. En el ítem 2 la respuesta mayoritaria, también de más de la mitad de los estudiantes, 53.7%, es correcta. Sin embargo, los porcentajes de estudiantes que responden correctamente al ítem 2 y al ítem 1 deberían haber sido semejantes. Aparentemente, la respuesta mayoritaria incorrecta en el ítem 1 expresa el error de confusión entre los dos sucesos condicionales que definen el nivel de significación al que nos hemos referido antes, descrito por Birnbaum (1982) y Falk (1986).

Tabla 1: Frecuencia y porcentajes de la opción elegida a los ítems

Ítems	Correcta	Incorrecta	Blanco	Total
Ítem 1	141 (32.3%)	231 (53%)	64 (14.7%)	436
Ítem 2	234 (53.7%)	131 (30%)	71 (16.3%)	436

Creemos que, en ambos casos, el porcentaje de respuestas correctas no es muy alto mientras que si lo es el de respuestas en blanco lo que parece indicar un alto grado de dificultad en la expresión verbal de este concepto. Aunque estos datos son en si mismos muy reveladores, es necesario hacer un análisis más fino para poder entender mejor la comprensión del nivel de significación conseguida por estos alumnos así como sus concepciones al respecto. Analizamos para ello los argumentos que dan como apoyo a sus respuestas a cada uno de los ítems. A continuación incluimos la categorización de argumentos y los resultados obtenidos en las Tablas 2 y 3.

Categorías de argumentos

La categorización de los argumentos empleados por los estudiantes para apoyar su respuesta a los ítems es única ya que ambos se refieren al mismo concepto. Analizamos primero las respuestas dadas en los dos ítems separadamente y después lo hacemos conjuntamente. El proceso de categorización de las respuestas ha sido muy laborioso y pormenorizado. En primer lugar se recogieron con mucho detalle todas las posibles respuestas de los estudiantes que dieron lugar a una primera clasificación de argumentos con muchas categorías. A continuación, por un proceso de refinamiento sucesivo, se fue reduciendo el número de estas clases atendiendo a los aspectos esenciales determinados en el minucioso análisis de contenido del estudio realizado previamente (Vallecillos, 1994). Finalmente quedaron las siete categorías de argumentos que se describen a continuación, de las que se ofrece, además un ejemplo textual de repuesta de un alumno que hemos incluido en ella para ilustración del lector.

1. *Argumento correcto:* por definición del nivel de significación, como probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta, expresada verbalmente o en forma simbólica α = P(rechazar H_0 | H_0 cierta), empleada en forma consistente con la respuesta al ítem. Por ejemplo, un estudiante responde correctamente al ítem 2 y razona su respuesta con el siguiente argumento:

- *"Por la definición del nivel de significación α = P(rechazar H_0 | H_0 cierta) si $\alpha = 0.05$ significa que rechazaremos la hipótesis nula siendo cierta 5 de cada cien veces".*

2. *Argumento correcto:* por definición del nivel de significación, α = P(rechazar H_0 | H_0 cierta), empleada en forma contradictoria con la respuesta al ítem, esto es, la explicación proporcionada debería haber llevado al estudiante a responder, por ejemplo, Falso, en el ítem y sin embargo ha señalado Verdadero. Por ejemplo, un estudiante da una respuesta incorrecta al ítem 2 y argumenta:

- *"Significa rechazar, en promedio, 5 de cada 100 veces la hipótesis nula siendo cierta".*

3. *Argumento erróneo:* confusión del nivel de significación α con la probabilidad 'a posteriori' de que la hipótesis nula sea cierta, esto es, con P(H_0 cierta | H_0 rechazada) $\neq \alpha$. Por ejemplo, un estudiante responde incorrectamente el ítem 2 y argumenta:

- *"No se trata de rechazar H_0 en un 5% sino de equivocarnos en un 5% cuando la rechazamos".*

4. *Argumento erróneo:* confusión en la definición del nivel de significación α pero conservando en ella la idea de probabilidad condicional. Por ejemplo, algunos estudiantes confunden α con la probabilidad de 'acertar' una vez que se ha aceptado la hipótesis nula, esto es, con $P(H_0 \text{ cierta} \mid H_0 \text{ aceptada}) \neq \alpha$. Una respuesta de este grupo, que responde correctamente al ítem 1, es la siguiente:

- *"Quiere decir que la probabilidad de que hayamos acertado al aceptar H_0 es del 15%".*

5. *Argumento erróneo:* confusión en la definición de α considerándola como una probabilidad no condicional referida a la hipótesis nula, independientemente de que se acepte o se rechace o se la considere cierta o no. Por ejemplo, unos estudiantes consideran α como probabilidad simple de aceptar la hipótesis nula y otros de rechazarla. Una respuesta de esta categoría, de un estudiante que responde incorrectamente al ítem 2, es la siguiente:

- *"Significa que hay una probabilidad del 5% de que H_0 sea rechazada".*

6. *Argumento erróneo:* confusión de α con la probabilidad de error o bien como probabilidad de error en la decisión tomada, sea cual sea ésta y sea cierta o no la hipótesis nula. Por ejemplo, un argumento de un estudiante que responde incorrectamente al ítem 2, es el siguiente:

- *"Lo que significa es que 5 de cada 100 veces nos equivocaremos en la hipótesis aceptada".*

7. *Argumentos difícilmente interpretables.* Están clasificadas aquí las argumentaciones confusas o inoportunas, esto es, que no responden directamente a la cuestión propuesta aunque se refieran a conceptos relativos al contraste de hipótesis.

Análisis de argumentos

En las Tabla 2 están contenidos los resultados obtenidos en el ítem 1 y en la Tabla 3 los correspondientes al ítem 2.

Una primera cuestión llamativa es el hecho de que, de los 436 estudiantes que han respondido el ítem 1, sólo 191 (43.8%) han proporcionado una argumentación explicativa de su respuesta. Esto nos da un 56.2% de respuestas en blanco, que indica un alto grado de dificultad para los estudiantes en la realización de esta tarea.

Un 47.1% en total de los argumentos proporcionados por los estudiantes son correctos, si bien muchos de ellos han argumentado en forma contradictoria con su respuesta al ítem.

Tabla 2: Frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 1

Frecuencia	ITEM 1: ARGUMENTOS							Total
% Fila	1 (C)	2 (C)	3 (E)	4(E)	5 (E)	6 (E)	7 (DI)	Fila
Caminos	6 15.4	11 28.2	2 5.1	8 20.5	2 5.1	6 15.4	4 10.3	39 20.4
Informática	2 25.0	2 25.0		2 25.0	1 12.5		1 12.5	8 4.2
Pedagogía		3 14.3	1 4.8	4 19.0	4 19.0	7 33.3	2 9.5	21 11.0
Psicología	5 14.3	11 31.4	2 5.7	8 22.9		6 17.1	3 8.6	35 18.3
Medicina	10 27.8	10 27.8	6 16.7	3 8.3	2 5.6	2 5.6	3 8.3	36 18.8
Matemáticas	7 31.8	3 13.6		3 13.6	5 22.7	1 4.5	3 13.6	22 11.5
Empresariales	4 13.3	16 53.3	1 3.3	5 16.7	1 3.3		3 10.0	30 15.7
Total Col.	34 17.8	56 29.3	12 6.3	33 17.3	15 7.9	22 11.5	19 9.9	191 100

C: Correcto E: Erróneo DI: Difícil de interpretar

En la columna 3, en donde están clasificadas las respuestas que explicitan la confusión de α con la probabilidad 'a posteriori' de que la hipótesis nula sea cierta una vez que ha sido rechazada, esto es, el intercambio entre los dos sucesos que intervienen en la probabilidad condicional que define el nivel de significación, P(H_0 cierta | H_0 rechazada), aparecen porcentajes bajos en general en todos los grupos de estudiantes, y un 6.3% para el total. Nos fijamos en este tipo de error porque es del que tenemos referencias anteriores en la literatura de investigación, Birnbaum (1982), Falk (1986). Sin embargo, en nuestro estudio ha aparecido relativamente poco, como hemos visto.

El error más extendido entre nuestros estudiantes ha sido el de confundir α con la probabilidad de 'acertar' una vez que se ha aceptado la hipótesis nula, esto es, con P(H_0 cierta | H_0 aceptada) $\neq \alpha$. Los resultados incluidos en la columna 4 de la Tabla 2, suponen un 17.3% de las respuestas de los estudiantes. Estos, aún confundiendo la definición del nivel de significación, conservan sin embargo una característica importante de la misma que es la idea de probabilidad condicional.

El resto de los argumentos erróneos proporcionados por los estudiantes se dan en modestos porcentajes lo que nos indica que tienen una incidencia baja.

En la Tabla 3, están contenidos los resultados correspondientes al ítem 2.

También aquí han abundado las respuestas en blanco, 65.4%, ya que sólo han argumentado su respuesta 151 estudiantes, un 34.6% de los estudiantes que han respondido el ítem 2.

Tabla 3: Frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 2

Frecuencia % fila	ITEM 2: ARGUMENTOS							Total fila
	1 (C)	2 (C)	3 (E)	4 (E)	5 (E)	6 (E)	7 (DI)	
Caminos.	14 38.9	5 13.9	2 5.6	5 13.9	3 8.3	4 11.1	3 8.3	36 23.8
Informática		2 50.0		1 25.0			1 25.0	4 2.6
Pedagogía		1 6.3		1 6.3	3 8.8	8 50.0	3 18.8	16 10.6
Psicología	10 45.5	2 9.1	2 9.1	5 22.7		2 9.1	1 4.5	22 14.6
Medicina	15 42.9	8 22.9	3 8.6	2 5.7	1 2.9	3 8.6	3 8.6	35 23.2
Matemáticas	8 44.4	2 11.1	1 5.6	2 11.1	4 22.2	1 5.6		18 11.9
Empresariales	9 45.0	3 15.0	1 5.0	2 10.0	5 25.0			20 13.2
Total columna	56 37.1	23 15.2	9 6.0	18 11.9	16 10.6	18 11.9	11 7.3	151 100

C: Correcto E: Erróneo DI: Difícil de interpretar

Un 52.3% de los estudiantes ha respondido correctamente al ítem 2, porcentaje ligeramente superior al obtenido en el ítem 1. También aquí el mayor porcentaje obtenido corresponde al mismo argumento erróneo que en el ítem anterior, columna 4 de la Tabla 3, el que expresa la confusión de α con la probabilidad de 'acertar' una vez que se ha aceptado la hipótesis nula, si bien en menor medida, un 11.9% frente 17.3 % anterior.

En lo que se refiere al error de confusión de los condicionales en la definición de α, argumento codificado como 3, también el porcentaje es bajo, 6%, lo que confirma el resultado obtenido en el ítem 1.

En resumen, con mayor o menor incidencia entre los estudiantes de la muestra, sus argumentaciones expresan principalmente los siguientes errores:

Principales errores encontrados:

- Muchos estudiantes confunden a con la probabilidad de 'acertar' en caso de aceptar la hipótesis nula, esto es, de que ésta sea cierta una vez que ha sido aceptada. Este es el error más frecuente encontrado en las respuestas de los estudiantes de nuestra muestra.
- Muchos estudiantes confunden el concepto de nivel de significación a con la probabilidad 'a posteriori' de la hipótesis nula.
- Muchos estudiantes responden simultáneamente verdadero o falso a ambas cuestiones, esto es, son incoherentes. La expresión verbal de la definición de a puede resultar demasiado difícil de interpretar para ellos.
- Muchos estudiantes confunden a con una probabilidad no condicional referida a la hipótesis nula.
- Muchos estudiantes confunden a con una probabilidad de error, cualquiera que sea la decisión tomada y como quiera que sea la hipótesis, verdadera o falsa.

Análisis conjunto de argumentos

Aunque el número de respuestas no es muy grande (191 en el ítem 1, 151 en el ítem 2 y 135 en ambos), una vez analizados separadamente los resultados obtenidos en los dos ítems propuestos, hemos comparado ambos resultados con el fin de estudiar la consistencia de las respuestas a ambos ítems realizando una tabulación cruzada que se recoge en la Tabla 4.

Explicitan el mismo tipo de error de intercambio de los dos sucesos que intervienen en la definición del nivel de significación, argumento codificado como 3, en ambos ítems sólo 3 estudiantes. Estos son los, que al mantener de forma explícita, el mismo tipo de argumentación errónea en ambos ítems podemos considerar 'estables' en su manifestación. Separadamente, por ítems suponen 3 de los 12 que había en el ítem 1 y de los 9 que hubo en el ítem 2, 25% y 33.3% respectivamente. Estos resultados, pues, no señalan este error como el más significativo entre los que afectan al aprendizaje del concepto de nivel de significación.

Se manifiesta con una mayor estabilidad la argumentación errónea codificada como 4, que expresa la confusión de a con la probabilidad de 'acertar' una vez que se ha aceptado la hipótesis nula, esto es, la probabilidad 'a posteriori' de la verdad de la hipótesis nula aceptada, aún manteniendo la idea de probabilidad condicional para ella. Se han obtenido 10 respuestas, que suponen un 30.3% y un 55.5% de las obtenidas, respectivamente, en los ítems 1 y 2.

En total, sumando todas las frecuencias de las casillas correspondientes en la diagonal principal de la Tabla 4, obtenemos 55 estudiantes que dan argumentaciones correctas en ambos ítems y 31 estudiantes que manifiestan un mismo tipo de error en ellas, esto es, que manifiestan un tipo de argumentación errónea estable. Hay 29 estudiantes que dan una argumentación correcta en uno de los ítems e incorrecta en el otro y 20 que manifiestan distintas argumentaciones erróneas en uno y otro ítem, esto es, al menos aparentemente, son inestables en sus argumentaciones. Esta situación nos ha llevado a realizar otra tabulación cruzada de estas argumentaciones.

Tabla 4: Tabla cruzada de argumentos en los ítems 1 y 2

	Frecuencia % de Fila % de Columna	ARGUMENTOS EN EL ITEM 2: 1 (C)	2 (C)	3 (E)	4 (E)	5 (E)	6 (E)	7 (DI)	Total Fila
ARGUMENTOS EN EL ITEM 1	1 (C)	19 76.0 38.0	1 4.0 5.0	2 8.0 28.6	2 8.0 11.8			1 4.0 11.1	25 18.5
	2 (C)	20 45.5 40.0	15 34.1 75.0	1 2.3 14.3	2 4.5 11.8	3 6.8 21.4	2 4.5 11.8	1 2.3 11.8	44 32.6
	3 (E)		2 18.2 10.0	3 27.3 42.9	2 18.2 11.8	2 18.2 14.3	2 18.2 11.1		11 8.1
	4 (E)	4 19.0 8.0	1 4.8 5.0		10 47.6 58.8	1 4.8 7.1	4 19.0 22.2	1 4.8 11.1	21 15.6
	5 (E)	3 25.0 6.0			1 8.3 5.9	5 41.7 35.7	2 16.7 11.1	1 8.3 11.1	12 8.9
	6 (E)	2 15.4 4.0		1 7.7 14.3		2 15.4 14.3	8 61.5 44.4		13 9.6
	7 (DI)	2 22.2 4.0	1 11.1 5.0			1 11.1 7.1		5 55.6 55.6	9 6.7
Total Columna		50 37.0	20 14.8	7 5.2	17 12.6	14 10.4	18 13.3	9 6.7	135 100

C: Correcto E: Erróneo DI: Difícil de interpretar

Podemos observar mejor la estabilidad de las respuestas de los estudiantes cuando estas se clasifican simplemente en correctas o no. En la Tabla 5 podemos ver los resultados obtenidos:

55 estudiantes, un 40.7% del total de los que responden, dan una argumentación correcta en ambos ítems; 51 estudiantes, un 37.7% del total, lo hacen incorrectamente en los dos ítems, aunque manifestando diversos tipos de error y 29, un 21.5% del total responden correctamente en uno de ellos e incorrectamente en el otro.

Tabla 5: Tabla reducida de argumentos en los ítems 1 y 2

	Frecuencia % de Fila % de Columna	ITEM 2: ARGUMENTOS: Correcto	Erróneo	Total fila
ITEM 1: ARGUMENTOS	Correcto	55 79.7 78.6	14 20.3 21.5	69 51.1
	Erróneo	15 22.7 21.4	51 77.3 78.5	66 48.9
Total Columna		70 51.9	65 48.1	135 100.0

Interpretaciones del nivel de significación

Los argumentos dados por los estudiantes nos han permitido conocer las distintas interpretaciones que éstos hacen del concepto de nivel de significación. El análisis de estos argumentos que venimos comentando nos permite clasificar, a modo de resumen, los resultados obtenidos en cuanto a estas distintas interpretaciones del concepto de nivel de significación que manifiestan los estudiantes en sus respuestas. Las hemos separado en tres grandes grupos: correctas, incorrectas pero conservando la idea de probabilidad condicional e incorrectas, asociadas a la probabilidad de error en distintas formas. En la Tabla 6 están contenidas las frecuencias obtenidas en las distintas interpretaciones en los dos ítems analizados.

a) Interpretaciones de α correctas

Son aquellas en las que se interpreta el nivel de significación como probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta. Hemos encontrado dos variantes:

I_1: Se emplea la definición en forma consistente con la respuesta (V/F) al ítem.

I_2: Se emplea la definición en forma contradictoria con la respuesta (V/F) al ítem.

b) Interpretaciones de α incorrectas pero conservando la idea de probabilidad condicional

Hemos encontrado las siguientes:

I_3: Nivel de significación como probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta una vez que se ha rechazado, esto es, como probabilidad de error en la decisión en caso de rechazo.

I_4: Confusión del nivel de significación con la probabilidad de haber 'acertado' al aceptar la hipótesis nula.

I_5: Nivel de significación como probabilidad de que la hipótesis nula sea falsa una vez que se ha aceptado, esto es, como probabilidad de error en la decisión en caso de aceptación.

I_6: Nivel de significación como probabilidad de que la hipótesis nula sea falsa una vez que se ha rechazado, esto es, como probabilidad de acierto en la decisión en caso de rechazo.

I_7: Nivel de significación como probabilidad de aceptar la hipótesis nula siendo falsa, esto es, confusión con el error de tipo II, β.

c) Interpretaciones de α como probabilidad no condicional referida a la hipótesis nula

I_8: Nivel de significación como probabilidad simple de aceptar la hipótesis nula.

I_9: Nivel de significación asociado con el rechazo de la hipótesis nula falsa.

I_{10}: Nivel de significación como probabilidad de que la hipótesis nula sea falsa.

I_{11}: Nivel de significación como probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta.

Tabla 6: Frecuencias de interpretaciones del nivel de significación

INTERPRETACIONES	ITEM 1	ITEM 2
I_1: $\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta})$ (1)	34	56
I_2: $\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta})$ (2)	56	23
I_3: $\alpha = P(H_0 \text{ cierta} \mid H_0 \text{ rechazada})$	12	9
I_4: $\alpha = P(H_0 \text{ cierta} \mid H_0 \text{ aceptada})$	3	3
I_5: $\alpha = P(H_0 \text{ falsa} \mid H_0 \text{ aceptada})$	22	3
I_6: $\alpha = P(H_0 \text{ falsa} \mid H_0 \text{ rechazada})$	2	1
I_7: $\alpha = P(\text{aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$	6	11
I_8: $\alpha = P(\text{aceptar } H_0)$	1	1
I_9: $\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \text{ falsa})$	10	8
I_{10}: $\alpha = P(H_0 \text{ falsa})$	1	1
I_{11}: $\alpha = P(H_0 \text{ cierta})$	3	6
I_{12}: $\alpha = P(\text{error en la decisión})$	11	12
I_{13}: $\alpha = P(\text{error})$	10	6
I_{14}: Confusión de α con $1-\alpha$	1	
I_{15}: Otras interpretaciones	19	11
Total	191	151

(1): Consistente con la opción elegida
(2): Inconsistente con la opción elegida

d) Interpretaciones de α como probabilidad de error

I_{12}: Nivel de significación como probabilidad simple de error en la decisión tomada.
I_{13}: Nivel de significación como probabilidad de error.

e) Otras interpretaciones

I_{14}: Confusión de α y $1-\alpha$
I_{15} Interpretaciones confusas o inoportunas.

Concepciones sobre el concepto de nivel de significación

Consideramos que estas distintas interpretaciones que los estudiantes hacen del concepto de nivel de significación, son la manifestación de las concepciones (Artigue, 1990) que estos tienen sobre el correspondiente concepto, que podemos sintetizar como sigue:

Concepción correcta del nivel de significación, como probabilidad condicional de rechazar la hipótesis nula siendo cierta, si bien en algunos casos se aplica en forma contradictoria en la respuesta (V/F) del ítem correspondiente. Es la concepción más frecuente con un total de 90 estudiantes, 47.1% del total de respuestas en el ítem 1, y 79, 52.3% del total de respuestas en el ítem 2. Incluimos aquí las interpretaciones I_1 e I_2.

Además de esta concepción correcta del nivel de significación, hemos encontrado tres más incorrectas en las argumentaciones de los estudiantes que han tomado parte en nuestra investigación:

Nivel de significación como probabilidad condicional referida a una de las hipótesis: Incluimos aquí a los estudiantes que conservan la idea de probabilidad condicional pero intercambian los sucesos condicionado o condicionante o ambos. Aquí están incluidos los que manifiestan la confusión previamente descrita por (Falk, 1986) como caso particular. Incluimos las interpretaciones de I_3 a I_7. Tenemos 45 casos, 23.6% del total de respuestas en el ítem 1 y 27, el 17.9% del total de respuestas en el ítem 2, 72 en total.

Nivel de significación como probabilidad simple de la hipótesis nula: Muchos estudiantes interpretan el nivel de significación como una probabilidad no condicional de la hipótesis nula, tanto en el caso de aceptación como de rechazo. Incluimos las interpretaciones de I_8 a I_{11}. Hemos encontrado 15 casos, 7.9% del total de repuestas en el ítem 1 y 16 casos, 10.6% de las respuestas en el ítem 2, 31 en total.

Nivel de significación como probabilidad de error: Incluimos aquí las respuestas que se refieren a a como la probabilidad de error, tanto si se asocia a la hipótesis nula como a la alternativa y tanto si ésta es aceptada como rechazada. Incluimos las interpretaciones I_{12} e I_{13}. Hemos obtenido 21 casos, 11% en el ítem 1 y 18, 11.9% en el ítem 2.

En resumen, hemos encontrado una gran variedad de interpretaciones del nivel de significación en las respuestas de los estudiantes, la mayor parte de ellas incorrectas. Estas manifestaciones nos permiten aproximarnos a las concepciones que tienen del concepto de nivel de significación. A continuación resumimos las principales concepciones incorrectas encontradas en el análisis de los argumentos descritos anteriormente:

Principales concepciones erróneas sobre el concepto de nivel de significación:

- El nivel de significación, α como probabilidad 'a posteriori' de la hipótesis nula o la alternativa.
- El nivel de significación, α como probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera una vez que ha sido rechazada.
- El nivel de significación, α como probabilidad condicional ya sea de la hipótesis nula o de la alternativa.
- El nivel de significación, α como probabilidad no condicional de la hipótesis nula.
- El nivel de significación, α como la probabilidad de error en un test de hipótesis.

EL INVESTIGADOR Y EL TÉCNICO ESTADÍSTICO

Por último, creemos conveniente llamar la atención de los investigadores que trabajan en el campo de la educación sobre un aspecto no siempre tenido en cuenta. Con frecuencia, la investigación educativa comporta el análisis de datos y el uso de técnicas estadísticas fuera del interés propio del investigador y que requieren el concurso técnico de un profesional estadístico. En este caso el colaborador estadístico deberá 'comprender' bien el problema de investigación, buscar la solución técnica más adecuada y proporcionar la respuesta en un lenguaje 'inteligible' al investigador. Sin embargo, aún en las mejores condiciones de comunicación entre el investigador y el técnico estadístico, el problema de investigación sólo tiene sentido completo para el investigador que es el que tiene que dar respuesta, con la ayuda técnica precisa, a 'su' problema de investigación. Una reflexión sobre el tema puede verse en Batanero, Godino y Vallecillos (1992).

CONCLUSIONES

Sin pretender elevar a categoría la metodología empleada en la investigación de referencia y otras realizadas posteriormente con un esquema metodológico basado total o parcialmente en el descrito, hemos comprobado que ésta puede ser muy útil para la obtención de resultados en el campo concreto de la investigación en Educación Matemática. Ha resultado adecuada para la consecución de los objetivos previstos y los múltiples procedimientos de obtención de los datos, las variables analizadas, los análisis estadísticos empleados y los resultados obtenidos permiten considerarla útil para la investigación de procesos de enseñanza y aprendizaje en otros contextos y problemas educativos.

Queremos terminar haciendo una llamada a la sensatez y la honestidad en la investigación educativa utilizando palabras de Fox (1981): *"... para que la investigación en ciencias sociales alcance resultados significativos, tiene que ser un proceso racional. Tenemos que saber por qué hacemos lo que hacemos, y por qué lo hacemos como lo hacemos, y también tenemos que saber qué formas de hacerlo hemos tenido en cuenta y cuáles hemos rechazado y por qué",* (pág. 23).

AGRADECIMIENTOS

A los Proyectos de Investigación PB97-0827 y BS02000-1507, financiados por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, España.

REFERENCIAS

Afifi, A. A. y Azen, S. P. (1990). *Computer-aided multivariable analysis.* New York: Van Nostrand Co.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2-3), 241-286.

Batanero, C.; Godino, J. D. y Vallecillos, A. (1992). El análisis de datos como útil y como objeto en Didáctica de la Matemática. *Educación Matemática*, 4(1), 46-53.

Birnbaum, I. (1982). Interpreting Statistical Significance. *Teaching Statistic,* 4, 24-27.

Bisquerra, R. (1989). *Introducción conceptual al análisis multivariable. Un enfoque informático con los paquetes SPSS-X, BMDP, LISREL y SPAD.* Barcelona: PPU.

Falk, R. (1986). Misconceptions of Statistical Significance. *Journal of Structural Learning,* 9, 83-96.

Fox, J. D. (1981). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: Editorial Universidad de Navarra, S. A.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14(3), 325-355.

Henkel, R. (1976). *Test of Significance.* Beverly Hills: Sage Pub.

Thorndike, E. L. (1989). *Psicometría Aplicada.* México: Limusa.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1995). Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(3), 53-81.

Vallecillos, A. (1996a). Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas. Granada: Comares.

Vallecillos, A. (1996b). Students' conceptions of the logic of hypothesis testing. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 4, 43-61.

Vallecillos, A. (1977). El papel de las hipótesis estadísticas en los contrastes: concepciones y dificultades de aprendizaje. *Educación Matemática,* 9(2), 5-20.

Vallecillos, A. (1998a) Experimental study on the learning of the significance level concept. In: Pereira-Mendoza, L.; Lua Seu Kea; Tang Wee Kee & Wing-Keung Wong (Eds.): *Proceeding of the Fifth International Conference on Teaching of Statistics,* Vol. 3, 1475-1476. Singapore: ISI.

Vallecillos, A. (1998b). Research and Teaching of Statistical Inference. In: International Conference on the Teaching of Mathematics, pp. 296-298. John Wiley & Sons, Inc. Publishers.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testing hypotheses. Ponencia Invitada, Topic IPM 58. Proceedings of the 52nd Session of the International Statistical Institute, Vol. 2, Tome LVIII, pp. 201-204. The Netherlands: ISI.

Vallecillos, A. (en revisión). Learning from experience: the level of significance concept. *Hiroshima Journal of Mathematics Education.*

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1996a). Conditional probability and the level of significance in the tests of hypotheses. In: Gutiérrez, A. y Puig, L. (Eds.): *Proceedings of the 20 PME*, Vol. 4, pp. 371-378. Valencia.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1996b). Factors affecting student' interpretation of the significance level in tests of hypotheses. *Proceedings of the ICME-8*, p. 135. Sevilla.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(1), 29-48.

Wartofsky, M. W. (1976). *Introducción a la filosofía de la Ciencia.* Madrid: Alianza Universidad.

METODOLOGIAS DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A IMPORTÂNCIA DA DIVERSIDADE

JOSÉ MANUEL MATOS

Universidade Nova de Lisboa

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

METODOLOGIAS DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A IMPORTÂNCIA DA DIVERSIDADE

❧

JOSÉ MANUEL MATOS
Universidade Nova de Lisboa

A Educação Matemática pode aspirar a possuir teorias, conceitos, leis, através dos quais se possa prever o acto educativo com o mesmo grau de precisão com que o engenheiro constroi uma ponte, ou que o físico calcula a trajectória de um satélite? Será que um dia conseguirá, seja com uma bateria de testes, seja com outros instrumentos mais ou menos sofisticados, prescrever modos de ensino adaptados a alunos específicos? Ou prever com exactidão razoável as respostas de qualquer aluno a uma situação matemática? São questões impossíveis de responder com certeza nos tempos actuais. Suspeito, no entanto, que muitos educadores matemáticos acreditam na impossibilidade efectiva de tornar o conhecimento desenvolvido pela sua área de saber da mesma natureza do de outras. A Educação Matemática, como outras áreas da Educação, partilha das características das Ciências Sociais e Humanas, e aquilo que, na nossa área, formos aceitando como certo terá sempre um carácter (alguns diriam um estigma) transitório e contextualizado porque o próprio objecto de estudo não é estático nem objectivo mas antes dinâmico e subjectivo.

Significará então que é impossível o desenvolvimento de um conhecimento fiável em Educação Matemática? Acredito que a esmagadora maioria dos educadores matemáticos responderá não a esta pergunta, escudados nos cuidados que colocaram no desenvolvimento das investigações em que participaram, nas teorizações e nas aplicações práticas conseguidas a partir dos resultados desses trabalhos e na significância das interacções sobre todos estes aspectos efectuadas com outros investigadores. A viabilidade de um conhecimento fiável em Educação Matemática é atestada pelo facto de ser possível o estabelecimento de zonas de intersubjectividade nas quais se confrontam conceitos, teorias, enquadramentos ou resultados. Um exemplo dos momentos durante os quais se desenvolvem estas zonas de subjectividades partilhadas é precisamente no decorrer de seminários de investigação.

A discussão sobre metodologias de investigação que me preocupa neste texto constitui precisamente um dos modos pelos quais a comunidade dos investigadores procura reflectir sobre formas como o conhecimento pode ser desenvolvido de um modo que o torne aceitável no seio dessa comunidade, perante outras comunidades científicas e perante a sociedade em geral. Como afirma Vallecillos[1], sendo

[1]ver o seu artigo neste livro.

um método "qualquer conjunto de acções ordenadas com as quais pretendemos conseguir um resultado", uma metodologia é "a aplicação coerente de um método". Entendo que é a busca de critérios para tornar esta coerência aceitável entre pares que deve estar no centro da realização de debates sobre metodologias de investigação. Estes critérios são estabelecidos através de intercâmbios mais ou menos formais que vão construindo entendimentos intersubjectivamente partilhados. Será sobre essa coerência que assentará, em última análise, as bases da fiabilidade e da credibilidade do trabalho dos investigadores.

A reflexão sobre metodologias de investigação no campo de Educação Matemática, em particular, deve tomar em conta as especificidades desta área do saber. Recordo a caracterização efectuada por Hans-Georg Steiner em 1984, e que retomo aqui na versão apresentada por Juan Godino (1991), sobre as relações entre a Didáctica da Matemática e outras disciplinas e sistemas (figura 1). Neste diagrama podemos observar como a Educação Matemática se encontra rodeada por múltiplas áreas, desde a Psicologia, a Sociologia, as Ciências da Educação, e outras, terminando na própria Matemática.

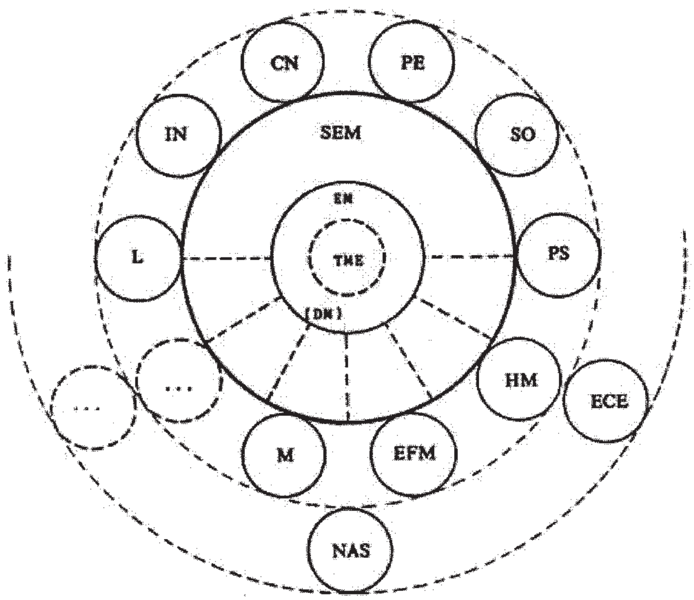


Figura 1

A Educação Matemática é uma área do saber aberta às influências de todas estas áreas e onde encontramos reflexos de quase todos os debates que se travam nos diversos campos de conhecimento. As dicotomias individual / social, processo / produto, interno / externo, objectivo / subjectivo, ou outras mais específicas de certos campos, como professor / investigador, por exemplo, estimulam múltiplas discussões entre os educadores matemáticos e são indispensáveis para que o nosso campo seja aberto, vivo, interveniente e relavante no mundo de hoje. A Educação Matemática, no entanto, não se esgota neste tecido de ideias, pois possui uma especificidade própria, aquela que lhe é dada pela sua preocupação central no estudo dos modos como se ensina e se aprende matemática.

O desenvolvimento e o uso de metodologias de investigação em Educação Matemática espelha esta dualidade de "motores de desenvolvimento". Por um lado, reflecte uma multiplicidade de influências provindas das metodologias predominantes noutras áreas, como as abordagens quantitativas ao gosto da maioria dos sociólogos, ou dos psicólogos anglo-saxónicos, entre outros, ou as qualitativas preferidas de antropólogos ou de correntes psicológicas europeias. Mas, derivado da natureza própria do saber matemático, não tem deixado de criar alternativas específicas. Os quatro textos que comentarei em seguida reflectem, segundo penso, precisamente estas multiplicidades e especificidades.

Comentarei os quatro textos em análise segundo dois pontos de vista. Procurarei, em primeiro lugar, fazer corresponder a cada texto um paradigma especialmente relacionado com as metodologias de investigação. Procurarei, em particular contrastar os modos como cada investigação se relaciona com as respectivas metodologias. Tratar-se-á de uma primeira leitura, que estabelecerá pontos de contacto com debates que extravasam a Educação Matemática. Usarei, em segundo lugar, uma visão internalista, procurando estabelecer correspondências com o que Alan Bishop designou de tradições de investigação em Educação Matemática. Em qualquer dos casos a minha preocupação estará centrada em fazer ressaltar as zonas em que cada abordagem é mais frutuosa, bem como identificar áreas não estudadas por nenhuma delas.

Devo, desde já, prevenir o leitor das limitações inerentes a este trabalho. A tarefa de comentar textos de uma comunidade da qual não faço parte é arriscada. Como *outsider*, poderei, eventualmente, aportar perspectivas não usuais aos educadores matemáticos espanhóis. Mas poderei igualmente entender de forma muito parcial os textos que aqui analiso. Afinal estes trabalhos devem ser compreendidos em contexto, como etapas de um percurso de linhas de investigação mais complexas, com um passado, um presente e um futuro, factores que desconheço e que apenas posso vislumbrar, mal ou bem, da leitura dos textos em análise. Significa isto que o meu trabalho poderá eventualmente valer mais pela caracterização de problemas globais e pelas interrogações que a partir daí coloca ao leitor e menos pela pertinência dos comentários a textos específicos. Se neste processo cometer incorrecções de apreciação, peço antecipadamente desculpas aos meus colegas (*compañeros*) espanhóis que tão amavelmente me receberam.

OS PARADIGMAS DAS METODOLOGIAS DE INVESTIGAÇÃO

Os quatro textos em análise estabelecem relações distintas com os paradigmas das metodologias de investigação respectivos que passarei a analisar seguindo uma ordem alfabética.

O trabalho de Luis Carlos Contreras discute a utilização de uma metodologia qualitativa de recorte interpretativo e efectua uma descrição detalhada das distintas etapas por que passa um estudo deste tipo. É de realçar o cuidado posto pelo investigador ao reflectir pormenorizadamente sobre os passos que efectuou para gerar *teoria substantiva*, como diriam Glaser e Strauss (1967). Metodologias qualitativas deste tipo têm a sua origem nas ciências sociais, em especial na Antropologia, e têm vindo a ser usadas em Educação Matemática quando se pretende obter descrições densas (*thick descriptions*) do objecto de estudo. A sua inspiração provem da fenomenologia e do interaccionismo simbólico e valoriza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais (Bogdan e Biklen, 1999). O uso desta metodologia constitui um exemplo do modo como um quadro teórico desenvolvido num contexto externo pode ser aplicado à Educação Matemática.

O trabalho de Angel Gutiérrez tem características muito distintas. Trata-se de uma reflexão sobre o aprofundamento de uma *teoria interna*[2], isto é, de um corpo teórico desenvolvido por educadores matemáticos que visa uma adequação a problemas do ensino e da aprendizagem da Matemática. O cen-

[2] tradução do termo "home-grown theories" usado pela primeira vez no contexto da Educação Matemática por Jeremy Kilpatrik em 1981 (referido em Steiner, 1984).

tro do seu texto é a reflexão sobre os modos de desenvolver estratégias de investigação quando o educador matemático é confrontado com a insuficiência dos quadros teóricos de que dispõe, envolvendo num caso a alteração de quadros teóricos pré-existentes – a teoria de van Hiele –, e noutro – a demonstração matemática – a participação no desenvolvimento de um quadro teórico em construção que recolhe contribuições sucessivas de diversos investigadores. Este texto configura uma análise de cariz teórico com o educador matemático procurando reflectir sobre a prática investigativa dos casos apresentados e produzir teoria, desta vez *teoria formal*, seguindo Glaser e Strauss (1967).

O texto de Pilar Orús Báguena apresenta algumas semelhanças, mas também algumas diferenças, em relação ao anterior. Temos igualmente em pano de fundo os esforços de educadores matemáticos, neste caso, participantes essencialmente de influência francófona, para desenvolver enquadramentos adequados à especificidade do seu campo. Trata-se pois de uma teoria interna. Mas, enquanto que no caso anterior o nascimento das teorias citadas ocorreu num confronto com a prática lectiva (teoria de van Hiele) ou decorrendo de um processo de aperfeiçoamento conceptual que se procura adequar ao estudo de processos empíricos (demonstração), neste caso foi o confronto com teorias generalistas sobre educação que gerou a necessidade de afirmação de uma Didáctica da Matemática, que envolvesse, como afirma Chevallard (1991), não só o professor e o aluno, mas, de um modo muito particular e muito marcante, a especificidade do conhecimento matemático.

Com o último texto, da responsabilidade de Angustias Vallecillos Jiménez, regressamos de novo à utilização de paradigmas exteriores, neste caso o que se costuma designar por metodologias quantitativas, para a elucidação de fenómenos do âmbito da educação matemática. A autora reflecte sobre os cuidados a ter nas várias etapas de uma investigação deste tipo, confrontando implicitamente o paradigma de investigação quantitativo com as concepções de estudantes universitários sobre conceitos chave deste paradigma.

Caracterizarei as diferenças entre os textos comentados segundo dois vectores que condenso no quadro seguinte. O primeiro relaciona-se com a origem do paradigma de investigação referido em cada um dos textos. Como já referi, ela é interna em dois casos, embora na sua génese estejam abordagens distintas e no caso de Gutièrrez se trate da própria formulação do paradigma, e externa nos outros dois, também aqui também com uma génese muito distinta: a Antropologia e a Sociologia num caso, e a Estatística no outro. O segundo vector realça os distintos modos como cada um dos trabalhos se relaciona com os paradigmas apresentados. Quer no caso de Contreras, quer no de Valencillos, os educadores matemáticos fazem uso de um paradigma de investigação que lhes é exterior e naturalmente adoptam uma relação que caracterizaria como essencialmente instrumental. Não se procura intervir sobre os paradigmas, mas antes utilizá-los como instrumentos fiáveis para a descrição, para a interpretação, ou para a inferência, conforme o caso. Daí o cuidado enfatizado na escolha da amostra, na formulação de hipóteses e na escolha de procedimentos estatísticos adequados, no caso de Valencillos, ou na análise baseada nos significados intrínsecos ao participante e na formulação de teoria substantiva, no caso de Contreras. O sucesso das investigações está aqui decisivamente relacionado com um cuidado especial com a boa execução destas opções processuais. Orúz adopta uma posição distinta, e enquadra os fenómenos observados nas compreensões possibilitadas pelo enquadramento teórico escolhido. A multiplicidade de trabalhos realizados neste paradigma garantem uma coerência que estrutura os resultados. Tal coerência é difícil exigir no caso de Gutiérrez, que se debruça sobre quadros teóricos mal definidos e ainda em construção. Daí a necessidade deste último de adoptar uma postura de questionamento e problematização das teorias objecto do seu estudo.

	ORIGEM DO PARADIGMA	RELAÇÃO COM O PARADIGMA
Luis Carlos Contreras	Antropologia e Sociologia	Instrumental
Angel Gutiérrez	Teoria interna Paradigma em construção	Problematização e questionamento
Pilar Orús Báguena	Teoria interna	Adaptação, confirmação
Angustias Vallecillos Jiménez	Estatística	Instrumental

Estes textos espelham de uma forma abrangente as diversas situações que os educadores matemáticos enfrentam ao efectuar investigações: desde trabalhos que se baseiam em quadros teóricos estáveis até os que pretendem contribuir para a formulação dos próprios quadros teóricos. Vimos também como são estabelecidos pontos de contacto entre a Educação Matemática e diversas áreas de saber. Nas quatro investigações em análise é possível observar que esta multiplicidade de influências se reflecte, não apenas nos pontos de vista a partir do qual o fenómeno educativo é observado e interpretado, mas também modelam de forma decisiva as características dos trabalhos de investigação. Se a utilização consistente de um quadro teórico permite obter compreensões ou explicações coerentes, a utilização de diferentes quadros teóricos permite completar a compreensão dos fenómenos. Fica, no entanto, por encontrar os modos pelos quais o campo dos educadores matemáticos pode integrar contribuições cujos fundamentos apresentam um tal grau de diversidade. Fica mesmo a dúvida se, a exemplo de muitas outras áreas de saber, o nosso campo não caminhará para uma especialização cada vez maior, propiciadora de compreensões específicas de grande recorte técnico, mas incapaz de gerar entendimentos abrangentes. Talvez este caminho seja uma inevitabilidade, exigindo, por seu lado, uma atitude integradora de saberes dos educadores matemáticos.

TRADIÇÕES DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Alan Bishop, num texto de 1992 retomado em 1997, chama a atenção para uma outra dimensão segundo a qual se podem perspectivar os trabalhos de investigação em Educação Matemática e que designa de *Tradições de investigação*. Segundo ele, "uma tradição de investigação é muito diferente de um paradigma de investigação. Não escolhemos uma tradição de investigação como poderíamos escolher um paradigma de investigação. É-se parte dela como resultado do processo de ensino[3], da educação, da base cultural e da formação em investigação" (1992, p. 712). Bishop (1992) aplica este construto pela primeira vez à caracterização das diferentes tradições de investigação presentes no primeiro congresso internacional de educadores matemáticos, ICME 1, que decorreu em 1969 em Lyons, França, e mais

[3] "upbringing" no original.

tarde como pano de fundo para uma reflexão sobre a relação entre a investigação em Educação Matemática e a prática educativa (1997). Decidi usar heuristicamente o conceito de tradição de investigação para observar de um ponto de vista distinto os quatro textos em discussão, dado o carácter fluido e impreciso destas tradições, mas simultaneamente muito mais tenaz e persistente do que as construções racionais associadas aos paradigmas de investigação que referi na secção anterior.

Bishop (1992) propõe que se manifestaram três tradições de investigação no ICME 1. A primeira, que denominou de *tradição pedagógica*, foi representada pelas intervenções de Emma Castelnuovo, Max Beberman e valorizavam o papel do professor reflexivo sobre a sua prática. De um modo geral, estas intervenções procuravam divulgar o saber exemplar de alguns práticos e dos seus métodos de ensino. A segunda, a *tradição do cientista empírico*, personificada por Ed Begle, enfatizava os métodos pelos quais a investigação é levada à prática, propondo a adopção de processos semelhantes aos usados nas ciências físicas e naturais, tornando a Educação Matemática numa ciência empírica. A terceira e última tradição, a *tradição do filósofo escolástico*, seguida por Willy Servais e Hans-Georg Steiner, baseava-se na análise, na teorização racional e no criticismo, sendo o mundo escolar visto como uma manifestação imperfeita de uma situação educativa teórica. A força desta tradição repousa no modo rigoroso como as suas posições teóricas são argumentadas. O quadro seguinte resume as diferenças entre estas tradições salientadas por Bishop (p. 713) segundo três componentes: o propósito da inquirição, a função da evidência e a função da teoria.

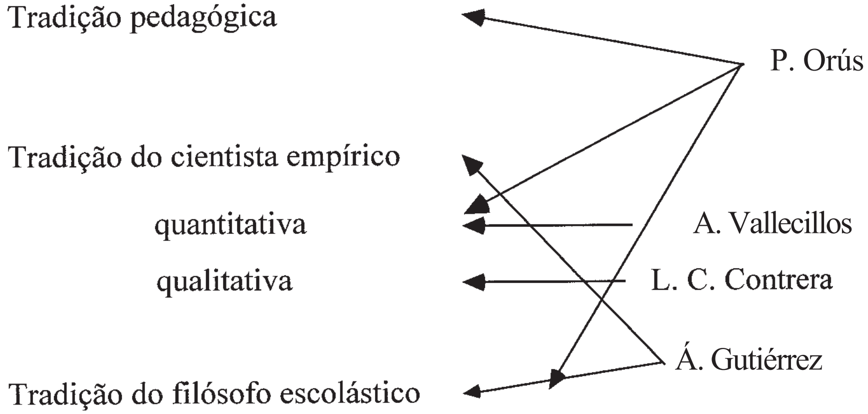
Tradição	Propósito da inquirição	Função da evidência	Função da teoria
Tradição pedagógica	Melhoramento directo do ensino	Fornecer comportamentos de alunos selectivos e exemplares	Saber acumulado e partilhado de professores peritos
Tradição do cientista empírico	Explicação da realidade educativa	Dados objectivos, oferecendo factos a serem explicados	Explicativa, testada em confronto com os dados
Tradição do filósofo escolástico	Estabelecer uma posição teórica rigorosamente argumentada	Supostamente conhecida ou a ser desenvolvida	Situação idealizada para a qual a realidade educativa deverá tender

Penso que cada uma destas tradições possui preocupações que se revelam centrais e que, de certo modo, se destacam numa visão de conjunto. Na tradição pedagógica o centro está na *intervenção* exemplar sobre o processo educativo. Na tradição do cientista empírico o centro está no *rigor metodológico* como forma de obter conhecimento seguro, fiável e reproduzível. Por último, na do filósofo escolástico, o centro está na *ideologia*.

Desde 1969 verificaram-se naturalmente mudanças que alteram o quadro anterior. A primeira mudança que destaco é a incorporação de metodologias de investigação-acção, com consequências em especial para a tradição pedagógica. Segundo esta metodologia, continua-se a procurar uma alteração dos processos de ensino, já não através da disseminação de abordagens exemplares, como o fazia aquela tradição, mas antes através da reflexão e acção sobre a prática por parte de professores procurando intencionalmente alterar essa mesma prática. A segunda mudança ocorre no seio da tradição do cientista empírico onde assistimos a um cisma que caracterizo simplisticamente como a separação entre abordagens quantitativa e qualitativa, separação essa, que é bem mais do que uma distinção entre o numérico e o descritivo, centrando-se sobretudo sobre distintas opções filosóficas e éticas. Uma terceira mudança é o aparecimento recente de uma perspectiva crítica perante o acto educativo que vem problematizar as intenções dos trabalhos produzidos segundo a tradição pedagógica, mas questiona sobretudo a tradição do filósofo escolástico.

Tentarei seguidamente posicionar os quatro trabalhos em análise em relação com as três tradições. Tal como Bishop afirma (1997), a maior parte dos trabalhos de investigação actuais raramente podem ser enquadrados numa determinada tradição e normalmente podem ser detectados indícios de influências múltiplas. O mesmo acontece no caso presente, como veremos. Já anteriormente alertei o leitor para a falibilidade inerente à caracterização que tenho vindo a empreender, mas não me parece excessivo reforçar de novo o aviso. O exercício a que me estou a propôr é pessoal, tem sobretudo um valor heurístico, um método para encontrar linhas de força gerais, e, pelas razões que já expus, não pretende (não pode sequer pretender) esboçar uma análise profunda de cada texto.

Dos quatro trabalhos, dois posicionam-se claramente. O texto de Luis Carlos Contreras e o de Angustias Vallecillos situam-se na tradição do cientista empírico, embora em posturas opostas, o primeiro subscrevendo uma vertente qualitativa e a segunda uma quantitativa. Os outros dois trabalhos incorporam fortes preocupações de caracter teórico seguindo uma tradição do filósofo escolástico. No caso de Ángel Gutiérrez trata-se de problematizar modos de teorização, e no de Pilar Orús procura-se contribuir para um corpo teórico bem estabelecido. Mas os dois trabalhos manifestam também uma forte ligação a uma base empírica, estabelecendo assim, simultaneamente, uma relação com a tradição do cientista empírico. Este último trabalho é ainda influenciado por uma preocupação com o desenvolvimento de processos de ensino inovadores na linha da tradição pedagógica. As relações que esbocei entre os quatro trabalhos e as três tradições está sintetizada na figura seguinte.



EM CONCLUSÃO

Os trabalhos aqui apresentados mostram-nos a Educação Matemática como um campo de conhecimento aberto, quer no sentido em que incorpora saberes exteriores como modo de construir um saber adequado ao seu objecto de estudo (Contreras e Valencillos), quer enquanto área em evolução, na qual se procura consolidar enquadramentos já adquiridos (Orúz) ou caminhar em direcções novas (Gutiérrez).

Ficaram, no entanto, zonas que não foram discutidas. A primeira que destaco é uma problematização sobre a relação dos investigadores com os outros interessados no acto educativo: os alunos, os professores e os pais, em primeiro lugar, mas também o resto da comunidade científica e mesmo a sociedade no seu conjunto, pois o conhecimento científico é hoje interpelado por uma sociedade mais exigente. Ficou, em segundo lugar, por apresentar um outro trabalho que problematizasse sobre os modos como podemos (ou não) fazer face a uma diversidade de paradigmas e tradições distintos ou mesmo contraditórios. Será possível estabelecer uma racionalidade no nosso campo? Será sequer viável a busca de zonas de intersubjectividade que nos permitam formular entendimentos parcelares? E no caso particular das metodologias de investigação será possível desenvolver critérios consensuais? Estou em crer que sim, e que, tal como em outras áreas de saber, será possível construir ilhas de racionalidade partilhada que, embora admitindo perspectivas mais ou menos radicalmente distintas, estimulem o desenvolvimento de "conhecimento fiável em Educação Matemática" com que iniciei este comentário.

REFERÊNCIAS

Bishop, A. J. (1992). International perspectives on research in mathematics education. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 710-723). Nova Iorque: Maxwell Macmillan.

Bishop, A. J. (1997). Research, effectiveness, and the practitioners' world. Em A. Sierpinska e J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (Vol. 1, pp. 33-45). Dordrecht: Kluwer.

Bogdan, R. C. e Biklen, S. K. (1999). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2ª ed.). Paris: La Pensée Sauvage.

Glaser, B. G., e Strauss, A. L. (1967). *The discovery of Grounded Theory. Strategies for Qualitative Research*. Nova Iorque: Aldine Publishing Company.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoria de la Didáctica de la Matemática. Em A. Gutiérrez Rodríguez (Ed.), *Área de conocimiento. Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Madrid: Sintesis.

Steiner, H.-G. (1984). Theory of Mathematics Education (TME). Em H.-G. Steiner e outros (Ed.), *Theory of Mathematics Education (TME).* (pp. 16-32). Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

DEBATE DEL SEMINARIO II: METODOLOGÍA

ENRIQUE DE LA TORRE

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

DEBATE DEL SEMINARIO II: METODOLOGÍA

❧

ENRIQUE DE LA TORRE

El segundo seminario, bajo el epígrafe *'Metodología'*, fue coordinado por Enrique de la Torre, de la Universidad de A Coruña. Cuatro investigadores presentaron sendas ponencias, con objeto de debatir sobre las metodologías que implementan distintos enfoques de investigación.

El primero ponente fue Luis Carlos Contreras, de la Universidad de Huelva, que habló sobre *"Un estudio cualitativo de corte interpretativo en el ámbito del pensamiento del profesor de secundaria"*. Durante unos 25 minutos, hizo una síntesis del proceso de una investigación cualitativa de corte interpretativo, que tenía por objeto analizar las concepciones y creencias del profesor, poniendo el énfasis en la elaboración de medios para obtener, interpretar y analizar la información.

El segundo ponente fue Ángel Gutiérrez, de la Universidad de Valencia, quien presentó el trabajo *"Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles"*. Su intervención fue una reflexión sobre la problemática que surge cuando, al planificar o realizar una investigación, el investigador se da cuenta de que los marcos teóricos pertinentes existentes no cubren sus necesidades. Puso como muestra dos ejemplos de investigaciones en las que el autor tuvo que elaborar un nuevo marco teórico porque los existentes eran, o bien inadecuados, o incompletos.

La tercera ponencia la presentó Pilar Orús, de la Universidad Jaume-I, con el título *"Análisis de datos e investigación en Didáctica de la Matemática. Una aproximación desde la teoría de situaciones"*. La exposición se dividió en dos partes, en la primera presentó algunos aspectos característicos de la utilización del análisis de datos en la teoría de situaciones. La segunda parte discurrió con la descripción de un ejemplo de funcionamiento del análisis de datos en situación escolar: las dificultades de una maestra cuando en el aula pretende realizar tareas de clasificación.

La cuarta ponencia fue elaborada por Angustias Vallecillos, de la Universidad de Granada, con el título "*Cuestiones metodológicas en la investigación educativa*". Realizó una exposición de lo que se puede llamar 'método estadístico', aplicable como 'modelo' en la investigación educativa en general. Como ejemplo de su funcionamiento eligió los resultados obtenidos en una investigación sobre la valoración comprensiva y sistemática de las concepciones, dificultades y errores de los estudiantes universitarios en el aprendizaje de un concepto clave en los contrastes de hipótesis como es el nivel de significación.

A las cuatro ponencias siguió la réplica de José Manuel Matos, invitado de la Sociedad de Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación (SEM-SPCE). El profesor Matos comenzó realizando una clasificación de las metodologías analizadas en las cuatro ponencias, de acuerdo a los paradigmas utilizados. Para ello consideró diferentes 'tradiciones' dentro de la investigación en educación matemática, mencionando la tradición pedagógica, la tradición científico/empirista y la tradición filósofo/escolástica. Justificó la pertenencia de cada una de las metodologías expuestas a una o a varias de las 'tradiciones' mencionadas, y reflexionó sobre la relación entre la investigación y otros intervinientes en el acto educativo, así como su responsabilidad social. Finalmente planteó algunos interrogantes dirigidos a los ponentes y también con el objeto de iniciar el debate posterior.

Después de una pausa se reanuda la sesión interviniendo de nuevo los cuatro ponentes que expresan algunas consideraciones acerca de la clasificación realizada por José Manuel Matos y responden a alguna de las preguntas que ha planteado. A continuación se inicia un debate en el que intervienen varios de los asistentes. Junto a preguntas sobre cuestiones concretas de las ponencias, surgen también cuestiones más generales y abiertas. Una de ellas se refería al significado de la palabra 'metodología', a lo que se responde desde distintas perspectivas. Otra cuestión general planteada es la consideración de que los problemas que se plantean en la investigación no pueden ser independientes de la teoría que se aborda.

V SIMPOSIO SEIEM

INFORMES DE INVESTIGACIÓN

ENSEÑANZA DEL NÚMERO RACIONAL POSITIVO EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO DESDE EL MODELO COCIENTE

RAFAEL ESCOLANO VIZCARRA

Universidad de Zaragoza

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

ENSEÑANZA DEL NÚMERO RACIONAL POSITIVO EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO DESDE EL MODELO COCIENTE

❧

RAFAEL ESCOLANO VIZCARRA*

Universidad de Zaragoza

RESUMEN

Presentamos una investigación en Didáctica de la Matemática en el ámbito de la innovación curricular en Educación Primaria, sobre un campo numérico concreto: el conjunto de los números racionales positivos. Nuestro trabajo, que está en fase de realización, se sitúa en el marco conceptual del Pensamiento Numérico y utiliza la metodología denominada Investigación-Acción. Contiene una propuesta curricular, basada en la utilización de modelos de aprendizaje, sobre los que los escolares de 4º y 5º curso de Educación Primaria significan y conectan los sistemas de representación fraccionario y decimal del número racional positivo.

ABSTRACT

The research work on Didactics of Mathematics in the area of curricular innovation in Primary Education which we present is based on a concrete numerical field: the set of positive rational numbers. Our research work, which is still in its process of elaboration, can be integrated into the conceptual frame of Numerical Thought and uses Research. Action methodology. It presents a curricular project, based on the use of learning patterns, in which schoolchildren, in their fourth and fifth years of Primary Education, can understand and link the systems of fractionary and decimal representation of positive rational numbers.

INTRODUCCIÓN

El concepto de número racional positivo presenta dificultades de aprendizaje. Los estudios sobre errores cometidos por los escolares, recogidos por Gairín (1999, pág 24) constatan una desconexión entre:

a) los dos sistemas de representación simbólicos de los números racionales: la notación fraccionaria y la notación decimal.
b) el conocimiento conceptual de los racionales y los procedimientos utilizados en la manipulación de símbolos, sobre todo con expresiones decimales.

* Este trabajo está subvencionado por el proyecto UZ00-CIEN-02 de la Universidad de Zaragoza

c) los distintos significados del número racional.

Además, se constata que la enseñanza tradicional es altamente vulnerable a la crítica (Groff, 1996). La instrucción de los números racionales positivos, que se deriva del análisis de los textos escolares de las editoriales de mayor difusión de nuestro país, presenta características que nos parecen inadecuadas:

a) Existencia de un único procedimiento para relacionar las notaciones fraccionaria y decimal: la ampliación de la división entera. No existe un modelo que conecte los dos sistemas de representación.

b) Presencia de la fracción con el significado prioritario de parte-todo, mientras que otros significados como operador, medida, cociente o razón, se omiten o se presentan desconectados de los otros constructos.

En consecuencia, al priorizar el significado de la fracción como relación parte-todo se dificulta la plena comprensión del número racional, puesto que no hay representaciones de las ideas matemáticas que tengan carácter universal; cualquiera de ellas destaca algunos aspectos mientras que oscurece otros (Figueras, 1988).

De hecho este significado provoca la aparición de problemas como la pérdida del status de número de la fracción; sobrevaloración de la cardinalidad; dificultad de interpretación de las fracciones impropias, etc. Además, se facilita una traslación de significados ya consolidados para los números naturales que da lugar a concepciones no deseadas, tanto en las relaciones (cada número racional tiene un siguiente; dos números racionales están separados por una cantidad finita de números racionales; ...), como en las operaciones (la multiplicación produce un resultado mayor que cualquiera de los factores; no se puede dividir por un número más grande; ...).

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo principal del estudio es explorar las potencialidades y limitaciones de la propuesta de innovación curricular. Nuestra hipótesis de investigación es que la secuencia de enseñanza implementada favorece la comprensión de los números racionales positivos de los escolares de Educación Primaria que intervienen en la fase experimental.

Nuestra propuesta didáctica es original, ha sido elaborada explícitamente para este estudio y ha sido implementada por el autor de este informe que ha actuado como profesor de aula. La secuencia de enseñanza excluye el significado de la fracción como parte-todo y aborda los significados propios de la fenomenología del racional positivo como medida y reparto.

Describimos los objetivos parciales que sustentan el diseño de la propuesta:

1. Conceptualizar la fracción con significado de medida de cantidades de magnitud.

En cuarto curso de Educación Primaria se introduce la fracción como resultado de una medida (longitud, peso, superficie y cardinalidad) y se estudian las relaciones de equivalencia y orden de fracciones.

Cuando los escolares de cuarto curso trabajan con los modelos de medida asociados a estas magnitudes, la necesidad de comunicar el resultado de la medida les obliga a introducir la representación usual de la fracción.

Así, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ indica que han fraccionado la unidad de longitud en b subunidades iguales y que han necesitado colocar **a** subunidades, una tras otra, para completar la cantidad de magnitud del objeto a medir.

$a \times \frac{1}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$

2. Dar significado y justificar desde los modelos de medida las operaciones entre números racionales positivos.

Los alumnos de quinto curso de Educación Primaria identifican las operaciones de suma y resta de fracciones, y las de multiplicación y división de una fracción por un natural en un contexto de resolución de problemas. Además, justifican desde el modelo los procedimientos de cálculo.

3. Conceptualizar la fracción como el resultado de un reparto.

Los escolares de quinto curso reciben enseñanza de la fracción con significado de cociente partitivo. El modelo viene caracterizado por cuatro variables:

objetos:	barras de regaliz, todas de la misma la longitud.
acción:	reparto igualitario.
magnitud:	longitud.
técnicas de medida:	reparto en una fase y reparto en varias fases.

Si el reparto se realiza en una sola fase aparece la notación fraccionaria. La expresión admite una doble evaluación semántica. Por un lado posee el significado de medida e indica el resultado del reparto. Y por otro lado expresa las condiciones iniciales del reparto; así, a es el número de barras de regaliz y b es el número de personas que van a participar en el reparto.

4. Conectar los sistemas de representación fraccionario y decimal.

Una variación de la técnica del reparto permite introducir el número decimal. En efecto, si modificamos la técnica del reparto de modo que éste se realiza por fases, aplicando el *criterio de la mayor parte* (Gairín, 1999), y fraccionando las partes sobrantes en diez partes iguales, el resultado del reparto aparece como una suma de partes enteras y partes alícuotas de la unidad cuyos tamaños son las sucesivas potencias de $\frac{1}{10}$. Esta suma recibe el nombre de representación polinómica decimal del reparto.

Se recuerda que el *criterio de la mayor parte* consiste en dar en cada fase del reparto la mayor cantidad posible de magnitud.

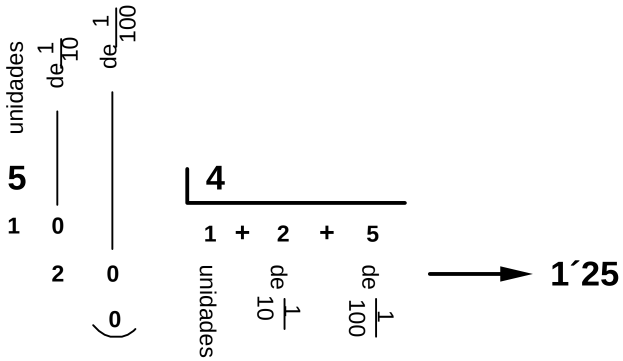
Ejemplificamos el reparto "5 barras de regaliz entre 4 personas" realizado con esta técnica:

Fase del reparto	Acción	Cantidad que recibe cada persona	Cantidad que queda por repartir
Primera	Repartir	1 barra	1 barra
Segunda	Fraccionar en 10 partes iguales 1 barra y después repartir	$\frac{2}{10}$ de barra	$\frac{2}{10}$ de barra
Tercera	Fraccionar en 10 partes iguales $\frac{2}{10}$ de barra y después repartir	$\frac{5}{100}$ de barra	No sobra cantidad

La representación polinómica decimal de este reparto es $\mathbf{1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}}$ barras de regaliz.

El criterio de economía en la representación escrita del resultado del reparto lleva a introducir la notación decimal del reparto. En nuestro ejemplo, la representación decimal 1´25 barras de regaliz expresa el resultado del reparto porque la aplicación del principio del valor relativo de las cifras hace que éstas informen de las cantidades que se han repartido en cada fase.

Los escolares proceden de forma simbólica evocando mentalmente las acciones realizadas, en tareas anteriores, con el material manipulativo. El proceso del reparto por fases lo simbolizan del siguiente modo:



Se observa que la notación fraccionaria y la notación decimal tienen un mismo significado y surgen de simbolizar una misma acción, el reparto igualitario, con técnicas diferenciadas. Ambas representaciones admiten una misma evaluación semántica como cocientes partitivos, y poseen la misma estructura numérica subyacente, de la que informa la representación polinómica decimal asociada al reparto.

5. Dar significado y justificar desde modelos de aprendizaje las relaciones y operaciones entre números decimales.

Los alumnos de quinto curso de Educación Primaria ordenan números decimales desde el modelo de medida; identifican las operaciones de suma y resta de decimales, y las de multiplicación y división de un decimal por un natural . Además, justifican desde los modelos de medida y de reparto los procedimientos de cálculo.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco conceptual se denominada Pensamiento Numérico. Esta línea de investigación tiene una triple orientación: por un lado, se ocupa de las estructuras numéricas específicas; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades numéricas; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y se resuelven mediante la estructura numérica considerada (Castro, 1994; González, 1995; Rico, 1995).

Dentro de esa línea, nuestro trabajo se ocupa de la segunda dimensión de las tres mencionadas; es decir, del aspecto cognitivo. La noción de comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992) del número racional positivo está caracterizada por el dominio de sus sistemas de representación y de los distintos tipos de actividades cognitivas asociadas a los mismos (Duval, 1995).

Nuestras herramientas conceptuales son los sistemas de representación y los modelos de aprendizaje.

El instrumento elegido para poner de manifiesto las concepciones de los alumnos es la noción de sistema de representación (Kaput, 1987; Duval, 1993; Rico, Castro y Romero, 1996). Hipótesis importante en los estudios basados sobre la noción de representación es que, para alcanzar la comprensión del concepto que se considera es necesario, entre otros aspectos, el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, 1992; Romero, 1995). Un objetivo prioritario de nuestro estudio es conectar los sistemas de representación fraccionario y decimal.

El instrumento utilizado para formular las propuestas de trabajo de campo es la noción de modelo (Lesh, 1997). Pensamos que la construcción del conocimiento exige que el aprendiz actúe sobre un entorno o modelo con objetos y acciones bien definidas (Kieren, 1988). En nuestra propuesta didáctica los modelos de aprendizaje juegan un papel esencial porque los alumnos aprenden cuando actúan sobre el modelo con la intención de resolver situaciones problemáticas; en consonancia con la tercera dimensión en nuestra línea de investigación en Pensamiento Numérico que hemos mencionado anteriormente.

METODOLOGÍA

Este trabajo es un estudio de tipo exploratorio e interpretativo, que se enmarca en el paradigma cualitativo.

El estudio se articula en dos Etapas, en las que se evalúa una experiencia de aula sobre una innovación curricular, en la línea de Investigación-Acción empírica y diagnóstica. En la Primera Etapa se evalúa la propuesta didáctica implementada en 4º curso de Educación Primaria y en la Segunda Etapa la de 5º curso de Educación Primaria.

La utilización del método de Investigación-Acción se ajusta a nuestro propósito porque queremos reflexionar sobre la práctica educativa a través de una indagación introspectiva colectiva (Kemmis-McTaggart, 1988, pág. 9), con la intención de mejorar la calidad educativa (McNiff, 1991, pág. 1) y porque permite al investigador participar directamente en la experiencia de aula.

La componente experimental de nuestro estudio se ha llevado a cabo con dos grupos naturales de docencia de 4º y 5º curso de Educación Primaria de un colegio de la ciudad de Zaragoza durante dos años académicos consecutivos. Así, hemos implementado la propuesta didáctica en dos grupos de 4º de Educación Primaria durante el curso 1999-2000 y, en el siguiente curso 2000/2001, hemos implementado, con los mismos escolares, la propuesta correspondiente a 5º curso de Educación Primaria.

Las actuaciones en las dos Etapas de la investigación se suceden en torno a las siguientes fases:

Planificación

a) Análisis y caracterización de la enseñanza de las fracciones y de los números decimales en la Educación Primaria.

b) Delimitación de los errores y dificultades de aprendizaje de las fracciones y números decimales.

c) Diseño de la propuesta de enseñanza a implementar en las dos Etapas. Se han diseñado nueve sesiones referidas a la medida de magnitud longitud, superficie, masa y capacidad que se implementan en cuarto curso antes de que reciban enseñanza de la fracción con el significado de medida.

Acción

En la Primera Etapa se han implementado los contenidos de medida de magnitudes (9 sesiones de clase, entre el 12-1-00 y el 24-1-00); la fracción con significado de medida y las relaciones de equivalencia y orden (26 sesiones entre el 25-1-2000 y el 8-3-2000).

En la Segunda Etapa se han implementado los contenidos de operaciones con fracciones, la fracción y el decimal como cocientes partitivos, y las relaciones y operaciones de números decimales (47 sesiones de clase, entre el 2-11-2000 y e1-3-2001).

Entre ambas Etapas los alumnos de 5º curso han realizado, durante los días 13 y 14 septiembre de 2000, una prueba de evaluación de los aprendizajes alcanzados en el curso anterior. Con los datos obtenidos se reformuló la propuesta didáctica a implementar en la fase de acción de la Segunda Etapa.

Observación

Los datos de la experimentación se han obtenido del diario del investigador, de las grabaciones de audio o video, de los documentos escritos de los alumnos y de las observaciones de los profesores de aula.

Se ha elaborado un sistemas de categorías para informar de la Organización del Contenido, de la Comprensión del Contenido y de la Interacción Didáctica.

CONCLUSIONES

En este momento, nuestro estudio está en fase de realización avanzada aunque no está concluido. Queda por completar las fases de observación y de reflexión de la Segunda Etapa de la Investigación. En estas condiciones, adelantamos algunos resultados referidos a la comprensión de los escolares y a las potencialidades y limitaciones de la propuesta experimentada en la Primera Etapa del diseño de investigación.

A) Sobre la comprensión de los escolares:

1º Los alumnos no intuyen la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida.

2º Los alumnos construyen con facilidad el sistema de representación en las tareas en las que utilizan material con las magnitudes longitud, superficie y cardinalidad. Sin embargo, han tenido dificultades con la magnitud masa.

3º Los alumnos saben construir la cantidad de magnitud a partir del conocimiento de la representación simbólica de la fracción. No obstante, obtienen mejores resultados en tareas en las que se construye el sistema de representación que en las tareas de evaluación semántica del sistema de representación

4º La mitad de los escolares saben expresar, por escrito, el significado del numerador y denominador de la fracción.

5º No se detectan diferencias significativas en la comprensión de los escolares cuando actúan con los modelos longitud o superficie.

6º Los alumnos saben construir fracciones equivalentes a una dada utilizando como recurso didáctico materiales manipulativos. Desde las primeras tareas, observan que una misma cantidad de magnitud puede venir expresada por diferentes fracciones.

7º Los escolares saben ordenar fracciones que tienen el mismo denominador cuando se presentan de forma simbólica. Así, el 66% de los alumnos sabe ordenar y justificar el resultado. El rendimiento baja al ordenar fracciones con el mismo numerador, o con distinto numerador y denominador (entorno al 50%).

8º Cuando los alumnos de 4º curso ordenan fracciones utilizan como estrategia básica el significado de fracción como medida. Muy pocos alumnos se sirven de otras estrategias como la comparación con fracciones intermedias conocidas o la equivalencia de fracciones.

9º Los escolares de 4º curso, incluso los que muestran tener un nivel de comprensión alto, tienden a utilizar estrategias aditivas para construir fracciones equivalentes. Cuando afrontan las tareas de equivalencia de fracciones, al margen de los modelos manipulativos, y operan con representaciones simbólicas utilizan estrategias aditivas frente a las multiplicativas, aún en situaciones inapropiadas.

B) Sobre las potencialidades del modelo:

1º Los modelos de aprendizaje basados en la magnitudes continuas (longitud y superficie) han permitido a los escolares:

a) construir y evaluar semánticamente el sistema de representación fraccionario

b) dar significado a las relaciones de equivalencia y de orden

2º Las representaciones gráficas facilitan la transición entre las acciones realizadas con materiales manipulativos y las representaciones simbólicas.

C) Sobre las limitaciones del modelo:

1º Hemos detectado dificultades con el modelo masa asociadas a la complejidad de la percepción visual de la cantidad.

2º Hemos observado dificultades para gestionar la equivalencia de fracciones a nivel simbólico, porque los escolares de cuarto curso:

a) No enuncian la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada, a pesar de que pretendemos como objetivo de la enseñanza que los escolares conjeturen la regla de formación de fracciones equivalentes antes de que el profesor institucionalice este conocimiento en el aula.

b) No utilizan la equivalencia en las tareas de ordenación de fracciones.

Hemos constatado que los mismos alumnos, un año después, en quinto curso han utilizando la estrategia basada en la equivalencia de fracciones para resolver situaciones problemáticas sobre relaciones y operaciones con fracciones.

REFERENCIAS

Castro, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).*Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Duval, R. (1993). *Semiosis y noesis. Lecturas en didáctica de la Matemática: Escuela francesa*. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang, S.A., Bern.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionale*s. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzado del IPN. México.

Gairin, J. M. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.

Gonzalez, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Groff, P. (1996). Is Teaching a Waste of Time?. The Clearing House. A Journal for middl schools, junior and senior schools. (69), 3, pág. 177-179

Hiebert, J. A. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D. A. (edit.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics.* Macmillan Publishing Company, New York.

Kaput, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En Janvier, C. (edit.) *Problems of representation in the teaching and learning of matematics.*Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hillsdale, N. J.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning.* Macmillan Publishing Company, New York.

Kemmis, S y McTaggart (1992) *Cómo planificar la investigación-acción.* Laertes, Barcelona.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers.Its Intuitive and Formal Development. En Carpenter, T. P.; Fennema, E. y Romberg, T. A. *Rational numbers. An integration of research.* Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hillsdale, N. J.

Lesh, R. (1997). Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. En Enseñanza de las Ciencias, vol. 15, nº 3, pág. 377-391.

McNiff, J. (1992). *Action Research: principles and practice*. Routledge, Canadá.

Rico, L. (1995). *Conocimiento numérico y formación del profesorado*. Universidad de Granada, Granada.

Rico, L.; Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceedings 20 International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Valencia, España.

Romero, I. M. (1995). *La introducción del número real en Educación Secundaria.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

ANALISIS DE SIGNIFICADOS PERSONALES E INSTITUCIONALES: EL PROBLEMA DE SU COMPATIBILIZACIÓN

SILVIA C. ETCHEGARAY

Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

ANALISIS DE SIGNIFICADOS PERSONALES E INSTITUCIONALES: EL PROBLEMA DE SU COMPATIBILIZACIÓN

❧

SILVIA C. ETCHEGARAY
Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina

RESUMEN

En este informe se trata de mostrar cierto grado de incompatibilidad entre significados institucionales y significados personales analizando si se tienen en cuenta las prácticas de los estudiantes en transposiciones didácticas realizadas en los libros de texto.

Este problema didáctico se investiga específicamente sobre el contenido: Divisibilidad en el conjunto de los números enteros. El mismo se realiza mediante el análisis de los libros de mayor circulación en la escuela media y de trabajos de alumnos de tres años diferentes, caracterizando los elementos estructurales y secundarios de significado de las nociones aritméticas involucradas.

ABSTRACT

In this report we have tried to show certain degree of incompatibility between institutional and personal meanings, analysing if the students'practices are considered in didactic transposition involved in the textbooks. This didactic problem is specifically investigated in the content: Divisibility in the set of integer numbers. This last problem is performed using the analysis of the most used textbooks in high school and in the works of students of three different years, characterising the structural and secondary elements of the meaning of the arithmetic notions involved.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Es nuestro interés mostrar que la caracterización de los significados institucionales imperantes en una particular cultura, y el conocimiento de la existencia de significados personales producen ciertos fenómenos didácticos ligados a la transposición didáctica. Por ejemplo, la existencia o no de la compatibilización entre ambos tipos de significados lo cual es necesario tener conciencia para su posterior control. En consecuencia el problema que nos hemos planteado es investigar si se tienen en cuenta las prácticas de los estudiantes en las transposiciones didácticas que se realizan en los libros de textos, específicamente sobre el contenido matemático: *Divisibilidad en el conjunto de los números enteros (Z)*. La caracterización de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos, así como su interdependencia y desarrollo han sido propuestos por Godino y Batanero (1994) como tema de investigación prioritaria para la Didáctica de la Matemática.

MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

Este trabajo se sitúa en la Teoría Antropológica de lo didáctico[1], y pretende aportar a la discusión de uno de sus modelos denominado *análisis ecológico de los saberes*. Este análisis se realizará dentro de la *Teoría de los Significados Institucionales y Personales de los Objetos Matemáticos* de Godino y Batanero (1994-1998), según la cual la noción de significado es la herramienta conceptual fundamental para analizar la actividad matemática. La noción de significado en esta Teoría acepta dos dimensiones, o sea se considera *significado personal o institucional* en tanto se refiera a *manifestaciones idiosincrásicas de un sujeto en particular o como producto de prácticas sociales compartidas que dependen del tiempo* (Godino y Batanero, 1994).

Además, es sabido que en este marco las acciones realizadas por el sujeto ante una tarea dada se describen mediante las siguientes entidades emergentes de las prácticas que se ponen en juego en la actividad matemática: o*stensivas, extensivas, actuativas, validativas e intensivas,* denominados *elementos estructurales de significado*. Además de estas entidades primarias este modelo contempla entidades secundarias - son combinaciones de las anteriores - las cuales han sido propuestas por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) para analizar las organizaciones matemáticas, a saber: *tareas, técnicas, tecnologías y teorías*.

Es por todos compartido, que en general para describir la actividad matemática se deben tener en cuenta los diferentes problemas, las distintas representaciones y las teorías que los abarca. Con este modelo se aportan nuevos elementos que favorecen un análisis más profundo de dichas actividades constituyéndose así en un recurso de gran utilidad para comprender la génesis, el desarrollo y las funciones de los saberes matemáticos en las distintas instituciones.

METODOLOGÍA

Desde el punto de vista metodológico este enfoque semiótico–antropológico permite combinar diversos métodos y técnicas según el momento de la investigación y las características del problema planteado, aunque no deja de reconocer un papel relevante a los estudios de casos, tanto de experiencias de enseñanza, como de sujetos y episodios didácticos. Bajo este modelo, se puede afirmar que esencialmente este comienzo de investigación es de tipo cualitativo o en términos de Erickson (1986) interpretativo. Conjuntamente con el desarrollo de la investigación cualitativa se han desplegado múltiples clasificaciones para las técnicas de recogida de datos. Buendía y otros (1999) seleccionan una opción integradora ante tal múltiple oferta. Consideran por un lado, aquellas que exigen la presencia del investigador y una interacción con los agentes del contexto de investigación y las denominan directas o interactivas. Por otro lado, tienen en cuenta las indirectas o no interactivas que se basan en consultas de informaciones o documentos de carácter oficial o personal. Esta investigación pone en funcionamiento técnicas correspondientes a ambas categorías pues:

- Se recurre a la observación participante, ya que se observó directamente clases para obtener prácticas de alumnos y así analizar significados personales .
- Se ha utilizado el análisis de contenido de Teoría de Números en textos de enseñanza a nivel secundario de la divisibilidad en Z, a los fines de caracterizar significados institucionales en instituciones de enseñanza.

Encuadrados en esta metodología, una primera instancia de este trabajo es seleccionar los libros de textos del 8º año de la E.G.B más utilizados en el nivel medio. En ellos se presentan los temas de

[1] La problemática de lo didáctico se asume en términos "institucionales", entendiendo a la noción de institución en sentido amplio siendo una institución tanto la escuela como un libro de texto, una clase, etc.

divisibilidad a través de situaciones problemáticas con las prácticas respectivas para su resolución de las cuales emergen los conceptos. En una segunda instancia se analizan distinguiendo los distintos elementos de significado que tales textos generan en el desarrollo de esta temática. Este análisis es contrastado con el que se realiza a trabajos de alumnos de 6º, 7º y 8º año (11, 12 y 13 años respectivamente) obtenidos en distintas observaciones de clases. De esta manera nos hemos iniciado en la compenetración tanto de las "obras"[2] de los alumnos como de particulares organizaciones matemáticas dentro de una institución escolar como es el libro de texto.

Por último, cabe aclarar que las relaciones que se detectan entre los distintos elementos de significado (institucionales y personales), han sido relativos a las instituciones o personas analizadas y constituyen un sentido no acabado del objeto de saber involucrado.

LA DIVISIBILIDAD COMO OBJETO DE ENSEÑANZA: ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTOS

En este apartado se trata de realizar un análisis de alguno de los momentos de transposición didáctica a la que es sometida la "Divisibilidad en el conjunto de los Números Enteros" para convertirse en un objeto de enseñanza. Según Chevallard (1989) en el proceso de transposición didáctica, el análisis ecológico del texto de enseñanza aparece como un segundo momento, que permite la exploración del alcance institucional determinado al saber enseñado.

El investigador en didáctica encuentra objetos que la institución de enseñanza (en este caso los libros de textos) no reconocen como tales y que pertenecen a la teoría didáctica. Tal es el caso de los "significados institucionales", "significados personales", "contrato didáctico", entre otros.

Los autores de los libros analizados, en general, demuestran la necesidad de poder determinar un saber, dividirlo en unidades elementales que el alumno pueda memorizar y que por lo tanto el profesor pueda rápidamente evaluar. Es decir, los elementos actuativos de los alumnos ante los objetos en cuestión deben ser rápidamente evaluados. Razón por la cual se proponen siempre gran cantidad de ejercicios de aplicación directa de los contenidos trabajados.

Asimismo las técnicas ocupan lugares privilegiados en la secuenciación del saber, hasta tal punto que se corre el riesgo de sólo enseñar técnicas normalizadas, debido a su más fácil comunicación y evaluación, en este caso: la factorización en primos y por ende la construcción del M.C.D y m.c.m a través de ella. El problema radica en la aplicación de estas técnicas sin tener en cuenta las nociones que subyacen en las mismas para lo que es muy importante la selección de los elementos extensionales que realmente le darán su razón de ser. Todos los textos analizados se adaptan a las exigencias de *la programabilidad de los saberes* organizándolos a éstos en forma lineal y secuenciada. También se puede observar que el modelo metodológico que se aplica es siempre *teoría - práctica*, aunque algunas definiciones son precedidas por alguna situación o ejemplo de cómo se debe aplicar. Siempre existe una presentación de las nociones o técnicas matemáticas que el alumno debe memorizar para luego aplicar en ejercicios sin llevar a cabo ninguna transformación.

Elementos estructurales de significado detectados en los libros de textos

Observación: se marcará con un asterisco (*) los elementos detectados sólo en alguno de los libros analizados, los restantes son comunes a todos los manuales seleccionados.

[2] Adherimos aquí a la posición de Chevallard y otros(1997), donde definen obra a toda producción que se obtiene como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones problemáticas.

Elementos intensivos:

- Un número natural *a* es un múltiplo de otro número natural *b* si la división de *a* sobre *b* es exacta.
- El M.C.D es el mayor de todos los divisores comunes.
- El m.c.m es el menor de todos los múltiplos comunes.
- El M.C.D se utiliza para resolver situaciones cotidianas en donde hace falta repartir cierta cantidad de objetos en partes iguales.
- Los números naturales se clasifican en números primos y compuestos.
- Existen otras clasificaciones de números: amigos, perfectos, etc.(*)

Elementos ostensivos:

- Uso de diagramas de Venn graficando la intersección (*)
- Uso de árboles de factores
- Uso de dos columnas para la factorización.

Elementos extensivos:

- Problemas tipos de reparto de la vida cotidiana.
- Situaciones que caracterizan a los números amigos y perfectos. (*)
- Cálculo de M.C.D y m.c.m

Elementos actuativos:

- Técnicas aritméticas normalizadas: cálculo de divisores y múltiplos, factorización en primos.
- Aplicación del algoritmo de Euclides para el cálculo del M.C.D (*)

Elementos validativos:

- Aplicación de técnicas mostradas en los textos.
- Búsqueda de relaciones entre algunos números dados (*)

En resumen, se puede afirmar que las tareas propuestas a los alumnos por los diferentes textos, en torno a las nociones de divisibilidad, son claramente algoritmizables, estereotipadas, que permiten una *forma legítima* de actuar y que el profesor siempre espera para evaluar. O sea se configuran reglas implícitas a respetar entre alumno y profesor en función del saber involucrado, lo que determina indudablemente *un contrato didáctico común* a todos los libros analizados.

ANÁLISIS DE SIGNIFICADOS PERSONALES: UNA APROXIMACIÓN AL SABER ENSEÑADO

En este apartado se intentará realizar una aproximación al saber enseñado analizando trabajos de estudiantes de los distintos cursos. Vale observar que en todos los casos la tarea seleccionada fue dada sin sugerencia alguna, o sea sólo se plantea a los alumnos lo siguiente: *Mi terreno es rectangular y mide 65 metros por 91 metros. Quiero que coloque árboles en sus esquinas y luego plante otros en su contorno, de modo que la distancia entre dos consecutivos sea siempre la misma y la mayor posible.*

- Como no, la tarea es sencilla ¿Cuántos árboles colocará en total el jardinero? ¿Cuál será la distancia entre dos árboles consecutivos?

Dicha tarea es presentada en la introducción del primer libro analizado que en su encabezamiento dice textualmente: *Para pensar y resolver al finalizar el trabajo con divisibilidad.*. Cabe observar que en los dos libros restantes, se utiliza la misma lógica para avanzar en la temática. En otras palabras se parte de tareas tipos similar a la expuesta en este trabajo y se muestra que para obtener su solución se deben hacer evolucionar las técnicas de divisibilidad hasta la factorización en primos.

A continuación se caracterizan los elementos de significado del contenido matemático puesto en juego por los alumnos, cuyos trabajos se comparan con los elementos de significados institucionales detectados en el libro de texto.

Elementos ostensivos puestos en juego por lo alumnos:

- Figura geométrica para representar la situación
- Divisiones sucesivas por 2, por 3, luego por 4, hasta llegar al 5 que divide exactamente al 65. Análogamente con el 91. (O sea un trabajo puramente aritmético, haciendo uso de la noción de divisor)

Representaciones no usadas por los estudiantes (que conforman los significados institucionales emergentes del libro de texto):

- Diagramas de Venn que muestren claramente la intersección
- Construcción del árbol de factores, para la descomposición en primos.

Elementos extensivos:

La tarea escrita al iniciar este parágrafo.

Situaciones no planteadas:

- Ninguna, ya que los restantes problemas que conforman los elementos extensivos del significado institucional no permiten necesariamente la evolución de técnicas, es decir no aparecen en la práctica concreta de los alumnos.

Elementos actuativos puestos en juego por los alumnos:

- Cálculo del M.C.D por tanteo (la única diferencia planteada fue que algunos alumnos usaron el primer divisor del 65 para relacionarlo con el 91, mientras que otros alumnos trabajaron simultáneamente con los dos números buscando los divisores comunes.)
- Lectura diferenciada dada a los cocientes y divisores respectivos, ya que unos establecen distancias y los otros cantidad de árboles.

Técnicas no trabajadas por los alumnos:

- Cálculo del M.C.D como el producto de los primos comunes a ambos números con su menor exponente.

Elementos intensionales:

- Utilización en carácter de herramienta del M.C.D como el mayor divisor que es común a los dos números dados.

Propiedades no tenidas en cuenta por los estudiantes

- Ninguna, el significado institucional de la noción puesta en juego es exactamente el que se puede rescatar como objeto de saber ante el análisis de significados personales que se está realizando.

Elementos validativos utilizados por los alumnos:

- La validación es expuesta en la respuesta final y está estrechamente ligada a la situación específica planteada.

Validaciones no realizadas.

- Utilizar la noción de M.C.D descontextualizada del problema planteado.

Tecnologías usadas por los alumnos:

- Un número es divisor de otro si al realizar el algoritmo de la división entera el resto es 0.
- Existe al menos un divisor común a ambos.
- Se puede encontrar el mayor de todos los divisores comunes.

Tecnologías no usadas:

- El Teorema fundamental de la Aritmética.

En síntesis, todos los alumnos lograron construir la primera técnica trabajada en los textos y solucionar la tarea no teniendo necesidad de tener que avanzar en la evolución de la misma, tal como es consignado expresamente en el texto del cual se extrajo la tarea, como así también en los dos restantes.

Cuando la actividad es presentada en un 8º. año (2º de la E.G.B), curso al cual va dirigido el texto seleccionado, las prácticas son similares a las anteriores, y nuevamente no hay necesidad de tener que evolucionar la técnica para resolverla. Por esto y debido a que muy rápidamente resolvieron la tarea, se decidió trabajar también con magnitudes, en primer lugar más grandes y luego arbitrarias a los fines de construir las bases para un método general de solución a situaciones que involucren al máximo común divisor (M.C.D). Por lo tanto la nueva situación problemática (un rectángulo con medidas arbitrarias: mide *a* de ancho y *b* de largo) pertenece al entorno conceptual que permitió en sus orígenes (época griega) construir esta noción básica de la aritmética (M.C.D) como así también la posibilidad de un algoritmo que lo determine. Aquí sí se produce una evolución necesaria de la técnica primitiva promovida principalmente por la imposibilidad de trabajar en un contexto aritmético (por la existencia de letras en lugar de números). El tener que concentrarse en la figura geométrica provocó el establecimiento de las bases del algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D mediante el funcionamiento del método de sustracción sucesiva o en términos de Euclides usando el método de la *anthiphairesis.* La evolución de la técnica primitiva hacia la construcción del algoritmo de Euclides se observa claramente a través de las justificaciones realizadas por los alumnos. Textualmente se transcribe una de ellas: *Me fijo cuantas veces entra a en b. Si entra justo la distancia mayor va a ser a. Si no entra justo me fijo en el pedacito que sobra de b cuantas veces entra a. Si entra justo la distancia mayor es b-a. Esta forma de trabajo seguro que va a terminar en algún momento porque la unidad que sería un metro entra en cualquier medida justa. Y si no llega hasta el uno, el resultado sería la medida que entra justo.*

En este caso se produce espontáneamente un *cambio de campos* que permitió desbloquear la situación. Vale destacar, que en ninguno de los libros de texto esta manera de hacer evolucionar la técnica primaria aparece registrada. Sólo en uno de ellos se muestra el algoritmo de Euclides para calcular el máximo entre 360 y 210 como otra técnica normalizada.

Con este grupo, nuevamente, a pesar de haber avanzado en las técnicas utilizadas, la unicidad del resultado es validada a través del trabajo en cada situación particular. Por lo que la tecnología mostrada en el texto, de factorizar las magnitudes en cuestión utilizando números primos que permite la evolución de la técnica primitiva y asegurar así la unicidad del resultado para la situación planteada, nuevamente resultó innecesaria.

CONCLUSIONES

Los libros de texto analizados tratan de imponer un único punto de vista, puntual, por lo que en primer lugar, y en relación al problema planteado, se puede sostener que los significados institucionales plasmados en los manuales escolares analizados son incompatibles con una cierta concepción de enseñanza y aprendizaje que tenga en cuenta las posibilidades cognitivas de los alumnos.

En segundo lugar esta investigación aporta datos experimentales para ayudar a sostener que las instituciones de enseñanza restringen fuertemente los elementos de significado de las nociones matemáticas. Pues no sólo presentan significados limitados, lo cual es inevitable, sino que presentan situaciones inadecuadas para describir elementos de significado relevantes de nociones neurales de la Divisibilidad en Z.

REFERENCIAS

Alonso, R., Carranza, S. y Almazan, M. (1998). *Matemática 7*. Madrid:Santillana.

Bindstein, M y Hanfling, M. (1993). *Matemática 1*. Buenos Aires: Aique.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática*. Tesis Doctoral. Dpto de Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona.

Buendía,L., Gonzalez, D., Gutierrez, J. y Pegalar,M. (1999). *Modelos de Análisis de la investigación educativa*. Sevilla: Alfar.

Chevallard,Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rappport officiel. *Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique.*Université Joseph Fourier-Grenoble I.

Chevallard,Y. (1991). *La Transposición Didáctica.* Buenos Aires: Aique (Edición original, 1985).

Chevallard,Y , Bosch, M. y Gascón, J., (1997). *Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*.Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

Erickson, E. (1986). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En M. C. Wittrock (Ed), *La investigación de la enseñanza II: Métodos cualitativos y de observación.* (p. 119-161). Barcelona: Paidos.

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante (Revista Teórica e de Investigacao),* 2 (2): 69-79.

Godino, J. D. y Batanero, C.(1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathemathiques,* 14(3): 325-355.

Godino, J.D. y Batanero, C.(1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas . En I. Vale y J. Portela (Eds.), *Actas del IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM)* (pp. 25-45). Guimaraes.

Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 196-212).Valladolid.

Semino, S., Englebert, S. y Pedemonti, S. (1997). *Matemática 7- 3er. ciclo de la EGB.* A-Z Editora.

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL Y LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

PEDRO GÓMEZ

Universidad de Granada

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL Y LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN[1]

❧

PEDRO GÓMEZ
Universidad de Granada

RESUMEN

Presentamos los primeros resultados de un estudio exploratorio sobre el desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáticas con respecto a las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación. Estos resultados se obtuvieron al codificar y analizar las grabaciones de clase y las producciones de estudiantes del último curso de Matemáticas en una asignatura de didáctica de las matemáticas. Se encontró que las producciones y las actuaciones de los alumnos pasan por diferentes estados que permiten identificar tanto algunas dificultades, como momentos en los que surgen reorganizaciones conceptuales.

ABSTRACT

We present the first results of an exploratory study on the didactical development of mathematics pre-service teachers concerning the notions of conceptual structure and representation systems. These results were obtained from the codification and analysis of class audio recordings and the productions of last year Mathematics students in a methodology course. We found that the students' productions and actions go through different states from which it is possible to identify some of their difficulties and the moments in which conceptual reorganizations take place.

FORMACIÓN DE PROFESORES, CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y ANÁLISIS DIDÁCTICO

En su revisión de la investigación sobre conocimiento del profesor y formación de profesores de matemáticas, Cooney (1994) promueve la formación de profesores como un campo de indagación sistemática que se está basando en la importancia de la cognición, el contexto y el paradigma constructivista y hace dos preguntas con respecto al conocimiento del profesor de matemáticas y a su formación: "¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?" (p. 608). Simon (1995), con el propósito de "con-

[1]Agradezco a Consuelo Cañadas y Antonio Codina por sus comentarios a una versión previa de este documento.

tribuir al diálogo acerca de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento" (p. 115) propone el modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas como una posible respuesta a estas preguntas.

Como investigadores en formación de profesores, nos interesamos por tener un constructo que aborde las cuestiones anteriores, de tal forma que fuese posible configurar y justificar el diseño curricular del programa de formación a nuestro cargo. Éste es una asignatura para estudiantes de matemáticas de último año que quieren llegar a ser profesores de matemáticas de secundaria. Nos centramos en el propósito de la asignatura de formar estos futuros profesores en un aspecto particular de su futura práctica docente: la planificación de unidades didácticas. Por lo tanto, esta parte de la asignatura se centra en el diseño curricular. El desarrollo curricular y la gestión de clase se trabajan en otra asignatura de prácticas que está parcialmente relacionada con la nuestra. Trabajamos entonces dentro de una visión local del diseño curricular en la que hay un diseño global que enmarca el problema y el foco de interés es en un tópico matemático específico (que permite mayor profundidad en el análisis).

Se pretende que, al terminar la asignatura, los futuros profesores tengan un conocimiento y unas capacidades que les permitan realizar estas actividades de planificación de manera eficiente (con respecto al aprendizaje de los estudiantes). Por lo tanto, es necesario determinar qué conocimiento deben tener los profesores para que esto sea posible. Y para ello, es necesario postular una descripción de lo que consideramos que debe ser el proceso de planificación de una unidad didáctica. Vemos esta planificación como la secuenciación de actividades de aprendizaje (incluyendo la evaluación) por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático. El ciclo de enseñanza de las matemáticas de Simon nos dio ideas para postular el *análisis didáctico*[2] como nuestra propuesta de la manera como el profesor debe llegar a producir la planificación. En ella distinguimos la relación entre el diseño global y el diseño local; las actividades que son necesarias para realizar el diseño local; y el papel que juega el conocimiento didáctico en el proceso.

En el análisis didáctico registramos cuatro de actividades que el profesor debe realizar para el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza. El *análisis cognitivo*, como la consideración y especificación de las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden cometer al realizar las tareas que componen las actividades de instrucción. El *análisis de contenido*, como la descripción estructurada del tópico en el que se basa la actividad de instrucción desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación, su análisis fenomenológico y sus posibilidades de modelización. El *análisis de instrucción*, como la descripción de las actividades que se propondrán a los alumnos teniendo en cuenta la variedad de tipos de tareas que surgen del análisis de contenido, las necesidades de los alumnos (con motivo del análisis cognitivo), y los materiales y recursos disponibles. El *análisis de actuación*, como la descripción del estado cognitivo de los alumnos con motivo de las actividades, información que alimenta un nuevo ciclo del análisis didáctico. Desde esta perspectiva, el diseño y puesta en práctica de actividades de enseñanza es un proceso sistémico, dinámico y cíclico.

[2] Utilizamos el término "análisis didáctico" de manera genérica, aunque existe una tradición alemana que ya lo ha utilizado con el significado que pretendemos darle aquí (Klafki, 1958/2000, comentado en Van Driel et al., 2001)

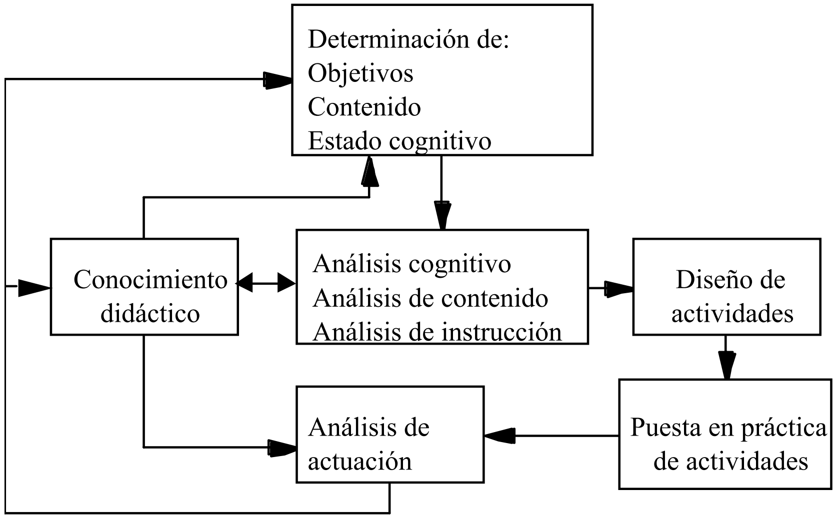


Figura 1. Diseño de actividades, análisis didáctico y conocimiento didáctico

La gráfica de la Figura 1 ubica los cuatro análisis que se acaban de describir y los relaciona con el diseño curricular global, el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades de aprendizaje, y el conocimiento didáctico del profesor. Recordemos que nuestro interés se centra en el diseño curricular local que considera una estructura matemática específica. A partir del diseño curricular global y de su conocimiento del estado cognitivo de los estudiantes, el profesor determina unos objetivos y un contenido. Con esta información y su conocimiento didáctico, y realizando los análisis cognitivo, de contenido y de instrucción, el profesor produce el diseño de una o más actividades de aprendizaje que lleva a la práctica. El análisis de la actuación de los estudiantes cuando ellos abordan las tareas que componen las actividades de aprendizaje produce información que, por un lado, le permite al profesor reformular su percepción del estado cognitivo de sus estudiantes y, por el otro, puede llevarlo a adaptar algunos aspectos de su conocimiento didáctico.

La postulación del análisis didáctico como la descripción de la manera "ideal" de realizar actividades de diseño curricular a nivel local nos permite determinar algunos de los conocimientos que pueden ser necesarios para realizarlo. Podemos organizar estos conocimientos en tres categorías: a) sobre la noción de currículo; b) sobre nociones de la didáctica de la matemática que consideramos relevantes en el problema; c) sobre la utilización de a) y b) en una estructura matemática particular para efectos de realizar el análisis didáctico. En el plan de formación en el que trabajamos se pretende que los futuros profesores construyan un conocimiento sobre a) y b) y desarrollen capacidades para realizar c). El conocimiento didáctico es la integración de a), b) y c). El conocimiento didáctico es un constructo psicológico que tiene un conocimiento disciplinar de referencia (en este caso, la didáctica de la matemática); que tiene una utilidad práctica (el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas); y cuya puesta en juego se enmarca dentro de una estructura analítica (el análisis didáctico). Las nociones de la didáctica de la matemática a las que se refiere este conocimiento en nuestro caso han sido denominadas *organizadores del currículo* por Rico et al. (1997) quienes las consideran como "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (p. 45). En Gómez (2001) hemos presentado con algún detalle la descripción de las nociones que hacen parte del análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación, análisis fenomenológico y modelización.

SIGNIFICADOS, CARACTERIZACIONES, DIFICULTADES, REORGANIZACIONES Y FACTORES

Vemos el desarrollo del conocimiento didáctico como la construcción por parte del futuro profesor de significados cada vez más técnicos a partir de significados parciales e intuitivos con los que él llega al plan de formación. Los futuros profesores construyen significados personales cuya reorganización constituye el conjunto de procesos sociales del grupo de futuros profesores que a su vez condicionan la construcción de significados individuales. Para cada concepto (o relación), los significados (individuales o sociales) evolucionan en el tiempo de significados parciales a significados más técnicos. Suponemos que es posible hacer un seguimiento de estos estados de conocimiento a partir de las actuaciones de los individuos y los grupos. Para ello introducimos la categoría *caracterizaciones* con la que pretendemos registrar la expresión, en las producciones y las actuaciones de los futuros profesores, de los significados parciales que ellos van construyendo en la medida en que utilizan los conceptos para realizar tareas que se les asigna en el plan de formación. Mientras que las caracterizaciones surgen de los datos, el registro de las dificultades y las reorganizaciones se origina en las caracterizaciones. Con *dificultades* nos referimos a dificultades de los futuros profesores al hacer la transición de significados intuitivos y parciales a significados más técnicos y completos. Las dificultades se identifican, por lo tanto, con significados (que se registran como caracterizaciones) que permanecen en el tiempo a pesar de estímulos que pretenden hacerlos evolucionar (principalmente esfuerzos de la instrucción). Por lo tanto, las dificultades se identifican en un juego en el que interviene, por un lado, la comparación de dos producciones sucesivas de un grupo de alumnos (y sus correspondientes caracterizaciones) con la que es posible determinar las caracterizaciones que permanecen estables y, por el otro, aquellos aspectos de la instrucción que han tenido lugar en el periodo entre las dos producciones y que han pretendido hacer evolucionar esas caracterizaciones. Con *reorganizaciones* nos referimos a transiciones de un significado parcial a otro. Por lo tanto, las reorganizaciones surgen de la comparación de las caracterizaciones de dos producciones sucesivas de un grupo.

Denominamos *factores* a aquellos aspectos del programa de formación y de los participantes que pueden afectar (y ayudar a explicar) el proceso de construcción de significados. Caracterizamos este proceso en base a las caracterizaciones de las producciones de los grupos y a las dificultades y reorganizaciones que se deducen de ellas cuando se comparan en el tiempo. Tanto la evolución de las caracterizaciones (dificultades y reorganizaciones), como las caracterizaciones mismas pueden ser producto de diferentes factores. Los organizamos, de acuerdo a las dimensiones del currículo, en cuatro categorías:

Los *aspectos de instrucción*, como expresión del diseño curricular del programa y de su puesta en práctica. El propósito de la instrucción es precisamente el de lograr que los futuros profesores construyan significados cada vez más técnicos. Aquí incluimos aspectos como la exposición en clase por parte de los formadores y la reacción y comentarios de los formadores a las actuaciones y producciones de los futuros profesores.

Los *aspectos sociales*, en los que se incluyen la interacción entre futuros profesores y formadores en clase, junto con el trabajo en grupo de los futuros profesores. En este factor se expresa explícitamente la manera como los significados sociales se construyen a partir del trabajo colaborativo en base a los significados individuales y la manera como estos significados individuales cambian con motivo de y se adaptan a los significados sociales.

Los *aspectos cognitivos* de los futuros profesores. Los futuros profesores llegan a la asignatura con una cierta experiencia docente, con unos conocimientos (esencialmente matemáticos) y con unas creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (entre otros). Todo este bagaje intelectual sirve de base cognitiva para la construcción de los significados individuales.

Los *aspectos conceptuales* relacionados con cada una de las nociones cuyo significado técnico se busca construir. Éstas son nociones complejas y la manera como los futuros profesores construyen sus significados depende de la estructura conceptual de cada una de estas nociones.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

Nuestro problema de investigación se centra en la exploración y caracterización de algunos aspectos del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores dentro de un esquema específico de formación inicial. La pregunta que abordamos para el estudio que reportamos aquí es la siguiente:

¿Cuáles son las cuestiones (caracterizaciones, dificultades, reorganizaciones) significativas que emergen en el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores con respecto a las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación?

El estudio se realizó en el marco de la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* de la Universidad de Granada que cursan estudiantes de último curso de la licenciatura de matemáticas. Participaron dos profesores, uno como investigador y el otro como observador. Los alumnos se organizaron en ocho grupos (de tres a cinco alumnos por grupo) que escogieron diversos tópicos de las matemáticas de Secundaria.

El tratamiento de cada uno de los conceptos del análisis de contenido buscó seguir un esquema general común, en el que los grupos produjeron nuevas versiones de la estructura conceptual de su tópico y mejoraron la descripción del mismo en la medida que avanzaban en el desarrollo de su conocimiento didáctico. Cada grupo presentaba su nueva versión en clase y los compañeros y profesores criticaban y hacían aportes a la misma. Se usaron dos fuentes de información: las grabaciones de audio de las clases y las producciones de los diferentes grupos.

Estas dos fuentes de información nos permitieron identificar episodios de las grabaciones y aspectos particulares de las producciones que caracterizan el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores en base a las caracterizaciones y factores mencionados anteriormente. La construcción y consolidación de los factores factores por un lado, como de las caracterizaciones por el otro, se realizó en un proceso iterativo y cíclico de codificación, análisis y reformulación de las dimensiones en cuestión. La Figura 2 presenta un ejemplo de una estructura conceptual propuesta por el grupo *Iniciación a la probabilidad*.

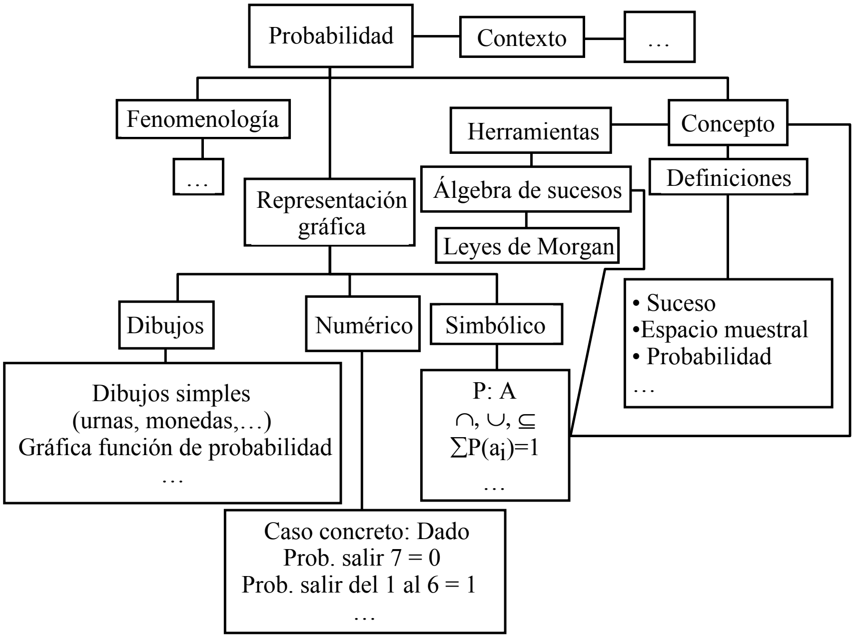


Figura 2. Estructura conceptual del grupo Iniciación a la Probabilidad

ALGUNOS RESULTADOS

Los resultados que se presentan aquí son producto del análisis en curso que se hizo de la transcripción y codificación de las grabaciones de audio de las clases y de las producciones que los alumnos realizaron para ser presentadas en clase. Estos análisis nos permitieron identificar una serie de caracterizaciones, dificultades y reorganizaciones de acuerdo con lo descrito más arriba. Presentamos a continuación una descripción esquemática de algunas caracterizaciones con respecto a los conceptos de estructura conceptual y sistemas de representación:

A.- La estructura conceptual se presenta como un listado de temas sin organización.

B.- La estructura conceptual se organiza en base a los organizadores del currículo.

C.- La estructura conceptual se organiza en base a la historia.

D.- Aparece una estructura conceptual más compleja, pero no se encuentra organizada en base a sistemas de representación.

E.- Los sistemas de representación aparecen como algo complementario a la descripción "conceptual" de la estructura matemática.

F.- Se crea una conciencia de que "todo está relacionado".

G.- Los sistemas de representación organizan la estructura conceptual.

H.- Hay algunas conexiones globales, pero no hay conexiones puntuales.

I.- Aparecen algunas conexiones puntuales externas.[3]

[3]Una conexión es puntual externa si conecta dos elementos de sistemas de representación diferentes (traducciones entre sistemas de representación en el sentido de Kaput (1992)). Es interna si conecta dos elementos del mismo sistema de representación (en algunos casos esto implica una transformación sintáctica en términos de Kaput).

J.- No se hacen explícitos los procedimientos de transformación sintáctica y, por lo tanto, no aparecen conexiones puntuales internas.

K.- La estructura conceptual queda completamente organizada por sistemas de representación.

L.- Se propone una jerarquía en los sistemas de representación.

M.- Aparecen conexiones puntuales internas.

Podemos describir la estructura conceptual de la Figura 2 con las caracterizaciones D, E, H e I. Es evidente que esta estructura conceptual tiene más características que se pueden considerar relevantes desde el punto de vista de los significados de estructura conceptual y sistemas de representación puestos en juego por el grupo. Aquí la clasificamos de acuerdo a la lista parcial de caracterizaciones propuesta arriba.

Es posible organizar esta lista de caracterizaciones en niveles como lo muestra la tabla 1.

Tabla 1. Niveles de caracterizaciones

<table>
<tr><th>Nivel</th><th colspan="4">Caracterizaciones</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="4">A</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">B</td><td colspan="2">C</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">D</td><td colspan="2">E</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="4">F</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="4">G</td></tr>
<tr><td>7</td><td>H</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="4">M</td></tr>
</table>

La determinación de estos niveles es, por ahora, arbitraria, dado que no se presenta aquí el análisis correspondiente a la dimensión factores. Sin embargo, al tener en cuenta los momentos en que aparecen algunas de estas caracterizaciones y al analizar los esfuerzos de la instrucción por hacerlas avanzar, podemos determinar algunas de las dificultades de los alumnos con respecto a los conceptos de estructura conceptual y sistemas de representación. De la misma manera, podemos identificar momentos en que se dan reorganizaciones en estas producciones. Por ejemplo, los alumnos no tienen, al comienzo del ejercicio, criterios que les permitan organizar estructuradamente la descripción de la estructura matemática; ellos utilizan conceptos previos de la asignatura para darle una estructura a la descripción (paso de A a B o C). La instrucción insiste en que se organice la estructura conceptual en base a sistemas de representación, pero esto no se logra fácilmente y constituye una dificultad para los alumnos. Esto se aprecia en las producciones y actuaciones de los alumnos que se ubican en el nivel 3. No obstante, el trabajo con los sistemas de representación genera, en diferentes momentos para diferentes grupos, la conciencia de que “todo está relacionado”, produciéndose una reorganización (paso al nivel 4) como se aprecia en el episodio 24[4]:

Ramón: Tanto en la función de segundo grado, como en el tema de las cónicas, hay muchos problemas que tú planteas que se pueden resolver tanto gráfica, como analíticamente. Es decir, yo gráficamente puedo hallar la solución y analíticamente también y coinciden […]. Es decir, yo soy capaz de gráficamente dibujar una parábola y saber dónde están los cortes con el eje y también hacerlo con la fórmula [...].

[4]Hemos reducido la transcripción por razones de espacio.

[…]

Jorge: Todo está relacionado.

Formador: Que dos cosas estén relacionadas, no implica necesariamente que son el mismo concepto.

Jorge: Pero es que todas parten del mismo concepto.

Formador: ¿Qué quieres decir con que parten de un mismo concepto?

Jorge: Tomamos la función de segundo grado, y ya sabes la representación gráfica, y [no se entiende] la representación analítica. Luego todas parten de la función de segundo grado.

Sofía: Yo lo que quiero decir es que siempre la gráfica es una manera de representar un concepto que tú tienes escrito en expresión matemática formal. Es una manera de representar las cosas […]. Se refieren al mismo concepto, pero con distintas maneras de destacarlo.

DISCUSIÓN

Hemos tratado de mostrar que es posible caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas. Las producciones y actuaciones de estos alumnos (y, por consiguiente, los significados parciales que ellos van construyendo) pasan por diferentes estados que permiten identificar tanto algunas de sus dificultades, como los momentos en los que surgen reorganizaciones conceptuales. Es evidente que estos estados, dificultades y reorganizaciones dependen, tanto de las características de los alumnos como del diseño y puesta en práctica del plan de formación en el que participan. Hemos propuesto los primeros esbozos de algunos modelos descriptivos del desarrollo del conocimiento didáctico de estos futuros profesores para el caso de una asignatura basada en el modelo de los organizadores del currículo.

La experiencia que, como formadores e investigadores, hemos tenido al hacer esta primera exploración nos deja ya algunas enseñanzas que parecen evidentes, pero que pueden ser importantes para la mejora y evolución del programa de formación en cuestión. Las nociones de la didáctica de la matemática son nociones complejas. Su comprensión y puesta en práctica por parte de futuros profesores que tienen una experiencia didáctica reducida es un proceso lento que pasa por diversas fases en las que se pueden encontrar obstáculos difíciles de superar. Los alumnos no superan estos obstáculos si lo único que se les ofrece es la definición de estas nociones y algunos ejemplos de las mismas. Ellos tienen que vivir experiencias en las que pongan en práctica sus significados parciales y puedan comparar sus producciones con las de sus compañeros y recibir críticas a sus trabajos.

Sin embargo, una visión de la formación inicial de profesores de matemáticas en base a las ideas constructivistas se enfrenta con dificultades aún mayores que aquellas a las que se enfrentan los profesores de matemáticas en sus clases. En el caso de la formación inicial de profesores resulta mucho más difícil diseñar situaciones de enseñanza en las que los alumnos pongan en juego sus significados parciales de tal forma que se generen perturbaciones. Esto es producto al menos de los siguientes factores. Primero, al tener muy poca experiencia docente, los futuros profesores no perciben la utilidad de las nociones en cuestión para efectos de su futura práctica docente. Segundo, la mayoría de las nociones son producto de una clasificación analítica de fenómenos matemáticos y didácticos, clasificación ésta que en algunos casos puede parecer arbitraria y en otros producir diferentes significados para la misma noción (como es el caso de la noción de sistema de representación). Tercero, la didáctica de la matemática, como campo conceptual y práctico, no tiene una estructura formal coherente y sólida que permita fácilmente la generación de contradicciones cuando sus nociones se ponen en práctica dentro de situaciones particulares.

Al no ser posible diseñar con facilidad situaciones de enseñanza que generan perturbaciones, el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores se hace más difícil de lo que aparenta en un principio. Para poder mejorar los programas de formación inicial se hace necesario mejorar nuestra comprensión del desarrollo del conocimiento didáctico del futuro profesor.

REFERENCIAS

Cooney, T.J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* , 6, 608-636.

Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico, & J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258 Vol. 2). Granada: Grupo Editorial Universitario.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Klafki, W. (1958/2000). Didaktik analysis as the core of preparation of instruction. En I. Westbury, S. Hopmann, & K. Riquarts (Eds.), *Teaching as a reflective practice: The German Didaktik tradition* (pp. 139 –159). Mahwah, NJ/ Mahwah, NJ/ London: Lawrence Erlbaum Associates.

Rico, L. (Coord.), Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* , 2, 114-145.

Van Driel, J.H., Veal, W.R., & Janssen, F.J.J.M. (2001). Pedagogical content knowledge: an integrative component within the knowledge base for teaching. *Teaching and Teacher Education, 17*, 8, 979-986.

DIFERENTES ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DE ALGUNAS RELACIONES DE INSCRIPCIÓN Y DUALIDAD EN EL MUNDO DE LOS POLIEDROS REGULARES

GREGORIA GUILLÉN

LUIS PUIG

Universitat de València

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

DIFERENTES ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DE ALGUNAS RELACIONES DE INSCRIPCIÓN Y DUALIDAD EN EL MUNDO DE LOS POLIEDROS REGULARES

❧

GREGORIA GUILLÉN
LUIS PUIG
Universitat de València

RESUMEN

En este trabajo presentamos diferentes enfoques para el estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad en el mundo de los poliedros regulares, delimitados y experimentados con estudiantes de Magisterio, describimos los análisis del contenido realizados que nos llevan a un nuevo enfoque posible y mostramos cómo el estudio de relaciones de inscripción puede surgir, en el contexto de la actividad de clase, también con diferentes enfoques: "Construir o generar formas", "Formas rígidas y formas que se deforman", "Recopilar características de los poliedros regulares. Búsqueda de relaciones".

ABSTRACT

Different approaches to the study of the relations of inscription and duality in the world of regular polyhedra, that we have delimited and experimented with pupils of a teacher training school, are presented. We report the content analysis which lead us towards a new feasible approach and we show how the study of relations of inscription can arise in the context of classroom activity also from different approaches: "To build or generate shapes", "Rigid and non-rigid shapes", "Compiling characteristics of regular polyhedra. Looking for relations".

PRESENTACIÓN

Lo que describimos aquí es parte de un trabajo más amplio en el que construimos modelos de enseñanza de algunas relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares, que experimentamos con estudiantes de Magisterio.

En ese trabajo comenzamos con análisis teóricos del contenido de los conceptos implicados y con análisis de la bibliografía. Así, delimitamos usos y contextos que dotan a las relaciones de pares de poliedros regulares de sus significados, y conseguimos información sobre lo que aprenden los estudiantes sobre ello. Caracterizamos de este modo los componentes de competencia formal, cognitivo y de enseñanza de un modelo teórico local (Filloy y cols., 1999) inicial. La fase de experimentación nos permitió diseñar nuevas secuencias de actividades teniendo en cuenta los resultados obtenidos al poner a prueba secuencias de actividades con estudiantes de Magisterio, al analizar las actuaciones de los estudiantes y al evaluar el efecto del modelo de enseñanza por medio del estudio de casos.

Aquí, centrándonos en el modelo de enseñanza elaborado hasta ahora, vamos a presentar diferentes enfoques que hemos delimitado para el estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad en el mundo de los poliedros regulares. Damos cuenta de los análisis del contenido realizados que nos llevan a un posible enfoque para abordar el estudio y mostramos cómo el estudio de relaciones de inscripción puede surgir en el contexto de la actividad de clase, también con diferentes enfoques: en el contexto de los puzzles, cuando consideramos las estructuras estables y no estables, y a partir de una tarea de investigación en la que se pide a los estudiantes que recopilen en una tabla las características numéricas de los poliedros regulares convexos, así como el tipo de polígono de sus caras y el orden de sus vértices, y después se les cuestiona sobre las relaciones numéricas que observan en la tabla. Esta último enfoque nos lleva a introducir el concepto de dualidad en el mundo de los poliedros regulares.

Para cada uno de estos enfoques indicamos las características de los modelos de pares de poliedros regulares que se subrayan, que dotan a estos modelos de significados que provienen del uso que se hace de relaciones entre poliedros en los contextos en que se utilizan y que pasan a formar parte de los objetos mentales construidos para las relaciones de pares de poliedros regulares. Señalamos también el tipo de problemas que podemos abordar con cada uno.

ANTECEDENTES. UN MARCO DE REFERENCIA

Hay poca investigación en Didáctica de la Geometría sobre las relaciones de inscripción y dualidad de los poliedros regulares, aunque se ha mostrado ya la riqueza matemática que conlleva su estudio (Guillén, 1991, 1997; Mold, 1973), se ha planteado el problema como taller (Alsina y otros, 1997) y se ha centrado la atención en la determinación de las relaciones numéricas que hay entre las aristas de los poliedros implicados (Hopley, 1994).

Freudenthal (1973) ha destacado la conveniencia de trabajar los milagros del encaje en el estudio de la geometría, no sólo como preparación para el estudio de la geometría sistemática, sino también cuando este nivel se ha alcanzado (p. 414). El estudio de las relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares muestra este milagro del encaje: después de las actividades propuestas podría parecer que en Geometría todo encaja. Además, ese estudio permite tener diferentes representaciones físicas, que podemos utilizar en la enseñanza como soporte para el proceso de matematización, proceso que entendemos en el sentido de "la actividad de organización y estructuración en la que el conocimiento y las habilidades se evocan para descubrir regularidades, conexiones, estructuras [...] aún desconocidas" (Treffers, 1987, p. 247). Treffers (1987) ha señalado también que el proceso de matematización se mueve en dos direcciones, que él llamó "horizontal" —del "mundo real" a los objetos matemáticos— y "vertical" —en el interior de las matemáticas. Entender que el proceso de matematización está compuesto por esos dos movimientos es una consecuencia de la concepción de la naturaleza de las matemáticas que uno de nosotros (Puig, 1997) ha descrito como derivada de una lectura de Freudenthal (1983), según la cual los objetos matemáticos son medios de organización de objetos de nuestra experiencia (o "fenómenos"), que, objetivados por los sistemas matemáticos de signos en que se producen, se convierten en objetos de nuestra experiencia, que son organizados a su vez por nuevos medios de organización, es decir, nuevos objetos matemáticos, y así reiteradamente.

Así, situados en un mundo de fenómenos, los modelos de pares de poliedros inscritos uno en otro pueden surgir en un contexto de generar formas por diferentes procedimientos y al centrar la atención en las estructuras que son rígidas o que se deforman. Luego, en otro nivel de matematización, serán las características numéricas de los poliedros las que constituirán los fenómenos que requerirán una organización: surgirá de nuevo el estudio de relaciones de inscripción entre los pares de poliedros. También podemos abordar el estudio desde las matemáticas: delimitamos los pares de poliedros regulares que tienen relación de inscripción utilizando los conocimientos sobre las simetrías de los poliedros.

En primer lugar pues centramos la atención en los enfoques que conducen a tratar los conocimientos que se requieren para finalmente poder retomar el problema y organizar esos conocimientos desde una nueva perspectiva. Primero iremos de los fenómenos a las matemáticas al estudiar la descripción de los modelos a nivel local y en términos de simetrías que comparten, y luego iremos de las matemáticas a los fenómenos: ahora éstos se usarán como campo de aplicaciones.

METODOLOGÍA Y CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN

El estudio tiene como primer antecedente el proyecto de investigación descrito en Puig y Guillén (1983), en el que se plantea un modelo de enseñanza de la geometría cuyas características fundamentales para lo que nos ocupa aquí es la organización local frente a, por un lado, la ausencia de toda organización y, por otro, la organización global o axiomática, y el comienzo por las tres dimensiones para ir desde ellas a menos dimensiones. De esas dos características deriva el interés por el mundo de los poliedros, que no sólo es un mundo de tres dimensiones en el que los objetos de dos y una están presentes de forma perspicua, sino que admite con flexibilidad organizaciones locales. En Guillén (1991) se delimitan poliedros que tienen relación de inscripción de manera que mantienen las simetrías. En Guillén (1997) también se trata ese problema inmerso en uno más general —el estudio de la geometría de los sólidos— y se proponen actividades, organizadas siguiendo el modelo de razonamiento de van Hiele, para el estudio de algunas inscripciones de pares de poliedros regulares.

Desde 1998 a 2000 hemos perfilado el marco en el que encajar las secuencias de actividades propuestas en los diferentes enfoques, que dotan de sus significados a los objetos mentales que los estudiantes construyen para las relaciones de pares de poliedros regulares, dando a su vez cuenta de cómo vamos avanzando en la progresiva matematización, y, utilizando la idea de *Modelos Teóricos locales* como marco teórico y metodológico para la observación experimental, hemos puesto a prueba las diferentes secuencias de enseñanza elaboradas, analizado diferentes actuaciones de estudiantes y evaluado el efecto de la estrategia de enseñanza.

LOS ESTUDIANTES. EL DESARROLLO DE LAS CLASES

El estudio se desarrolló con estudiantes de Magisterio de la asignatura optativa de 4 créditos *Geometría del espacio,* del plan de estudios de la Diplomatura de Maestro de la Universitat de València, de los que una de nosotros era profesora. Esos grupos nunca han sido numerosos (entre 9 y 30), lo que permitía que los alumnos pudieran estar organizados en grupos. Al comenzar las clases, para situar el trabajo, presentábamos un resumen acentuando lo que ya se había trabajado en clases anteriores que tenía relación con los problemas que se iban a tratar. En el desarrollo de la clase: i) el profesor resolvía algunos problemas y lo hacía como si fuera él el resolutor; ii) los alumnos respondían a cuestiones que planteaba el profesor y resolvían algunos problemas con la ayuda de sugerencias que les aportaba el profesor; iii) las respuestas y las soluciones se discutían en común; iv) se hacía una síntesis y un debate de reflexión.

Los estudiantes disponían de modelos de poliedros para que pudieran utilizarlos. También distribuíamos láminas con dibujos de los modelos estudiados para facilitar que en casa los estudiantes pudieran recordar, comprender, registrar y comunicar lo tratado en clase.

La recogida y análisis de datos

Para averiguar la mayor cantidad posible de información sobre lo que aprenden los estudiantes sobre relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros realizamos un análisis de: i) las respuestas que dieron por escrito diferentes estudiantes (de los que participaron en la experimentación) a determinadas actividades que se plantearon para que se resolvieran en casa antes de tratarlas en clase, ii) las observaciones de clase y las discusiones, iii) las sesiones de trabajo, iv) las respuestas que dieron los estudiantes de la experiencia a cuestiones que se plantearon después de experimentar una unidad de enseñanza y, v) las entrevistas individuales realizadas a algunos estudiantes.

Para cada actividad propuesta, utilizamos las respuestas de varios alumnos con carácter exploratorio. En hojas diseñadas para ello, anotamos lo más característico de sus respuestas, que contrastamos con las de otros estudiantes. Para los datos recopilados en cintas de video o cassette, hicimos transcripciones literales (para algunas entrevistas) o resúmenes (para las sesiones de clase) que contenían lo que se consideraba más destacable de cada sesión, bien porque confirmaba lo observado con otros estudiantes, bien porque podía introducirse como algo nuevo que tenía que ser objeto de experimentación.

DIFERENTES ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DE LAS RELACIONES DE INSCRIPCIÓN EN EL MUNDO DE LOS POLIEDROS REGULARES

Análisis del contenido. Búsqueda de relaciones de inscripción entre los poliedros regulares convexos

En este estudio nos preocupamos de la búsqueda de relaciones de inscripción entre los poliedros regulares convexos. De todas las posibles nos van a interesar aquellas en las que los poliedros están colocados de manera que las simetrías comunes coincidan. Dado que los poliedros regulares pueden clasificarse en función de sus simetrías, con este criterio encontramos tres grandes grupos: el del tetraedro, el del octaedro y cubo y el del dodecaedro e icosaedro, de manera que uno puede verse como parte de otro, pues el grupo de simetrías del tetraedro es un subgrupo del grupo de simetrías del octaedro. Podemos así establecer de manera sistemática los pares de poliedros platónicos que pueden introducirse uno en otro de manera que las simetrías comunes coincidan (véase el capítulo 5 de Guillén, 1991).

Construir o generar formas

La construcción de modelos y armazones, modelar los sólidos con plastelina, juntar o transformar unos sólidos para obtener otros (u otras formas tridimensionales) permiten precisar y comprender propiedades de familias de sólidos y relaciones entre ellas o entre sus elementos. Dichas construcciones constituirán la base para la formación de las primeras “ideas” de las familias que introducimos (Guillén, 1997).

Por otra parte, el intento de describir las formas obtenidas puede ser un incentivo para desarrollar medios lingüísticos y, además, puede ser la base para determinar algunas relaciones entre familias de sólidos, entre determinados sólidos, o entre elementos del plano y del espacio: unos sólidos pueden verse como agregados de otros, unos polígonos encajan perfectamente en un sólido, etc. Centrándonos en lo relativo a este estudio, generar sólidos juntando sólidos y trabajar con determinados puzzles, permite explorar relaciones entre el tetraedro y cubo, el cubo y el dodecaedro, etc. Así se pueden enunciar relaciones como: Un tetraedro y 4 pirámides forman un cubo. Un cubo y 6 casquetes iguales forman un dodecaedro, etc. Además, se puede continuar trabajando relaciones entre poliedros que se enuncien verbalmente. Por ejemplo, una vez enunciado que “cuando al tetraedro se le añaden otras 4 pirámides a sus caras, se obtiene el cubo”, podemos centrar la atención en las 4 pirámides que se añaden y describir sus elementos en términos de los del tetraedro (modelo de partida) o del cubo (modelo obtenido).

Formas rígidas y formas que se deforman

Una vez que se ha llamado la atención sobre algunas formas que se presentan en la naturaleza (por ejemplo, los andamiajes, algunas cúpulas, etc.), a partir de actividades en las que se convierten en rígidas algunas estructuras de sólidos sencillos, se pueden introducir algunas relaciones entre sólidos: el tetraedro se puede inscribir en un cubo, el cubo se puede descomponer en tres (o seis) pirámides iguales. Estas observaciones conducen a conjeturar otras inscripciones entre poliedros regulares (p. e., el cubo podemos inscribirlo en el dodecaedro) y a plantear nuevas cuestiones: ¿Podremos inscribir el tetraedro en el dodecaedro? ¿Y el tetraedro en el octaedro?

Se retoman algunos resultados establecidos a partir de tareas de *puzzles y truncamientos*. Subrayaremos a partir de ellos los milagros del “encaje” en el estudio de los sólidos: cómo estas actividades permiten que se relacionen los sólidos entre ellos o con figuras planas (las que se obtienen como sección) y que se expresen estas relaciones de diferentes maneras y con mayor o menor precisión. Así, un cubo puede descomponerse en un tetraedro y 4 pirámides; un tetraedro se puede inscribir en un cubo de manera que sus aristas son diagonales de las caras del cubo, una por cada cara; los 4 vértices del tetraedro están en 4 vértices del cubo que no son opuestos entre ellos; son las caras del tetraedro las que se corresponden con los 4 vértices del cubo opuestos a los seleccionados para los vértices. Extendiendo la situación, también se puede precisar cómo inscribir un cubo en un dodecaedro.

Características de los poliedros regulares. Búsqueda de relaciones

La búsqueda de relaciones entre los poliedros regulares la abordaremos también desde otro punto de vista. Una vez determinadas las características numéricas (número de caras, vértices y aristas) de los poliedros regulares y su disposición en el espacio, así como el orden de sus vértices y el número de lados del polígono de las caras, y recopiladas en una tabla, podemos conjeturar, por ejemplo, que un cubo (octaedro) se puede inscribir en un octaedro (cubo) con los vértices del cubo en el centro de las caras del octaedro, o que un tetraedro (cubo) se puede inscribir en un cubo (dodecaedro) con las aristas del tetraedro sobre diagonales de las caras del cubo (dodecaedro).

SOBRE LOS PROBLEMAS OBJETO DE ESTUDIO

En cada uno de los enfoques descritos en el apartado anterior como problemas objeto de estudio, podemos plantearnos también describir modelos de pares de poliedros inscritos uno en otro, que representan estas relaciones, y construir estos modelos después de haber hallado la relación entre las longitudes de las aristas de esos poliedros, aplicando teoremas, como el de Pitágoras o el teorema del coseno (véase el capítulo 5 de Guillén, 1991). También es interesante comparar la actividad que se desarrolla con los diferentes enfoques y las dificultades que conllevan.

Las descripciones de los modelos podemos hacerlas en diferentes niveles en los distintos contextos en los que podemos plantear su estudio:

- En el contexto de construir o de generar formas: Aplicando relaciones entre determinados poliedros.
- Al centrar la atención en las formas rígidas y formas que se deforman: Fijándonos en los elementos de los poliedros regulares implicados.
- Al buscar relaciones numéricas: Conjeturando nuevas inscripciones y describiendo los modelos en términos de sus elementos utilizando nuestros recursos; esto es, aplicando resultados que vamos obteniendo al describir un modelo en la descripción de otro que se ha conjeturado.

Un problema interesante que surge en este último enfoque es la introducción de conceptos que conllevan bastante dificultad: el concepto de dualidad en el mundo de los poliedros. Podremos mostrar cómo se van precisando las ideas que se introducen a partir de un mundo reducido y muy específico de ejemplos y los problemas que hay que abordar cuando el mundo de ejemplos se extiende.

La descripción de los modelos puede hacerse también en términos de sus simetrías, esto es, determinando las simetrías comunes a los poliedros del modelo. Como problema previo se determinarán las simetrías de los poliedros regulares (véase el capítulo 3 de Guillén, 1991). Al tratar de describir diferentes modelos, de nuevo podremos hacer referencia a conocimientos que ya se han trabajado y usarlos para resolver otros problemas que se nos plantean.

REFERENCIAS

Alsina, C., Fortuny, J. M. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría?. Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid: Síntesis.

Filloy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Valencia: Universitat de València.

Hopley, R.B. (1994). Nested Platonic Solids: A Class Project in Solid Geometry, *The Mathematics Teacher*, *87*, 312-318.

Mold, J. (1973). *Solid Models* (de la serie “Topics from Mathematics”). Londres: Cambridge U.P.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, (pp. 61-94). Horsori/ICE: Barcelona.

Puig, L. y Guillén, G. (1983). *Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en EGB y Escuelas de Magisterio.* Memoria de Investigación.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project).* Dordrecht: D. Reidel.

INFLUENCIA DEL NIVEL ESCOLAR Y EL CONTEXTO EN EL CONOCIMIENTO INFORMAL DE CONCEPTOS INFERENCIALES

ANTONIO MORENO VERDEJO

I.E.S. "Trevenque", Granada

ANGUSTIAS VALLECILLOS JIMÉNEZ

Universidad de Granada

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

INFLUENCIA DEL NIVEL ESCOLAR Y EL CONTEXTO EN EL CONOCIMIENTO INFORMAL DE CONCEPTOS INFERENCIALES

❧

ANTONIO MORENO VERDEJO
I.E.S. "Trevenque", Granada
ANGUSTIAS VALLECILLOS JIMÉNEZ
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo presentamos parte de los resultados obtenidos en un estudio exploratorio sobre el conocimiento de conceptos básicos en inferencia estadística en estudiantes del nivel de secundaria. La toma de datos se ha llevado a cabo en dos cursos, 3º de E.S.O. y C.O.U., con 49 estudiantes de distinta edad y formación estadística previa. Para ello los estudiantes han contestado un cuestionario escrito que consta de dos partes y 12 preguntas sobre contenidos inferenciales básicos. Los enunciados se plantean en tres contextos distintos, concreto, narrativo y numérico. Sobre las respuestas de los alumnos se han llevado a cabo análisis, fundamentalmente de tipo cualitativo. Por tratarse de un estudio exploratorio nos preocupamos especialmente por determinar las cuestiones abiertas y formular interrogantes a resolver por la investigación experimental posterior más que por sacar conclusiones apresuradas. No obstante, hemos obtenido algunas conclusiones provisionales interesantes.

ABSTRACT

In this paper we in summary present part of our current results from an exploratory study regarding Spanish secondary school students' knowledge about basic statistical inference concepts. The data were taken from a total of 49 students from two different secondary school level, with different age and previous statistical formation. The student were asked to complete a written questionnaire about basic inferential concepts, which included tasks in three different contexts: concrete, narrative and numerical context. We mainly used qualitative analysis of students' answers. Since this is an exploratory study we mainly intend to determine open questions and to formulate new research problems for further research, instead of trying to reach hasty conclusions. In spite of this we have obtained some preliminary interesting results.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos parte de los resultados obtenidos en un estudio exploratorio sobre el conocimiento de conceptos básicos en inferencia estadística en estudiantes del nivel de secundaria. Este estudio exploratorio forma parte del proyecto de investigación “Dificultades teóricas, metodológicas y curriculares de la estadística inferencial en la enseñanza secundaria” que se desarrolla en la actualidad y cuyos propósitos son, en general, determinar áreas problemáticas, dificultades de los alumnos, entornos de aprendizaje favorables o cuestiones metodológicas que puedan servir como base para mejorar la enseñanza de la inferencia estadística en el nivel de secundaria. Algunos otros trabajos son Moreno y Vallecillos (1998; 1999a; 1999b; 2000; en revisión), Vallecillos (1996; 1999), Vallecillos y Moreno (1997).

En nuestro estudio hay algunos presupuestos previos: a) los conceptos estudiados se seleccionan en función de su inclusión en los currículos de secundaria; b) la inferencia estadística es una práctica cultural y c) la comprensión correcta de los conceptos no se produce espontáneamente.

Los actuales currículos de secundaria incluyen el estudio de situaciones de incertidumbre, el estudio de muestras, la representatividad muestral, los procesos de muestreo y las conclusiones que se pueden extraer del estudio de muestras de poblaciones determinadas. Un revisión crítica de este tema puede verse en Moreno (2000).

Las prácticas culturales, entre ellas la inferencia estadística, guían la actividad y facilitan el acceso al conocimiento matemático, indican cómo usar las herramientas. En este sentido, estudiaremos la diferencia en la comprensión y uso de los conceptos seleccionados en diferentes contextos y entre estudiantes con y sin formación estadística.

En Moreno (2000) se recogen diversas investigaciones que afirman que los estudiantes poseen concepciones erróneas sobre la influencia del tamaño de la muestra, sobre la aleatoriedad, sobre la variabilidad y representatividad de una muestra, y sobre la importancia atribuida al tipo de muestreo. Estas concepciones se encuentran muy arraigadas y son difíciles de cambiar.

Las razones anteriores justifican la necesidad de que la investigación educativa se ocupe de analizar el modo en que los alumnos realizan inferencias estadísticas recurriendo al estudio de la comprensión de diversos conceptos implicados y al modo en que los alumnos se enfrentan al propio proceso de inferencia. En nuestro trabajo distinguimos cuatro fases: a) análisis del conocimiento previo de conceptos de inferencia estadística de los estudiantes; b) construcción de un cuestionario específico para la toma de datos; c) administración del cuestionario a estudiantes de dos cursos de nivel de secundaria con diferentes conocimientos estadísticos previos y d) análisis de los resultados con un objetivo exploratorio, determinación de obstáculos, búsqueda de áreas problemáticas, dificultades de los alumnos, etc.

En este trabajo, por razones de espacio, presentamos los resultados que se refieren a los conceptos básicos de población y muestra y a las concepciones sobre el proceso de inferencia de los datos muestrales a la población de referencia.

METODOLOGÍA

Describimos, resumidamente, los objetivos, la muestra empleada así como el cuestionario y su forma de aplicación.

Objetivos

Los objetivos generales principales de este estudio son: a) evaluar las ideas que poseen los estudiantes del nivel de secundaria sobre conceptos básicos de inferencia estadística; b) estudiar comparativamente estas ideas en alumnos estadísticamente novatos con los que finalizan su formación secundaria y c) analizar la influencia en la conceptualización de distintos contextos de presentación de la pregunta.

Estos objetivos se concretan en los siguientes más específicos:

- Verificar si identifican importantes conceptos inferenciales básicos como la población y muestra de estudio en diferentes contextos;
- Estudiar las concepciones de los alumnos sobre algunas características esenciales de las muestras como la aleatoriedad y variabilidad;
- Explorar las concepciones iniciales de los estudiantes sobre el proceso de muestreo y su validez;
- Estudiar la influencia y el uso que hacen los estudiantes de sus conocimientos previos sobre estadística y probabilidad en los distintos contextos;
- Estudiar si los alumnos reconocen algunos sesgos en el proceso de muestreo y
- Estudiar la influencia que tiene en el proceso de inferencia el tamaño de la muestra estudiada.

Sujetos de estudio

El estudio se ha llevado a cabo con un en total 49 alumnos de dos Institutos de Enseñanza Secundaria de Granada. 30 de ellos pertenecen a 3er curso de la E.S.O. y no han recibido formación estadística previa, los otros 19 estudiantes pertenecen al curso de COU, son alumnos que terminan su formación secundaria este curso y pasarán a la Universidad el año próximo. Han recibido alguna formación previa en estadística descriptiva.

Cuestionario

Consta de doce preguntas referidas a los siguientes conceptos de inferencia estadística básica: conceptos de población y de muestra; el proceso de inferencia de la muestra a la población; la influencia del tamaño de la muestra en el proceso de inferencia; la influencia de distintos métodos de muestreo para realizar la inferencia; el concepto de aleatoriedad y la presencia de sesgos en el muestreo. Los enunciados se presentan en tres contextos distintos: a) concreto; b) de narración y c) numérico y está dividido en dos partes: la Parte I que contiene los enunciados en contexto concreto, requiere el empleo de material manipulativo (bolas, botellas de muestreo y baraja de naipes) y la intervención del investigador; la Parte II contiene los enunciados en los contextos narrativo y numérico y no es necesaria la intervención del investigador.

Por razones de espacio en esta comunicación presentamos los resultados que se refieren a los conceptos de población y muestra y al propio proceso de inferencia. Los ítems a los que corresponden estos resultados son los siguientes:

Ítem I.1: Conceptos de población y muestra en contexto concreto

Tenemos un saco de 100 bolas de dos colores, rojo y verde. Queremos estudiar el número de bolas de cada color. Para ello sacamos 25 bolas y observamos que 14 son rojas y 11 son verdes. Indica:
El conjunto de objetos sobre el que se realiza el estudio:
La muestra que se observa:

Ítem II.1: Conceptos de población y muestra en contexto narrativo

Para conservar alimentos en casa la mayoría de las veces se utilizan tarros de mayonesa para evitar comprar tarros especiales. La revista Conservas quiere saber que porcentaje de tarros de mayonesa se rompen cuando se utilizan para conservas. La revista consiguió 10 tarros de ma-

yonesa para conservar tomate. Solamente tres de ellos se rompieron.
Identifica:
El conjunto de objetos sobre el que se realiza el estudio:
La muestra que se observa:

Ítem II.2: Conceptos de población y muestra en contexto numérico
El Ayuntamiento se plantea quitar un parque para construir unos aparcamientos. Se desea conocer la opinión de los habitantes mayores de 18 años y para ello se encuesta a 450 de ellos. El 70% no desea que se quite el parque.
Indica: La población de la que se desea obtener información:
La muestra que se observa:

Ítem I.2: Proceso de inferencia en contexto concreto
Tu profesor acaba de enseñarte una muestra formada por cinco cartas. Sabiendo que en el mazo hay 30, ¿cuántas crees que serán rojas?. Indica la razón.

Ítem II.3: Proceso de inferencia en contexto numérico
El Ayuntamiento de Granada ha iniciado una campaña explicando que se debe hacer cuando queremos deshacernos de muebles en mal estado. Quiere saber si las instrucciones han resultado claras y comprensibles. La población de Granada es 300.000 personas así que decide preguntar a 2000 adultos de Granada sobre lo que piensan. Han preguntado a personas de barrios grandes y de barrios pequeños, algunos hombres y algunas mujeres, algunos jóvenes y otros más mayores, y a algunos que viven en casas y algunos que viven en pisos. Están seguros de que tienen un variado grupo de personas. El resultado de la encuesta es que el 73% de estos adultos creen que las instrucciones del Ayuntamiento son claras y el 27% piensan que no lo son.
¿Qué puedes decirle al Ayuntamiento sobre el porcentaje de adultos en toda Granada que piensa que las instrucciones son claras?
a. El 50% porque probablemente la mitad de las personas pensaron que las instrucciones eran claras y la mitad de ellos pensó que no lo eran.
b. El 73% porque los adultos a los que se les preguntó dan una idea general de lo que ocurriría si se preguntase a toda la población.
c. No puedo decir nada porque el resultado de la encuesta podría haber sido cualquier otro.
d. No puedo decir nada porque no pueden preguntar a todos los adultos de la ciudad.
e. Sería el ________________________________ porque ______________________
____

Procedimiento de aplicación

Los estudiantes de cada grupo completaron el cuestionario al mismo tiempo siguiendo las indicaciones del investigador. El grupo de COU contestó el cuestionario en una sesión de 60 minutos, mientras el grupo de 3º de ESO necesitó una sesión para la Parte I del cuestionario y una segunda sesión para la Parte II.

En el ítem I.2 el investigador interviene modo que se describe a continuación: extrae al comienzo de la sesión 22 cartas de un mazo de 52 y, sin mirarlas, son apartadas del resto. Se explica entonces a los alumnos que nos proponemos conocer la proporción de cartas de rojas y negras que contiene el mazo de

30 cartas que nos quedan y para ello se realiza una extracción de cinco cartas, se enseña la muestra a los alumnos que apuntan su composición y se les pide que contesten a continuación el ítem 2.

Durante la sesión, los alumnos trabajaron el cuestionario de forma individual. Se evitó introducir en el cuestionario términos técnicos (población, muestreo, etc.) pero si los alumnos tenían alguna duda se resolvía de forma individual evitando que la explicación orientara la respuesta. Si aún así, el estudiante continuaba sin comprender la cuestión, se le pedía que la dejase sin contestar.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Por razones de espacio recogemos aquí los resultados que se refieren sólo a los conceptos de población y muestra y al propio proceso de muestreo.

Conceptos de población y muestra

En la Tabla 1 tenemos resumidos los datos acerca de la identificación de la población y la muestra.

Identifican la población de estudio en el contexto concreto el 57.1% de todos los estudiantes, mientras que sólo lo hacen el 49% en los contextos narrativo y el numérico.

Identifican la muestra el 30.6% de los estudiantes en el contexto concreto, el 22.4% en el contexto narrativo y el 20.4% en el numérico.

No identifican la población ni la muestra en el contexto concreto el 42.9%, el 48.9% en el narrativo y el 49% en el contexto numérico.

En estos primeros resultados globales se observa un mayor porcentaje de alumnos que identifican la población o la muestra o no identifican ninguna de ellas en el contexto concreto que en el narrativo y el numérico. Parece deducirse de ellos claramente una ordenación de los contextos, concreto, narrativo, numérico, de mayor a menor facilidad para los alumnos en cuanto a la identificación de los conceptos analizados se refiere.

En el estudio por cursos, el 53.3% de los alumnos de ESO identifican la población frente al 63.2% de los de COU en el contexto concreto; el 50% de los alumnos de ESO lo hacen frente al 47.4 % de los de COU en el contexto narrativo y en el contexto numérico los resultados obtenidos son el 33.3% en el grupo de ESO y el 73.6% de los alumnos de COU.

Los resultados para el grupo de ESO (53.3%, 50.0%, 33.3%) mantienen el orden inicial para los contextos (concreto, narrativo, numérico) de mayor a menor facilidad. Para el grupo de COU (63.2%, 47.4%, 73.6%), sin embargo se deduce que ha resultado para ellos más familiar y más fácil el contexto numérico para la identificación de la población estudiada. Comparativamente, los porcentajes de alumnos que identifican la población, son mas altos para los alumnos de COU en los contextos concreto y numérico, con una diferencia especialmente notable para el caso numérico. En el narrativo son ligeramente más altos los porcentajes del grupo de ESO (50%, 47.4%).

Tabla 1: Identificación de población y muestra

Frecuencia % Grupo	ESO			COU		
	Id. Población	Id. Muestra.	NP / NM	Id. Población	Id. Muestra	NP /NM
Concreto	14 53.3	7 23.3	14 46.7	12 63.2	8 42.1	7 36.8
Narrativo	15 50.0	5 16.7	15 50.0	9 47.4	6 31.6	9 47.3
Numérico	10 33.3	3 10.0	20 66.6	14 73.6	8 42.1	4 21.1

Si analizamos la identificación de la muestra por cursos observamos los datos siguientes: en el contexto concreto lo hacen el 23.3% de los alumnos de ESO frente al 42.1% de los de COU; en el narrativo el 16.7% de alumnos de ESO frente al 31.6% en COU; en el contexto numérico lo hacen el 10% en ESO y el 42.1% en COU.

Los resultados para el grupo de ESO (23.3%, 16.7%, 10%) mantienen el orden citado (concreto, narrativo, numérico) para los contextos de mayor a menor facilidad. En COU los resultados (42.1%, 31.6%, 42.1%) sin embargo indican pocas diferencias entre los contextos. Comparativamente, los resultados obtenidos por el grupo de ESO son considerablemente más bajos que los de COU. También las diferencias, con respecto al caso de la identificación de la población, son considerablemente más grandes que las anteriores. Estos datos son un indicador inicial de una posible mayor dificultad para la identificación de la muestra que la de la población en todos los contextos y por cursos.

No identifican la población ni la muestra, por cursos, el 46.7% de los alumnos de ESO frente al 36.8% de los de COU en el contexto concreto; el 50% en ESO frente al 47.3% en COU en el narrativo y el 66.6% en ESO frente al 21.1% en COU.

Comparando nuevamente por contextos, los resultados para ESO son (46.7%, 50%, 66.6%) y para COU (36.8%, 47.3%, 21.1%) observamos que las diferencias son ciertamente notables, excepto para el contexto narrativo. La diferenciación mayor se produce en el contexto numérico, en donde se observa una diferencia entre los porcentajes del 45%.

En resumen: muchos estudiantes de ambos niveles de enseñanza no identifican los conceptos básicos de población y muestra si bien hay diferencias importantes en los porcentajes de éxito en los ítems correspondientes en función del contexto. El concreto es el que ofrece mayor porcentaje de respuestas correctas. El grupo de COU ofrece mejores resultados globales que el de ESO y en el contexto numérico. Las dos terceras partes de los alumnos de ESO no identifican ni la población ni la muestra mientras que en COU no lo hacen la quinta parte.

Proceso de inferencia de la muestra a la población

Para categorizar las respuestas de los alumnos se utilizó inicialmente la clasificación en tres grandes grupos según los *criterios de descripción de la población* empleados en ellas descrita en Moreno (2000). Estos fueron:

C1) *Concepción inferencial*: El proceso de inferencia está sujeto al azar y no permite determinar con precisión las características de una población a partir de las de una de sus muestras.

C2) *Concepción de identidad*: El proceso de inferencia permite describir la población con características idénticas a las de una de sus muestras.

C3) *Concepción previa*: La población tiene unas características descritas por ideas previas y no por las observadas en la muestra extraída.

En el contexto narrativo hemos encontrado hasta un 20.4% del total de respuestas que expresan la idea de que la encuesta no permite saber nada si no se estudia toda la población. Hemos añadido, pues, una nueva categoría en la clasificación anterior que hemos llamado *concepción determinista:*

C4) *Concepción determinista:* Solo el estudio de la población completa permite determinar sus características propias.

En la Tabla 2 están resumidos los resultados obtenidos según los contextos y por grupos de estudiantes. Como puede verse en ella, en los dos contextos y en los dos grupos la mayoría de los alumnos manifiestan la *concepción de identidad*, C2, en el proceso de inferencia. Se manifiesta independiente del contexto y en porcentajes altos, en general, y especialmente en COU. En este curso el porcentaje de alumnos que manifiestan esta concepción es especialmente alto en el contexto concreto.

El número de respuestas en blanco es mayor en el contexto concreto, 18.4%, que en el contexto narrativo, 10.2%.

Por cursos, los porcentajes de aparición de C2 en ambos contextos están en torno al 60% en ESO y entre el 60 y el 87% en COU.

La concepción C4 aparece en el 23.1% de las respuestas de los alumnos de ESO y en un 22.2% de las de COU.

En resumen: muchos alumnos manifiestan la *concepción de identidad* en sus respuestas acerca del proceso de inferencia que es una manifestación explícita de la heurística de la representatividad descrita por Kahneman y cols. (1982) en otro contexto.

Tabla 2: Concepciones sobre el proceso de inferencia

Frecuencia % Grupo	ESO				COU			
	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C4
Concreto		15 60.0	10 40.0			13 86.7	2 13.3	
Narrativo	5 19.2	15 57.7		6 23.1	3 16.3	11 61.1		4 22.2

CONCLUSIONES

En este estudio hemos llevado a cabo una exploración organizada de los conocimientos que poseen dos grupos de estudiantes de nivel de secundaria sobre unos conceptos inferenciales básicos para el aprendizaje formal de la inferencia estadística en este nivel de enseñanza.

Hemos encontrado importantes errores que afectan a los conceptos de población y muestra en todos los contextos en los que se han presentado las preguntas correspondientes. Estos resultados son llamativos porque podría suponerse que, al tratarse de conceptos subyacentes en muchas actividades de la vida diaria en diversas formas, los estudiantes tienen muchos ejemplos y situaciones que les sirven de base para construir estos conceptos.

El estudio de una muestra no proporciona una buena estimación de las característica de la población estudiada, en opinión de muchos alumnos. Tampoco parecen apreciar claramente las ventajas de la aleatoriedad frente a otros tipos de muestreo.

Todos estos resultados han sido obtenidos de un estudio exploratorio sobre una muestra intencional de estudiantes y no pueden ser generalizados en absoluto. Sin embargo, dibujan un panorama de concepciones e ideas previas de los estudiantes de secundaria que es necesario tener en cuenta por las implicaciones de todo tipo que de ellas se derivan. En nuestro caso nos han servido de momento para generar una serie de hipótesis de investigación sobre las que es necesario trabajar mucho todavía con el fin de diseñar una metodología de trabajo para la enseñanza basada en teorías generadas por la observación sistemática y organizada de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística inferencial en este nivel de enseñanza.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación PB97-0827 de la Dirección General de Enseñanza Superior, MEC, Madrid.

REFERENCIAS

Kahneman, D., Slovic, P., y Tverky, A. (eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Moreno, A. (2000). *Investigación y enseñanza de la estadística inferencial en el nivel de secundaria*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Moreno, A. y Vallecillos, A. (1998). El muestreo en la enseñanza secundaria. En F. Muñoz, D. Cárdenas y A. López (Eds.): *Actas de las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales",* (pp. 249-254). Jaén: S.A.E.M. "Thales".

Moreno, A. y Vallecillos, A. (1999a). ¿Cuántas ranas hay en la charca?. *Actas de las 9º Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, (pp. 294-296). Lugo: CEFOCOP.

Moreno, A. y Vallecillos, A. (1999b). La educación estadística en la sociedad actual. En: I. Berenguer, J. M. Cardeñoso y M. Toquero (Eds.): *Investigación en el aula de matemáticas: Matemáticas en la sociedad,* (pp 253-261). Granada: Universidad de Granada y Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

Moreno, A. y Vallecillos, A. (en revisión). Exploración de concepciones iniciales sobre procesos inferenciales. *Educación Matemática*.

Moreno, A.; Vallecillos, A. (2000). Dificultades en la comprensión de conceptos básicos de inferencia estadística en la educación secundaria. En: A. Gámez, C. Macías y C. Suárez (Eds.): *Actas del IX Congreso Andaluz de Educación Matemática "Thales*", (pp. 109-111). Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Vallecillos, A. (1996). *Inferencia Estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Granada: Comares.

Vallecilllos, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testing hypotheses. Ponencia invitada, Topic IPM 58. *Proceeding of the 52nd Session of the International Statistical Institute*, Vol. 2, Tome LVIII, pp. 201-204. The Netherland: ISI.

Vallecillos, A. y Moreno, A. (1997). Los profesores de matemáticas y la inferencia estadística en la enseñanza secundaria. En I. Berenguer, B. Cobo y F. Fernández (Eds.): *Investigación en el aula de Matemáticas: La tarea docente,* (pp. 279-287). Granada: Universidad de Granada y Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

UN ESTUDIO SEMIÓTICO DEL RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

RAFAEL ROA

CARMEN BATANERO

Universidad de Granada

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

UN ESTUDIO SEMIÓTICO DEL RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

❧

RAFAEL ROA
CARMEN BATANERO
Universidad de Granada

RESUMEN

En esta comunicación analizamos los procesos de resolución de problemas combinatorios simples por parte de alumnos con alta preparación matemática. Nuestro análisis muestra la complejidad de la actividad matemática, incluso elemental, que implica objetos de diferente naturaleza (ostensivos, extensivos, actuativos, intensivos y validativos) puestos en relación en una cadena de procesos semióticos.

ABSTRACT

In this paper we analyse the processes of solving simple combinatorial problems by students with advanced mathematical training. Our analysis show the complexity of even elemental mathematical activity, implying different types of objects (ostensive, extensive, actuative, intensive and validative), which should be related in a chain of semiotic processes.

Según Inhelder y Piaget (1955), el razonamiento combinatorio se desarrolla en el período de las operaciones formales. Sin embargo, Fischbein y Grossman (1997) analizaron los esquemas subyacentes en las estimaciones intuitivas de los adultos del valor de las operaciones combinatorias, observando que se sustituye el conjunto requerido de operaciones por operaciones binarias. Marchand (1994) indica que muchos adultos no llegan a alcanzar un razonamiento combinatorio completo. Navarro-Pelayo (1994) analizó el razonamiento de alumnos de secundaria con y sin instrucción, mostrando una dificultad generalizada en la resolución de los problemas (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1996; Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1997 a, b).

En este trabajo analizamos la resolución de problemas combinatorios por alumnos con alta preparación matemática, para aportar una explicación semiótica de los errores cometidos.

EL ESTUDIO

El cuestionario contiene 11 problemas simples (ítems 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 y 13) tomados de Navarro-Pelayo (1994), que se dividen, según la clasificación de Dubois (1984) en tres esquemas: Selección (ítems 1, 6, 11 y 13), que enfatiza la idea de muestreo, colocación (ítems 3, 8, 9 y 12), relacionado con la idea de aplicación y partición de un conjunto en subconjuntos (ítems 4, 5 y 10). Además de estos problemas, en los que tenemos en cuenta las diferentes operaciones combinatorias, tipo de elementos y tamaño de las soluciones, hemos incluido dos problemas combinatorios compuestos (problemas 2 y 7), tomados de Gascón (1988).

La muestra estuvo compuesta por 120 alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, Universidad de Granada; 29 de 4º curso, especialidad Metodología, 78 de 5º curso de la misma especialidad y 13 de 5º curso, especialidad de Estadística. En la Tabla 1 presentamos los porcentajes de soluciones correctas, comparándolos con los obtenidos por Navarro-Pelayo (1994). Los resultados en algunos problemas son similares a los de los alumnos de secundaria con instrucción. El número medio de respuestas correctas fue 5.5.

Para explicar esta dificultad, se llevó a cabo un estudio cualitativo con cuatro alumnos. Preveíamos dos tipos de razonamiento: a) El del estudiante que recuerda las definiciones de las operaciones combinatorias y sabe aplicarlas a los problemas propuestos; b) El del alumno que ha olvidado estas definiciones o no sabe aplicarlas y recurre a otras estrategias. Para cada uno de estos tipos seleccionamos un estudiante con buenos resultados y otro con dificultades en la resolución de problemas.

Tabla 1. Porcentaje de soluciones correctas en cada problema del cuestionario

	Grupo de alumnos		
Problema	Secundaria sin instrucción (n=352)	Secundaria con instrucción (n=368)	Licenciatura de Matemáticas (n=120)
1	16.3	27.6	50.0
2			48.6
3	26.9	26.7	70.7
4	0.3	6.0	9.3
5	32.3	39.2	60.1
6	22.6	46.0	60.5
7			8.7
8	3.8	41.8	45.9
9	13.1	7.4	33.6
10	31.0	37.2	64.5
11	12.5	59.1	41.9
12	10.6	29.5	35.1
13	9.5	59.7	53.8

ANÁLISIS SEMIÓTICO DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Para analizar los procesos de resolución de los problemas a partir de los textos producidos por los estudiantes, complementados con entrevistas, aplicamos el modelo de Godino (Godino, 1998; Godino y Batanero, 1999) que considera los siguientes tipos de objetos en la actividad matemática:

· *Extensivas:* situaciones-problemas, aplicaciones;
· *Ostensivas:* términos, símbolos, gráficos;
· *Actuativas*: técnicas, estrategias, algoritmos, operaciones;
· *Intensivas*: ideas matemáticas, conceptos, propiedades;
· *Validativas:* demostraciones, comprobaciones, justificaciones.

El protocolo de resolución de cada alumno y cada problema fue dividido en unidades de análisis para identificar las entidades descritas. En lo que sigue ejemplificamos el análisis realizado con el problema 4.

Problema 4: Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Identificamos el esquema de partición (dividir el conjunto de coches en varios subconjuntos, para darlos a uno, dos o tres de los hermanos). Para encontrar la operación combinatoria que resuelve el problema, hay que traducir el enunciado al esquema de selección. Repartir los coches a los chicos equivale a seleccionar cuál hermano se quedará con cada coche. Se puede seleccionar una persona más de una vez (para recibir más de un coche) y el orden es importante (indica el color del coche a recibir). La solución es $VR_{3,4}$. A continuación analizamos el proceso de resolución del problema para cada estudiante.

Caso 1. Adolfo

Fue el único estudiante de la muestra que resolvió correctamente los 13 problemas, y nunca usó las fórmulas. No estudió combinatoria en bachillerato, aunque sí en la licenciatura. No recordaba las fórmulas combinatorias. Al analizar el proceso (correcto; Figura 1), observamos que interpreta el problema según el esquema de partición.

Adolfo necesita objetos *ostensivos* para representar los datos (el numeral 4, letras para los objetos), acciones (las palabras "da" y "repartir", el símbolo +), y los resultados (disposiciones tabulares para los posibles repartos). Aplica algoritmos (enumeración sistemática) y estrategias (fijar variables); son los elementos *actuativos.* Por ejemplo, en el caso 2, fija el número de coches que recibe cada una de las dos personas, que puede ser 3 y 1, 2 y 2 ó 1 y 3. Resuelve el conjunto relacionado de subproblemas mediante recursión (para producir la permutación de los objetos a repartir). En cada subproblema aplica la enumeración sistemática.

Durante la resolución Adolfo plantea nuevos problemas (*elementos extensivos)* relacionados con el dado, aunque de menor complejidad. En los pasos U1, U2 y U6 descompone el problema en subproblemas: repartir los 4 coches dando todos al mismo hermano (caso 1), a dos de los hermanos (caso 2) y a los tres hermanos (caso 3).

Aplica propiedades e ideas matemáticas (*elementos intensivos*), como la regla de la suma (U9). Por último realiza argumentaciones (*Validativas)* para justificar los pasos que sigue. En U2 generaliza la igualdad del número de formas de repartir los coches entre dos hermanos. También usa la generalización en U4, U5 y U8. Resaltamos la complejidad de la solución de Adolfo, comparada con aplicar directamente la fórmula.

Figura 1. Solución de Adolfo

U1 *Caso 1: a) Le da los 4 coches a Fernando; b) Le da los 4 coches a Luis; c) Le da los 4 coches a Teresa.*
U2 *Caso 2: Da los 4 coches a 2 de sus hermanos. Veamos que posibilidades hay:*
A) a) Fernando y Luis b) Fernando y Luis c) Fernando y Luis

a) (3 c.) (1 c.)	b) (2 c.) (2 c.)	c) (1 c.) (3 c.)
ABV R	AB VR	análogo a a)
ABR V	AV BR	
ARV B	AR VB	
BRV A	BV AR	
	BR AV	
	BR AB	
Hay 4 formas	Hay 6 formas"	

U3 *Luego hay 14 formas diferentes de repartir entre Fernando y Luis.*
U4 *B)Análogamente hay 14 formas diferentes entre Fernando y Teresa.*
U5 *C)Análogamente hay 14 formas diferentes entre Luis y Teresa.*
U6 *Caso 3: Todos los hermanos tienen algún coche.*
A) Fernando 2, Luis 1, Teresa 1
AB V R
BV A R
AB R V
BV R A
AV B R
BR A V
AV R B
BR V A
AR B V
BR A B
AR V B
RV B A
U7 *Luego el caso A) tiene 12 posibilidades*
U8 *Análogamente, el caso B) Luis 2, Fernando 1, Teresa 1 tiene 12 posibilidades*
Análogamente, el caso C) Teresa 2, Fernando 1, Luis 1 tiene 12 posibilidade.
U9 *Sumando todas las opciones tengo:*
Caso 1 + caso 2 + caso 3 = 3 + (14+14+14) + (12+12+12) = 81 formas diferentes

Durante la resolución Adolfo plantea nuevos problemas (*elementos extensivos)* relacionados con el dado, aunque de menor complejidad. En los pasos U1, U2 y U6 descompone el problema en subproblemas: repartir los 4 coches dando todos al mismo hermano (caso 1), a dos de los hermanos (caso 2) y a los tres hermanos (caso 3).

Aplica propiedades e ideas matemáticas (*elementos intensivos*), como la regla de la suma (U9). Por último realiza argumentaciones (*Validativas)* para justificar los pasos que sigue. En U2 generaliza la igualdad del número de formas de repartir los coches entre dos hermanos. También usa la generalización en U4, U5 y U8. Resaltamos la complejidad de la solución de Adolfo, comparada con aplicar directamente la fórmula.

Caso 2. Luisa

Estudió combinatoria en Bachillerato, y en la licenciatura. Recuerda las fórmulas combinatorias, aunque le costó reconstruir algunas, ya que aprendió las operaciones combinatorias con el esquema de selección. Resuelve 12 problemas correctamente, aplicando directamente las operaciones combinatorias traduciendo el enunciado al esquema de selección. El único problema que resuelve incorrectamente es el 4, donde no supo traducir convenientemente para identificar la operación combinatoria. En la Figura 2 transcribimos su solución.

Figura 2. Solución de Luisa

U1	*A, B, V, R*
U2	*Hay que tener en cuenta que los coches son distinguibles*
U3	*Casos: Que le de a uno solo los 4 coches: 4 posibilidades*
U4	*Que le de a uno 3 coches:* $4.C_4^3$
U5	*Que le de a uno 2 coches y a otro otros 2:* $C_4^2 \,.\, 4 \,.\, 3$
U6	*Que le de a uno 2 coches y a cada uno de los otros 2 un coche:* $C_4^2 \,.\, 4 \,.\, C_3^2$
U7	*Que le de uno a cada uno:* P_4
U8	*Se suman todas las posibilidades*
U9	*F L T: 4 0 0, 3 1 0, 3 0 1, 2 1 1, 2 2 0, 2 0 2, 1 3 0, 1 2 1* *1 1 2, 1 0 3, 0 4 0, 0 0 4, 0 3 1, 0 2 2, 0 1 3*

U1: Luisa interpreta los datos e introduce una notación simbólica para los elementos a repartir (ostensivo).

U2: Reconoce que los objetos a repartir son distinguibles (intensivo)

U3-U7: Descompone el problema en subproblemas. Resuelve un problema auxiliar (extensivo): enumerar las particiones del número cuatro, usando la enumeración sistemática (actuativo). No traduce el enunciado del problema, sino usa el esquema de partición.

U3: Confunde el número de hermanos (3) y considera 4 niños en el reparto. Seguiremos la resolución del problema, admitiendo como correcto que hay cuatro niños.

U4: Hay que seleccionar el niño al que se dará el coche (4 casos según la interpretación dada) y los coches que se darán C_4^3. Aplica la idea de combinación (elección de 3 objetos entre 4 dados, sin que el orden sea relevante), dando un valor adecuado a los parámetros. Identifica y aplica correctamente la regla del producto (intensivo).

U5: Aplica la regla del producto y la idea de combinación C_4^2 (elegir 2 coches entre cuatro); usa la recursión; para elegir el primer niño hay 4 casos y para el segundo sólo quedan 3. Aplica la propiedad $C_m^n = C_m^{m-n}$ *(intensivos).*

U6: Razonamiento similar, aunque ahora produce un error; para elegir los dos coches que dará a uno de los hermanos usa correctamente la idea de combinación C_4^2; es correcto el número de posibilidades de elegir al niño (4 casos); pero para elegir a los otros dos niños a los que dará los coches restantes, confunde la operación combinatoria que debe ser variaciones, ya que los coches son distinguibles. La alumna usa la notación de las combinaciones (ostensivo).

U7: Idea de permutación (intensivo) y su notación (ostensivo) que estarían correctamente aplicadas si hay 4 niños en el reparto.

U8: Aplica la regla de la suma (intensivo).

U9: La alumna trata de comprobar su solución (validativo), y calcular el número total de casos, que no aparece en los pasos anteriores. Usa una disposición tabular (ostensivo), y enumera las descomposiciones del número 4 en sumandos para analizar el número de coches a repartir (actuativo). La enumeración no es sistemática, ni consistente con la interpretación de que hay cuatro niños, y que los coches son distinguibles. Solo tiene en cuenta el número de coches que recibe cada chico.

Caso 3. Pedro

Hizo una prueba deficiente (sólo resuelve correctamente 5 problemas). Estudió combinatoria en bachillerato y en la licenciatura. Tiene inseguridad en las definiciones de las operaciones combinatorias y no recuerda las fórmulas. Resuelve los problemas enumerando. Reproducimos su solución en la Figura 3.

Figura 3. Solución de Pedro.

U1	*400-040- 004*
	301-130- 013-310-03-103
	220-022-202
	121- 211-112

Pedro introduce una notación para el número de coches a repartir, pero no tiene en cuenta quien los recibe. Usa el esquema de partición, puesto que usa grupos de tres dígitos para representar el número de coches que recibe cada hermano. Descompone correctamente el número 4 en tres sumandos, pero considera indistinguibles tanto los objetos como los conjuntos de la partición.

Caso 4. Juan

Recuerda las definiciones de las operaciones combinatorias y trata de resolver todos los problemas con ellas, aunque sólo resuelve cuatro correctamente (Figura 4).

Figura 4. Solución de Juan

U1	*A, B, V, R Fer., Luis, Ter.*
U2	*Cuenta el orden y la naturaleza de los elementos (el orden va a ser necesario para tener en cuenta cual coche se lleva cada hermano, es decir, es distinto que le toque a*
U3	*un hermano el coche verde que el azul) y, por tanto:*
	$V_{4,3} = 4!/(4-3)! = 4!/1! = 24$ maneras posibles.

U1: Introduce una doble notación para designar los datos del problema (ostensivos).

U2: Intenta resolver el problema aplicando el esquema de selección, que estudió en las definición de las operaciones combinatorias. Trata de traducir el problema (extensivo). Traduce la condición de ser coches distintos por tener en cuenta el orden (intensivo).

U3: Reconocimiento incorrecto de la operación combinatoria (intensivo), ya que no identifica la repetición. Identificación incorrecta de los parámetros, ya que al traducir al esquema de selección los parámetros se intercambian entre si (intensivo). Fórmula mal desarrollada.

CONCLUSIONES

Nuestro análisis identifica los elementos puestos en juego correcta o incorrectamente por los alumnos al resolver el problema, y muestran la complejidad de este problema, aparentemente sencillo, y la diversidad de estilos de resolución de los alumnos. Sólo Juan aplica directamente la definición de operaciones combinatorias que estudió mediante el esquema de selección, mediante una regla nemotécnica (importa-no importa el orden; hay o no repetición). Regla que es improductiva en los problemas que se presentan en un esquema diferente (partición o colocación) si el alumno es incapaz de traducir el problema al modelo de selección.

Si no identifica la operación combinatoria directamente; el alumno divide el problema en otros relacionados con el dado, planteando la partición del número cuatro en sumandos (Adolfo, Luisa y Pedro). Sólo Adolfo plantea correctamente todos los subproblemas requeridos. Fallos relacionados con la persona que recibe los objetos (Pedro) y los objetos a repartir (Luisa y Pedro), llevan a una solución incorrecta.

Los alumnos realizan diferentes tipos de acciones. Una primera es traducir el enunciado al modelo de selección que sólo realiza Juan de forma incorrecta. El resto de los alumnos recurre a la enumeración, que en Luisa no es sistemática. Adolfo y Luisa fijan con éxito valores de las variables para enunciar problemas más sencillo. Mientras Adolfo resuelve correctamente la serie de problemas generados recursivamente Luisa trata de resolver los pasos intermedios con fórmulas, pero comete errores. Juan identifica y desarrolla incorrectamente la operación combinatoria.

Para representan los conceptos y datos con los que trabajan, usan simbolización algebraica o numérica, disposiciones tabulares, expresión de la fórmulas combinatorias, y sus parámetros, expresión de las reglas de la suma producto y cociente y de las operaciones aritméticas. También en este caso hay errores.

Los alumnos usan ideas y propiedades combinatorias que varían con la solución. Sólo Juan usa elementos del esquema de selección (incorrectamente), mientras los otros usan elementos del esquema de partición. Sólo Adolfo identifica correctamente las condiciones del esquema dadas en el enunciado. Adolfo y Luisa ligan correctamente soluciones parciales con la regla de la suma y Luisa usa una propiedad de los números combinatorios. Finalmente los alumnos usan elementos validativos como la generalización correcta (Adolfo), la enumeración (Luisa) y justificación de las condiciones del esquema (Juan) en estos dos últimos casos incorrectamente.

En nuestro modelo teórico concebimos la evaluación de la comprensión como el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales, en este caso la correspondencia entre el significado de los conceptos combinatorios para estos alumnos y el que recibieron durante sus estudios, donde las operaciones combinatorias fueron definidas en el esquema de selección y la principal actividad práctica fue la resolución de problemas directamente mediante la identificación de la operación combinatoria

El análisis de los protocolos, muestra que la resolución de los problemas requiere una diversidad de objetos que hemos explicitado. Aunque aquí presentamos el análisis de un solo problema, este proceso fue repetido con los 12 restantes, manifestando la variedad de elementos usados por los alumnos, que para cada uno de ellos constituye el *significado personal* de los conceptos combinatorios. En cada paso del proceso de resolución estos objetos se ponen en correspondencia. En la unidad U1 del protocolo de Pedro, observamos como asocia (pone en correspondencia) los coches a repartir y los niños con una notación "*A, B, V, R , Fer., Luis, Ter.*". Es decir, establece una función semiótica entre objetos ostensivos (expresiones) y objetos extensivos imaginados (contenido de la función semiótica).

Siguiendo a Godino y Batanero (1997), puede ser útil considerar un razonamiento matemático como una secuencia de funciones semióticas (o cadena de conocimientos puestos en relación) en el proceso de resolución de un problema por parte de un sujeto. Esto permite interpretar el *conocimiento* y la *comprensión* de un objeto, por parte de una persona, en términos de las funciones semióticas que pueden establecerse.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto BSO2000-1507. MEC. Madrid

REFERENCIAS

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997a). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997 b). Assessing combinatorial reasoning. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.

Godino, J. D. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. *VIII Congreso internacional de la Asociación Española de Semiótica.* Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). A semiotic and anthropological approach to research in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 10 URL:http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome10/art7.htm

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En: I. Vale y J. Portela (Eds), *Actas IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática* (pp. 25-46). Guimaraes: Associaçao de Profesores de Matemática.

Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 37-57.

Fischbein, E. y Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 27-47.

Gascón, J. (1988). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955*). De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. París:* Presses Universitaires de France.

Marchand, H. M. (1994). The resolution of two combinatorial tasks by mathematics teachers. *Proceedings of the 18 PME Conference*, Lisbon (Short oral presentation).

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Bachillerato. *Educación Matemática*, 8(1), 26-39.

V SIMPOSIO SEIEM

GRUPOS DE TRABAJO

Aprendizaje de la Geometría, AG.
Didáctica del Análisis, DA.
Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, DEPC
Pensamiento Numérico y Algebraico, PNA.
Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor, CDPP.
Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica, DMDC.

APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA (AG)

Coordinadora: María Lluisa Fiol. Universidad Autónoma de Barcelona.

En el V Simposio de la SEIEM celebrado en Almería del 18 al 21 de Septiembre del 2001 el grupo de Investigación en el Aprendizaje de la Geometría tuvimos dos sesiones de trabajo de hora y media de duración. La primera el miércoles día 19 de las 18:00 a las 19:30 y la segunda el viernes día 21 de 9:00 a 10:30.

En la sesión del día 19 se empezó por dar la bienvenida a los presentes, hacer un breve resumen del trabajo realizado desde el IV SEIEM celebrado en Huelva y se presentó la propuesta para la distribución del trabajo. Distribución que había sido consensuada a través del correo electrónico y que quedó de la siguiente forma:

El primer día presentación de los trabajos de investigación de los profesores: Isabel Escudero, Luís Manuel Casas y Josep Callís y el segundo presentación de la página web diseñada y administrada por el profesor Ricardo Barroso de la Universidad de Sevilla sobre planteo y resolución de problemas de triángulos con utilización del Cabri-géomètre. Como inicialmente preveíamos que tendríamos tiempo se organiza el resto del tiempo disponible en hablar del tema del diseño de la página web del grupo, así como del tipo de investigación que cada uno de los componentes del grupo está llevando a cabo en estos momentos.

Puesto que Isabel Escudero del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Sevilla, componente del grupo, realiza su tesis doctoral sobre el conocimiento profesional del profesor y la relación con la práctica se estudia a través del tema de la semejanza fue invitada a presentar su trabajo en esta simposio. Al no poder asistir Isabel Escudero, Mª Victoria Sánchez (US) que dirige el trabajo presentó el informe. Informe titulado:

"La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica: La semejanza como objeto de enseñanza /aprendizaje".

El proyecto de investigación en el que se enmarca su investigación tiene por objetivo profundizar en la relación existente entre el conocimiento profesional y la práctica del profesor de Matemáticas. Entienden el conocimiento profesional como una construcción personal, en la que se integran diferentes dominios de conocimiento, y que se ha generado en la acción profesional, mientras que consideran la práctica en un sentido amplio, que abarca todos los aspectos que intervienen en el desarrollo de la labor profesional del profesor.

Para el análisis del concepto de semejanza su marco conceptual utiliza los siguientes elementos:

i) En la aproximación al concepto se consideran tres momentos que nos dan una visión distinta de la semejanza: a) como *relación intrafigural*, b) como *transformación geométrica vista como útil*, c) como *transformación geométrica vista como un objeto matemático.* (Lemonidis, 1990, 1991)

ii) Los modos de representación y su uso, entendidos como posibilidades semióticas de presentar el contenido. Se han considerado: *lenguaje natural, figurativo, numérico/simbólico, situación y material concreto.*

iii) Dentro del modo figurativo consideramos el tipo de aprehensión y el papel y estatus de la representación figurativa en la resolución de la tarea (Mesquita, 1989; Duval, 1998).

Grabaciones en vídeo de lecciones, entrevistas semiestructuradas y observaciones en el aula han sido las fuentes de datos utilizadas en el estudio. Los resultados están aportando información que está permitiendo identificar conexiones entre aspectos específicos del conocimiento profesional y la toma de decisiones que incide en la práctica.

A continuación Luis Manuel Casas García presentó su informe titulado:

"El Ángulo. Estudio de un concepto geométrico mediante Redes Asociativas Pathfinder". Resumen de su trabajo de investigación de doctorado que le dirige Ricardo Luengo González de la Universidad de Extremadura.

En este trabajo presentan un estudio exploratorio sobre la evolución del concepto de Ángulo en la estructura cognitiva de los alumnos.

En el estudio, se analizan las dificultades que encierra este concepto, que el alumno va adquiriendo/construyendo tras sucesivas aproximaciones. Estas concepciones incluyen concepciones parciales, integradas tras un largo proceso.

Parten de la creencia que el conocimiento de las relaciones entre estas concepciones parciales y su forma de integración puede ser tratado metodológicamente como un problema de Representación del Conocimiento.

Para ello utilizan una técnica empleada en este campo: las Redes Asociativas Pathfinder. Estas redes permiten obtener una representación gráfica de las relaciones entre conceptos en la estructura cognitiva para cualquier área de conocimiento. Permiten además estudiar otras características tales como la similaridad de redes o la coherencia con que están construidas.

Utilizando esta técnica, han obtenido las redes correspondientes a 51 alumnos, desde 3º de Primaria hasta 1º de Secundaria Obligatoria, y mediante el uso del Indice de Complejidad de Redes, creado al efecto para este estudio, han examinado la forma en que varía su estructura cognitiva conforme avanza la escolaridad.

Contrariamente a lo que se pudiera esperar, se ha podido observar que las redes evolucionan hacia una menor complejidad gráfica, mientras que los alumnos van estructurando los conceptos parciales en torno a unos pocos conceptos clave que hemos denominado «conceptos nucleares» y que esta técnica permite identificar.

El método empleado, es de gran interés pues permite, con relativa facilidad y economía de esfuerzo, obtener datos que pueden ser analizados tanto cualitativa como cuantitativamente, y que proporcionan indicaciones muy útiles acerca de cuáles son los aspectos más importantes en que debe incidir la Didáctica de la Geometría en cuanto a la adquisición e interiorización del concepto de Angulo por parte del alumno.

Se plantearon muchas preguntas, se puso en evidencia el interés de los asistentes y como en otras ocasiones el tiempo disponible resultó escaso.

Dado que ya se había consumido los 90 min. de esta sesión inicial tuvo que ser reestructurado el trabajo a realizar en la segunda sesión.

En primer lugar el día 21, Ricardo Barroso Campos (US) presenta su informe titulado:

"Antecedentes, evolución y desarrollo de una página web sobre resolución de problemas de triángulos con Cabri- géomètre".

Ricardo Barroso empezó agradeciendo a Antonio Ariza García, José María Gavilán Izquierdo y Ángel Sánchez Sotelo, de la Universidad de Sevilla, su apoyo y colaboración.

Pasó a detallar a continuación los factores que fueron puntos de origen del trabajo:

a) el interés por la Geometría, b) la incorporación de programas de geometría dinámica como Cabri-géomètre y c) las posibilidades de comunicación y divulgación de las herramientas de Internet.

La página pretende ser un foro de discusión sobre problemas de geometría. Estos problemas son elegidos y editados en la red para que sean resueltos - mejor si lo son de diversas maneras- con la utilización específica del Cabri- géomètre.

La página está abierta no sólo a la resolución de los problemas sino también a la aportación de enunciados con indicación de las bibliografías utilizadas, comentarios, propuestas de mejoras, etc. de todos los navegantes en la red que quieran participar.

La evolución de las herramientas de Internet ha permitido incorporar posibles recursos no contemplados en un principio como son los "apletts" de Java, o documentos en formato PDF.

Hay que reseñar que esta página web está cumpliendo una función positiva de interrelación entre diversos colectivos entre los que se encuentra nuestro grupo.

Josep Callís de la Universidad de Gerona realiza su tesis doctoral sobre estimación de longitudes. Al no poder asistir al V Simposio presentó su informe Mª Luisa Fiol de la Universidad Autónoma de Barcelona que dirige su trabajo.

"Estimación de longitudes: Procedimientos, Recursos y Estrategias".

El planteamiento de la investigación se centra en detectar las estructuras implícitas en la estimación longitudinal diferenciando los contextos rectilíneos de los curvilíneos y prestando especial atención a estos últimos.

Para ello la metodología se ha abordado en tres fases distintas: En primer lugar se empezó por la que llamaron muestra orientativa compuesta por 40 alumnos de primaria a los que se pasó una primera versión de la prueba. Los resultados obtenidos permitieron detectar factores genéricos de la capacidad estimativa, entre ellos destacan la gran dificultad en la estimación de curvas frente a los segmentos rectilíneos. En base a estos primeros resultados se diseñó una prueba, prueba estructurada en cuatro partes, en donde es necesario efectuar la estimación de objetos materiales de formas distintas: segmentos rectilíneos, onduladas, circunferencias y espirales.

La segunda fase consistió en una investigación cuantitativa y cualitativa sobre una muestra base de 182 sujetos integrada por grupo de 109 alumnos de Magisterio , 37 alumnos de primaria y 37 educadores populares de la comunidad de Segundo Montes de la República de El Salvador.

Se buscó delimitar un marco de referencia de las tendencias que se hacen presentes y son utilizadas por cada una de las muestras. Se han estudiado : a) los procedimientos y estrategias que se utilizan en la estimación de longitudes rectilíneas y curvilíneas, b) los procedimientos y estrategias que se utilizan en cada uno de las preguntas de la prueba, c)la incidencia en el uso de estos procedimientos y estrategias en cada una de las variables etnográficas consideradas y c) la correlación que se produce entre las variables y la eficacia estimativa.

Entre los descriptores se analizan parámetros específicos que permitan captar las diferencias que se presentan en la estimación de las medidas longitudinales según diversos factores que pueden incidir en ellas. Así la capacidad estimativa, la tipología, la consistencia y la coherencia o corrección diferencial.

La tercera fase de la investigación se ha centrado en la profundización de dichas estructuras a través de un estudio de casos.

Finalmente y a partir de los perfiles y niveles que se están detectando se quiere plantear una propuesta didáctica.

Después de un corto período de tiempo dedicado a ruegos y preguntas se justificó la ampliación en algunos apartados de la página web del grupo: http://www.uv.es/~didmat/angel/Index.html y se explicó que Mª José González López de la Universidad de Cantabria está realizando una recolección de los trabajos que sobre el tema de la demostración, sobre nuevas tecnologías y otros nos hemos enviado a través del correo electrónico. Acordamos que una vez completados estos textos serán editados en la web del grupo.

Se incorporaron al grupo de Investigación en el Aprendizaje de la Geometría:

Luis Ma. Casas García mjimeneza06@enfermundi.com
Laura Delgado Martín laura@gugu.usal.es
Isabel Romero Albaladejo imromero@ual.es
Antonio Frías Zorrilla afrias@ual.es

DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS (DA)

Coordinador: Matías Camacho Machín. Universidad de La Laguna.

La estructura de las dos sesiones de trabajo celebradas en el Simposio fue similar. Se desarrolló en cada una de ellas, un taller de investigación y un informe de investigación. Se presentan en lo que sigue los resúmenes de lo realizado por parte de los miembros del grupo.

Día 19 de septiembre:

Un problema de optimización a través de diversos libros históricos y de texto. (Taller)

Mª Teresa González Astudillo; Modesto Sierra Vázquez. *Universidad de Salamanca*

Resumen: La transposición didáctica desde el saber matemático hasta el saber escolar, muestra cómo un objeto matemático se convierte en objeto de enseñanza. En particular, el estudio de los programas escolares y de los libros de texto, nos da cuenta de esa transformación, mostrándonos las corrientes didácticas dominantes, las contradicciones entre las propuestas oficiales y la implementación en los libros, incluso la influencia de los nuevos métodos de impresión en la propia estructura del texto. Por ello, parece interesante, estudiar la contribución que los libros de texto han tenido en la historia de la educación matemática.

En este trabajo que estamos realizando, hemos analizado libros de texto relativos al cálculo diferencial desde el primero que fue escrito con este fin: *Analyse des infiniment petits* (Guillaume François, marqués de l'Hôpital), así como libros de texto de secundaria, utilizados en España desde que en el año 1934 se introdujeron los conceptos del cálculo diferencial en los programas escolares, estudiando los cambios que se han producido a lo largo de casi 70 años en relación con un concepto clave para la enseñanza del Análisis Matemático como es el relativo a los puntos críticos. El uso de diversas ediciones de algunos de los libros utilizados, su comparación con otros libros del mismo periodo y su relación con los programas oficiales del momento, nos proporcionarán los datos esenciales para concretar cuál ha sido la evolución de dicho concepto.

A partir de una exposición inicial que partía de los objetivos de la investigación, se ha planteado un taller en el que hemos analizado el enunciado del mismo problema incluido en tres libros de texto correspondientes a diferentes periodos de la enseñanza del cálculo diferencial:

- l'Hôpital, G. (1696) *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* París: De l'imprimerie royales, p. 44
- Lacroix, S. (1867) *Traité élémentaire de calculo différentiel et de calcul integral.* París: Gauthiers-Villars, p. 121.
- Guzmán, M.; Colera, J. y Salvador, A. (1988) *Matemáticas. Bachillerato 3.* Madrid: Anaya, p. 269.

A partir de dicho problema, se han establecido las características sintácticas, semánticas y pragmáticas que diferencian su presentación en cada uno de los libros citados.

Reflexiones metodológicas en una investigación sobre concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas (Informe de Investigación)

Mar Moreno Departament de Matemàtica (Universitat de Lleida)

Resumen: La presente investigación es un estudio de las concepciones y creencias del profesor de matemáticas universitario con relación a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el primer ciclo de estudios científico-experimentales. El interés de ésta crece cuando se tienen en cuenta los retos que debe afrontar la universidad ante el cambio social, y el aumento del descontento y desmotivación tanto del profesor como de la población estudiantil (Moreno, 2001).

Aunque en el estudio nos proponemos objetivos metodológicos y didácticos, aquí destacaremos exclusivamente los metodológicos. Básicamente queremos contribuir al desarrollo de una metodología de investigación para el análisis de entrevistas en investigaciones sobre concepciones y creencias; así como establecer criterios de categorización y análisis válidos para otros estudios similares.

Se trata de un estudio cualitativo, en él participaron seis profesores de matemáticas de universidad, especialistas en matemática aplicada. Para la recogida de datos se utilizó un cuestionario formado por cuatro problemas sobre ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en química y biología, y una entrevista grabada. Además, contamos con otros instrumentos de recogida de información como eran: programas oficiales, hojas de ejercicios y problemas propuestos, bibliografía recomendada, apuntes preparados por los profesores, etc. En ningún momento pretendimos que el profesor adoptara la postura del resolutor sino que reflexionara sobre aspectos propios de la materia, de su enseñanza y de su aprendizaje.

El análisis de los datos constó de ocho fases en cada una de las cuales se elaboraron tablas, esquemas, listas de descriptores, etc. A partir de todos los datos disponibles hemos realizado un doble análisis, uno de carácter global que proporciona una visión general de las concepciones y creencias de los profesores y, otro particular y específico de cada profesor que los caracteriza. El primer análisis se realizó a partir de los datos obtenidos de la entrevista y manipulados en fases sucesivas, y expresados en tablas de doble entrada para facilitar el acceso a la información. El análisis particular se realizó a partir de una lista de descriptores, procedente de las reducciones de datos realizados a lo largo de todo el proceso de análisis de datos.

El método de análisis utilizado nos ha dado la oportunidad de manejar simultáneamente mucha información, al tiempo que hemos podido disponer en todo momento de los datos específicos de enseñanza, aprendizaje y modelización de las ecuaciones diferenciales sin desligarlos de cada uno de los profesores, lo que ha posibilitado el doble análisis realizado. Desde nuestro punto de vista, tanto el instrumento de investigación como la metodología de análisis son una contribución para las investigacones cualitativas en las que se manejan gran cantidad de datos y en las que resulta imprescindible no perder matices que diferencian respuestas aparentemente similares. La lista de descriptores generales puede ser un instrumento útil como guía para analizar concepciones y creencias en otras situaciones semejantes.

Día 21 de Septiembre de 2001:

Dificultades en la instrumentación didáctica de acuerdo con la teoría APOS. (Informe de Investigación)

José Luis Ramírez; Carmen Azcárate, Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen: De acuerdo a la teoría APOS, una vez que se ha propuesto una descomposición genética para un concepto, se debe diseñar una instrumentación didáctica, por medio de la cual se propone que los estudiantes logren construir las estructuras mentales identificadas.

Sin embargo, dada la afirmación, de los creadores de dicha teoría, de que "el ciclo ACE no es una consecuencia de la teoría" (el ciclo ACE es la forma pedagógica mediante la cual llevan a cabo la instrumentación didáctica), surgen dificultades para diseñar la instrumentación didáctica, las cuales nos abrigan a platearnos las siguientes preguntas:

1.- ¿Se puede pensar en realizar una instrumentación didáctica cuyo objetivo sea el propiciar la construcción de las estructuras mentales asociadas a un concepto matemático determinado, aplicando el ciclo ACE?

2.- ¿Cómo se diseñan las actividades, discusiones y ejercicios que propicien el desarrollo de las estructuras mentales que se proponen?

3.-¿Se han realizado experiencias para propiciar la construcción de las estructuras mentales sin hacer uso de un lenguaje de programación?

4.- ¿Qué se hace cuando un grupo de estudiantes no puede responder a las preguntas planteadas en las actividades y las discusiones? (solo responden a un reducido número de actividades)

5.- ¿Cuál es el efecto de la interacción en el trabajo en grupo? ¿Cómo se observa?

Análisis semiótico de un manual en torno al concepto de límite. **(Taller)**

Ángel Contreras, Universidad de Jaén; Vicen Font, Universidad de Barcelona; Lorenzo Luque, I.E.S. "Pablo de Olavide"; Lourdes Ordóñez, I.E.S. "Fuente de la Peña" (Jaén).

Resumen: En el taller se presentó, en el marco de la teoría semiótica-antropológica (Godino y Batanero, 1998; Font, 2000a; Godino, 2001; Contreras, 2001[1]), un análisis semiótico (Godino, 2001; Luque y Contreras, 2001; y Ordóñez y Contreras, 2001) de un manual sobre el objeto matemático límite, en el que: las entidades primarias (Godino, 2001), las funciones semióticas (Eco, 2000; Font, 2000a; y Godino y Batanero, 1998), los sistemas semióticos de representación (Duval, 1995, 1996 y 2000) y las traducciones entre esos diferentes sistemas (Font, 2000b y 2001), constituyeron los pilares teóricos sobre los que se desarrollaron las distintas secuencias del trabajo. Por otra parte, el análisis semiótico que se realiza es de carácter pragmático. Es decir, estamos interesados por los signos en cuanto al uso de los mismos por parte de los sujetos. Como señala Puig (1997, p. 68): "…lo que a mi entender interesa más desde el punto de vista didáctico no es el estudio de los signos y sus tipos, sino el estudio de los procesos de significación y producción de sentido".

La hipótesis subyacente a este trabajo establece que por medio de un análisis semiótico, basado en las funciones semióticas, es posible dar explicación a diversos fenómenos didácticos implicados en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático. Se sostiene que un estudio de tal naturaleza permite clarificar y profundizar en la hipótesis realizada por Confrey (1995) y Duval (2000) sobre el aprendizaje matemático: *Aprender Matemáticas consiste en el desarrollo de coordinaciones progresivas entre multifuncionales sistemas semióticos de representación*, puesto que al hacer explícitas las funciones semióticas implícitas en el texto permite aflorar aquellos elementos del manual (entidades intensivas, extensivas, elementos ostensivos y no ostensivos, además de diversos registros semióticos) que facilitan al investigador la labor del análisis a priori y permite el diseño posterior de situaciones de enseñanza pertinentes con el aprendizaje del concepto que se trata.

Una vez realizada la exposición, que estuvo constituida por una parte teórica -en la que se plantearon las herramientas teóricas- y una parte práctica -en la que se realizó un análisis semiótico de una de las partes del manual analizado-, se entregó a los miembros asistentes un material, consistente en un nuevo texto sobre el límite, del que había que efectuar un análisis semiótico. Por último, se mantuvo un debate sobre las respuestas obtenidas, fruto del cual surgieron interesantes aportaciones.

[1] Las referencias bibliográficas pueden ser solicitadas al autor del Taller.

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA

Coordinador del grupo: Antonio Estepa Castro. Universidad de Jaen.

Las sesiones de trabajo tuvieron lugar el día 19 de 17:30-19:00 y el día 21 de 9:0 a 10:30 horas

Sesión 1. Día 19, 17:30 a 19:00 horas

La sesión se desarrolló con las siguientes intervenciones:

1. Presentación de los asistentes. Cada uno de los asistentes, se presentó con el fin de que las personas que asistían por primera vez, conocieran mejor al resto del grupo

A continuación los asistentes intervinieron con los temas que se expresan a continuación

2. "Correspondencias entre estrategias de aprendizaje y rendimiento académico" Hugo Alejandro Alvarado

3. Informe de investigación: *"El lenguaje de la probabilidad en los libros de texto"*. Expone: Juan Jesús Ortiz. Coautor: Luis Serrano

Después de cada intervención los autores respondieron a las preguntas formuladas.

Sesión 2. Día 21, de 9:00 a 10:30 horas

Intervenciones:

1. Informe de investigación: *"Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria"* Belen Cobo Merino

2. Presentación del proyecto *"Caracterización del significado de la correlación, regresión y dispersión estadísticas para los alumnos de la educación secundaria obligatoria y bachillerato"* Antonio Estepa

3. Presentación del proyecto: *"Estadística y probabilidad para maestros"* Juan D. Godino

4. Informe sobre eventos pasados y futuros. Carmen Batanero

Después de cada intervención se abre un turno de preguntas y respuestas.

Al final de la sesión, el coordinador del grupo, Antonio Estepa, expresa que lleva cuatro o cinco años de coordinador y que es bueno que haya renovación en los cargos. Pregunta que si alguno de los presentes quiere hacerse cargo de la coordinación. Se propone a Angustias Vallecillos Jiménez que es elegida por asentimiento.

Cesar Saenz y Angustias Vallecillos proponen que conste en el informe la felicitación y el agradecimiento al coordinador saliente, Antonio Estepa, por la labor realizada, se aprueba por asentimiento.

Se finaliza la sesión y las reuniones de este grupo en el Simposio a las 10: 40 horas

ADENDA: Antonio Estepa ha realizado el informe anterior sobre el desarrollo de las actividades realizadas por el Grupo de Trabajo de Estadística, Probabilidad y Combinatoria en el V Simposio de la SEIEM de Almería y con él se despide de la coordinación del Grupo. De nuevo le reiteramos nuestro agradecimiento por su labor de coordinación durante los años pasados, a la vez que le recordamos que seguimos contando con su colaboración en los trabajos futuros del Grupo. Por mi parte, agradezco la confianza depositada en mi persona y asumo con gusto el encargo de seguir adelante con la labor de coordinación de nuestro Grupo de Trabajo, con el convencimiento de contar con la colaboración y el estímulo de todos los miembros actuales (y simpatizantes) del Grupo.

Angustias Vallecillos Jiménez

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO.

Coordinador: José María Gairín. Universidad de Zaragoza

1. Informe de Alfonso Ortiz, coordinador del grupo PNA.

- En la primera parte se presentó un balance de la V reunión científica del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico, celebrada en Palencia los días 26 y 28 de abril de 2001).

En primer lugar se hace manifestación expresa del agradecimiento del grupo a María Ortíz y Tomás Ortega por su bien hacer en la magnífica organización del evento y por la atención dedicada a todos los asistentes.

A cada uno de los coordinadores de las universidades se les entregó un dossier con el texto de las comunicaciones presentadas en la reunión. En estas comunicaciones se recogen trabajos iniciales sobre tesis doctorales y trabajos de investigación correspondientes a distintos programas de doctorado.

En esta reunión también se celebró una interesante mesa redonda sobre las líneas de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico, en la que intervinieron Bernardo Gómez (Universidad de Valencia), Tomás Ortega (Universidad de Valladolid), y Alfonso Ortiz (Universidad de Málaga).

Finalmente, se marcaron pautas para continuar con la elaboración y actualización de la agenda de investigación del grupo PNA.

- En la segunda parte, presentó una visión global, aunque incompleta, del trabajo realizado en los últimos tres años en los que ha sido coordinador del grupo (1998-2001), entregando un dossier con algunas aportaciones de distintos componentes del grupo sobre líneas y métodos de investigación.

Mostró su agradecimiento a todos los componentes del grupo por su colaboración e interés en las propuestas que se han realizado.

También hizo una valoración crítica del grupo y apuntó hacia las deficiencias, insistiendo en que se debe mejorar el contenido y desarrollo de nuestras reuniones en el seno de los simposium de la SEIEM.

Propuso que se llevara a la asamblea general como propuesta que los trabajos científicos presentados en los grupos pasaran a considerarse para ser incluidos en las actas, en la manera que se considerase oportuno.

Por último, solicitó el relevo como coordinador.

2. Presentación del trabajo de Pedro Gómez: "Base de datos de documentos en Internet como medio para potenciar un grupo de investigación".

Resumen: El avance de grupos de investigación que se encuentran separados geográficamente depende de la intensidad y la calidad de su interacción académica. Aunque esta interacción se logra parcialmente en reuniones y congresos y a través de contactos puntuales entre pares, la eficiencia del trabajo académico de los miembros del grupo también depende del conocimiento que cada uno de ellos tiene de las producciones de los demás.

El trabajo de investigación de los miembros debe construirse, en primera instancia, con base en los marcos conceptuales, los esquemas metodológicos y los resultados obtenidos por otros miembros del grupo. No obstante, no es raro encontrar producciones de miembros de grupos de investigación que no aprovechan la producción académica de los otros miembros.

Por estas razones, en la reunión del Grupo de Investigación sobre Pensamiento Numérico y Algebraico celebrado en Huelva en Septiembre de 2000, se me encomendó la creación y puesta a punto de una base de datos de documentos de miembros del grupo que pudiera estar disponible en Internet. Una primera versión de esta base de datos comenzó a estar disponible en la red a finales de 2000. En la reunión del grupo en Almería en el 2001 se presentó el proyecto realizado.

La dirección (URL) de la base de datos PNA es: http://cumbia.ath.cx/pna.htm. En esta página inicial, el usuario puede entrar a la página de búsqueda básica o descargar las instrucciones para la inclusión en la base de datos. En la página de búsqueda básica, el usuario puede hacer búsquedas en la base de datos con base en campos como autores, fecha, la referencia bibliográfica completa del documento, términos clave o el número PNA. Éste último es un número de identificación único e inmodificable de cada documento y constituye la manera más expedita de identificarlo. La búsqueda por autor presenta la lista de autores de documentos existentes en la base de datos y permite encontrar todos los documentos de ese autor presionando el enlace correspondiente. La página de búsqueda por términos clave funciona de manera similar. Finalmente, existe una página de búsqueda avanzada que permite hacer búsquedas complejas e incluye todos los campos de la base de datos.

Cuando el usuario hace una búsqueda y si ésta tiene éxito (hay documentos en la base de datos que satisfacen las condiciones de la búsqueda) aparece la página de los resultados correspondientes. Los documentos se encuentran en formato PDF y, como se indica en esta página, es necesario tener el programa Adobe Acrobat Reader para leer e imprimir los documentos que se descargan. No es posible modificar ni copiar partes de texto de los documentos aun si se tiene el programa comercial Adobe Acrobat. También se pide que no se utilice la referencia de la red para aquellos documentos que están publicados y cuya referencia bibliográfica aparece en los resultados. Cada documento aparece en la lista de resultados con su referencia bibliográfica, su resumen, el tamaño del fichero y su identificación PNA. Para descargar el fichero de un documento basta presionar el enlace que aparece al comienzo de su descripción (autores y fecha).

3. Comunicación de Mª Mercedes Palarea, Josefa Hernández, Aurelia Noda y Martín M. Socas (Universidad de La Laguna): "Prueba inicial de conocimientos matemáticos básicos para los alumnos de la diplomatura de Magisterio"

Resumen: En esta comunicación presentamos una propuesta de Prueba inicial de conocimientos matemáticos básicos para los alumnos de la Diplomatura de Magisterio, fruto de un trabajo de investigación acerca de las habilidades matemáticas básicas y de las creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan sus estudios de la Diplomatura de Maestro en sus diferentes especialidades.

La investigación se centró en analizar el bagaje matemático de dichos alumnos a través de pruebas en forma escrita. El objetivo fundamental de este estudio es contribuir en la búsqueda de respuestas que permitan orientar de manera adecuada la formación matemática de nuestros alumnos, que son los futuros profesores de Primaria.

Los objetivos concretos que nos planteamos son: Analizar las habilidades matemáticas básicas que tienen los alumnos al comenzar los estudios de la Diplomatura y determinar el aumento o disminución de estas habilidades después de cursar una asignatura de Matemáticas, y estudiar y clasificar los errores que cometen con relación a dichas habilidades. Resultados preliminares han sido expuestos en el V Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (Palencia, 2001), y en la Cuarta Reunión Interuniversitaria sobre Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática (La Laguna, 2001)

La Prueba se diseñó con tareas que requieren conocimientos básicos de Matemáticas. Las cuestiones estaban diseñadas no sólo para que se pudiesen estimar los conocimientos y destrezas sino sus habilidades para aplicar procedimientos y resolver problemas. Después de dos estudios piloto, donde se fueron mejorando los ítemes hemos construido una Prueba, que es la que aquí se presenta. Consta de 30 preguntas, pertenecientes a los bloques: Números y operaciones (10), Medida (6), Geometría (5), Análisis de datos, estadística y probabilidad (4) y Álgebra (5).

4. Asuntos domésticos

• Mostrar el agradecimiento del grupo al profesor Alfonso Ortiz por la labor desarrollada como coordinador durante los dos últimos años.

• Nombrar a José María Gairín (Universidad de Zaragoza) como nuevo coordinador del grupo.

Dirección electrónica jgairin@posta.unizar.es

• Mantener la estructura de las reuniones celebradas entre los congresos de la SEIEM, las que se celebran en torno al mes de Marzo. En cuanto a las fechas de celebración, se confirma la del año 2.003 en la Universidad de La Laguna. Para la reunión del año 2002 se sugiere la Universidad de Santiago de Compostela, pero su confirmación queda a expensas de "pequeños flecos", que trataremos de resolver en el plazo más breve posible.

• En las sesiones de trabajo del grupo que se celebran en el próximo congreso de la SEIEM, se acuerda encargar a componentes del grupo la presentación de trabajos institucionales de investigación: la estructura de los trabajos, las líneas de investigación que se perfilan, y el modo en que se gestiona la investigación.

• Se recuerda la existencia de la base de datos gestionada por Pedro Gómez, así como la necesidad de que tal base sea enriquecida con las aportaciones de todos los miembros del grupo. La dirección es: http://cumbia.ath.cx/pna.htm

En cuanto a la información regular de los miembros del grupo fuera de las reuniones habituales, Bernardo Gómez está realizando gestiones para arbitrar medios y recursos que garanticen su buen funcionamiento.

CONOCIMIENTO Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR (CDPP)

Coordinador: José Carrillo. Universidad de Huelva.

El trabajo del grupo se dividió en dos sesiones: en la primera se presentó y discutió una comunicación, y la segunda se dedicó a información y cuestiones organizativas.

Primera sesión

Tras recordar y repartir el orden del día, acordado con antelación al simposio, los compañeros Isabel Romero y Antonio Frías, de la Universidad de Almería, expusieron la comunicación *Una estrategia de Formación de Profesores de Secundaria*, de la que se ofrece al final un resumen. La cuestión que articula el proceso de investigación al que alude esta comunicación es "¿Cómo se manifiesta la evolución del conocimiento profesional de los futuros profesores sobre evaluación en matemáticas cuando se emplea una estrategia de formación orientada a tal evolución?". Exposición y discusión giraron fundamentalmente en torno al marco teórico, las características de las tareas de evaluación y el referente teórico para analizar dichas tareas; así mismo, se sugirió analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, para mejorar la descripción de la evolución de las concepciones de los futuros profesores sobre la evaluación.

Segunda sesión

Luis C. Contreras (Universidad de Huelva) informó del estado de la monografía *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el Área de Matemáticas: una mirada a la práctica docente*, que edita con Lorenzo Blanco (Universidad de Extremadura). Entregada la primera versión de todos los capítulos, e incluso alguna definitiva, los editores estiman que durante el curso 2001/02 estará el libro publicado. Lo siguiente es un avance del índice de trabajo: Introducción (Luis C. Contreras y Lorenzo Blanco); Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor (Inés Mª Gómez Chacón); Una propuesta de formación de maestros desde la educación matemática: adoptando una perspectiva situada (Mercedes García y Victoria Sánchez); Un modelo formativo de maestros de primaria, en el área de matemáticas, en el ámbito de la geometría (Lorenzo Blanco y Luis C. Contreras); Ejemplificación de una propuesta formativa: el uso de situaciones de primaria en la formación inicial (Nuria Climent y José Carrillo); Una estrategia de formación de maestros en matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional (A.I.P.) (José Mª Cardeñoso y Pilar Azcárate).

A continuación, se pasó a la elección de coordinador del grupo, recayendo tal responsabilidad en Pablo Flores (Universidad de Granada). Victoria Sánchez (Universidad de Sevilla) propuso que constara el agradecimiento a la labor desempeñada por José Carrillo como coordinador saliente.

Finalmente, se confirmó la idea de posibilitar y fomentar la discusión de trabajos de investigación en las sesiones de los simposios, quedando pendiente la decisión sobre los criterios de su aceptación e inclusión.

No se concertó ningún encuentro antes del VI SEIEM, aunque se dejó abierta la posibilidad de reunirnos en función de la actividad que genere el grupo.

UNA ESTRATEGIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE SECUNDARIA

Bosch Saldaña, Mª Asunción; Frías Zorrilla, Antonio; Gil Cuadra, Francisco; Moreno Carretero, Mª Francisca; Romero Albaladejo, Isabel

Resumen:

La formación inicial de profesores de secundaria nos demanda formar profesores que deberán ejercer su profesión en un marco educativo que tiene unas coordenadas distintas a las que tenía aquel en que vivieron su experiencia como estudiantes; todavía podemos afirmar más, el actual sistema educativo dibuja un papel, para cada uno de los variados elementos que en él intervienen, diferente al que están familiarizados por su experiencia. De este modo, resulta complicado diseñar actuaciones en la formación inicial de profesores que les ayuden a poner en tela de juicio sus posicionamientos sobre el significado del proceso de enseñar y aprender matemáticas, con las variables en él implicadas (Gómez, 2001).

La construcción de un conocimiento profesional más elaborado es un proceso mediante el cual las ideas de los estudiantes evolucionan hacia nuevas formas de concebir la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Nuestro propósito es diseñar, en palabras de Llinares (1994), *entornos de aprendizaje* que consideremos adecuados para facilitar dicho proceso de construcción. Para ello hemos adoptado una estrategia de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, que consta de las siguientes fases:

- planteamiento de un problema profesional *(fase de contextualización)*,
- demandarles un posicionamiento frente a dicho problema *(fase de posicionamiento)*,
- confrontar las distintas posiciones (surgidas en el grupo-clase) entre sí *(fase de confrontación grupal o interna)*,
- confrontar las posiciones con planteamientos teóricos y curriculares *(fase de confrontación teórica o externa)*,
- reconsideración de las posturas iniciales *(fase de reconsideración de posturas)*.

El primer paso de nuestro trabajo ha consistido en la identificación de una cuestión significativa para el proceso de formación de los estudiantes para profesor, y el planteamiento de un problema profesional relativo a dicha cuestión. En particular, nos planteamos incidir en el tema de la evaluación y formular en este terreno la concreción de nuestra estrategia de formación, que se llevó a cabo en los siguientes pasos:

- Plantear a los estudiantes de la asignatura Prácticas de Enseñanza, optativa de la licenciatura de Matemáticas, un problema profesional relacionado con la evaluación. Se les formuló en términos de la siguiente tarea:

Se inicia el curso e interesa conocer la comprensión de los alumnos de 1º de Bachillerato (en el curso anterior terminaron 4º de ESO- Opción B) sobre los tópicos Números y Área. Contesta, por favor, a las siguientes cuestiones:

1. Plantea dos actividades (una para cada tópico) que propondrías a los alumnos para valorar una comprensión mínima del tópico.
2. Plantea dos actividades (una para cada tópico) que propondrías a los alumnos para valorar una comprensión profunda del tópico

- Pedirles que aportaran "su solución" para esa situación conflictiva.
- Confrontar la solución con la de los compañeros.
- Confrontar la solución con un Referente Teórico. (Frías, A. y otros, 2001)
- Aportar ejemplos de un Banco de Tareas de Evaluación, el cual está en proceso de elaboración.

Dicho banco de tareas tiene como fin ilustrar los constructos teóricos presentados en el referente teórico, ampliar el punto de vista de los estudiantes en cuanto a las características del conocimiento matemático que pueden ser evaluadas mediante tareas, e inspirarlos para poder diseñarse tareas de este tipo.

· Pedirles que propusieran ejemplos de nuevas soluciones para el problema inicial.

Nuestro proceso de investigación se articula en torno a la siguiente cuestión:

"¿Cómo se manifiesta la evolución del conocimiento profesional de los futuros profesores sobre evaluación en matemáticas cuando se emplea una estrategia de formación orientada a tal evolución?"

Para ello pretendemos:

a) Detectar concepciones y creencias iniciales de los estudiantes para profesor sobre la evaluación.

b) Caracterizar la evolución de las concepciones y creencias que se produce a partir de la estrategia de formación, así como las dificultades que puedan surgir en el proceso.

c) Describir los factores que puedan haber influido en la evolución, si se produce, que tengan las concepciones y creencias de los futuros profesores sobre evaluación con motivo de nuestra intervención didáctica.

Como avance del análisis de datos, hemos realizado un estudio de cuatro casos entre los estudiantes de la asignatura.

Lo que puede deducirse en cuanto a concepciones iniciales sobre evaluación es que nuestros estudiantes consideran que para evaluar la comprensión de sus alumnos han de tener en cuenta si éstos dominan hechos, conceptos y destrezas de cálculo principalmente; los elementos actitudinales raramente son valorados a través de las tareas que proponen; dichas tareas se plantean siguiendo parámetros propios de un esquema tradicional de enseñanza-aprendizaje: procesos mecánicos, respuestas cortas y escasa o nula conexión con la realidad. En cuanto a las creencias iniciales sobre evaluación, se aprecia una concepción general en la que se reconocen las limitaciones del examen como único método para valorar, y en algunos casos se observan capacidades procedimentales y actitudinales para ser consideradas en la evaluación, aunque casi nunca se dice cómo hacerlo. Después de la estrategia de formación, todos los estudiantes avanzan hacia la propuesta de tareas que incorporan elementos actitudinales, tienen más conexión con la realidad y son más abiertas. En la componente de conocimiento no se produce un avance significativo.

Por lo que respecta a los factores que parecen influir en el desarrollo didáctico de los futuros profesores, hemos detectado tres: la actitud hacia nuevos planteamientos en Didáctica de la Matemática, la formación didáctica previa de los futuros profesores, y por último, la estrategia de formación empleada.

REFERENCIAS

Frías, A.; Romero, I.; Gil, F.; Moreno, F., y Bosch, A. (2001). Una experiencia formando profesores de Secundaria de Matemáticas. En ACTAS del CONGRESO INTERNACIONAL DE DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS, pp. 1811-1822. Universidad de Granada. Granada.

Gómez, P. (2001b). *Desarrollo didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación.* Documento no publicado. Enviado para evaluación al SEIEM 2001. Disponible en http://cumbia.ath.cx/pna.htm [Documento PNA 2589]. Granada: Universidad de Granada.

Llinares, S. (1994). The development of prospective elementary teachers' pedagogical knowledge and reasoning. The school mathematical culture as reference. En N. Malara & L. Rico (Eds.), *Proceedings of the first Italian-Spanish research symposium in mathematics education* (pp. 165-172). Modena: Universitá di Modena.

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA (DMDC)[2]

Coordinador: Josep Gascón. Universidad Autónoma de Barcelona.

En la primera de las sesiones, que tuvo lugar el jueves día 20 de septiembre, se presentaron dos comunicaciones cuyo contenido resumiré brevemente a continuación.

(1) *Lógica y tratamiento de datos en la ESO*.

Ponentes: Irene Pitarch y Pilar Orús (Universitat "Jaume I" de Castelló)

La comunicación presenta un trabajo de investigación en curso. El marco general de esta investigación en Didáctica de las Matemáticas, es la Teoría de Situaciones (Brousseau G., 1986).

El trabajo es continuación de las investigaciones realizadas por Pilar Orús (desde su tesis, 1992) sobre lógica y análisis de datos en la enseñanza primaria (Francia), aplicado a la ESO y con el tratamiento simultáneo de la lógica y de los datos, esta vez, a partir de la introducción del análisis estadístico, en esta etapa educativa.

Los interrogantes que se plantean son: si será factible una experimentación similar a la utilizada en primaria, y qué aportaciones e interés didáctico se pueden obtener con la nueva perspectiva de la introducción de contenidos estadísticos en el nivel educativo de la enseñanza secundaria obligatoria.

Asimismo, se presenta la experimentación realizada en dos centros y en los cuatro niveles educativos de la ESO durante el curso académico 2000/01 en la provincia de Castellón.

Los resultados de la experimentación aportan datos que confirman los ya obtenidos en primaria por Pilar Orús y, al mismo tiempo, amplían la posible utilización del análisis de datos como instrumento didáctico en la enseñanza secundaria obligatoria.

(2) *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*.

Ponentes: Josep Gascón (U. A. de Barcelona) y Marianna Bosch (U. Ramon Llull)

En esta presentación se subrayan dos ideas principales. La primera surge de la constatación de que las prácticas del profesor, como toda actividad humana institucionalizada, tiene dos caras: la técnico-práctica propiamente dicha ("*praxis*") y la teórica. Ésta última se materializa en un discurso ("*logos*") que justifica, interpreta, reorienta y hasta modifica dicha práctica (docente, en este caso). Al unir estas dos caras tenemos una "*praxeo-logía*" *didáctica* que, postulamos, es la unidad mínima de análisis. Dicha praxeología es: "*empírica*", esto es, vive en una institución concreta en un momento histórico concreto; "*espontánea*", porque sus componentes –tareas y técnicas didácticas y discurso justificador– no están organizados de antemano; y "*del profesor*", puesto que depende de un sujeto concreto de la institución que es el protagonista principal de dicha praxeología. Pero un análisis más detallado pone de manifiesto

[2] Todas las comunicaciones presentadas en estas sesiones de trabajo hacían referencia a sendos textos cuya versión provisional puede recuperarse en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

que dichos componentes praxeológicos no los crea el profesor de la nada. Lo que puede hacer un profesor particular en una situación de enseñanza concreta proviene de una amalgama de *préstamos institucionales* que son fragmentos de una *organización didáctica institucional.* Éste será, por tanto, nuestro objeto primario de estudio.

La segunda de las ideas gira en torno al "*problema del profesor*", (esto es, el problema de reconstruir una *organización matemática* para que pueda ser estudiada en una institución escolar), y a las diferentes formas de tratarlo en didáctica de las matemáticas. Se describen dos maneras de tratar dicho problema que concuerdan bastante bien con las dos formas de integrar lo "pedagógico" y lo "matemático": el análisis de las *concepciones de los profesores*, que supone una ampliación de lo "cognitivo"; y el análisis de las *organizaciones matemático-didácticas* que supone una ampliación de lo "matemático".

En la segunda sesión de trabajo, que tuvo lugar el viernes día 21 de septiembre, se presentaron otras dos comunicaciones y, además, dos Proyectos relacionados con la formación del profesorado de matemáticas.

(3) *El análisis semiótico como técnica para determinar significados*.

Ponentes: Juan D. Godino (U. de Granada) y Mario Arrieche (U. Pedagógica Experimental Libertador de Venezuela).

El trabajo objeto de esta presentación se sitúa dentro del modelo teórico que se designa por "*semiótico-antropológico*" para la Didáctica de la Matemática (Godino, 2001) y se propone como una aplicación que a la vez desarrolla la técnica del "*análisis semiótico*".

Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de "microscópico", el análisis semiótico permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como, por ejemplo, el uso de términos y expresiones. A un nivel más general permite describir la estructura semiótica de una organización matemática compleja, como puede ser la "teoría de conjuntos" implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis semiótico permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por los sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica. Surge así la noción de *conflicto semiótico* que puede utilizarse para explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio, así como para identificar las limitaciones de las *competencias* y *comprensiones matemáticas* efectivamente puestas en juego.

La información que se obtiene a partir del análisis semiótico es necesaria si se desea abordar con criterios rigurosos el diseño e implementación del proceso de estudio de una organización matemática determinada lo que requerirá, en particular, determinar los recursos materiales y de tiempo que se precisan.

(4) *El gráfico cartesiano de funciones como* "*medio*" *material: el paso de la representación gráfica a la analítica, con especial interés en el problema de las escalas*.

Ponentes: Eduardo Lacasta (U. Pública de Navarra) y Miguel Rodríguez (U. de Piura de Perú).

La *teoría de las situaciones didácticas* postula que el aprendizaje se obtiene por enfrentamiento a un "*medio*". La estructuración del medio didáctico precisa de un nivel objetivo. El gráfico cartesiano de funciones (en adelante, GCF) cumple en ocasiones la función de "medio" material en este nivel. El uso correcto del GCF implica la capacidad de transito entre los distintos "medios" materiales a que da lugar éste. Las escalas juegan entonces un papel central. Más aún, ¿qué dificultades pueden ser asociadas a las elecciones de escala en el tránsito de las representaciones gráficas a las representaciones analíticas de una función? ¿Qué errores del uso del GCF por parte de los estudiantes se pueden asociar a los estudiantes?

Se proponen algunos elementos para empezar a elaborar respuestas tentativas a estas y otras cuestiones. Entre dichos elementos destacamos las siguientes conclusiones:

(a) Las escalas se convierten en una *variable didáctica* porque afectan a la jerarquía de las estrategias de resolución y el profesor las puede manipular (fijar o cambiar).

(b) La *ostensión ideogramática* está en la génesis de la ilusión de la *evidencia de comunicación* de la idea (función) representada.

(c) Dos gráficos geométricamente equivalentes pueden generar dos ideogramas distintos y, por lo tanto, dos funciones distintas.

(d) El aprendizaje del "medio" material GCF debe fundarse sobre un modelo relativo. Para ello se tendrán que proponer situaciones diversas donde el respeto de la escala esté en la base del contrato didáctico.

Presentación del Proyecto: "*Elaboración de recursos multimedia para facilitar la búsqueda de elementos de formación a los profesores de Matemáticas y DM*"

Proyecto financiado por la UJI (USE 2001)

Realización: Grupo Didenmat. Coordinación: Pilar Orús (U. "Jaume I" de Castellón)

Presentación de un CD que permite acceder a diversos recursos de búsqueda de *información específica* en Didáctica de las Matemáticas. Está organizado en tres grandes bloques: "Referencias bibliográficas", "Grupos y asociaciones" y "Enlaces interesantes". Cada uno permite acceder a una serie de pantallas donde se pueden realizar diversas búsquedas.

Las "consultas bibliográficas" a las Universidades (UAB, UCM, UJI) permiten la conexión directa. "Tesis" permite acceder al resumen de cada una de ellas. "Materiales" sólo presenta documentos accesibles por internet. "Grupos y asociaciones" es descriptiva, pero la información que aparece es accesible desde "Enlaces" o "Materiales".

Presentación del Proyecto "*Edumat-Maestros*"

Coordinación: Juan Díaz Godino (U. de Granada)

Este proyecto se propone como objetivo la elaboración de un Manual de Matemáticas y su Didáctica para Maestros, dirigido a los estudiantes de magisterio, junto con un texto que incluirá informaciones complementarias para el formador de profesores. El manual contempla tanto la formación matemática de los estudiantes como la formación en didáctica de las matemáticas. Los documentos serán ofrecidos de manera abierta a través de Internet y en su experimentación, revisión y mejora podrán participar los formadores de maestros que lo deseen en todo el ámbito iberoamericano. Con dicho fin se abrirá un foro de discusión específico.

Más información sobre el proyecto y una primera versión de varios temas desarrollados se ofrecen en la siguiente dirección web:

http://www.ugr.es/jgodino/edumat-maestros/

Para finalizar este informe queremos invitar a todos los miembros de la SEIEM a las XVIII Jornadas del SI-IDM que serán organizadas por el grupo DMDC y se celebrarán en Castellón los días 19, 20 y 21 de abril del año 2002[3].

[3] El primer anuncio de dichas Jornadas será publicado próximamente en la página web del Seminario http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

ÍNDICE

PONENCIAS:
Seminario de Investigación I
Prueba y demostracion: Razonamiento matemático

Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración 9
Marcelino J. Ibañes Jalón

La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica 27
Angel Martínez Recio

Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas 45
César Sáenz Castro

Debate del seminario I: Prueba y demostración razonamiento matemático 63
Tomás Ortega

Seminario de investigación II
Metodología

Un estudio cualitativo de corte interpretativo en el ámbito del pensamiento del profesor de secundaria 71
Luis Carlos Contreras

Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles 83
Angel Gutiérrez

Análisis de datos e investigación en didáctica de la matemática. Una aproximación desde la Teoría de Situaciones 95
Pilar Orús Báguena

Cuestiones metodológicas en la investigación educativa 113
Angustias Vallecillos Jiménez

Metodologias de investigação em educação matemática: A importância da diversidade 133
José Manuel Matos

Debate del Seminario II: Metodología 143
Enrique De La Torre

Informes de Investigación

Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: Un estudio desde el modelo cociente 149
Rafael Escolano Vizcarra

Analisis de significados personales e institucionales: El problema de su compatibilización 159
Silvia C. Etchegaray

Desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación 169
Pedro Gómez

Diferentes enfoques para el estudio de algunas Relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares 181
Gregoria Guillén, Luis Puig

Influencia del nivel escolar y el contexto en el conocimiento informal de conceptos inferenciales 189
Antonio Moreno Verdejo, Angustias Vallecillos Jiménez

Un estudio semiótico del razonamiento combinatorio en estudiantes universitarios 199
Rafael Roa, Carmen Batanero

Grupos de Trabajo

Aprendizaje de la Geometría, AG. 211
Didáctica del Análisis, DA. 215
Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, DEPC 219
Pensamiento Numérico y Algebraico, PNA. 221
Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor, CDPP. 225
Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica, DMDC. 229