UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

PRIMER SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ZAMORA, 12-13 DE SEPTIEMBRE 1997

Editores:
Luis Rico
Modesto Sierra

I.S.B.N.: 84-92 0554-8-0

Depósito Legal: GR-924/98

Impreso en España- Printed in Spain

Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias.

Edita: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada. Av. Fuente Nueva s.n. 18071 Granada.

Editores: Luis Rico Romero y Modesto Sierra Vazquez, 1998.

"En la ciencia lo esencial es la actitud crítica. Primero creamos las teorías y después las criticamos. Como ante nuestras teorías solemos adoptar una actitud muy humana y tendemos a defenderlas, en vez de criticarlas, siendo como son nuestras, se produce entre los científicos una suerte de rivalidad entre amistosa y hostil. Si yo no adopto una actitud crítica ante mis teorías, habrá cientos de personas que se mostrarán críticas ante ellas en grado superlativo. Y por fuerza habremos de felicitarnos de su actitud." (K. Popper)

INDICE:

	Página
Presentación	5
Programa del Simposio	7
Sesión inaugural	9
Primer Seminario	11
Desarrollo del Primer Seminario	12
Ponencia Primer Seminario: Aprender a enseñar, modos de representación y número racional	14
Primera réplica Primer Seminario: Sobre el conocimiento didáctico del contenido. Dilemas y alternativas	26
Segunda réplica Primer Seminario: Tipos de tareas para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido	35
Segundo Seminario	42
Desarrollo del Segundo Seminario	43
Introducción Segundo Seminario	45
Primera Ponencia Segundo Seminario: Clasificación de PAEV Aditivos de una etapa con Cantidades Discretas Relativas	47
Segunda Ponencia Segundo Seminario: Problemas Aritméticos Compuestos de dos Relaciones	64
Tercera Ponencia Segundo Seminario: Clasificación de Problemas Aditivos por sus estruturas Numérica y Semántica global	78
Réplica a las Ponencias del Segundo Seminario: Clasificar y significar	107
Tercer Seminario	119
Desarrollo del Tercer Seminario	120
Ponencia Tercer Seminario: Estrategias del Análisis Estadístico para el tratamiento de las cuestiones de Didáctica	121
Grupos de trabajo	139
Balance de los grupos de trabajo	140
Evaluación del Simposio	152
Encuesta de Evaluación	153
Resultados de la Encuesta de Evaluación	158
Relación de inscritos en el Simposio	170

PRESENTACIÓN

Es un valor compartido por la Sociedades Científicas la necesidad de celebrar periódicamente encuentros entre sus miembros con la intención de presentar y discutir los resultados de sus investigaciones. Desde el momento de su fundación, en marzo de 1996, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) sintió y ha dado cauce a esa necesidad.

El Primer Simposio de la SEIEM se ha celebrado en la Escuela Universitaria de Magisterio de Zamora (Universidad de Salamanca) durante los días 12 y 13 de Septiembre de 1997 con la asistencia de sesenta participantes pertenecientes a veinticinco Universidades y a varios Institutos de Educación Secundaria. Desde el primer momento el Simposio contó con el apoyo de la Universidad de Salamanca que lo incluyó dentro de la programación de sus Cursos Extraordinarios, de la Junta de Castilla y León que concedió una subvención económica para el mismo, de la Diputación provincial de Zamora y de su Ayuntamiento.

La Junta Directiva de la SEIEM, en su calidad de Comité Científico del Simposio, decidió que éste se centrase en tres grandes temas de discusión con elaboración de las correspondientes ponencias, seguidas de una réplica y un debate. También consideró necesario que los distintos grupos de trabajo creados en el seno de la SEIEM, discutiesen distintas aportaciones de sus miembros. Así, el Simposio se articuló en torno a tres Seminarios de Investigación y a Sesiones de los grupos de trabajo que quedan reflejados en el programa. En cada uno de los Seminarios, a continuación de la ponencia y la réplica, tuvo lugar un debate vigoroso entre los participantes.

El Simposio fue inaugurado por el Vicerrector de Investigación de la Universidad de Salamanca. Los participantes fueron recibidos en el Ayuntamiento y Diputación de Zamora y realizaron una visita cultural a la ciudad disfrutando de sus iglesias románicas.

Se han cumplido ampliamente los objetivos de este Simposio que eran, en líneas generales, el inicio de un debate en profundidad sobre algunos temas de investigación, la consolidación de los grupos de investigación y el cumplimiento de las previsiones estatutarias y funcionamiento de la SEIEM.

Modesto Sierra Vázquez
Coordinador del Primer Simposio de la SEIEM

PRIMER SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (SEIEM).

ESCUELA UNIVERSITARIA DE MAGISTERIO DE ZAMORA,
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA: 12 Y 13 DE SEPTIEMBRE 1997

PROGRAMA

día 11, Jueves

20:00 h.-21:00 h.: Recepción de participantes y entrega de documentación en la Escuela Universitaria.

día 12, Viernes

8:30 h. - 9:00 h.: Recepción de participantes y entrega de documentación en la Escuela Universitaria.

9:00 h.- 9:30 h.: Inauguración del Simposio.

9:30 h.- 11:30h.: Seminario I.
Tema de debate:
Profesor de Matemáticas y contextos de investigación ¿Cómo abordar la investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido en los profesores de matemáticas? Opciones y líneas.
Ponentes:
Dr. Salvador Llinares. Universidad de Sevilla
Dra. Mª Victoria Sánchez. Universidad de Sevilla
Réplica:
Dr. Lorenzo Blanco. Universidad de Extremadura
Dra. Pilar Azcárate. Universidad de Cádiz
Moderador:
Dr. Modesto Sierra. Universidad de Salamanca

11:30 h.- 12:00h.: Descanso.

12:00h.- 14:00h.: Seminario II.
Tema de debate:
¿Cómo estructurar las tareas que aparecen en un campo conceptual? Discusión de un caso: clasificación de problemas aditivos.
Ponentes:
Dr. Martín M. Socas. Universidad de La Laguna
Dr. Enrique Castro. Universidad de Granada.
Dr. José L. González. Universidad de Málaga
Réplica:
Dr. Luis Puig. Universidad de Valencia
Moderador:
Dr. Lorenzo Blanco. Universidad de Extremadura

14:00 h.: Vino de honor Escuela Universitaria de Magisterio Zamora

16:00h.-19:00h.: Sesiones en paralelo de los grupos de trabajo:
- Didáctica del Análisis Matemático (DAM).
Coordinadora: Dra. C. Azcárate
- Aprendizaje de la Geometría (AG).
Coordinador: Dr. M. Arrieta.
- Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (DEPC).
Coordinador: Dr. A. Estepa
- Pensamiento numérico y algebraico (PNA).
Coordinador: Dr. B. Gómez
- Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor (CDPP).
Coordinador: Dr. S. Llinares.
- Educación Infantil (EI).
Coordinadora: Dra. C. Corral
- Historia de la Educación Matemática (HEM).
Coordinador: J. M. Núñez

20:00h.: Recepción ofrecida por la Diputación y Ayuntamiento de Zamora y Visita cultural a la ciudad.

Día 13, Sábado
9:00h.- 10:30h.: Conclusiones de los grupos de trabajo
Moderadora:
Dr. Mª Victoria Sánchez. Universidad de Sevilla

10:30h.- 11:00h. Descanso

11:00h.-13:00h.: Seminario III
Tema de debate:
Metodología de Investigación en Educación Matemática: Estrategias del análisis estadístico para tratamiento de cuestiones de didáctica.
Ponente:
Dr. Eduardo Lacasta. Universidad Pública de Navarra.
Moderador:
Dr. Luis Rico. Universidad de Granada

13:00h.: Asamblea de la SEIEM

14:00h. Clausura

14:30h. Comida ofrecida por la SEIEM

SESIÓN INAUGURAL

Durante los días 12 y 13 de septiembre de 1997 va a tener lugar en la Escuela Universitaria de Zamora el Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, en cuyo transcurso se van a celebrar tres Seminarios de Investigación, una sesión de trabajo de los Grupos de Investigación y la Primera Asamblea ordinaria de la Sociedad. En esta sesión inaugural tenemos el honor de contar con la presencia del Vicerrector de Investigación de la Universidad de Salamanca y del Director de la Escuela de Magisterio de Zamora, a quiénes agradecemos el apoyo prestado por ambas instituciones para la celebración de este encuentro. Este primer simposio tiene lugar transcurrido un año y seis meses desde la constitución de la Sociedad y concluidos los trámites de su legalización.

En este Simposio se produce la culminación de un proceso: la puesta en funcionamiento de un espacio nacional para el debate sobre investigación en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con este encuentro la comunidad española de investigadores en educación matemática asume con plenitud la creación, critica y comunicación del conocimiento científico en Didáctica de la Matemática, y el procedimiento asumido consiste en la reflexión pública, discusión y análisis de los trabajos y aportaciones de sus miembros.

Para la estabilidad de la comunidad de investigadores en Educación Matemática ha sido determinante que, previamente, se haya consolidado una fuerte comunidad de investigadores en las diferentes disciplinas matemáticas. El hecho de que se investigue en Matemáticas en la Universidad española da sentido a los problemas de su enseñanza y aprendizaje, debido a las dificultades de comunicación y transmisión que se plantean. También es relevante la consolidación de diferentes comunidades de investigadores en las diversas disciplinas que denominamos Ciencias de la Educación, ya que proporcionan marcos de referencia teóricos y metodológicos adecuados y sirven de crítica y contraste a las investigaciones realizadas en Educación Matemática.

Igualmente tiene un efecto determinante para esta investigación la constitución de las Sociedades de Educadores o Profesores de Matemáticas. Estas sociedades han realizado una actividad vigorosa con aportaciones al diseño y desarrollo del curriculo de las matemáticas escolares asi como a la formación inicial y permanente del profesorado. La contribución de las Sociedades de Profesores al desarrollo de la Educación

Matemática y, en especial, a la reflexión sobre las conexiones entre teoría y práctica ha sido destacable en España; gran parte del trabajo inicialmente realizado en investigación se ha planteado y discutido en los encuentros y jornadas organizados por las Sociedades y se ha difundido mediante las actas y revistas editadas por ellas.

Los investigadores en educación matemática forman parte, por derecho propio, de la comunidad de educadores matemáticos, pero tienen su campo profesional específico al que deben atender con prioridad. La coordinación sistemática entre estos dos colectivos permitirá alcanzar unas señas de identidad bien fundadas y consolidar ambas comunidades.

Todos los educadores matemáticos españoles comparten la misma finalidad: mejorar la calidad de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en España y, cada uno, debe asumir este objetivo en el ámbito de sus competencias profesionales. Los investigadores tienen un campo profesional bien delimitado que no pueden eludir. Por razones éticas, cívicas y profesionales han de llevar a cabo el inaplazable desarrollo de la investigación española en Educación Matemática; el éxito o fracaso en esta tarea dará en el futuro la dimensión auténtica de su contribución a la Educación Matemática en España.

Estos son los motivos principales que nos han traido a Zamora para la comunicación, la crítica y la reflexión compartida sobre nuestro campo de investigación durante dos días. Hemos elegido tres ámbitos de indagación para esta tarea, que se concretan en tres cuestiones: ¿cómo abordar la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido en los profesores de matemáticas?, ¿cómo estructurar las tareas que se presentan en un campo conceptual? y ¿cómo emplear las estrategias de análisis estadístico en el tratamiento de las cuestiones didácticas? A estas cuestiones seguirán otras en próximos encuentros.

Durante estos dos días continuaremos un debate ya iniciado; lo haremos con la perspectiva de formar parte de una colectividad en proceso d crecimiento y con participación de todas las voces. El resultado será una tarea que proseguirá durante los próximos meses, que contribuirá al logro de nuestros objetivos y al avance de la investigación sobre educación matemática en nuestro país. Es así como se consolidan los grupos científicos.

El protagonismo es vuestro; os animo a rentabilizar vuestros trabajos, compartir vuestros conocimientos y mejorar el estado del arte en nuestra disciplina.

Luis Rico
Presidente de la SEIEM

PRIMER SEMINARIO

TEMA DE DEBATE:

PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y CONTEXTO DE INVESTIGACIÓN. ¿CÓMO ABORDAR LA INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO EN LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS? CONTEXTOS Y LÍNEAS.

DESARROLLO DEL PRIMER SEMINARIO

INTERVENCIONES:
PONENCIA: APRENDER A ENSEÑAR, MODOS DE REPRESENTACIÓN Y NÚMERO RACIONAL.
DR. S. LLINARES Y DRA V. SÁNCHEZ, UNIVERSIDAD DE SEVILLA

PRIMERA RÉPLICA: SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO. DILEMAS Y ALTERNATIVAS.
DRA. P. AZCÁRATE, UNIVERSIDAD DE CÁDIZ.

SEGUNDA RÉPLICA: TIPOS DE TAREAS PARA DESARROLLAR EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO
DR. L. BLANCO, UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA.

Desarrollo del Primer Seminario

El primer Seminario versó sobre el tópico "Profesores de Matemáticas y Contextos de Investigación", fue presentado por S. Llinares y V. Sánchez, de la Universidad de Sevilla, durante 45 m. La réplica la dieron P. Azcárate, de la Universidad de Cádiz, y L. Blanco, de la Universidad de Extremadura, durante 30 m. Modera la sesión el profesor M. Sierra.

La presentación estuvo centrada sobre el proceso de formación del profesor de matemáticas, su conocimiento profesional y la investigación. Se argumentó sobre:

* las implicaciones de carácter práctico y curricular del objeto de estudio puesto a debate;
* la necesaria revisión del constructo *Pedagogical Content Knowledge* (Shulman).

Se presentó seguidamente una propuesta de agenda de investigación centrada sobre tres subproblemas:

1.- Caracterizar el Conocimiento de Contenido Pedagógico y los factores que influyen en su generación y desarrollo.

2.- Señalar aquellos aspectos que influyen en el proceso de Razonamiento Pedagógico.

3.- Caracterizar los procesos de socialización.

A continuación se ejemplifica el primer subproblema mediante una investigación llevada a cabo por los ponentes, relativa al conocimiento que tienen los estudiantes para profesor de Primaria en relación al uso de diferentes sistemas de representación sobre el concepto de fracción; se proporcionan diversos ejemplos de trabajos.

La profesora Azcárate destaca la necesidad de delimitar las fuentes del Conocimiento de Contenido Pedagógico y en cómo integrarlas teniendo en cuenta su diversidad; valora que el peso dado al conocimiento matemático en los ejemplos propuestos es excesivo y considera que las matemáticas son sólo una de las fuentes del conocimiento profesional del profesor de Primaria. Defiende la necesidad de investigaciones más estratégicas y un mayor apoyo en la cognición situada.

El profesor Blanco denuncia los diferentes significados que, en ocasiones, se da a las mismas expresiones lo cual conduce a confusión. Subraya la consideración de tres mundos: el formado por las Matemáticas y otras disciplinas, el de los estudiantes para profesor de Primaria y el de los contextos de trabajo y estudio que surgen en la Escuela y en la Universidad; destaca las desconexiones y discrepancias entre estos mundos. Plantea dos cuestiones principales:

* ¿en qué consiste aprender a enseñar matemáticas?
* ¿cuál es la naturaleza del conocimiento de los estudiantes para profesor de Primaria?

El profesor Llinares interviene brevemente para destacar la necesidad de pasar a propuestas concretas y adherirse a la necesidad de delimitar las fuentes del Conocimiento de Contenido Pedagógico. Destaca que cada programa de investigación tiene su propia lógica y establece las prioridades de la suya. La profesora Sánchez reafirma la importancia de las matemáticas en las investigaciones que se han presentado y subraya que dichas investigaciones sí están situadas.

Durante el debate se producen 8 intervenciones de los asistentes, quienes interrogan sobre las cuestiones y estudios presentados; se enfatiza la necesidad de unificar términos y precisar el significado de los conceptos; se reclama mayor peso de las matemáticas en los estudios sobre conocimiento del profesor y se destaca la calidad de las intervenciones en la presentación.

APRENDER A ENSEÑAR, MODOS DE REPRESENTACIÓN Y NÚMERO RACIONAL

Salvador LLinares, Victoria Sánchez
Universidad de Sevilla

Resumen

Dentro de las investigaciones desarrolladas en el contexto de aprender a enseñar, este proyecto ha tenido por objetivo analizar las características de la comprensión de los contenidos matemáticos escolares, en particular fracciones y número racional, en estudiantes para profesores de Primaria. La teoría de Hiebert (1988) se utilizó como esquema analítico para interpretar los datos. En particular, aquí se presentan las dificultades que se plantean en relación a la conexión de los referentes concretos con los procesos de obtención de fracciones equivalentes, y se discute lo que esto implica en el proceso recursivo de la comprensión matemática (Pirie y Kieren, 1989, 1991). Por último, se indican algunas implicaciones tanto en relación a la formación de profesores como en relación a la forma de abordar futuras investigaciones.

Introducción

Cuando un proyecto de investigación se considera como objeto de discusión y debate cambian algunos aspectos. El centro de atención pasa de lo que podríamos considerar el proceso (discusión sobre el diseño, puesta en práctica y resultados) a considerarlo de una forma global, como algo que ocupa un lugar en el espacio y tiempo, y que puede ser considerado como un todo, que se integra a su vez en un proceso de desarrollo posterior. El adoptar esta perspectiva nos permite, por un lado, establecer una comparación entre las cuestiones de investigación planteadas y las respuestas obtenidas, dando lugar a nuevas cuestiones de investigación y nuevas formas de abordarlas. Por otro, permite realizar una serie de inferencias que tienen indudable repercusión en nuestra práctica. Creemos que este tipo de discusiones debe ser precisamente el objetivo de debate en reuniones de investigación.

Antecedentes

En la década de los 80 se puso en marcha un nuevo intento de reforma en relación a la enseñanza de los matemáticas escolares, tratando caracterizar una nueva cultura escolar (Crockford, 1983, NCTM, 1989), que definía nuevos papeles y responsabilidades para los profesores (Llinares, 1991a). En este contexto, Shulman (1986) destacó la importancia de un conocimiento específico para la enseñanza, comenzando a mencionar el término “pedagogical content knowledge”, entendido como

“A second kind of content knowledge is a pedagogical knowledge, which goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter for teaching” (Shulman, 1986,p.9).

El propio autor matizaba que dentro de esta categoría incluía, entre otras, las formas de representar y formular la materia que la hagan comprensible a otros. En un trabajo posterior (Wilson et al., 1987), se insistió en la idea de que el conocimiento de contenido pedagógico era algo más que un conjunto de simples representaciones de la materia, siendo lo que le caracterizaba el “razonamiento pedagógico” del profesor. (Independientemente de las matizaciones y puntualizaciones que se hayan hecho con posterioridad al trabajo de Shulman y sus colaboradores, nadie puede dudar la trascendencia que ha tenido en las investigaciones posteriores).

Para nosotros, todo eso implicaba considerar una doble relación. Por un lado, podíamos pensar que la forma en la que un profesor, o estudiante para profesor, comprende una noción matemática determina en parte el tipo de tareas que selecciona y las representaciones que utiliza en la enseñanza. Pero también existe la relación inversa, es decir, profundizar en una determinada representación vinculada a una noción matemática en particular puede ampliar su comprensión de las ideas y procedimientos matemáticos, existiendo así una relación mutua entre el conocimiento matemático y el contenido de los modos de representación por parte del profesor. Centrándonos en un contexto de aprender a enseñar, el análisis de esta relación en estudiantes para profesor en los programas de formación pensábamos que nos podía permitir ampliar nuestra comprensión de sus procesos de aprender a enseñar Matemáticas.

Siguiendo a Brown et al. (1989), en la caracterización de dicho proceso considerábamos el conocimiento “situado”, entendiendo que está vinculado al tipo de tareas y la actividad que se realiza con ellas. Esto implicaba para nosotros que el conocimiento y comprensión del contenido matemático escolar de los estudiantes para profesor podía depender del tipo de tareas y actividad que desarrollaron en la escuela en su época de aprendices. En este sentido, su conocimiento estaría situado en una cultura determinada, en la que en muchas ocasiones se ha puesto demasiado énfasis en la formalización, siendo el objetivo prioritario la destreza en el manejo de símbolos y reglas. Esto podría llevar a una comprensión de las nociones matemáticas escolares no del todo coincidente con la nueva cultura escolar que se pretende implementar.

Todo esto nos condujo a principios de los noventa a iniciar un proyecto de investigación, en el que pretendíamos caracterizar la naturaleza de la comprensión de los estudiantes para profesores de Primaria de las nociones matemáticas del curriculum escolar. Considerando nuestro trabajo como formadores de profesores, tratábamos con ello de generar implicaciones sobre el contenido y metodología en la formación inicial de profesores de Matemáticas de Primaria.

El proyecto

Concretando el objetivo del proyecto de investigación, intentábamos estudiar algunos aspectos del proceso de aprender a enseñar matemáticas en estudiantes para profesores de Primaria (EPs). En particular, analizar las características de la forma de comprender los contenidos matemáticos de la Enseñanza Primaria que dichos estudiantes traían al programa de formación y cómo esas características influyen en lo que se aprende (contenido del proceso de aprender a enseñar Matemáticas). Esto dio lugar a diferentes subproblemas:

1. Intentar caracterizar el conocimiento de contenido pedagógico y los factores que influyen en su generación y desarrollo
2. Aspectos que influyen en el proceso de razonamiento pedagógico

En particular, aquí nos vamos a ocupar del primero de ellos, que contextualizamos en el dominio de las fracciones y números racionales. Centrando nuestro atención en el análisis del conocimiento que sobre ellos poseen los estudiantes para profesores de Primaria, en relación al uso de diferentes sistemas de representación, nos planteábamos las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las características de la conexión de los símbolos matemáticos para las fracciones y los referentes gráficos o concretos?

¿Qué influencia ejerce el sistema de representación utilizado en la realización de diferentes tareas con fracciones?

Conocimiento de los EPs de la correspondencia entre las acciones sobre referentes y los pasos en los procedimientos a nivel de símbolos, es decir: ¿Cuál es el origen del significado de los procesos de equivalencia y orden con las fracciones?.

Los participantes en el estudio fueron estudiantes para profesores de Primaria matriculados en diferentes especialidades de la Diplomatura de Magisterio, que se prestaron voluntariamente a colaborar.

Metodológicamente, los datos procedían de cuestionarios, entrevistas semiestructuradas y análisis en profundidad de casos.

Se utilizó la teoría de Hiebert (1988) sobre el desarrollo de la comprensión del significado de los símbolos y procedimientos matemáticos como esquema analítico para interpretar los datos. En su teoría, Hiebert propone una sucesión se procesos cognitivos que se acumulan para producir competencia con los símbolos matemáticos escritos. De los cinco procesos descritos, el segundo y el tercero, desarrollo de procedimientos de manipulación del símbolo y la elaboración de procedimientos para los símbolos respectivamente, centraron nuestra atención.

En diferentes publicaciones hemos ido discutiendo los resultados a los que iban conduciendo nuestras investigaciones (Llinares, 1991b; Llinares y Sánchez 1991a,b, 1992a, 1993, 1996; Sánchez y Llinares 1992a, 1992b; Llinares, Sánchez y García, 1994). Aquí presentamos algunos datos de la investigación desarrollada en relación a las características de la comprensión de los estudiantes para profesores.

Dificultades entre la conexión de los referentes concretos con los procesos de obtención de fracciones equivalentes a nivel de símbolos.

Uno de los aspectos que se pusieron de manifiesto en nuestra investigación fueron las dificultades que tenían los estudiantes para profesores en relación a los modos de representación y los símbolos a nivel de procedimientos. Algunas veces conocían procedimientos simbólicos para encontrar una fracción equivalente a una dada, pero el tipo de relación multiplicativa entre los numeradores introducía modificaciones en el proceso de modelación, poniéndose de manifiesto la dificultad de "regresar" a un nivel concreto.

Lo que se va a mostrar es que ellos se apoyan en la relación entre la fracción como símbolo y la fracción como cantidad (primer nivel de Hiebert) pero tiene muchas dificultades en establecer la relación entre:

el paso a nivel de símbolos (multiplicar numerador y denominador en una fracción por un número que puede ser natural o fraccionario) para obtener fracciones equivalentes ,

y la manipulación de concretos (añadir o quitar en modo gráfico divisiones en la unidad).

Así, cuando en una de las entrevistas se planteaba la tarea:

TAREA 1: "Encontrar una fracción equivalente a 5/3" describiendo el proceso apoyándose en algún referente, uno de los estudiantes para profesores seguía la siguiente secuencia:

→ utiliza el dibujo de un rectángulo, representando correctamente la fracción 5/3 aplicando el noción parte-todo

→ a continuación, recuerda un "aspecto " de la regla para buscar fracciones equivalentes en el contexto de los símbolos: "multiplicar numerador y denominador por el mismo número". Aplica esta regla (manejo de símbolos) y encuentra una fracción equivalente (10/6)

→ representa esta última fracción, utilizando la noción parte-todo, mediante un rectángulo

→ "determina" la equivalencia con la fracción mirando los dibujos y diciendo que son lo mismo.

Podríamos decir que existe una traslación desde el dibujo (concreto) a los símbolos, pero solamente en la fraccion como cantidad (primer nivel de Hiebert). En los símbolos se aplica la regla, se vuelve al sistema de representación primero, es decir, los dibujos de rectángulos, y se muestra la equivalencia, pero no el proceso, fijándose en el "tamaño" de la parte marcada en los dibujos. Parece ser que hay dificultades en utilizar la representación rectángulo para describir el proceso, por lo que necesita trasladarse al dominio de los símbolos y procedimientos numéricos.

Cuando la tarea que se le plantea es:

TAREA 2: "Encontrar una fracción equivalente a 9/12 con numerador 6"

utiliza el dibujo de un rectángulo para representar la fracción nueve doceavos. Al pintar las rayitas (de tres en tres) se da cuenta que es lo mismo que tres cuartos:

F.9.9.... voy al rectángulo ... voy a pintar qué son nueve doceavos ... divido la unidad en doce partes (señala once rayitas en cada uno de los lados mayores del rectángulo) ... tres, seis, nueve (marca cada tres separaciones con una raya vertical y en la separación novena una raya más fuerte) ... esto sería ... tres cuartos.

El estudiante para profesor realiza un proceso a nivel concreto que le lleva a una forma distinta de representar la cantidad a ese nivel y dicha cantidad la asocia a una fracción a nivel de símbolos. A partir de la fracción _ ya puede volver a aplicar el procedimiento algorítmico (multiplicar por el mismo número, en este caso 2, el numerador y el denominador) y vuelve a seguir los pasos anteriores:

representar la fracción obtenida mediante rectángulos establecer la igualdad con la primera fracción “por el tamaño del dibujo”

F.10.2. … he pintado el rectángulo, lo he dividido en doce partes, y entonces me ha dado cuenta de que nueve doceavos es lo mismo que tres cuartos … bien, para convertir el numerador en seis he multiplicado el tres por dos y el cuatro por dos …

F.10.4. … he dicho seis octavos, entonces pinto el dibujo y lo divido en ocho partes … significa que me da igual que nueve doceavos.

Cuando la tarea planteada es:

TAREA 3: 9/12=15/?

intenta representar mediante un rectángulo la fracción 9/12, pero no es capaz de terminarlo, encontrando dificultades en generalizar las explicaciones:

F11.2... estoy pensando a ver como... los quince son ... quince partes de ... si el numerador es quince, pero el denominador ...

F.11.4: ... no se como hacerlo

Si consideramos las dos últimas tareas planteadas, la estructura que presentan es similar, siendo la única diferencia existente entre ellas el operador, 2/3 (menor que uno) en el caso de la Tarea 2, y 5/3 (mayor) en el caso de la Tarea 3. Con la información que se tiene pensamos que la dificultad proviene del hecho de ser el operador mayor que uno. Tampoco se tiene información de por qué en este caso no ha reducido la fracción a _. Para este estudiante para profesor se recordaban procedimientos a nivel simbólico que permitían resolver un item, pero se mostraba explícitamente la dificultad en modelar con referentes esos procedimientos.

Discusión

En general, desde el punto de vista de la conexión y desarrollo de procesos identificados por Hiebert, y en el contexto de aprender a enseñar, en relación al conocimiento de los estudiantes para profesores de Primaria de la correspondencia referentes y los pasos en los procedimientos a nivel de símbolos podemos señalar que:

en relación a la influencia de los símbolos en la comprensión de los racionales, el significado asociado a los símbolos matemáticos por los estudiantes para profesores procede en muchas ocasiones del propio nivel de formalización matemática, y está vinculado parcialmente al aspecto simbólico y el manejo sintáctico. Esto se puso de manifiesto en las tareas en las que intervenía la idea de unidad y tuvo como consecuencia la dificultad en modelar concreta y gráficamente procesos para los números racionales.

con respecto a la flexibilidad del conocimiento del profesor (entendida como la habilidad que éste debe tener para cambiar el significado asociado a los conceptos matemáticos en relación a las características de la tarea y/o el sistema de representación empleado), dependiendo de las características de las tareas se puede utilizar cualquiera de los significados asociados, generándose dificultades cuando no son compatibles el significado dado a la fracción, las características de la representación y la tarea a realizar.

la dificultad de representar en el nivel de los concretos los pasos desarrollados a nivel de símbolos conduce a lo que Hiebert (1988) denomina una traslación en la fuente del significado (de los referentes a los símbolos). Cuando no existe esa identificación esta traslación imposibilita un pensamiento recurrente (regresar al nivel de los concretos desde el nivel de los símbolos).

Pirie y Kieren (Pirie y Kieren 1989, 1991; Kieren y Pirie, 1992) han caracterizado la comprensión matemática mediante un proceso recursivo, a través de niveles anillados. Una característica clave de la teoría recursiva de la comprensión matemática (recursive theory of mathematical understanding en la versión original) es que el desarrollo de la comprensión no tiene una calidad lineal o secuencial:

“... una persona que está funcionando en un nivel exterior de comprensión cuando es desafiada (challenged) puede apelar o retornar (“fold back”) a una comprensión interior, mas intuitiva o específicamente local ... Este retorno tiene en cuenta aquí la construcción y elaboración de nivel interior de comprensión para apoyar y conducir al nuevo nivel exterior de comprensión ... El proceso de comprensión en cualquier nivel siempre tiene en cuenta y se sostiene en retornar para avanzar” (Pirie y Kieren, 1991, p.172).

En el contexto de aprender a enseñar, es necesario analizar y potenciar, la naturaleza de aspecto “folding back” en la comprensión matemática de los EPS. Si como consecuencia del aprendizaje que estos han realizado de las nociones matemáticas no han desarrollado plenamente el carácter recursivo del proceso de comprensión, por haber accedido directamente al nivel de símbolos, entonces pueden mantenerse en un nivel de manejo algorítmico de los procedimientos matemáticos, imposibilitándoles el análisis del papel que desempeñan distintos modos de representación (sistemas de símbolos) en el aprendizaje de dichas nociones y procedimientos.

El que, como hemos indicado anteriormente, el significado asociado a los símbolos matemáticos por los EPs proceda muchas veces del propio nivel de formalización matemática puede originar que, algunas veces, no se haya generado el proceso recurrente de comprensión, y los conceptos matemáticos del curriculum de Primaria pierdan su posible significado concreto. Desde la perspectiva de la teoría de recursión de la comprensión matemática propuesta por Pirie y Kieren esto implicaría que, para muchos estudiantes para profesores, no existe vinculación entre el nivel de formalización y los niveles interiores. Los estudiantes para profesor de Primaria tienen dificultades para modela concretamente y gráficamente las ideas y procesos de las matemáticas escolares

Por otro lado, en relación a la flexibilidad el conocimiento del profesor, éste debería ser capaz de utilizar diferentes significados asociados a las nociones matemáticas junto con el uso de diferentes sistemas de representación instruccionales. Una de las características del proceso "folding back" que caracteriza el proceso de comprensión matemática es la posibilidad de cambiar de sistema de representación (en particular, regresar a niveles interiores) durante el proceso de resolución de la tarea. La flexibilidad del conocimiento del profesor está vinculada al conocimiento de diferentes formas de representación, a los diferentes significados asociados a los conceptos y, principalmente, a las relaciones entre ellos como un medio de favorecer los procedimientos de resolución de los problemas. El proceso de "folding back" es el que permite realizar la integración de los significados que conlleva una ampliación de la comprensión.

Implicaciones

En relación a la formación de profesores, el tener en cuenta que el conocimiento que los EPs traen al programa de formación está, en muchas ocasiones, situado en una cultura escolar que se pretende superar, nos ha llevado a considerar el proceso de aprender a enseñar como un aprehendizaje cognitivo (Linares, 1993, 1994a). Esto nos ha conducido a tratar de integrar en los cursos de formación inicial las características de dicho aprendizaje (desarrollo de destrezas reflexivas, potenciar la interacción social, la idea de actividad articulando el proceso) (Brown et al, 1989). Todo esto tiene implicaciones en relación al contenido, metodología y estructura del programa de formación.

El análisis de la comprensión matemática de los estudiantes para profesores de Primaria nos ha permitido identificar características de dicha comprensión. En este sentido, la formación inicial de los profesores de Primaria debería incidir en:

la influencia de los símbolos sobre la comprensión de las nociones matemáticas en los estudiantes para profesores,

el origen del significado de las reglas,

la flexibilidad del conocimiento del los estudiantes para profesores.

Otra implicación que se deriva es que los EPs necesitan conocer el papel que desempeñan los distintos modos de representación que se pueden utilizar con los racionales, en el proceso de aprendizaje de estas ideas por los niños, para valorar adecuadamente la información que se les proporciona, y seleccionar la idoneidad de una representación frente a otra. Todo esto no ha conducido al diseño y producción de materiales curriculares para los programas de formación, en particular videos, casos y tareas.

La incorporación de estos materiales en nuestra actuación se puede hacer con itinerarios muy diferentes. Por ejemplo, se plantea a los EPs que realicen en grupos tareas similares a las utilizadas en las entrevistas. La verbalización posterior y la comparación y contraste de diferentes procedimientos en discusiones de clase entera permite potenciar la conexión con sus ideas previas sobre el aprendizaje, el rol de los sistemas de representación, cuestiones curriculares, etc. Todo esto facilita explicitar procesos de “folding back” que amplían su comprensión de los conceptos matemáticos y los recursos didáctico. La posterior visualización de entrevistas clínicas grabadas en vídeo de niños resolviendo la misma tarea (Llinares y Sánchez, 1992b) permiten vincular sus propias reflexiones sobre como se produce la forma sobre como se produce el aprendizaje de los niños de las mismas nociones matemáticas.

Desde la perspectiva de nuestra labor investigadora, las implicaciones de este proyecto tenemos que considerarlas en una doble vertiente. En relación a nuevas preguntas que surgieron, apreciamos la necesidad de profundizar en las características del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, lo que amplió nuestra línea de investigación. En una segunda vertiente, nos condujo a una reflexión en relación a la metodología de investigación y a una búsqueda de instrumentos de investigación adecuados a los problemas específicos que nos planteamos dentro del campo de la Educación Matemática. De este modo, el proyecto de investigación aquí presentado se ha integrado tanto en nuestro trayectoria como investigadores (Sánchez, 1996) como en nuestro programa de formación (Llinares 1994b,1995) permitiéndonos dar un paso adelante en nuestro desarrollo profesional.

Referencias

Brown, J.S., Collins, A. y Duguid, P. (1989): Situated Cognition and the Culture of Learning”. *Educational Researcher,* january - february, pp. 32-42.

Hiebert, J. (1988): “A Theory of Developing Competence with Written Mathematicsl Symbols”. *Educational Studies in Mathematics*, 19, pp. 333-355.

Kieren, T., Pirie,S. (1992): “The answer determines the questions. Interventions and the growth of mathematical understanding”. In Geeslin and Graham (Edts.) *Proceedings of the sixteenth PME Conference*. Durham, NH.

LLinares, S. (1991a): *La formación de profesores de matemáticas.* Sevilla: GID.

Llinares, S. (1991b): “La naturaleza de la comprensión de las nociones matemáticas curriculares: Variables en la formación de profesores de Matemáticas. En Marcelo y otros (Edts.) *El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica.* Universidad de Sevilla, Servicio de Publicaciones, pp. 277-320.

Llinares, S. (1993): “Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje”. En Montero y Vez (Edts.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado. Santiago de Compostela:* Tórculo ediciones.

Llinares, S. (1994a): “The development of Prospective Elementary Teachers’ Pedagogical Content Knowledge and Reasoning. The Scool Mathematical Culture as Reference”. En Malara y Rico (Edts.) *Proceedings of the forst Italian-Spanish Research Simposium in Mathematics Education*, Módena, Italia..

Llinares, S. (1994b): “*Learning to teach mathematics: A point of view about learning to teach mathematics from a conceptualization if mathematics teacher knowledge as situated knowledge*”. Lecture prepared to be presented at Mathematik Didaktiches Kolloquium, Institut für Didaktick der Mathematik, Universität Dortmund, June.

Llinares, S. (1995): “Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: Implicaciones en la formación de profesores de Matemáticas”. En L. Blanco y V. Mellado (Eds.) *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal.* DDCEM, Universidad de Extemadura, Badajoz.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1991a): “The knowledge about unity in fractions tasks of Prospective Elementary Teachers”. En Furinghetti (Edt.) *Proceedings of the XV PME,* Assisi, Italia.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1991b): “Prospective Elementary Teachers’ Subject Matter Knowledge for teaching: The Case of fractions Representations Systems”. *Synopses of Conference Proceedings of V ISSAT,* Surrey, England. p. 20.

LLinares, S. y Sánchez, V. (1992a): “Prospective Elementay Teachers Pedagogical Content Knowledge: Fractions, representation mode and tasks”. *Short communication 7-ICME,* Quebec, Canadá.

LLinares, S. y Sánchez, V. (1992b): VIDEO: *Elementos del Conocimiento Base para la Enseñanza Aritmética. Nivel Primaria. Vol. 6: Fracciones: Parte-Todo.* Servicio de Medios Audiovisuales y Tecnología Educativa de la Universidad de Sevilla. Sevilla.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1996): “Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de Primaria”. En Giménez, Llinares y Sánchez (Edts.) *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, pp. 96-118

LLinares, S., Sánchez, V. y García, M. (1994): “Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. *Revista de Educación*, nº 304, pp. 199-225.

NCTM (1989): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Reston, Virginia: NCM. (Traducción al español 1991 SAEM Thales).

Pirie, S. y Kieren, T. (1989): “A recursive Theory of Mathematical Understanding”. *For the Learning of Mathematics* 9(3), 7-11.

Pirie, S. y Kieren, T. (1991): Folding back: dynamics in the growth of mathematical understanding”. En Furinghetti (Edt.) *Proceedings of the XV PME,* Assisi, Italia.

Sánchez, V. (1996): “Del pensamiento del profesor al conocimiento profesional: Un itinerario de investigación en Educación Matemática”. En Ruiz Higueras (Edt.) *El saber en el espacio didáctico.* Universidad de Jaen, Servicio de Publicaciones, pp. 145-168.

Sánchez, V. y Llinares, S. (1992a): “Prospective Elementary Teachers’ Pedagogical Content Knowledge about Equivalent Fractions”. *Proceedings of the Sixteenth PME Conference.* Durhan, NH, 6-11 august, p. 274-281.

Sánchez, V. y Llinares, S. (1992b): "Algunos aspectos de la comprensión de los futuros profesores sobre las fracciones". En Marcelo y Mingorance (Edts.) *Pensamiento de los profesores y desarrollo profesional* (vol. II). Formación Inicial y Permanente. Sevilla: Servicio de Publicaciones de la Universidad.

Shulman, L.S. (1986): "Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching". *Educational Researcher,* febrero, pp. 4-14.

Wilson, S.M., Shulman,L.S. y Richert, A. E. (1987): "150 Different Ways' of Knowing: representations of Knowledge in Teaching". En Calderhead (Edt.) *Exploring Teachers' Thinking.* London: Casell.

SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO. DILEMAS Y ALTERNATIVAS.

Pilar Azcárate Goded
Universidad de Cádiz

*** Sus diferentes interpretaciones**
La investigación presentada por Llinares y Sánchez, está enmarcada en el ámbito de la formación de profesores y, como se indica en diferentes momentos, su objetivo último es una mejor comprensión de la enseñanza desarrollada y del papel desempeñado por los programas de formación de los profesores de matemáticas.

Desde la perspectiva de la problemática de la enseñanza de las matemáticas, se focalizan en conocer y comprender el conocimiento de los futuros profesores sobre diferentes representaciones instruccionales vinculadas a un tópico concreto, la fracción, y el modo en que son empleadas dichas representaciones en las diferentes tareas. Aspecto que reconocen como parte fundamental del conocimiento didáctico del contenido.
Mas concretamente intentan detectar las posibles *relaciones entre la comprensión de los números racionales y su conocimiento de diferentes sistemas de representación para el concepto de fracción y las tareas desarrolladas con ellos* (Llinares y Sánchez, 1996). Entre sus resultados, destacan la poca incidencia que las formas de representación han tenido en las respuestas de los sujetos, en contrastaste con la influencia del tipo de tarea propuesto y la magnitud de la fracción considerada. Puede ser que estemos tratando cosas diferentes pues, éstos dos últimos elementos, están directamente relacionados con la comprensión del significado de la fracción y no de su tratamiento didáctico. Es decir, estamos en cierta medida ante un problema conceptual y no didáctico.

Todos estamos de acuerdo en que el profesor necesita de una adecuada comprensión de la materia que ha de enseñar pero, uno de los primeros dilemas a los que nos enfrentamos es caracterizar dicha comprensión desde la perspectiva de su actividad práctica: la enseñanza.

Estas líneas van dirigidas a exponer una reflexión personal sobre los posibles dilemas que conlleva el uso del término conocimiento didáctico del contenido y su significado, en el contexto de las investigaciones que intentan describir y caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas.

•Desde la década de los 80, numerosos autores han realizado diferentes propuestas de articulación de las dimensiones del conocimiento profesional, otorgando al conocimiento relacionado con la materia a enseñar distintas posiciones e interrelaciones. Han surgido numerosas alternativas, en las que desde una perspectiva más o menos analítica se pueden observar diferentes elementos que deben o pueden configurar el conocimiento profesional de un profesor de matemáticas.

•SHULMAN Diferentes componentes: * Conocimiento del contenido * Conocimiento didáctico del contenido: * de la materia enseñable * pedagógico general * de los objetivos de enseñanza * Conocimiento curricular	**•GROSSMAN** Categorías diferenciadas: * Conocimiento pedagógico general * Conocimiento del contexto escolar * Conocimiento del contenido * Conocimiento didáctico del contenido.	**•BROMME** Áreas de conocimiento: * Sobre las matemáticas como disciplina * Sobre las matemáticas escolares * Sobre la filosofía de las matemáticas escolares * Sobre lo didáctico específico de la matemática * Sobre lo didáctico general
•FENNEMAN Y LOEF Integración de: * Creencias * Conocimiento matemático * Conocimiento pedagógico * Contexto específico de conocimiento * Conocimiento de los aprendices	**•BLANCO** Tipos de conocimiento: * De y sobre las matemáticas * Sobre la enseñanza / aprendizaje de las matemáticas * Didáctico del contenido * C. Estática * C. Dinámica	**•PROYECTO IRES** Como integrador: * Conocimiento profesionalizado de las matemáticas * Conocimiento de carácter psicopedagógico * Conocimiento curricular: sobre el currículum, aprendizaje y enseñanza de las matemáticas * Conocimiento empírico

Gran parte de las investigaciones desarrolladas en los últimos años, sobre el conocimiento profesional dentro de un campo específico, han tenido como referente la propuesta de Shulman (1986;1989). Según este autor, el conocimiento didáctico del contenido del profesor, según la traducción, es el aspecto de su conocimiento profesional relacionado con la comprensión de la materia desde la perspectiva de la enseñanza de la materia. Es el conocimiento de las formas de representar y reformular el contenido para hacerlo más comprensivo a sus alumnos y es, por tanto, el que fundamenta las acciones del profesor. Desde esta perspectiva se han ido presentado diferentes alternativas en las sucesivas investigaciones, como podemos observar en el cuadro adjunto.

Al considerar como parte fundamental del saber del profesor al conocimiento didáctico del contenido, parece que, en definitiva, este conocimiento se reduce a tratar de hallar la representación más adecuada del conocimiento matemático que se quiere enseñar, elegir el método más oportuno y adaptarlo al nivel de los niños. Descripción que puede representar más bien una simplificación, que una capacidad de transformación de un conocimiento académico en un conocimiento escolar. Esta caracterización puede conllevar estrategias simplificadoras de investigación al reducir el conocimiento profesional al conocimiento de las leyes internas de la propia materia y sus representaciones, hecho que en el nivel de secundaria sería discutible y en el de primaria, problemático. De hecho, en muchas de las investigaciones desarrolladas desde campo específicos, como en el caso de las matemáticas, se puede detectar una fuerte referente propio de la materia, es decir el eje organizador de los diferentes elementos es la propia materia. De hecho sus reflexiones son de más carácter conceptual que didáctico, siendo estas últimas inducidas indirectamente en muchos casos.

En este sentido, la definición inicial y los matices posteriores dados, al llamado conocimiento didáctico del contenido, refleja una visión muy parcial y simplificadora del saber y capacidades que un profesor pone en juego ante un proceso de enseñanza /aprendizaje del conocimiento matemático. Mantiene la epistemología de las matemáticas como referente fundamental del propio conocimiento profesional, sin llegar dotarle de una caracterización epistemológica propia como un conocimiento fundamentalmente práctico y, por tanto, distante en su estructuración y elaboración, de un conocimiento formal como son las matemáticas.

Por otro lado, los resultados de gran parte de estas propias investigaciones nos han permitido ir reconociendo el conocimiento profesional como un saber mucho más complejo que aquel ligado exclusivamente a unos contenidos concretos. El problema no está en la capacidad de transformar un conocimiento ya dado en otro más accesible, sino en elaborar un conocimiento diferente de las disciplinas, un conocimiento profesionalizado de las matemáticas que les capacite para una intervención didáctica fundamentada. Para el que las matemáticas no son su única fuente, existen otros como son el pensamiento de los niños, los referentes culturales, las prácticas sociales relacionadas con dicho conocimiento etc.

El conocimiento escolar matemático es algo más que una mera simplificación del conocimiento matemático formal, con fines y objetivos distintos y que, por tanto, necesita de otras formas diferentes de aprender; formas vinculadas más al contexto y a problemas de su entorno, que a problemas matemáticos con principio y fin en las propias matemáticas. Ello implica que el profesor debe entender y conocer su objeto de enseñanza de forma diferente al de una adaptación del conocimiento formal al contexto, de hecho necesita de un conocimiento de índole didáctico matemático cuya estructura y naturaleza dista mucho del propio conocimiento formal matemático. Es un conocimiento dirigido a la práctica, la enseñanza de las matemáticas y una de sus fuentes fundamentales es la Didáctica de la Matemática como cuerpo de conocimiento integrador en si mismo de muchas fuentes de conocimientos.

En definitiva, pensamos que el conocimiento profesionalizado de las matemáticas es un saber complejo integrado por algo más que un adecuado conocimiento de la materia, como es el conocimiento del aprendizaje de los niños sus ideas y su evolución, la propia fenomenología del conocimiento en su entorno sociocultural, a su vez aderezado con una serie de conocimiento que le permiten manejar el aula y los elementos que en ella pone en juego. El llamado conocimiento didáctico del contenido es solo una parte, muy mediatizada por la propia matemática, de lo que un profesor de matemáticas debe conocer y dominar para presentar y generar conocimiento matemático útil a sus alumnos

*** Componentes versus fuentes del conocimiento profesional. Una alternativa integradora.**

Como ya hemos indicado, en cierta forma todos somos herederos de la tradición de estudios epistemológicos comenzada por Shulman y cuyo objetivo ha sido analizar y caracterizar las componentes del conocimiento de los profesores.

Sin embargo, hay ya muchas voces que consideran al conocimiento del profesor como un todo integrado que no puede ser compartimentado y en el que no se pueden diferenciar diferentes componentes que se configuran por separado y luego se yuxtaponen. Desde una *caracterización del conocimiento profesional como contextual, interactivo, especulativo, situado, de carácter práctico y personal y adaptable a contexto determinados*, es difícil imaginarselo como algo parcelado. Diferenciar analíticamente sus posibles componente ha tenido su fruto y su sentido en el pasado, hoy más bien debemos tender a hablar de diferentes fuentes de información más que de elementos diferenciados. Informaciones que, en el proceso de desarrollo profesional, van conformando los diferentes dominios del conocimiento profesional del profesor en torno a cualquier área especifica.

El análisis de la información aportada por las investigaciones realizadas, en las que la mayoría de los miembros del SEIEM nos hemos implicado desde diferentes ópticas e interpretaciones, nos ofrece un amplio esquema de las informaciones necesarias en la progresiva elaboración de un conocimiento profesional significativo. No cabe la menor duda que las investigaciones desarrolladas en este campo y centradas en los profesores de matemáticas, nos ha permitido configurar una estructura marco de las fuentes fundamentales del conocimiento profesional. Fuentes que deben aportar información desde los aspectos más generales del proceso de enseñanza/aprendizaje y del contexto socio-cultural, hasta lo más directamente implicados con la materia a enseñar. Informaciones sobre los diferentes tópicos de las matemáticas escolares, su significado, sus relaciones y representaciones, sobre las ideas de los alumnos en torno a ellos, sus dificultades y su posible evolución, las practicas y problemas del entorno relacionados con ellos, su campo de aplicación en la vida cotidiana.

Son fuentes de diferente naturaleza que conforman el saber ético e ideológico, el saber metadisciplinar de rango filosófico y epistemológico, el saber disciplinar, el saber socio político relacionado con los saberes disciplinares y la función de la escuela y un saber didáctico-disciplinar. Todas son fuentes del conocimiento práctico profesional que resulta del contraste, integración y reconstrucción del significado de las diferentes informaciones procedentes de dichas fuentes. Y, todas ellas, van aportando la información necesaria para afrontar adecuadamente la formación matemática de los niños de los diferentes niveles y en los variados contextos en que puede desarrollar la labor un profesor de primaria o de secundaria. Configurando, de esta forma, un saber integrado cuyo eje de articulación es precisamente su razón de ser: la práctica educativa.

Esta realidad puede incidir en la necesidad de desviar el problema de investigación más hacia como los profesores pueden transformar una comprensión conceptual de las matemáticas como objeto de estudio en sí misma, en una comprensión de las matemáticas como objeto de enseñanza. Desde nuestro punto de vista, si nos referimos al conocimiento específico que los futuros profesores necesitan para enseñar los contenidos matemáticos a los alumnos, el componente denominado conocimiento didáctico del contenido, orientador de su práctica, se transformaría en un conocimiento práctico y profesionalizado del contenido matemático y de su enseñanza (Azcárate, 1996; Porlan y col., 1996).

La elaboración de un conocimiento “práctico” necesita de la interacción e integración gradual y parcial de aspectos científicos, ideológicos y cotidianos, pero el conocimiento práctico profesional no es ninguna de estas tres cosas, pero si sus fuentes fundamentales El saber profesional no es un conocimiento académico ni un conocimiento empírico, es un conocimiento práctico. Epistemológicamente diferente, mediador entre las teorías formalizadas y la acción profesional. No se organiza con una lógica disciplinar ni como una mera acumulación de experiencias, se organiza en torno a los problemas relevantes de su finalidad práctica, la enseñanza.

Ello nos lleva a otro dilema fundamental del proceso de desarrollo profesional y sobre el que se ha investigado muy poco: **su evolución**. Como elaboran su conocimiento profesional los profesores y futuros profesores, vinculado a que contextos, a que situaciones, a través de que procedimientos, estrategias o claves. Si queremos que los profesores vean en las matemáticas escolares un objeto de enseñanza y no un campo de conocimiento ya elaborado del que sólo han de conocer como enseñarlo de la forma más simple posible, es necesario hacerles llegar a descubrir los problemas inmersos en el conocimiento, sus significados, sus representaciones, sus prácticas, en relación directa con la actividad de enseñar.

*** Dimensiones / Dinámica del conocimiento profesional. Un eje organizador alternativo**

Si las informaciones anteriores nos ido han permitiendo conformar las diferentes dimensiones del conocimiento profesional y sus fuentes fundamentales de información, el punto clave se encuentra ahora en su aspecto dinámico. Es decir, cuales son las claves de elaboración de dicho conocimiento sin perder la perspectiva integradora y cuales son las estrategias y situaciones que le permitan ir evolucionando desde su conocimiento compartimentado y de diferentes orígenes hacia un conocimiento integrado cuyo sentido de integración está definido por su finalidad: la enseñanza de las matemáticas.

Esta idea nos lleva a otra quizás más compleja, la necesidad de dar de nuevo un salto cualitativo en las investigaciones que desarrollemos en el futuro sobre el profesor de matemáticas y su desarrollo profesional.
No parece oportuno considerar que el núcleo de dicho proceso sea la discusión sobre la comprensión conceptual de los tópicos escolares, al

menos no en sí misma sino dentro de proceso relacionados con la resolución de problemas curriculares que den sentido a esa discusión, como búsqueda de respuestas hacia su futura labor profesional. En la misma línea que defendemos que los niños deben encontrar un sentido al conocimiento matemático inmerso en la resolución de problemas interesantes para ello. Desde las perspectivas actuales de la cognición de los sujetos se indica como las ideas matemáticas no tienen entidad propia fuera del contexto en que se utilizan y adquieren significado en las mentes de los alumnos al ser aplicadas en diferentes situaciones y actividades. Lo mismo podría decirse de las ideas profesionales

Si admitimos que el conocimiento elaborado por un profesor es un conocimiento generado en un contexto concreto y a través de unas determinadas actividades y que, por tanto, el conocimiento es producto de la propia actividad, tiene más sentido que las estrategias formativas estén relacionadas con la actividad que han de desarrollar como profesionales.

Puede pensarse que un instrumento idóneo seria poner a los futuros profesores y profesores ante entornos de aprendizaje matemático idóneos que puedan generar nuevas ideas sobre la propia matemática. Sin embargo, esperar que ellos lo transfieran directamente a su futura acción educativa es muy arriesgado. Ya que, en el fondo el objeto del proceso siempre sería la mayor comprensión de las matemáticas no problemas relacionados con su futura labor docente. Sin renunciar a la necesidad de que los profesores y futuros profesores accedan a nuevas formas de conocer matemáticas, es necesario hacer notar que lo aprendido en un contexto no es fácilmente transferido a otro y un mayor dominio conceptual no tiene por que implicar un mayor dominio del proceso de enseñanza. En todo caso más elementos con que jugar pero, con poca movilidad entre ellos pues no han reflexionado sobre los problemas que implica integrar eso en un proceso dirigido por ellos, sino como resolverlo en un proceso en el que ellos eran dirigidos

Evidentemente es necesario aprender matemáticas desde una perspectiva diferentes a la habitual, desde la perspectiva de la enseñanza ¿que cosas debemos conocer para poder tratar las matemáticas adecuadamente en un aula? Reflexionar sobre el currículo escolar permite a su vez cuestionar aquello que se cree saber y dominar, al intentar plantearlo y organizarlo de cara a un proceso de aprendizaje se acrecientan los problemas de comprensión y de conocimiento sobre ese contenido. Eso es lo que reconocemos como aprender matemáticas desde una perspectiva profesional, integrada con todas las informaciones procedentes de la problemática didáctica, de las dificultades de aprendizaje, de las materiales y recursos que puedo usar, de las situaciones y problemas cotidianas relacionadas con ello, de su campo de aplicaciones, etc.

La idiosincrasia de dicho conocimiento es su necesidad de ser integrado en relación con problemas reales del proceso de enseñanza y aprendizaje; es decir, se integra en función de su objetivo: dar respuestas a problemas educativos. Esto implica que el llamado conocimiento didáctico del contenido, si lo queremos entender como el conocimiento que un profesor debe tener para ser capaz de trabajar unos determinados contenidos en su aula, no puede ser reducido a las simples representaciones o elementos que puede usar en el aula como meros intermediarias entre el conocimiento teórico formal y el que el niño debe aprender; tenemos que sustituirlo por algo más complejo que implique necesariamente su vertiente estructural y su vertiente dinámica, es decir las formas en que dicho conocimiento es elaborado.

Si durante estos años los estudios sobre el conocimiento didáctico del contenido, han cumplido su papel y nos han permitido cubrir una etapa significativa en la caracterización del conocimiento profesional para que un profesor sea capaz de afrontar adecuadamente los procesos de E/A de las matemáticas, puede ser el momento de dar un paso más sobre la posible simplificación que supone reducir todo el saber didáctico-matemático al simple conocimiento de formas de hacer más comprensible las matemáticas a los alumnos y adentrarnos en otros elementos e informaciones necesarias para un adecuado conocimiento profesional para enseñar matemáticas.
Mantener el término y su significado, redefinido numerosas veces, puede ser más perjudicial y confuso que lo contrario. Posiblemente sea el momento de abandonar un término que nació con un significado y en un contexto, sobre el que nos esforzamos en matizar y dar nuevos contenidos sin terminar nunca de independizarlo de su significado inicial. Quizás sea necesario acuñar un nuevo término con un nuevo significado más acorde con la imagen actual del conocimiento profesional de un profesor de matemáticas.

Referencias

AZCÁRATE, P. (1996): *Proyecto docente.* Universidad de Cádiz

BLANCO , L. y RUIZ, C. (1995): “Conocimiento didáctico del contenido y formación del profesorado”. Blanco y Mellado (Ed.): *La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal.* Badajoz: Depto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas.

BROMME, R. (1988): "Conocimientos profesionales de los profesores". En *Enseñanza de las Ciencias*, 6(1), (19-29). Bromme

FENNEMA, E. y LOEF, M. (1992): "Teachers' Knowledge and its Impact". En Grouws (Ed.): *Handbook of Research on Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company, New York.

GROSSMAN, P. (1990): *The Making of Teacher. Teacher Knowledge & Teacher Education.* Teacher College Press, New York.

PORLAN, R. Y COL (1996): “Conocimiento profesional deseable y profesores innovadores. Fundamentos y principios formativos”. *Investigación en la Escuela*, 29 (23-38).

SHULMAN, L. (1986): "Those who understand: knowledge growth in teaching". En *Educational Researcher*, 15(2), (4-14)

SHULMAN, L. (1989): "Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporanea". En Wittrock (Ed): *La investigación de la enseñanza*, Paidos, Madrid.

TIPOS DE TAREAS PARA DESARROLLAR EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

Lorenzo J. Blanco
Universidad de Extremadura

Resumen
Aceptando que el Conocimiento Didáctico del Contenido debe ser el conocimiento base en la formación del profesorado, y que el conocimiento generado depende, entre otras cosas, del tipo de tarea propuesto, hemos establecido tres niveles de tareas que ayudarían a generar diferentes componentes del Conocimiento que los profesores necesitarían para aprender a enseñar matemáticas.

El Conocimiento Didáctico del Contenido referencia en la Formación de Profesores.

El trabajo presentado por los profesores Llinares y Sánchez constituye una aportación interesante que nos permite avanzar en la comprensión del proceso de aprender a enseñar matemáticas en estudiantes para Profesores de Primaria (EPPs). En su presentación formulan dos subproblemas al intentar caracterizar, por una parte, "el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) y los factores que influyen en su generación y desarrollo", y por otra los "aspectos que influyen en el proceso de Razonamiento Pedagógico". La contextualización de la investigación en un tópico concreto del currículum escolar parece oportuna, y los resultados interesantes ya que les ha permitido, como ellos mismos señalan "el diseño y producción de materiales curriculares para los programas de formación, en particular videos, casos y tareas".

No obstante, el análisis de su aportación en relación a investigaciones precedentes, dentro del mismo paradigma, nos lleva a realizar una serie de consideraciones sobre las que parece oportuno reflexionar.

Las expresiones "Pedagogical Content Knowledge" y "Pedagogical Reasoning" nos remiten a Shulman (1986) quien considera que los profesores desarrollan un conocimiento específico sobre la forma de enseñar su materia, que es elaborado por los profesores de forma personal en la práctica de la enseñanza, y que constituye un cuerpo de conocimientos que distingue a la enseñanza como profesión, y es una forma de razonamiento y acción pedagógica por medio de la cual los profesores transforman la materia en representaciones comprensibles a los estudiantes.

Con posterioridad a este trabajo se han realizado nuevas aportaciones desde diferentes perspectivas que han tratado de caracterizar el conocimiento de los profesores (Marks, 1989; Livingston y Borko, 1989; Cochran et al., 1991; Tamir, 1991; Brown y Borko, 1992; etc.) y cuyos resultados tienen que tener consecuencias en los programas de formación de profesores. La necesidad de determinar cual debía ser el conocimiento base en la formación del profesorado, partiendo del significado de la expresión Pedagogical Content Knowledge (PCK) (que traducimos por Conocimiento Didáctico del Contenido) nos llevó a concluir que durante su etapa de formación inicial el profesor de Matemáticas tiene que aprender una serie de conocimientos profesionales en dos aspectos diferenciados, aunque estrechamente relacionados entre sí, y que denominamos componentes estática y dinámica (Blanco, Mellado y Ruiz, 1995; Blanco, 1996; Mellado, 1998). La componente estática es una condición necesaria, pero no suficiente para que el profesor aprenda a enseñar, ya que el conocimiento teórico, proposicional o estático del profesor puede no afectar a su conocimiento práctico que es el que guía su conducta docente en el aula.

Además, cuando acceden a los centros de formación inicial han generado un cuerpo de conocimientos y creencias sobre diferentes aspectos relacionados con la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (Llinares, 1992), sobre los que es necesario trabajar y reflexionar durante su etapa de formación inicial. Pero ello que es una condición necesaria, es insuficiente en el proceso de aprender a enseñar Matemáticas ya que la conducta docente del profesor puede no corresponderse con sus concepciones previas.

En nuestra opinión, existe una componente profesional del conocimiento de los profesores que denominamos dinámica, y que tiene un estatus diferente que la componente estática. La componente dinámica se genera y evoluciona a partir de los propios conocimientos, creencias y actitudes, pero requiere de la implicación y reflexión personal y de la práctica de la enseñanza de la materia específica en contextos escolares concretos (en la línea de lo expresado por Shulman para desarrollar el PCK). Este proceso permite al profesor reconsiderar su conocimiento estático y sus concepciones, modificándolos o reafirmándolos.

Es importante considerar que en el proceso de aprender a enseñar el profesor tiene un desarrollo personal y social junto al desarrollo profesional (Bell & Gilbert, 1994), y sólo en la medida en que se contemplen los tres aspectos se conseguirá una formación equilibrada, sólida y duradera.

Tipos de tareas en la formación de profesores.

Uno de los aspectos importantes sobre el que debe reflejarse los trabajos citados es el tipo de tareas que debemos desarrollar en la formación de los profesores, si queremos desarrollar el C.D.C. y la capacidad de Razonamiento Pedagógico, como parece deducirse del trabajo presentado. Es aceptado que el tipo de tarea que desarrollemos influirá en el tipo de conocimiento que se genere (Llinares, 1994), entendiendo que estos entornos de enseñanza/aprendizajes deben contemplar "la posibilidad de que estos estudiantes generen destrezas metacognitivas, que les permitan analizar/pensar sobre su propio proceso de aprendizaje según se esté dando en esos momentos" (García y otros, 1994, 15).

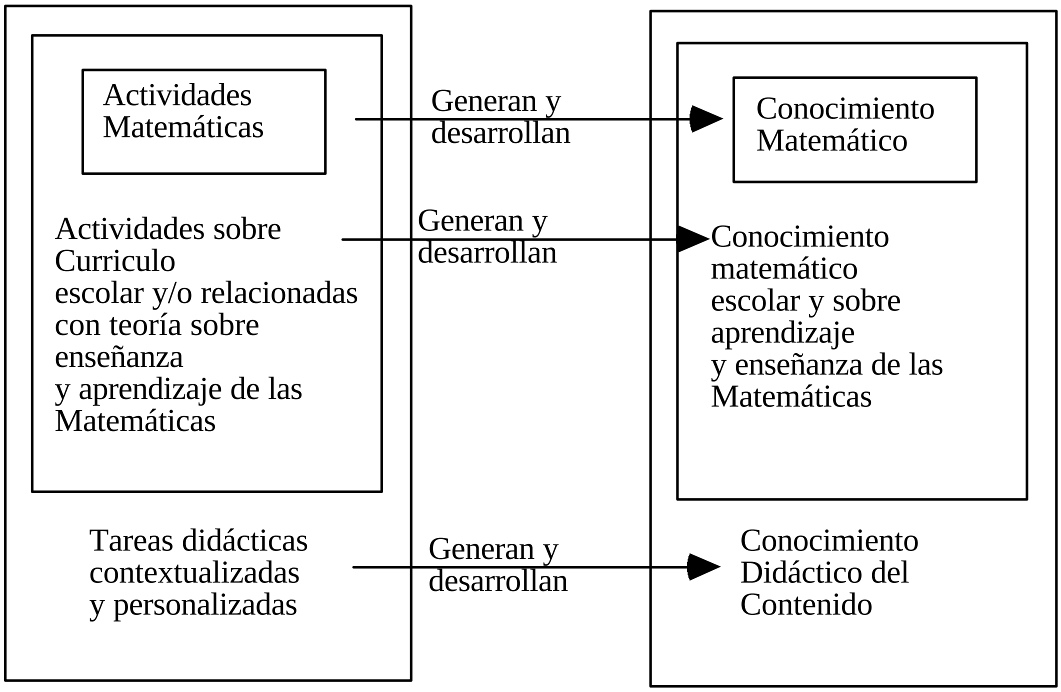
A este respecto, conviene recordar que las orientaciones profesionales nos sugieren la creación de ambientes para que los profesores en formación puedan explorar ideas matemáticas, sugiriendo que deberán ser enseñados de forma parecida a como ellos habrán de enseñar - explorando, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando y todo lo demás - . Estos entornos de aprendizaje posibilitarían desarrollar y generar un nuevo conocimiento matemático más acorde con la nueva enculturación matemática, provocando un conflicto cognitivo con la cultura escolar tecnológica en la que los EPPs fueron enseñados.

Pero, además, debemos diseñar actividades específicas que permitan analizar y cuestionar los conocimientos, creencias y actitudes de los EPPs sobre matemáticas escolares y sobre su enseñanza/aprendizaje. Estas, deben originarse a partir de contextos específicos de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas que surgen del aula de primaria, y mediante actividades que nos permitan compartir/discutir/negociar los significados que los EPPs van generando derivado de su implicación en las mismas.

Como consecuencia de las actividades a realizar los EPPs deberían reinterpretar el conocimiento y experiencias previas relativos al aprendizaje y la instrucción provocados por el nuevo conocimiento al que se puede acceder, y generando nuevas concepciones/creencias/ actitudes en relación al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas escolares.

Así, las tareas propuestas, pero fundamentalmente el análisis de los materiales producidos como consecuencia de la investigación se transforman en nuevos contenidos en la formación de profesores que permitirán avanzar en el proceso de aprender a enseñar (Ver figura). Estas tareas permitirían presentar e identificar: a) diferentes situaciones con las que se puede encontrar un profesor y que articulan el desarrollo de su tarea docente, y b) componentes del conocimiento del profesor que pueden

llegar a serle útil para fundamentar las decisiones que le permitan mejorar dichas situaciones (Llinares, 1991).
Pero, en nuestra actividad profesional deseamos, también, que los EPPs tengan la oportunidad de analizar y mejorar su actuación como profesores en formación. Esto es, pretendemos que las relaciones entre la situación planteada y las características del conocimiento necesario para manejarla en el contexto del aula de primaria constituyan uno de los ejes en las tareas a desarrollar por los EPPs. Ello nos señala que debemos establecer vínculos entre la teoría y la práctica que ayuden a generar hábitos de reflexión sobre la práctica docente, encaminados a analizar la actuación en función del conocimiento teórico (de Matemáticas y sobre teorías de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas), y fundamentar las decisiones para la acción futura en las acciones presentes. Pero ello teniendo en cuenta la consideración global del C.D.C., en referencia a sus componentes estáticas y dinámica.
Para contextualizar este nuevo nivel tenemos que tener en cuenta la naturaleza del conocimiento matemático escolar y la manera de entender cómo este conocimiento se genera en el aula, pero también la naturaleza del C.D.C. y como este se genera o puede generarse, considerando a los propios participantes en el programa de formación y el contexto donde estos desarrollan su acción (en el Centro de Formación de profesores o en el aula de primaria). Y todo ello, con el objetivo de que los programas de formación permitan capacitar a los futuros profesores para que puedan llegar a caracterizar, en su práctica futura, una nueva cultura matemática escolar, diferente de la que proceden como aprendices. Lo que debe llevarnos a definir nuevas prácticas sociales alternativas en las aulas de los programas de formación (García y otros, 1994).



Diferentes niveles de tareas en la formación de los profesores

Entendemos que las actividades del segundo nivel son actividades necesarias, pero no son suficientes para que los estudiantes para profesores adquieran el Conocimiento Didáctico del Contenido y la capacidad de razonamiento pedagógico necesarias para el eficaz desenvolvimiento en las aulas de la enseñanza primaria. Estas actividades no garantizan de forma automática la transferencia sobre el conocimiento de Didáctica de la Matemática a la práctica en la clase de primaria, si los profesores no han adquirido, además, esquemas prácticos de acción en el aula (Mellado, 1998).

Consecuentemente, debemos plantear actividades donde los EPPs exploren ideas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de la práctica escolar, generando, así mismo, destrezas metacognitivas que les permitan desarrollar y fundamentar su propio C.D.C. en el área de Matemáticas. A este respecto, recordamos que "la construcción del conocimiento didáctico del contenido resulta de múltiples oportunidades para enseñar, para observar y para reflexionar sobre la propia enseñanza y la de otros en áreas específicas de contenido" (Cochran y otros, 1991, p. 17)

Finalmente, creemos que es únicamente en el tercer nivel donde podemos utilizar la expresión "Aprender a Enseñar Matemáticas" en toda su dimensión, cuyo significado debe implicar el análisis de las concepciones y creencias sobre Matemática y sobre su enseñanza/ aprendizaje; de las propuestas curriculares y teorías sobre enseñanza/aprendizaje de las

Matemáticas que nos señalan nuevos objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación; y, principalmente, adquirir y desarrollar la capacidad de poder trasladar al aula toda esa nueva cultura matemática que queremos comunicar desde una perspectiva de renovación y conseguir esquemas cognitivos que les permita analizar contextos concretos de enseñanza y realizar y gestionar propuestas coherentes de intervención en el aula.
A este respecto, es importante saber en qué nivel situamos las diferentes tareas que desarrollamos en la formación de profesores puesto que en cada nivel generamos un tipo de conocimiento diferente.

Referencias:

BELL, B. y GILBERT, J. (1994). Teacher development as professional, personal and social development. *Teaching and Teacher Education* 10(5), 483-497.

BLANCO, L.J. (1996). Aprender a enseñar Matemáticas. Tipos de conocimientos. En Giménez, J.; Llinares, S.; y Sánchez, M.V. (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada. 199-221

BLANCO, L.J. MELLADO, V. y RUIZ, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido de Ciencias y Matemáticas y Formación de Profesores. *Revista de Educación* nº 307. 427-446.

BROWN, C.A. Y BORKO, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. Grouws, D.A. (Ed): *Handbook of research on Mathematics teching and learning.* 209-239

COCHRAN, K.; et al. (1991). Pedagogical content knowledge: a tentative model for teacher preparation. *A.E.R.A.* Chicago.

GARCÍA, M.; ESCUDERO, I.; LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1994). Aprender a enseñar matemáticas: una experiencia en la formación matemática de los profesores de primaria. En *Épsilon* nº 30. 11-26.

LIVINGSTON, C. y BORKO, H. (1989). Expert-Novice differences in teaching: a cognitive analysis and implications for teacher education. *Journal of Teacher Education*, Vol. XXXX; Nº 4, 36-43

LLINARES, S. (1991). *La Formacion de profesores de Matemáticas*. GID. Sevilla.

LLINARES, S. (1992). Aprender a enseñar Matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje. En Montero L. y Vez J.M. *Las didácticas específicas en la formación del profesorado (I)* Santiago 377-407

LLINARES, S. (1994). El profesor de Matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional. En Santaló, L.A. y otros.: *La enseñanza de las Matemáticas en la educación intermedia*. Rialp. Madrid. 296-337.

MARKS, R. (1989). What exactly is pedagogical content knowledge?. Examples from Mathematics. *AERA. San Francisco.*

MELLADO, V. (1998). Preservice teachers' classroom practice and their conceptions of the nature of science. In B.J. Fraser & K. Tobin (eds.): *International Handbook of Science Education.* Kluwer Academic Publishers. 1093-1105

SHULMAN, L.S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.*

TAMIR, P. (1991). Profesional and personal knowledge of teachers and teacher educators. En *Teaching and Teacher Education, 7(3). 263-268.*

SEGUNDO SEMINARIO

TEMA DE DEBATE:
¿CÓMO ESTRUCTURAR LAS TAREAS QUE APARECEN EN UN CAMPO CONCEPTUAL? DISCUSIÓN DE UN CASO: CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS.

DESARROLLO DEL SEGUNDO SEMINARIO

INTERVENCIONES:
PRIMERA PONENCIA: CLASIFICACION DE PAEV ADITIVOS DE UNA ETAPA CON CANTIDADES DISCRETAS RELATIVAS.
PONENTE: DR. M.M. SOCAS, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA.

SEGUNDA PONENCIA: PROBLEMAS ARITMÉTICOS COMPUESTOS DE DOS RELACIONES.
PONENTE: DR. E. CASTRO, UNIVERSIDAD DE GRANADA.

TERCERA PONENCIA: CLASIFICACION DE PROBLEMAS ADITIVOS POR SUS ESTRUCTURAS NUMÉRICA Y SEMÁNTICA GLOBAL.
PONENTE: DR. J.L. GONZÁLEZ MARÍ, UNIVERSIDAD DE MÁLAGA.

RÉPLICA: CLASIFICAR Y SIGNIFICAR.
PONENTE: DR. L. PUIG, UNIVERSIDAD DE VALENCIA.

DESARROLLO DEL SEGUNDO SEMINARIO

El segundo Seminario trató sobre el tema "¿Cómo estructurar las tareas que aparecen en un campo conceptual? Discusión de un caso: Clasificación de problemas aditivos." Este seminario fue presentado por el profesor E. Castro, quien también intervino como ponente junto con los profesores M. Socas y J. L. González. La presentación se estructuró en tres trabajos y tuvo una duración aproximada de 65 m. La presentación vino acompañada por un cuadernillo de 52 páginas en el que estaban publicadas las ponencias, lo cual facilitó su seguimiento. Hace la réplica el profesor L. Puig durante 35 m. Modera la sesión el profesor L. Blanco.

Después de hacer la presentación general del seminario y destacar el desarrollo de los estudios sobre la estructura aditiva, la resolución de problemas aritméticos y los criterios de clasificación para estos problemas, el profesor Castro pasa a presentar los problemas aditivos de 2 etapas y a señalar el interés de su estudio. Revisa los criterios de clasificación de los problemas de 1 etapa y hace una discusión de cuáles de estos criterios pueden resultar más adecuados para los problemas de 2 etapas. Presenta el esquema parte-parte-todo de Nesher para analizar la estructura de estos problemas. Elegidas las variables pertinentes, y estableciendo ciertas limitaciones para una de ellas, caracteriza 64 tipos distintos de problemas aditivos de 2 etapas; finaliza explicando el estudio experimental realizado sobre esta familia de problemas.

El trabajo que presenta el profesor Socas propone revisar la clasificación de problemas aditivos de 1 etapa que surge de los trabajos de Vergnaud y trata de superar las limitaciones de los estudios de ese autor. Analiza la necesidad de considerar los estados relativos y trabaja sobre un modelo de competencias que generaliza estudios previos. Considera tres componentes que organizan el modelo de competencias, y que son las componentes epistemológica, fenomenológica y cognitiva. De este modo conjuga los estados y las variaciones con las posibles relaciones parte-todo, llegando a una extensión del campo de los problemas aditivos que consta de 108 categorías. Concluye con una discusión sobre la existencia de las categorias de problemas aditivos surgidas y las compara con las categorias establecidas por Vergnaud.

El profesor González centra el origen de la clasificación que presenta en una investigación sobre los números enteros, de la que ha surgido una nueva estructura numérica: la de los números relativos, situada entre los naturales y los enteros. Surgen así tres tipos de medidas; también ocurre que las leyes de composición en cada estructura son leyes diferentes. De acuerdo con los 3 campos conceptuales considerados es posible una nueva

clasificación de los problemas aditivos de 1 y 2 etapas, de los cuales discute algunos ejemplos y elimina casos vacios. Después de hacer una presentación esquematizada del marco teórico con el que trabaja, presenta los principales factores considerados en su clasificación, los 6 tipos de situaciones relativas simples así como los 18 tipos de situaciones relativas compuestas inferidas. Destaca la necesidad de seguir trabajando y el carácter incompleto de las clasificaciones conocidas.
El profesor Puig comienza señalando la ausencia de investigación empírica en los estudios propuestos y la dificultad técnica de los trabajos presentados. Ante la pregunta planteada por el profesor González sobre la conveniencia de ampliar las clasificaciones conocidas considera que no son convenientes ni deseables tales ampliaciones. Por contra, se muestra partidario de estudiar en detalle la utilidad de las categorías semánticas conocidas y sacarles partido. Hace una crítica del esquema parte-parte-todo utilizado por Nesher y señala sus limitaciones. Indica cómo entiende desde su propio esquema el reto de la prolijidad. Propone un ejercicio de análisis y explica la estructura simple de los problemas de 2 etapas según el proceso de su resolución; concluye que sólo hay un tipo de problemas de 2 etapas. Utiliza su esquema para simplificar la propuesta del profesor Socas, valorando de nuevo las ideas de Vergnaud.
A continuación interviene el profesor Socas quien expresa la petición de que los ponentes conozcan la réplica con antelación. Reconoce la necesidad de contraste empírico pero reinvindica la necesidad y utilidad de los estudios formales realizados, y la conveniencia de incorporar nuevas referencias. Admite las insuficiencias del esquema parte-parte-todo de Nesher y comparte la necesidad de distinguir esquemas; también comparte el deseo de profundizar en este tipo de estudios. Señala la necesidad de reciprocidad en la lectura crítica dentro de la comunidad. El profesor Castro se interroga sobre la finalidad de categorizar familias de problemas, respondiendo que el avance de la investigación es su última finalidad y denuncia que la crítica realizada por el profesor Puig puede dificultar o bloquear la investigación. Tras precisar alguna de las ideas de su trabajo reclama la utilidad de los trabajos presentados. El profesor González también interviene en este sentido.
El profesor Puig señala que uno de los objetivos de su intervencion era provocar el debate; recuerda que una de las finalidades del encuentro es la de constituir un lenguaje común entre los investigadores de un mismo campo. Destaca la necesidad de analizar el dominio de investigación que se considere y de explicar los resultados de los análisis en base al significado de las variables contempladas.

INTRODUCCIÓN AL SEGUNDO SEMINARIO

Enrique Castro

Un campo campo conceptual es una noción-marco que conecta conocimientos específicos y destrezas con la resolución de problemas. La noción se atribuye a Gerard Vergnaud, para quién *un campo conceptual es un espacio de problemas o de situaciones-problema en los que el tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión* (Vergnaud, 1981, p.217).

La adquisición y desarrollo de los conceptos y procedimientos que forman parte de un campo conceptual se produce durante un periodo de tiempo muy amplio. En el momento de su aparición, la noción de campo conceptual la presenta Vergnaud como fundamental en el aspecto didáctico porque *permite estudiar de una manera más integrada el desarrollo simultáneo y coordinado de clases de problemas, procedimientos que los permiten tratar y sistemas simbólicos que los permiten representar* (Vergnaud 1981, p. 220). A nivel elemental distingue entre dos grandes campos conceptuales: el de las estructuras aditivas y el de las estructuras multiplicativas.

El campo conceptual de las estructuras aditivas es básico en la enseñanza de la matemática escolar, y comprende un conjunto de problemas que comportan operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo y traslación.

Debido a que el campo conceptual de las estructuras aditivas es una noción muy amplia y se desarrolla durante un amplio periodo de tiempo es imprescindible dar criterios orientadores que permitan al profesor y a los diseñadores de currículos seleccionar y ordenar las tareas durante el periodo escolar para un mejor aprovechamiento por parte de los escolares.

Nos vamos a referir sólo a una parte de este campo conceptual: la relacionada con los problemas aritméticos que se resuelven con una suma o una resta. A estos problemas los llamamos de estructura aditiva.

Es importante señalar que las *tareas* que vamos a considerar en este trabajo se ciñen única y exclusivamente a Problemas Aritméticos Enunciados Verbalmente *que son problemas de contenido aritmético y que se expresan o enuncian en un contexto de información verbal*.

Los problemas que se pueden plantear y resolver dentro de un campo conceptual, como es el caso de la estructuras aditivas, se pueden clasificar de muchas maneras, entre otras cosas debido a que:

* unos problemas son más fáciles de leer que otros
* algunos involucran situaciones más familiares que otros
* según incluyan o no palabras clave
* según el tipo de relación descrita en el problema

Por tanto, la organización de un campo de problemas lleva consigo la adopción de unos factores que actúan como elementos clasificadores. La decisión de qué factores van a entrar y cuáles se van a quedar fuera es una pieza básica en cualquier enfoque teórico.

Dentro de nuestra comunidad de investigadores se han realizado intentos para clarificar el campo conceptual de las estructuras aditivas. En este Seminario se van a exponer tres trabajos sobre el tema y, a continuación, se va a realizar su valoración critica.

CLASIFICACION DE PAEV ADITIVOS DE UNA ETAPA CON CANTIDADES DISCRETAS RELATIVAS

Socas, M.M., Hernández, J. y Noda, A.
Universidad de La Laguna

Introducción

Los estudios sobre resolución de problemas matemáticos, y en particular la resolución de problemas arirméticos, han desarrollado, en estos últimos treinta años, diferentes líneas de investigación centradas en el estudio global o parcial de las tareas de resolución de problemas, analizando las influencias que determinadas variables, lingüísticas, estructurales o semánticas, ejercen sobre las dificultades en la resolución de los problemas.

En la actualidad la literatura disponible para los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) que se resuelven con una suma o una resta es abundante e informan acertadamente sobre las diferentes variables que intervienen en la resolución de un PAEV aditivo, especialmente cuando son formulados con cantidades discretas absolutas.

No sucede lo mismo cuando los PAEV son formulados con cantidades discretas relativas.

Si consideramos los problemas siguientes:

-*Juan tiene 6 boliches y juega una partida con Luis y pierde 8 boliches. ¿Cuántos boliches debe Juan a Luis?.*

-*En el recreo, Juan ganó 6 canicas y Pedro ganó 5 más que Juan. ¿Cuántos canicas ganó Pedro,.*

y los analizamos desde los enfoques teóricos básicos: categorías semánticas (Carpenter y Moser, 1983) o campo conceptual aditivo (Vergnaud, 1982), no pertenecerían a ninguna categoría semántica, salvo que aceptáramos en el segundo la comparación entre variaciones, y tampoco estaría identificado en las categorías establecidas por Vergnaud para el campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas, al tratarse en el primer caso de un problema de la forma STR y en el segundo del tipo TRT (relación entre transformaciones), categorías no identificadas por Vergnaud.

En estos modelos más representativos que regulan el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, encontramos que las categorías semánticas se limitan a situaciones donde las magnitudes son discretas absolutas y las categorías de Vergnaud dejan fuera diferentes problemas

que tienen interés en el contexto escolar o sitúan en la misma categoría problemas que aparentan tener estructuras diferentes.
Plantearse la organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas y tratar de caracterizarlo para determinar un marco instrumental y explicativo que dé respuestas homogéneas a las diferentes situaciones parece adecuado.

A partir del estudio de los aspectos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos que configuran el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas se analizan los elementos y relaciones que se dan en el campo y se propone un modelo de competencias. El modelo de competencias es un modelo formal caracterizado por los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual, que aborda tanto las magnitudes escalares discretas absolutas como las relativas y considera al grupo aditivo y ordenado de los números enteros como un buen modelo para los fenómenos que se dan en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas bajo el cual se pueden dar explicaciones homogéneas a las diferentes situaciones y problemas que se dan en el estudio.
Este estudio presenta una organización exhaustiva y aporta una nueva clasificación de las situaciones y problemas, basada en las cantidades, medidas y números enteros, del dominio de aplicación del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

Problemas aritméticos aditivos. Finalidad del estudio.
Los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) y, en particular, los problemas aditivos, constituyen, hoy en día, un dominio de investigación con entidad propia como se pone de manifiesto en múltiples publicaciones (Fuson, 1992). Una primera revisión en nuestro país la encontramos en Puig y Cerdán (1988). Posteriormente, Castro, Rico y Gil (1992) han realizado una revisión actualizada de los diferentes enfoques y corrientes de investigación, distinguiendo tres enfoques principales para los problemas aritméticos aditivos de enunciado verbal, centrados en el estudio de: las variables lingüística, las variables estructurales y las categorías semánticas.
Entre estos enfoques teóricos básicos que organizan este dominio de investigación cabe destacar el enfoque de las categorías semánticas de los enunciados de los problemas que se sustenta fundamentalmente en las teorías cognitivas del procesamiento de la información y su estudio se centra en el análisis global del significado del texto mediante el que se enuncia el problema (Heller y Greeno, 1978; Carpenter y Moser, 1983; Nesher 1982), y el enfoque desde las relaciones aditivas que se dan en los

problemas verbales aritméticos con magnitudes discretas relativas, mediante el uso de medidas, transformaciones y relaciones estáticas, en el marco de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud y Duran, 1976; Vergnaud, 1982).

En el estudio de los problemas aritméticos aditivos de una sola operación existen varias categorías de problemas. Inicialmente, Heller y Greeno (1978) establecieron tres categorías semánticas: cambio, combinación y comparación. Posteriormente, Carpenter y Moser (1983) añaden la categoría de igualación, llegándose a enumerar 20 situaciones diferentes. Fuson (1992) aumenta el número de problemas aditivos estructuralmente diferentes a 22. En su construcción ha tenido en cuenta, las cuatro categorías semántica: combinación, cambio, comparación e igualación; la relación entre las cantidades que intervienen, distinguiendo las relaciones de aumento y disminución para las tres últimas categorías y las relaciones estática y dinámica para la categoría de combinación; y la posición de la incógnita, diferenciado tres posibilidades para la incógnita en las tres últimas categorías y sólo dos posibilidades para la categoría de combinación.

Nesher (1982) aborda el estudio de los problemas aritméticos desde tres componentes principales: la estructura lógica, la componente sintáctica y la componente semántica, donde cada una de ellas implica variables operacionales diferentes. La estructura lógica incluye las operaciones aritméticas implicadas así como las informaciones irrelevantes. La componente semántica incluye la variable contextual (aspectos estáticos, dinámicos y de comparación) y la variable léxsico (palabras claves y formas verbales). Y la componenete sintáctica que incluye elementos de la estructura superficial del problema como la longitud (número de palabras), número de sentencias, orden de las sentencias y posición de la incógnita. Los resultados obtenidos con relación a las categorías semánticas son similares a los anteriores.

Los trabajos de Vergnaud y Duran (1976) y Vergnaud (1982) sitúan la resolución de problemas aritméticos verbales con números naturales y enteros dentro de lo que se denomina campo conceptual aditivo. Establecen las diferentes relaciones estáticas y obtienen ciertas evidencias empíricas sobre las respuestas de los estudiantes, las dificultades que tienen y los errores que cometen.

Vergnaud y Duran (1976) pretenden aportar "un marco teórico suficientemente riguroso para que el estudio de la resolución de problemas aritméticos salga del empirismo que lo suele caracterizar" (pág. 128). Entre otros aspectos, Vergnaud (1982, pp. 43-45) plantea la existencia de seis grandes categorías de relaciones numéricas aditivas: I. Composición

de medidas, II. Transformación de una medida en otra medida (STS), III. Relación estática entre dos medidas (SRS), IV. Composición de dos transformaciones (TTT), V. Transformación de una relación estática (estado relativo) en otra relación estática (estado relativo) (RTR), y VI. Composición de dos relaciones estáticas (estados relativos) (RRR) y realizan diferentes estudios experimentales, fundamentalmente sobre problemas de la Categoría II y IV, obteniendo resultados dispares que son difícilmente justificables desde el marco teórico que se propone, por ejemplo, han encontrado diferencias de varios años en la resolución de problemas aparentemente similares desde el punto de vista teórico. Estos resultados les llevan a concluir que: "La aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños e incluso por los adultos" (Vergnaud y Duran, 1976, pp. 124-125).
La finalidad del estudio es ampliar el marco teórico existente y mostrar que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros es un buen modelo que caracteriza el campo conceptual de las magnitudes discretas, y que las categorías de cambio, combinación y comparación son pertinentes para la clasificación de los problemas.

Nociones básicas.

Precisamos ahora algunas nociones básicas que utilizaremos en la propuesta de organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, como campo conceptual, modelos de competencias, conceptos numéricos y de medida y el esquema partes-todo.

Campo conceptual y modelos de competencias

Vergnaud (1993) indica que un campo conceptual está formado por dos conjuntos básicos: Un conjunto de situaciones y el conjunto de conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas.
La organización de los campos conceptuales tienen como finalidad explicitar los significados completos que aparecen durante los procesos de enseñanza-aprendizaje, por tanto, estos deben ser un marco global que combine tanto las exploraciones formales como funcionales. Hay, pues, dos componentes esenciales: la componente formal, que procede de todas las evidencias acumuladas tanto de la lógica de la disciplina como de las tendencias de los sujetos en un campo conceptual, y la componente funcional que procede del entorno de enseñanza en el que se está llevando a cabo el proceso de aprendizaje.
Para su análisis parece necesario considerar estas dos componentes como modelo de competencias (MC) y modelo de ejecución (ME), respectivamente.

El modelo de competencias se referiría al aspecto formal del campo conceptual tanto en su aspecto epistemológico como en sus aspectos cognitivos, es decir, simularía los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado.
Ahora bien, un problema importante para la educación matemática es saber como ejecuta el usuario real las acciones propias de ese campo conceptual, donde las creencias extramatemáticas, concernientes al ejecutor y a la situación donde tiene lugar la actividad, juegan un papel fundamental en la determinación de como se realiza, se identifica y se comprende el campo conceptual tratado.
Es necesario distinguir con claridad entre la función y las propiedades del modelo de competencias (MC) y del modelo de ejecución (ME), ambos relacionan signos y significados, pero ME se sirve de informaciones que están más allá de la asociación signos-significados y de las estructuras cognitivas que subyacen, determinadas por el modelo de competencias, y opera bajo los condicionamientos de la memoria, del tiempo, de la organización de estrategias perceptivas, condicionados por el contexto y por creencias extramatemáticas, etc, que no son asuntos del MC.
En este sentido, debemos señalar los planteamientos de Filloy (1990) que propone concentrarse en modelos teóricos locales adecuados a fenómenos específicos, pero capaces de tomar en consideración todos los elementos: gramática, lógica matemática, modelos de enseñanza, modelos cognitivos y pragmática, organizados en torno a tres componentes: modelos de enseñanza, modelo de los procesos cognitivos implicados y modelos de competencias formal, que arrojan luz sobre las interrelaciones y las oposiciones que ocurren durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada una de las tres componentes.

Los conceptos numéricos y de medida

El desarrollo del conjunto de situaciones y de los conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, según las teorías de Piaget (1978), se encuentra ubicado en el periodo de las operaciones concretas (7-11 años).
El punto de partida lo constituye la idea de que cualidad y cantidad son inseparables, y ello tanto desde el punto de vista genético como desde el punto de vista del análisis lógico o axiomático.
Piaget caracteriza a las operaciones elementales de reunión y separación compatibles con la cuantificación intensiva y con las estructuras cognoscitivas llamadas agrupamientos. El agrupamiento es una estructura híbrida entre la de grupo y retículo y es la estructura psicológica que formaliza las organizaciones del pensamiento natural. Hay nueve

agrupamientos diferentes que describen la organización de las operaciones lógicas (es decir, las operaciones que se ocupan de las clases y las relaciones lógicas): un agrupamiento menor y ocho mayores. Estos agrupamientos se adecuan también a la organización de lo que Piaget llama operaciones infralógicas, que define como acciones cognoscitivas vinculadas con las relaciones de posición y distancia y de parte-todo, que atañen a objetivos y configuraciones espacio-temporales concretos (Flavell, 1981, pág. 189). Así, a cada agrupamiento lógico le corresponde uno infralógico. Las operaciones lógicas tienen como síntesis el número y las operaciones infralógicas la medición.

A modo de resumen señalar que el grupo aditivo de los números enteros es, pues, el producto de una fusión operatoria entre los agrupamientos cualitativos de las clases y las relaciones asimétricas, pero por abstracción de las cualidades diferenciables sobre las que se hacen estos agrupamientos. Las clases, las colecciones asimétricas y los números forman un sistema operatorio coherente, a la vez único por sus mecanismos y diferenciado por las tres posibilidades de coordinación de las semejanzas, las diferencias o ambas al mismo tiempo.

Y desde el punto de vista del aprendizaje matemático podemos interpretar que debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos numéricos y métricos y ello viene avalado tanto por el isomorfismo existente entre sus estructuras como por la equivalencia del proceso de construcción seguido.

El esquema partes-todo

La noción de esquema es de gran importancia en la psicología cognitiva actual, se considera como un elemento fundamental dentro de la estructura cognitiva. Sus orígenes, sin embargo, son lejanos. Retomamos en este trabajo la idea inicial de Piaget, referenciada en Flavell (1981), y que caracteriza al esquema como una estructura cognoscitiva que se refiere a una clase semejante de secuencias de acción, las que forzosamente son totalidades fuertes, integradas y cuyos elementos de comportamiento están íntimamente interrelacionados. En resumen, el esquema es el contenido de la conducta organizada y manifiesta que lo designa, pero con importantes connotaciones estructurales que no son intrínsecas al mismo contenido concreto. Aunque las palabras esquema y concepto no son intercambiables, Piaget, reconoció que había cierta semejanza entre ellas.

Resnick (1983, pp. 114-115) presenta la siguiente figura como el esquema parte-todo que ha sido utilizado en diferentes investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento del número natural (Briars y Larkin, 1981; Resnick, Greeno y Rowland, 1980; Riley, Greeno y Heller, 1983) y en la resolución de problemas aritméticos verbales (Riley, Greeno y Heller, 1983; Carpenter y Moser, 1982; Nesher, 1982; Vergnaud, 1982).

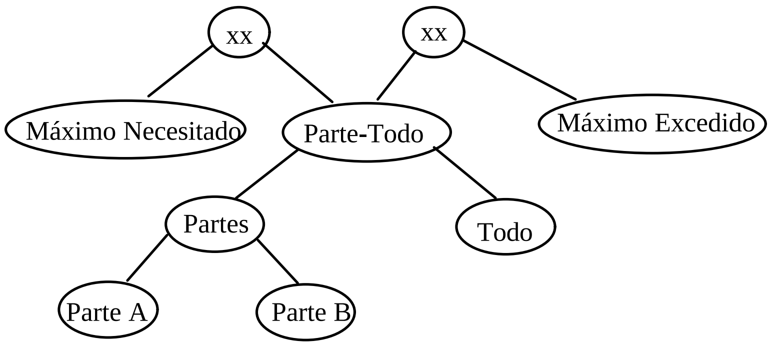


Figura 1

El esquema especifica que una cantidad (el todo) puede ser dividida (en partes), mientras que la combinación de partes, que no excedan ni falten en el todo. Por implicación las partes pueden ser incluidas en el todo. El esquema parte-todo proporciona una interpretación del número que es similar a la definición del concepto operacional del número dada por Piaget (1941), y proporciona una herramienta útil en la resolución de problemas aritméticos verbales con números naturales.

Después de estas breves consideraciones se nos plantea el problema de caracterizar mediante una representación gráfica estas organizaciones y reglas de acción que se dan en los procesos numéricos y de medida en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas.

De forma gráfica representaremos las relaciones entre las partes y el todo con el diagrama siguiente:

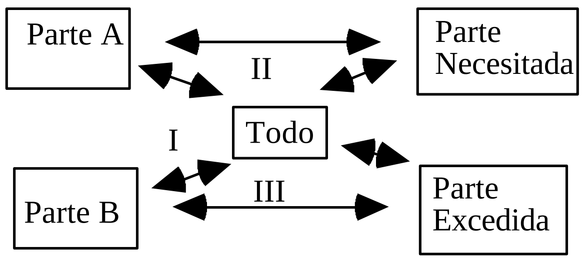


Figura 2: Diagrama aditivo del esquema partes-todo

El esquema se organiza en tres grupos (I, II, III), donde el I representa todas las operaciones aditivas posibles de unión entre las partes y de separación del todo, y los grupos II y III, las relaciones asimétricas, es decir, las relaciones entre la parte y el todo expresado por sus diferencias ordenadas. Hemos mantenido en el esquema la diferencia entre parte$_1$ necesitada y parte$_2$ excedida, no sólo por mantener la simetría del mismo, sino por entender como Resnick que la parte necesitada implica un proceso que va de la parte menor a la mayor (el todo) y está asociada a los procedimientos más primitivos de contar progresivamente y la parte excedida que va de la parte mayor (Todo) a la parte menor y está asociada al procedimiento de contar regresivamente.

Es claro que este diagrama aditivo del esquema partes-todo, que tiene bastante parecido al presentado por Resnick, parece referirse de manera clara al campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas absolutas, sin embargo nuestra idea es utilizarlo tanto con cantidades orientadas presentes (números positivos) como con cantidades orientadas ausentes (números negativos) y que en la mayoría de los casos la diferencia entre negativo y positivo difiere respecto a las expectativas del sujeto: descubrimiento de una ausencia o una orientación en ese sentido en lugar de la presencia u orientación en el otro sentido. Es necesario dotar a este diagrama de una interpretación explícita de todas las relaciones aditivas que se dan en el supuesto de que las partes y el todo puedan ser consideradas no sólo como cantidades orientadas presentes (positivas) sino también orientadas ausentes. Estas relaciones quedan claramente determinadas por la relación de Chasles (1793-1880), uno de los creadores de la geometría moderna, relación que formulamos en una dimensión como:

“ Relación de Chasles para tres puntos:

Todo triplete de puntos A, B y C en una recta, cualquiera que sea su posición respectiva, verifica la relación

AC = AB + BC.

Es una relación entre las medidas algebraicas de los bipuntos {AB}, {BC} y {AC}, por tanto, una propiedad de estos bipuntos, independiente del origen elegido en la recta. En efecto, este origen no figura en la relación; se trata, pues, de una propiedad intrínseca de los puntos A, B y C. Esta relación se puede generalizar cuando se consideran n puntos.” Caratini, R. (1970).

Podemos considerar las siguientes situaciones:

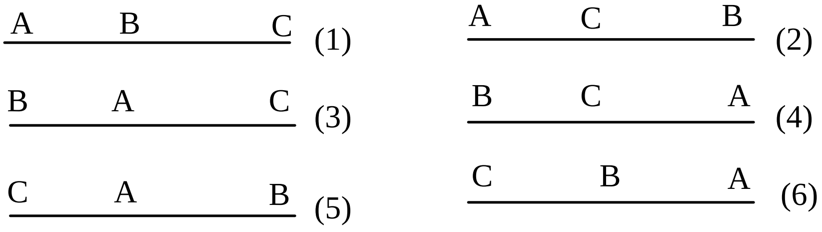


Figura 3

Estas seis situaciones desarrollan todas las posibles uniones entre las partes y la posible separación del todo, tanto si las cantidades están orientadas presentes (positivas) como orientadas ausentes (negativas).

El campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas

El propósito es la construcción de un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, es decir, la elaboración de un modelo teórico que organice este campo conceptual. En definitiva, pretendemos englobar bajo una misma estructura (modelo de competencias) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo, tomando en consideración el conjunto de los números enteros.

Este modelo de competencias está constituido por:

- Elementos epistemológicos y fenomenológicos asociados al campo conceptual aditivo de los números naturales y enteros.
- Elementos cognitivos asociados a dicho campo.

Los aspectos epistemológicos tratan de la organización lógico-formal de los números naturales y enteros, es decir, de los conceptos, relaciones y procedimientos que le caracterizan, y los aspectos fenomenológicos tratan del conjunto de situaciones y problemas que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los números naturales y enteros.

En los aspectos cognitivos consideramos tanto las funciones cognitivas específicas del campo conceptual como los aspectos estructurales de las actividades de aprendizaje, y éstos quedan caracterizados por, el proceso de construcción de los conceptos numéricos y de medida donde las clases, relaciones asimétricas y los números enteros constituyen un sistema operatorio aditivo coherente, isomorfo al de las medidas enteras discretas, y por el esquema aditivo partes-todo, tanto para las cantidades positivas como para las cantidades negativas y que está determinado por el diagrama aditivo y la relación de Chasles.

El modelo de competencias debe responder a las exigencias del campo conceptual aditivo y debe permitir entre otras cosas:

* Integrar los elementos y relaciones que se dan en el campo conceptual de las magnitudes discretas enteras.
* Elaborar una nueva y exhaustiva clasificación de las situaciones y problemas considerados en el campo conceptual.
* Integrar y explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones.
* Facilitar la relación con el modelo de ejecución (M.E.).

Nos vamos a referir a las tres primeras en lo que sigue. Tomaremos como organizadores del campo conceptual aditivo a las magnitudes discretas, a las relaciones más significativas que se dan en los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual de los números naturales y enteros.

Procediendo de esta manera obtenemos una primera clasificación del campo conceptual aditivo en dos grandes categorías determinadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo: Las operaciones aditivas (Grupo I) y las relaciones asimétricas (Grupos II y III):

Las operaciones aditivas

Las operaciones aditivas están representadas por el grupo I del diagrama aditivo del esquema partes-todo y tiene como elementos organizadores a la forma canónica de la operación aditiva a+b=c, que correspondería al aspecto epistemológico; a los significados de los fenómenos asociados a los números y a las magnitudes, que especificaremos a continuación y a todas las relaciones posibles entre estos números o magnitudes expresados por la relación de Chasles dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo. Con relación a la forma canónica a + b = c, esto nos va a originar siempre 3 casos posibles dependiendo de la posición del dato desconocido. Con relación a los fenómenos asociados utilizaremos la expresión Número = Magnitud, que debe ser interpretada como número entero equivalente a magnitud discreta relativa, que contiene como casos particulares a los números naturales y a las magnitudes discretas absolutas, porque dada una magnitud discreta relativa podemos garantizar por su misma definición que existe siempre un isomorfismo de ella con el Z-módulo de los números enteros y este isomorfismo respeta la ordenación total y arquimediana de la magnitud. Por ello vamos a considerar los números enteros, o mejor las cantidades discretas relativas. De esta manera en lo que sigue nos referiremos tanto a cantidades como a medidas y, por tanto, a números, aunque los ejemplos serán referenciados con cantidades ya que son la mayor parte de las actividades y ejemplos con significado concreto que se utilizan en la enseñanza. Estas cantidades pueden ser numéricas o de magnitud y son las que aparecen con un doble sentido o significado, como estado (tengo 6 canicas, debo 6 canicas, etc), o como variación (gané 6 canicas, perdí 6 canicas, etc.).
De esta manera si consideramos la expresión canónica de la estructura aditiva a + b = c y la representamos por:

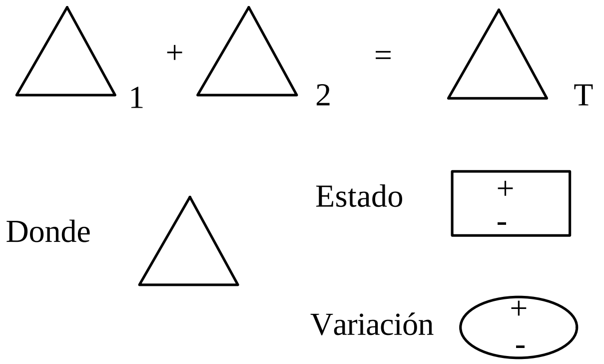


Figura 4

obtenemos todas las relaciones aditivas posibles de los fenómenos asociados:

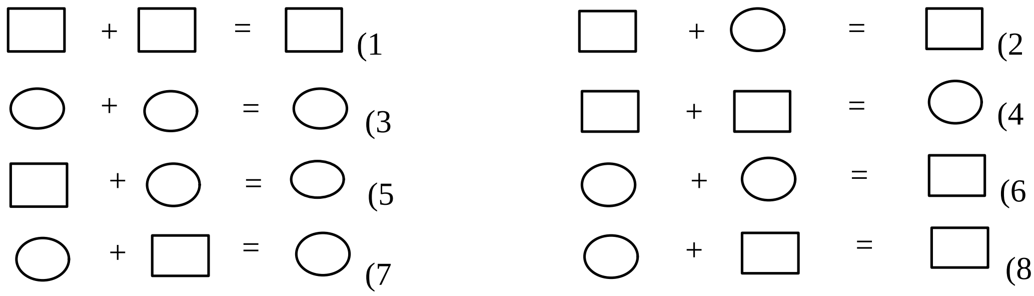


Figura 5

Es necesario observar que estas ocho relaciones aditivas se pueden reducir a seis en función de las equivalencias entre (2 y (8, y entre (5 y (7. (Figura 5). La relación aditiva (1, corresponde a la categoría semántica de combinación, y las restantes a la categoría de cambio.

Si hacemos intervenir las relaciones posibles organizadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo mediante la relación de Chasles, obtenemos todas las operaciones aditivas lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas que son en total 144, y si aceptamos por razones de equivalencia la reducción de los casos posibles, como ya hemos indicado: la de número=magnitud a seis, nos quedan en total 108.

Forma canónica	**Número = Magnitud**	**Relación Partes-Todo**	
a+b=c	Estado, Variación, Mixta	Relación de Chasles	
3	8	6	144
3	6*	6	108

Tabla 1

Muchas son las preguntas que nos podemos hacer frente al conjunto de operaciones aditivas lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas. Algunas se pueden concretar en: ¿Se pueden describir fenómenos en los que intervienen cantidades en todas las relaciones posibles?, ¿Se pueden establecer todas las relaciones dadas por Chasles entre las partes y el todo con cantidades orientadas ausentes o presentes, respectivamente? ¿Se pueden y deben hacer particiones más finas dentro de este conjunto de operaciones aditivas lógicamente posibles?

Veamos algunos ejemplos con relación a la primera pregunta. Los fenómenos descritos en (1, (2 y (3 corresponden a los fenómenos habituales recogidos en la literatura sobre este tema, a continuación presentamos posibles ejemplos de (4, (5 y (6. (Fig. 5)

(4. Rafael tiene 7 canicas en su maleta y 5 en su mesa de noche. ¿Cuántas canicas puede pagar Rafael?

(5. Rafael tiene 7 canicas en su maleta y su tía le regala 5. ¿Cuántas canicas puede pagar Rafael?

(6. La tía de Rafael le regala 5 canicas y él gana 7. ¿Cuántas canicas tiene Rafael?

Con relación a la segunda pregunta se pueden construir ejemplos haciendo intervenir cantidades orientadas presentes (positivas) y cantidades orientadas ausentes (negativas), en los seis casos posibles. (Fig. 3)

Con relación a la tercera pregunta sobre clasificaciones más finas éstas se pueden hacer atendiendo tanto a los aspectos epistemológicos, por ejemplo, considerando la operación como una operación binaria, generalmente asociada a la teoría de los cardinales, o como una operación unitaria, generalmente asociada a la teoría de operadores; o atendiendo a aspectos fenomenológicos, cantidades como estado, variación o situaciones mixtas; y, por último, atendiendo al esquema partes-todo con la presencia de cantidades orientadas presentes (positivas) u orientadas ausentes (negativas), pero todo ello debe estar relacionado con el trabajo empírico. No obstante, considerando el trabajo realizado en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas absolutas, la categorización de las mismas desde una perspectiva global en categorías semánticas como combinación y cambio parecen adecuadas. De esta manera podemos organizar las 108 operaciones aditivas lógicamente posibles en:

	Forma canónica	**Número = Magnitud**	**Relación Partes-Todo**	
Combinación	3	1	6	18
Cambio	3	5	6	90

Tabla 2

Parece razonable incluir (4, (5 y (6 (Fig. 5) dentro de la categoría semántica Cambio, (2 y (3 estaban ya incluidas por estudios anteriores.

Las relaciones asimétricas

Las relaciones asimétricas están representadas por los grupos II y III del diagrama aditivo del esquema partes-todo (Fig. 2) y tienen como elementos organizadores: la forma canónica de la operación aditiva que ahora toma la expresión a-b=c, que nos va a originar 3 casos posibles dependiendo de la posición del dato desconocido.

- Las relaciones sustractivas posibles de los fenómenos asociados ahora se reducen a (1 y (3 (Fig. 5), es decir, a situaciones de comparación entre estados o entre variaciones.
- Las relaciones posibles organizadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo mediante la relación de Chasles ahora se reducen a (2), (3), (4) y (5) (Fig. 3), ya que la (1) y la (6) quedan descartadas porque no facilitan relaciones de comparación entre las partes.

Si hacemos intervenir todas las relaciones posibles obtenemos que las relaciones asimétricas (grupo II, parte necesitada) lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas son 24.

Forma canónica	**Número=Magnitud**	**Relación partes-todo**	
a - b = c	-Estado, Variación	-Chasles	
3	2	4	24

Tabla 3

Análogamente si hacemos intervenir todas las relaciones posibles para las relaciones asimétricas del grupo III (parte excedida) obtenemos igualmente 24.

Forma canónica	**Número=Magnitud**	**Relación partes-todo**	
a - b = c	-Estado, Variación	-Chasles	
3	2	4	24

Tabla 4

Las operaciones aditivas y las relaciones asimétricas y las otras categorías

Corresponde ahora analizar este modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas con otras organizaciones de intenciones parecidas, en particular con las que hemos comentado aquí: las categorías semánticas y las categorías de Vergnaud. Por problemas de extensión sólo vamos a establecer la relación con algunas categorías si bien es fácil comprobar su validez para las otras.

Por ejemplo, para la categoría Cambio las 6 situaciones diferentes estarán identificadas como sigue:

Forma canónica: a+b=c	**Número = Magnitud** -Mixta	**Relación partes-todo** (Relación de Chasles)	**Total**
3	1	2	6

Tabla 5

Donde las cantidades representan una situación mixta determinada por la relación (2 (Fig. 5) y la relación partes-todo viene determinada por las relaciones (1) (“añadir a”) y (2) (“quitar de”) de Chasles (Fig. 3).

Al analizar las seis categorías de Vergnaud (1982) dentro del modelo de competencias nos encontramos con la necesidad de reorganizar estas categorías al encontrar categorías aditivas que no corresponden a este nivel estructural y problemas formulados en una categoría que corresponderían a otra, entre otras cosas.

Las categorías I, II, IV y V corresponden dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo a las operaciones aditivas (Grupo I), y dentro de éste a las operaciones aditivas de combinación, la categoría I, y a las operaciones aditivas de cambio, las categorías II, IV y V. La categoría I de Vergnaud, coincide con la categoría de combinar de Carpenter y Moser (1983), y en ella sólo se admite que el número actúe como estado y con valores positivos.

Las categorías II, IV y V estarían dentro de las operaciones aditivas de cambio. La categoría II coincide con la categoría de Cambio de Carpenter y Moser (1983).

En la categoría IV: Dos transformaciones se componen en una tercera, considera 18 situaciones diferentes de problemas, identificadas como sigue:

Forma canónica: a+b=c	**Número = Magnitud**: *Variación	**Relación partes-todo** (Relación de Chasles)	**Total**
3	1	6	18

Tabla 6

Donde las cantidades representan la situación de variación determinada por la relación (3 (Fig. 5) y la relación partes-todo viene determinada por las seis relaciones posibles de Chasles.

Pensamos que este modelo resuelve los problemas que se le plantean a Vergnaud. Con relación a la medida, al situarse en el marco de las magnitudes absolutas (escalares) se encuentra con elementos que son medidas y con elementos que no son medidas y necesita operar con ellos; de igual manera al comparar medidas se encuentra con medidas en forma de estado, como tener 6 canicas y con relaciones estáticas, a veces denominadas estados relativos, como deber 6 canicas, esto genera una gran cantidad de dificultades en la organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, por ello parece más razonable situarnos en un marco más general: el de las magnitudes discretas relativas donde todos los elementos serán cantidades o medidas.

La transformación de tiempo que utiliza Vergnaud interviene en algunas categorías como la II o no interviene como en la I y la III. Parece razonable pensar que la noción de transformación lleva implícita la noción de tiempo y que ésta estará asociada a las magnitudes discretas enteras en función de que represente un estado (tiempo presente) o una variación (tiempo pasado o futuro).

Con relación a las relaciones estáticas las mantienen en su estado inicial en la categoría III, pero cuando intenta que una transformación actúe sobre ella (categoría V) o bien operar con ellas (categoría VI), se encuentra con un doble problema: o la reduce a un estado relativo (Pedro debe 6 canicas) que correspondería a problemas de otras categorías o formula problemas de un nivel diferente, lo que crea una gran heterogeneidad en la organización del campo conceptual considerado.

Consideraciones finales

A lo largo de este trabajo hemos hecho una propuesta de organización del campo conceptual de las magnitudes discretas desde el enfoque de la resolución de problemas, situándonos en el subperiodo piagetiano de las operaciones concretas, donde intervienen los agrupamientos lógicos e infralógicos, el grupo aritmético Z y la medición.

Esta propuesta de organización constituye un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo que integra los elementos y relaciones que se dan en este campo, permite una nueva clasificación de las diferentes situaciones y problemas del mismo, integra y explica resultados de otras investigaciones y facilita la relación con un posible modelo de ejecución.

El modelo de competencias presenta de manera unificada las categorías semánticas del campo conceptual aditivo discreto, no sólo desde una perspectiva lógico-formal, que se da en las otras categorizaciones, sino también desde la perspectiva de las leyes de composición, de los fenómenos asociados y de las estructuras cognitivas implicadas.

En definitiva, hemos considerado bajo una única estructura (modelo de competencias) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

Hemos caracterizado un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas, pero sería absurdo considerar este modelo de competencias como un modelo válido para la ejecución. Sin embargo, un modelo de ejecución tiene que incorporar un modelo de competencias como una parte esencial. Los modelos de ejecución se pueden construir de maneras diferentes, pero compatibles con premisas fijas sobre la competencia en la cual se basan.

Referencias bibliográficas

BRIARS, D. J. Y LARKIN, J.H., 1981. An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Annual Meeting of the Society for Research in Child Development.* (Boston).

CARATINI, R., 1970. *Los números y el espacio.* ARGOS Enciclopedia temática, nº 12. (Editions Bordas: París y Editorial Argos: Barcelona).

CARPENTER, T.P. Y MOSER, J.M., 1982. The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds) *Addition and subtraction: A cognitive perspective. pp. 9-24.* (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, N.J).

CARPENTER, T.P. Y MOSER, J.M., 1983. The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds) *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes. (*Academic Press: New York).

CASTRO, E., RICO, L. Y GIL, F., 1992. Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10 (3),* pp. 243-253.

FILLOY, E., 1990. PME algebra research. A working perspective. Conferencia Plenaria. En G. Booker, P. Cobb y T. Mendecuti (eds) *Proceedings of the fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. II, pp 1-33.

FLAVELL, J.H., 1981. *La Psicología Evolutiva de Jean Piaget*. (Paidós: Barcelona).

FUSON, K. C., 1992. Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 243-275. (MacMillan Publishing Company: New York).

HELLER, J.I. Y GREENO, J.G., 1978. *Semantic processing in arithmetic word problem solving.* Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. (Chicago).

NESHER, P., 1982. Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T..P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds) *Addition and subtraction: A cognitive perspective pp. 9-24.* (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, N.J).

PIAGET, J., 1965. *The child's conception of number*. (Norton: New York).
PIAGET, J.,1978. *Introducción a la Epistemología Genética. El pensamiento matemático.* (Paidós: Buenos Aires).
PUIG. L. Y CERDÁN, F., 1988. *Problemas aritméticos escolares.* (Edit. Síntesis: Madrid).
RESNICK, L.B., 1983. A developmental theory of number understanding. En H.P. Ginsburg (Ed) *The development of mathematical thinking*. (Academic Press: New York).
RESNICK, L.B., GREENO, J.G. Y ROWLAND, J., 1980. *MOLLY: A model of learning from mapping instruction.* Manuscrito inédito. (University of Pittsburg, Learning Research and Development Center: Pittsburg, PA).
RICO, L. y otros, 1985. *Didáctica activa para la resolución de problemas.* Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada.
RILEY, M.S., GREENO, J.G. Y HELLER, J.I., 1983. Development of children's problem solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (Ed): *The development of mathematical thinking*. (Academic Press: New York).
VERGNAUD, G. Y DURAND, D., 1976. Structures additives et complexité psychogénetique. *Revue Française de Pedagogie*. Vol. 36 (Traducción al castellano: Estructura aditiva y complejidad psicogenética, en Coll, C. (1983) Psicología genética y aprendizajes escolares. Siglo XXI, pp. 105-128).
VERGNAUD, G., 1982. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T..P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds) *Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 9-24).* (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, N.J).
VERGNAUD, G., 1993. La teoría de los campos conceptuales. En Sánchez, E.; Zubieta, G. (Eds), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa.*, pp. 88-117. (Cinvestav-IPN: México. D.F).

Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones

Enrique Castro, Encarnación Castro, Luis Rico,
José Gutiérrez, Antonio Tortosa, Isidoro Segovia, Evaristo González,
Nicolás Morcillo, Francisco Fernández
Seminario CIEM
Dpto Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

En las investigaciones que estamos realizando en el campo aditivo utilizamos un conjunto de factores diferenciadores de los problemas de estructura aditiva, que presentamos a continuación.

Influencia del tipo de número

Uno de los factores importantes que diferencia los problemas aritméticos es el tipo de número con el que se expresan las cantidades (natural, entero, decimal) y el tipo de magnitudes asociadas (discretas y continuas). En los primeros años de escolaridad, los números empleados son casi exclusivamente números naturales y magnitudes discretas. Por ello, nos referimos sólo a problemas con números naturales y magnitudes discretas.

Problemas simples y compuestos

Otra gran diferenciación que hacemos es entre *problemas simples y compuestos*. Atendiendo al número de relaciones que aparecen explícita o implícitamente en la información que se proporciona en el enunciado se puede hablar de problemas *simples* y *compuestos*. La información suministrada en un problema *simple* contiene sólo una relación entre dos datos numéricos en función de la cual el resolutor tiene que operar para obtener un resultado. Cuando interviene más de una relación en el enunciado de un problema lo llamamos *compuesto*.

Para resolver un problema simple se necesita una sola operación aritmética (adición, substracción, multiplicación o división) mientras que para resolver un problema compuesto es necesario emplear al menos dos operaciones distintas o una misma operación varias veces.

A los problema que requieren de sumas o restas para obtener la solución se les llama en general problemas de adición o de substracción. Puesto que la adición y substracción son operaciones inversas y la substracción puede concebirse como un caso especial de adición, a los problemas de adición y substracción suele denominárseles con el nombre genérico de problemas de *estructura aditiva*.

Problemas de estructura aditiva simples

Los problemas aritméticos aditivos simples, que se suelen denominar también como problemas de una etapa o problemas de un paso, han sido analizados con bastante profundidad desde finales de los años setenta (Castro, 1992, 1994). De estos análisis han surgido una serie de criterios para clasificar los problemas aritméticos simples de estructura aditiva:

a) designar a los problemas con el nombre de las operaciones es confuso, puesto que un problema de restar se puede resolver con una suma.

b) Los problemas simples de estructura aditiva responden a varios tipos de estructuras semánticas.

c) En todo problema hay un esquema subyacente o relación entre los datos.

d) En un problema simple hay tres cantidades relacionadas: dos datos y una incógnita. La incógnita puede ser una de las tres cantidades relacionadas.

e) Hay problemas catalogados como de *aumento* y otros son catalogados de *disminución*.

Con respecto a estos puntos señalar que en alguno de ellos no hay un acuerdo unánime en aspectos parciales. Por ejemplo, la categoría semántica de igualación es admitida por unos investigadores y rechazada por otros. Otro ejemplo: en la categoría de combinación lo más usual es considerar dos tipos de problemas: desconocer el todo o desconocer una parte. Estos dos tipos de problemas pueden pensarse que corresponden al tipo de cantidad desconocida en la relación que existe entre los datos. Pero la diferenciación entre estos dos tipos de problemas de combinación también puede realizarse en términos de que en un problema se produce un aumento (hallar el todo) y en el otro una disminución (hallar una parte).

Nuestro trabajo de investigación sobre problemas aritméticos se sitúa dentro de este marco, siendo uno de los objetivos principales determinar variables estructurales de los problemas aritméticos y qué influencia pueden ejercer sobre la dificultad en la resolución de los mismos. Para el caso particular de los problemas aritméticos aditivos nos centramos en el análisis de los problemas aritméticos aditivos compuestos de dos etapas o de dos pasos.

Problemas aritméticos compuestos de dos pasos

Hemos dicho que en un problema aritmético compuesto hay más de una relación entre los datos. Lo que ocasiona que para resolverlo se requiere más de una operación. Si el problema contiene dos relaciones se necesitan sólo dos operaciones y decimos que se trata de un problema de dos relaciones, dos pasos o dos etapas. Por ejemplo:

> *Problema. En un autocar había 19 pasajeros. En la primera parada bajan 8 pasajeros y suben 5. ¿Cuántos pasajeros hay ahora en el autocar?*

Este es un problema compuesto de dos etapas en el que hay dos acciones sucesivas implicadas.

Realizando las combinaciones de los cuatro operaciones básicas (adición, substracción, multiplicación y división) de dos en dos, obtenemos las dieciséis parejas de operaciones:

(+, +), (+,), (+, x), (+, :), (, +), (,), (, x), (, :),
(x, +), (x,), (x, x), (x, :), (:, +), (:,), (:, x), (: , :)

que pueden emplearse en la resolución de un problema compuesto de dos etapas. No hay muchos trabajos previos de investigación que analicen teóricamente los problemas compuestos de varias etapas. Uno de los primeros es el trabajo de Durell (1928), que considera la resolución de problemas como una de las tres partes de que consta el estudio de la aritmética. Para el estudio de la resolución de problemas aritméticos en la escuela, este autor considera deseable confeccionar una pequeña lista de los tipos de problemas más básicos. El plan podría entonces consistir en descubrir o idear los métodos mejores de dominar estos tipos primarios básicos, dejando los casos especiales para ser tratados de manera subordinada.

Como una ayuda para hacer esta lista de tipos fundamentales de problemas aritméticos considera importante distinguir entre "el número de diferentes tipos de procesos de cálculo y el número de pasos (u operaciones) requeridos para resolver un problema dado”. Así, si los cálculos necesarios para resolver un problema aritmético consisten sólo en adiciones y multiplicaciones entonces es un problema de dos-procesos. Pero si la solución consta de dos multiplicaciones y una adición entonces es un problema de tres pasos (o un tres-operación). Lo siguiente es un ejemplo de los tipos descritos.

> *Ej. Una mujer fue a la tienda a comprar 8 kilos de azúcar a 60 ptas el kilo y 2 kilos de café a 3500 ptas el kilo. Halla el coste total de su compra.*

De acuerdo con lo dicho este problema es de dos-procesos y de tres-pasos.

Durell emplea un simbolismo ligado a los procesos implicados en su solución que para este tipo de problema es (+, x).

Tomando las combinaciones de los cuatro procesos básicos (adición, substracción, multiplicación y división) de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres y de cuatro en cuatro, obtiene así los siguientes quince tipos fundamentales de problemas expresados simbólicamente:

I. Cuatro tipos de un-proceso: (+), ( ), (x), (:).

II. Seis tipos de dos-procesos: (+,), (+, x), (+, :) , (, x), (, :), (x, :).

III. Cuatro tipos de tres-procesos: (+, , x), (+, , :), (+, x, :) (, x, :).

IV. Un tipo de cuatro-procesos: (+, , x, :)

Según Durrell, en la enseñanza de resolución de problemas en aritmética, lo primero que hay que hacer es asegurarse que los alumnos dominan estos tipos elementales (o tantos de ellos como correspondan a un grado determinado) tan a fondo como sea posible, si bien estamos de acuerdo en que el alumno puede ignorar completamente que este sistema de tipos está siendo empleado.

Durrell lo que hace es clasificar los procesos con los que se pueden resolver los problemas y aplica este criterio a los problemas. Puesto que un problema se puede resolver con más de una combinación de procesos el criterio adoptado por Durrell no establece categorías de problemas diferenciados.

El interés por el estudio de los problemas aritméticos de dos pasos (o etapas) ha renacido recientemente (Shallin, 1985; Nesher, 1991; Nesher y Herskovitz, 1994). Los trabajos se centran en el estudio de los esquemas subyacentes a los problemas de dos etapas. Estos autores consideran que los esquemas de los problemas de dos etapas son esquemas compuestos por dos esquemas simples: el aditivo y el multiplicativo. Parten del hecho de que la definición de problema compuesto no se basa en las cuatro operaciones aritméticas sino en las esquemas simples constituidos por una relación entre tres cantidades. En el esquema aditivo las tres componentes son el todo y sus dos partes, mientras que en el esquema multiplicativo las componentes son el producto y sus dos factores. Los autores se basan en el trabajo previo de Shallin y Bee (1985) para afirmar que sólo hay tres esquemas básicos de problemas de dos etapas:

Esquema (A) (*Jerárquico*) - El todo de un esquema es una parte del otro esquema.

Esquema (B) (*Compartir el todo*) - Los dos esquemas comparten un todo.

Esquema (C) (*Compartir una parte*) - Los dos esquemas comparten una parte.

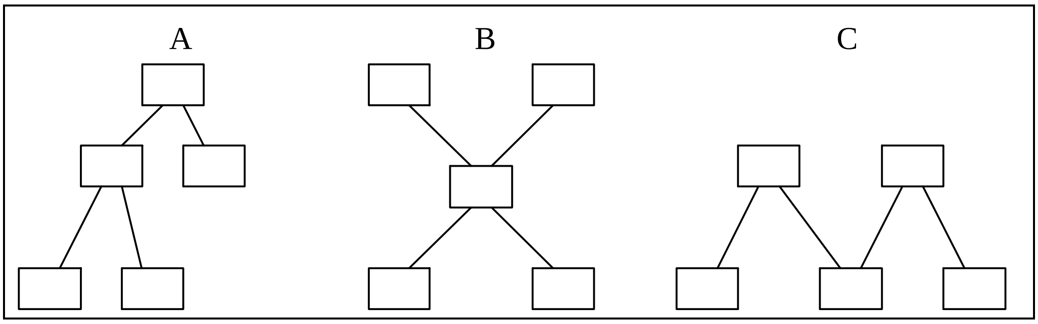


Ilustración 1. Esquemas básicos de problemas de dos etapas (Nesher y Hershkovitz, 1994)

Una de las cuestiones que investigan es la influencia que tienen sobre el índice de dificultad de los problemas de dos etapas los tres esquemas y las ocho posibles combinaciones de dos operaciones que se obtienen eligiendo una operación de estructura aditiva + / - y otra de estructura multiplicativa x / : a saber:

(+ , x), (x , +), (+ , :), (: , +), (, x), (x ,), (, :), (: ,).

Para una muestra de escolares de 3º, 4º, 5º y 6º de Israel obtienen que ambas variables tienen efecto significativo sobre el índice de dificultad de estos problemas.

Con respecto a los esquemas hallan que el esquema "jerárquico" es el más fácil, le sigue en dificultad el esquema "compartir el todo" y, por último, el esquema "compartir una parte".

Categorías de problemas de estructura aditiva de dos etapas

Problemas aritméticos aditivos de dos etapas son los problemas cuyas soluciones implican sólamente sumas y restas y, en todos los casos, es necesario realizar dos de estas operaciones -distintas o repetidas- para obtener la solución; el estudio de los problemas aritméticos aditivos de dos etapas constituye el objeto actual de nuestra investigación.

Uno de los enfoques de investigación más productivos en los estudios sobre problemas aritméticos de estructura aditiva de una etapa es el enfoque estructural basado en las categorías semánticas de los problemas (Castro y otros, 1992). Las cuatro categorías semánticas determinadas para estos problemas constituyen uno de los cimientos de nuestra categorización teórica; criterio que se complementa con otras dos variables: la dirección de la relación (aumento-disminución) presente en el problema, y el tipo de enlace que se produce entre las dos relaciones simples para formar la relación compuesta. Ello no significa que se agoten los factores en los descritos, sino que de momento nos restringimos al estudio de estos. Puesto que en los problemas aritméticos simples la posición de la incógnita es un factor influyente en la diferenciación de problemas, podemos pensar que también lo es en los de dos etapas. Esto es una mera hipótesis que habrá que contrastar, pero de momento nosotros no la hemos contrastado.

Los tres criterios diferenciadores que hemos empleado con problemas aritméticos aditivos de dos etapas son:

a) <u>Estructura semántica de la primera y segunda relación</u>

b) <u>Relaciones de Aumento/Disminución</u>

c) <u>Forma del enlace entre las dos relaciones</u>

a) <u>Estructura semántica de la primera y segunda relación</u>.- Nuestro punto de partida es que en un problema de dos etapas hay dos relaciones simples con un nodo en común. Partimos del supuesto teórico de que, en cada etapa, está presente una de estas estructuras semánticas y que, por tanto, al tratarse de problemas de dos etapas hemos de tener en cuenta la categoría semántica que se utiliza en cada una de ellas. Dicho de otra manera, en el enunciado de los problemas aritméticos de dos etapas, cada etapa del problema corresponde a una relación entre tres datos, uno de los cuales es compartido y está latente en el problema. Cada una de estas relaciones por separado las encontramos en los problemas aritméticos verbales de una etapa. En consonancia con esto, en un problema verbal de dos etapas la estructura semántica se encuentra tanto en la primera relación como en la segunda. Utilizamos, por tanto, las categorías semánticas en la primera relación del problema y las categorías semánticas en la segunda relación. Las categorías semánticas empleadas son las denominadas:

* ***cambio***, se refiere a los problemas en los que se produce algún evento o transformación que cambia el valor de una cantidad inicial; la codificamos como Ca.

* ***combinación***, problemas basados en la relación existente entre un conjunto total y una partición del mismo en dos subconjuntos; la codificamos como Co.

* ***comparación***, problemas que implican una relación comparativa entre dos cantidades; la designamos abreviadamente como Cp.

* ***igualación***, problemas en los que se plantea una acción para lograr que una cantidad sea igual a otra; abreviadamente lo designamos como Ig.

Si atendemos a las posibilidades que ofrecen estas cuatro estructuras en los problemas de dos etapas, encontramos las 16 opciones que están recogidas en la Tabla 1.

Tabla 1. Combinaciones semánticas posibles en problemas de dos etapas

	Ca	Co	Cp	Ig

Ca	(Ca, Ca)	(Ca, Co)	(Ca, Cp)	(Ca, Ig)
Co	(Co, Ca)	(Co, Ca)	(Co, Cp)	(Co, Ig)
Cp	(Cp, Ca)	(Cp, Co)	(Cp, Cp)	(Cp, Ig)
Ig	(Ig, Ca)	(Ig, Co)	(Ig, Cp)	(Ig, Ig)

b) Relaciones de Aumento/Disminución.-

Las operaciones de sumar y restar números naturales producen efectos contrapuestos: La operación de sumar un número a otro producen un aumento del dato inicial, mientras que al restar un número de otro el resultado es una disminución. Estas ideas se encuentran en las relaciones que se utilizan para plantear problemas en el marco de la estructura aditiva y se han utilizado para clasificar los problemas de una etapa.

Nuestra opinión al respecto es que en todo problema aritmético simple hay subyacente una relación entre tres cantidades: dos cantidades explícitas que son los datos, a partir de las que se obtiene una tercera cantidad. Cuando enunciamos un problema verbal, la relación entre la pareja de datos puede ser de aumento (A) o disminución (D). Esta distinción da lugar a la segunda variable que tomamos en consideración y que hace referencia a la dirección de cada una de las relaciones simples incluidas en el problema. Si el problema aditivo es de dos etapas, en cada una de las etapas hay incluida una relación de aumento o disminución, por lo que se presentan cuatro posibilidades para la variable relaciones, recogidas en la Tabla 2.

Tabla 2. Combinaciones según relaciones de aumento o disminución en problemas de dos etapas

		1 Primera relación	
2 Segunda relación		Aumento (A)	Disminución (D)
	Aumento (A)	Aumento-Aumento (A,A)	Aumento-Disminución (A,D)
	Disminución (D)	Disminución-Aumento (D,A)	Disminución-Disminución (D,D)

c) Forma del enlace entre las dos relaciones- Un tercer factor importante en la clasificación de los problemas aritméticos simples es el que se refiere a la cantidad desconocida entre las tres posibles que intervienen en la relación global subyacente en el problema. Para cada relación de aumento o de disminución hay la posibilidad de elegir dos cualesquiera de las tres cantidades como datos y la otra como la cantidad a determinar. Desde nuestra perspectiva esta variable queda mediatizada en la categorización de los problemas compuestos por la variable que se refiere a *cómo es el enlace entre las relaciones que conforman el problema compuesto*. En un problema simple hay una sola relación establecida entre las tres cantidades, pero en un problema compuesto hay al menos dos relaciones, y lo importante es cómo están conectadas entre sí las relaciones.

En un problema de dos etapas las dos relaciones comparten una cantidad, si es de otro modo, consideramos que no es un problema de dos etapas. Se pueden enunciar problemas aritméticos con dos relaciones y dos preguntas sin que lo consideremos un problema de dos etapas.

Por ejemplo:

Juan tiene 25 cuadros y vende 18. Pedro tiene 15 sellos de deportes y 30 de navidad.

a) ¿Cuántos cuadros le quedan a Juan?

b) ¿Cuántos sellos tiene Pedro?

En este problema hay que realizar dos operaciones pero en realidad son dos problemas simples separados. No lo consideramos como problema de dos etapas.

Para que estemos ante un problema de dos etapas es necesario que compartan una cantidad que sirve de enlace entre las dos relaciones. Esta cantidad es desconocida en la relación primera y hay que determinarla en un primer paso para poder operar con ella como dato en la segunda relación. Una primera restricción es que la cantidad que sirve de enlace, es una cantidad desconocida, pero no puede ser la cantidad final que se pide hallar en el problema, porque bastará con una de las dos relaciones para determinarla, por lo que el problema dejaría de ser de dos etapas. Esto limita las posibilidades de las cantidades que pueden ser desconocidas en el esquema o los esquemas compuestos.

Nuestro planteamiento con respecto a este enlace entre las dos relaciones para el caso concreto de los problemas aditivos de dos etapas, ha sido considerar como básicos los problemas en los que la cantidad desconocida en la primera relación entra como elemento en la segunda relación. Dicho de otra manera, consideramos problemas en cuyo enunciado aparecen en primer lugar dos datos con los que hay que operar para obtener una cantidad, este primer resultado hay que operarlo a su vez con el tercer dato del enunciado para alcanzar la solución. Esquemáticamente:

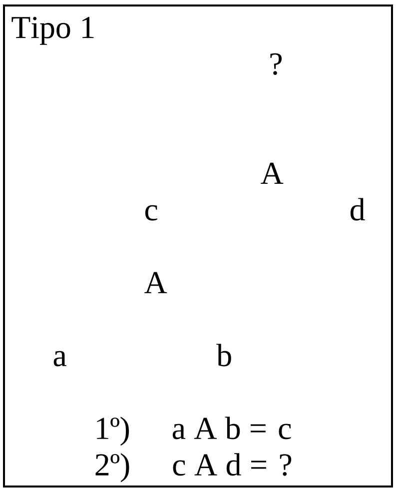
**** datos ordenados del problema: a, b, c***

**** orden de relaciones para alcanzar la solución:***

($_1$ Primera relación) ***a $_1$ b ------> c***

($_2$ Segunda relación) ***c $_2$ d ------> solución***

Con este esquema restrictivo los cuatro problemas resultantes de la combinación de las dos relaciones y la posibilidad de que cada una de ellas sean de aumento o de disminución son :



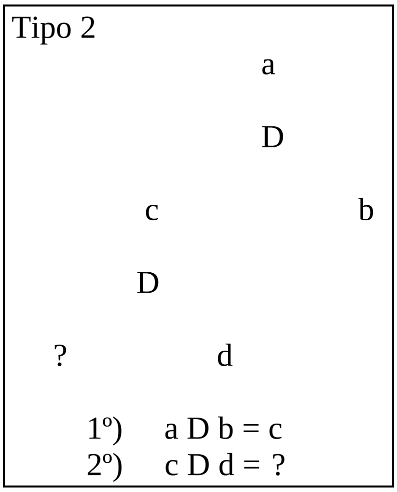
Tipo 1. Dos relaciones de *aumento*. El *todo* de la primera relación inicial es una *parte* de la segunda relación.

Ejemplo. María tiene 12 sellos de Francia y 7 de España. Compra 16 sellos de Grecia ¿Cuántos sellos tiene en total?

a=12 sellos de Francia, b=7 sellos de España
d=16 sellos de Grecia

$_1$ **: *tener y tener*** (indica acumulación)

$_2$ **: *Tener y comprar*** (indica aumento)



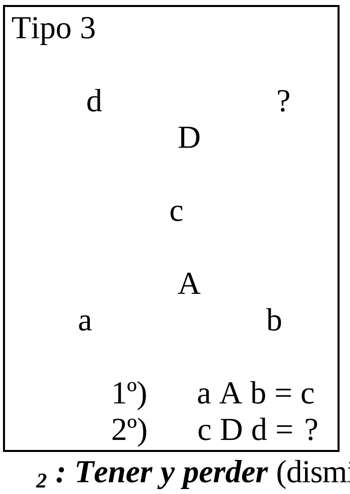
Tipo 2. Dos relaciones de *disminución*. Una *parte* de la primera relación es el *todo* de la segunda relación.

Ejemplo. Juan tiene 35 cromos. Pierde 7 jugando en el recreo de la mañana. Por la tarde regala a un amigo 12 cromos. ¿Cuántos cromos le quedan a Juan?

a=35 cromos, b=7 cromos de animales,
d=12 cromos de aviones.

$_1$ **: *Tener y Perder*** (disminución)

$_2$ **: *Tener y regalar*** (disminución)



Tipo 3. Primera relación de aumento y la segunda de disminución. Comparten el todo las dos relaciones.

Ejemplo. José tiene 18 bolas rojas y 7 bolas negras. Después de jugar una partida pierde 11 bolas.
¿Cuántas bolas le quedan?

a=18 bolas rojas, b=7 bolas negras
d=11 bolas

$_1$ **: *Tener y tener*** (aumento)

$_2$ **: *Tener y perder*** (disminución)

Tipo 4

a ?

D A

b c d

1º) a D b = c

2º) c A d = ?

Tipo 4. La primera relación es de disminución y la segunda de aumento. Comparten una parte las dos relaciones.

Ejemplo. José tiene 25 bolas rojas y negras, 7 son negras. Le regalan 4 bolas rojas ¿Cuántas bolas rojas tiene José?

a=25 bolas rojas y negras,
b= 7 bolas negras,
d=4 bolas rojas

$_1$: ***Cantidades complementarias respecto al total, desconocida una parte*** (disminución)
$_2$: ***Tener y recibir*** (aumento)

En definitiva, para el estudio de los problemas aritméticos de estructura aditiva de dos etapas hemos delimitado tres características clave: a) la **estructura semántica**, con dieciséis posibilidades; b) las **relaciones de aumento-disminución**, con cuatro posibilidades, y c) la **estructura ordenada de las relaciones**, con la *"cantidad desconocida"* siempre al final.

Es obvio que pueden surgir algunas variantes más de problemas de dos etapas cambiando la posición de la incógnita. Por ejemplo, a partir del esquema jerárquico y de la combinación (A,D) se puede tener un tipo 5 si la cantidad desconocida es una parte en la segunda relación en vez del todo.

Tipo 5

d

D

c ?

A

a b

1º) a A b = c

2º) d D c= ?

Ejemplo. José tiene 18 bolas rojas y 7 bolas negras. Jugar una partida y pierde parte de las bolas. Le quedan 12 bolas ¿Cuántas bolas ha perdido en la partida?
a=18 bolas rojas, b=7 bolas negras
d=12 bolas
$_1$: ***Tener y tener*** (aumento)
$_2$: ***Tener y perder*** (disminución)

Del esquema compartir una parte, correspondiente a la combinación (D,D), surge un tipo 6 cuando la cantidad desconocida es una parte de la segunda relación.

Tipo 6

a d

D D

b c ?

1º) a D b = c

2º) d D c = ?

Tipo 6. La primera relación es de disminución y la segunda de aumento. Comparten una parte las dos relaciones.

Ejemplo. José tiene 25 bolas, unas son rojas y otras negras. De ellas 18 son rojas y el resto negras. También tienen bolas verdes. Tiene 30 bolas entre las negras y las verdes. ¿Cuántas bolas verdes tiene?

a=18 bolas rojas, b=7 bolas negras

d=11 bolas

$_1$ **: *Tener y tener*** (aumento)

$_2$ **: *Tener y perder*** (disminución)

En nuestro trabajo esta última variante la hemos mantenido como una variable controlada fijando su valor a los cuatro esquemas dados inicialmente.

En las investigaciones que hemos realizado con niños de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria hemos obtenido entre otros hallazgos importantes que las distintas combinaciones de las relaciones de aumento o disminución afectan a la dificultad del problema. Las cuatro clases de problemas que surgen según que la relación sea de aumento o de disminución, colocados en orden de dificultad creciente quedan así:

(A,A), (A,D), (D,A) y (D,D)

siendo este último, el (D,D) el de mayor dificultad.

Ilustración 1. Porcentajes de aciertos de las combinaciones de aumento-disminución

Lo anterior nos hace concluir que, en un problema de estructura aditiva compuesto de dos relaciones, la relación de disminución en el primer paso es más difícil que las relaciones de aumento en primer paso. También hemos constatado que la influencia de la relación de aumento o disminución en segunda posición, tiene un peso menor sobre la dificultad del problema que la que tiene en la primera posición. De hecho, no hemos obtenido unas diferencias significativas según la relación en la segunda posición. Lo que sí ocurre es que la relación de disminución en la segunda posición refuerza la dificultad que provoca la relación de disminución en la primera posición. Esto ocurre en la muestra total y en cada uno de los cursos por separado, con la única salvedad de que los índices de dificultad se mueven en un intervalo menor.

Como última reflexión decir que los esquemas anteriores son válidos para problemas compuestos de dos relaciones de estructura multiplicativa y para problemas mixtos en los que intervenga una relación de tipo aditivo y otra de tipo multiplicativo.

Referencias

Berglaund-Gray, G. (1938). *The effect of process sequence on the interpretation of two-step problems in arithmetic*. Unpublished doctoral dissertation. University of Pittsburg.

Berglaund-Gray, G. (1939). Difficulty of the arithmetic process. *Elementary School Journal*, November, 40, 198-203.

Berglaund-Gray, G. & Young, R.V. (1940). The effect of process sequence on the interpretation of two-step problems in arithmetic. *Journal of Educational Research*, September, 34(1), 21-29.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The Development of Addition and Subtraction problem-solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, N. J.: LEA.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1983). The Acquisition of Addition and Subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Orlando, Florida: Academic Press.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativ*a. Granada: Comares.

Castro, E.; Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de Investigación en Problemas Verbales Aritméticos Aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10* (3), 243-253.

Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Castro, E., Segovia, I., Morcillo, N., Fernández, F., González, E. y Tortosa, A. (1996). Evaluación de la resolución de problemas aritméticos en Primaria. *Revista de Investigación Educativa, 14*(2), 121-139.

Durell, F. (1928). Solving problems in arithmetic. *School Science and Mathematics, 28*(9), 925-935.

Fuson, C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Comp.

Gutiérrez, J., Morcillo, N., Rico, L., Castro, E., Castro, E., Fernández, F., González, E., Pérez, A., Segovia, I., Tortosa, A. y Valenzuela, J. (1993). Problemas aditivos de dos etapas con igual operación y estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5º de Primaria. *Actas VI JAEM*, Badajoz.

Morcillo, N., Castro, E., Rico, L., Castro, E., Fernández, F., González, E., Gutiérrez, J., Pérez, A., Segovia, I., Serrano, M., Tortosa, A., Valenzuela, J (1993). Dificultad debida al orden de operaciones en Problemas Aditivos de Dos Etapas con estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5º de Primaria. *Actas VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales"*. Sevilla.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (1991). Two-Steps Problems, Research Finding. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference,* Vol. III, pp. 65-71. Assissi, Italia.

Nesher, P. y Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 1-23.

Puig, L y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Editorial Síntesis

Rico, L. y otros. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Granada: Departamento Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Rico L. Castro E. González E. Castro E. (1994). Two-Step Addition Problems With Duplicated Semantic Structure. En J.P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. IV, (pp.121-128). University of Lisbon. Portugal

Rico, L. y otros (en prensa). Categorías de problemas aditivos de dos etapas. *Educación Matemática*.

Shallin, V.L. y Bee, N. V. (1985). *Structural differences between two-step word problems,* presentado en el Meeting de la American Educational Research Association.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations theoriques et des recherches franÇaises en Didactique des Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 2.*2, 215-232.

CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR SUS ESTRUCTURAS NUMÉRICA Y SEMÁNTICA GLOBAL

González Marí, J. L.
Departamento de Didáctica de la Matemática, de las CC.SS. y de las CC.EE. Universidad de Málaga

Resúmen

En los problemas del campo conceptual aditivo, además de los números naturales y enteros, aparece un tercer tipo de nociones numéricas que configuran el campo conceptual de los números naturales relativos. La consideración conjunta de la estructura numérica, haciendo intervenir los tres tipos de números y las operaciones aditivas correspondientes, y de la estructura semántica global, con las tres categorías ya conocidas de cambio, combinación y comparación, permite establecer una clasificación que es compatible con la estructura lógica de las tareas y que abre nuevas perspectivas en la investigación sobre resolución de problemas aditivos de enunciado verbal.

En este trabajo, además de discutir la complejidad de la categorización de tareas en un campo conceptual y exponer algunas reflexiones sobre los criterios generales más adecuados para ello, se exponen las clasificaciones de problemas aditivos que se deducen de la consideración de las dos estructuras mencionadas dentro del marco general propuesto.

Introducción

Estamos convencidos de que indagar en las tareas matemáticas es indagar en el conocimiento y en el pensamiento humanos. Hablar de tareas en el ámbito de la Educación Matemática es hablar de resolutores, de personas que tienen que interpretar, comprender y realizar dichas tareas. Por otra parte, al pensar en las tareas de un campo conceptual nos encontramos con numerosas variables, unas específicas, propias del contenido y del hecho educativo en matemáticas, y otras generales, que dependen de factores que tienen que ver con contextos no matemáticos y no educativos que afectan a la tarea o al resolutor o al entorno sociocultural en el que este se desenvuelve y en el que aquéllas se plantean y desarrollan. En último término, se podría decir que hablar de tareas de un campo conceptual o parcela concreta del pensamiento matemático es hablar de posibles manifestaciones del razonamiento y del conocimiento humanos, tanto a nivel individual como colectivo (conciencia compartida y existencia supraindividual o cultural (Popper, 1979; Davis & Hersh, 1988), de sus múltiples conexiones con otros conocimientos y de los niveles o grados que pueden presentar; algo, evidentemente, muy complejo. Hablar, en consecuencia, de categorizar las tareas de un campo conceptual es hablar de categorías de pensamiento y de criterios para clasificar las diferentes formas bajo las que se puede presentar un conocimiento, una destreza o una competencia matemática específica. Asímismo, podemos decir que hacer referencia a las características de las tareas de un campo conceptual es hacer referencia a las características del pensamiento matemático, tanto individual como colectivo, así como a la multiplicidad de formas y matices que puede adoptar a lo largo de su evolución.

Las consideraciones anteriores, matizables en numerosos aspectos, son un indicador de la complejidad y la relevancia del tema para la investigación en Educación Matemática. La relevancia se justifica en base a los argumentos esbozados en el párrafo anterior y que se condensan en la primera frase del mismo, es decir, indagar en las tareas es indagar en el conocimiento y en el pensamiento humanos, en su estructura, su funcionamiento y sus interpretaciones de la realidad. Resulta evidente, por tanto, la necesidad de indagar en esta dirección, a pesar de las dificultades, para que se produzca un salto cualitativo apreciable en la relevancia y validez de las investigaciones y en la aplicación práctica de los resultados. La complejidad, favorecida entre otros aspectos por la interdependencia entre tareas y entre campos conceptuales diversos, se pone de manifiesto ante las numerosas cuestiones que están aún pendientes de una respuesta clara, si es que la tienen, como por ejemplo: ¿Es posible obtener una categorización exhaustiva y minuciosa de las tareas de un campo conceptual?; ¿merece la pena dedicar esfuerzos a obtener categorizaciones de tal tipo?; ¿cómo pueden afectar dichas clasificaciones a las investigaciones en Educación Matemática?; ¿el conocimiento completo de las tareas de un campo conceptual, mejorará los resultados de la investigación y de la práctica docente?; ¿cuáles son los criterios de categorización más adecuados?; ¿se pueden trasladar los criterios de un campo a otro?. Desgraciadamente, queda aún mucho camino por recorrer hasta encontrar unos criterios sólidos y efectivos para la selección de tareas, de manera que esta no se haga de forma arbitraria o sin la perspectiva suficiente, o hasta conseguir rentabilizar el tiempo invertido en realizar una categorización minuciosa.

Con objeto de exponer brevemente nuestro punto de vista sobre algunas de las cuestiones planteadas en los párrafos anteriores y con el fin de poner de manifiesto la necesidad de complementar y fundamentar algunas investigaciones en unos principios generales y desde una perspectiva un poco más amplia, hemos elegido un camino que va de lo general a lo particular. Para ello comenzaremos por unos planteamientos generales que conducen a una reflexión sobre los criterios más adecuados para iniciar un

proceso que nos pueda llevar a establecer una categorización efectiva y manejable de las tareas de un campo conceptual. De esta reflexión se sigue una propuesta teórica o marco de referencia, que no pretende ser exhaustivo ni acabado, y su aplicación al caso particular del campo conceptual aditivo. Se concluye la exposición con algunas observaciones, a la luz de las consideraciones anteriores, sobre las clasificaciones de problemas aditivos de enunciado verbal. La propuesta que se realiza, centrada en las diferentes estructuras que pueden intervenir y en los distintos enfoques bajo los que se puede observar una tarea, está basada en las nociones de análisis didáctico y campo conceptual, en algunas consideraciones sobre los fundamentos de la Educación Matemática (González,1995) y en los trabajos de investigación en los que venimos colaborando en las Universidades de Granada y Málaga.
Por último, hemos de señalar que los planteamientos generales mencionados serán particularizados, en la medida de lo posible, al caso del campo conceptual aditivo, con la intención de resaltar también la gran diversidad de los tipos de tareas de dicho campo, de las que los problemas de enunciado verbal constituyen tan sólo una pequeña parte. Igualmente, dedicaremos una especial atención al caso de la estructura numérica de los problemas aditivos y a la clasificación que se obtiene al introducir la noción de número natural relativo (González, pp. 195-232) como concepto numérico que interviene, junto a los de número natural y número entero, en el aprendizaje y desarrollo de las nociones propias del campo conceptual aditivo en sus niveles más elementales.

Las nociones de análisis didáctico y de estructura didáctica de un conocimiento matemático

Consideramos que el conocimiento matemático (González, 1995, pp. 160-162):

- es el resultado de la actividad intelectual del ser humano;
- es un conocimiento perfectible, sujeto a errores, párcial e incompleto que tiene que ver con ideas u objetos conceptuales, independientes de su simbolización o representación, a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias, con una existencia ficticia o convencional que comparte dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo como parte de la conciencia compartida;
- las diferentes corrientes y posiciones epistemológicas relevantes sobre el conocimiento matemático no son más que enfoques parciales, a veces extremos, que atienden exclusiva o prioritariamente a alguno de los aspectos mencionados en el apartado anterior. Todas, sin excepción, tratan

de describir una parte de la verdadera naturaleza y modo de existencia del conocimiento matemático;

- la creación/descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (físicas y fisiológicas, entre otras), las características comunes del medio en el que se desenvuelven los sujetos (físicas y sociales, entre otras) y las características comunes de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros aspectos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio).

Como consecuencia de las consideraciones anteriores se sigue:

1.- La intervención de los tres factores, mente, medio e interacción entre ambos, se produce en todas y cada una de las interpretaciones sobre la naturaleza, modo de existencia y formas de producción del conocimiento matemático;

2.- El análisis sobre la naturaleza y el modo de existencia del conocimiento matemático, para ser completo desde el punto de vista didáctico, debe tener en cuenta, en relación con dicho conocimiento:

- las características de la mente humana: instrumentos y estructuras conceptuales; funciones cognitivas; formas de representación del conocimiento, entre otras;
- las características del medio: fenómenos, cuestiones y problemas que constituyen el campo de actuación; características de los factores lingüísticos y socioculturales que afectan a la expresión y comunicación del conocimiento, entre otras;
- las características de la interacción: necesidades individuales, socioculturales y científicas; formas de utilización del conocimiento ya existente, entre otras.

Por otra parte, en la investigación en Educación Matemática se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, una serie de parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente. De entre ellas, podemos destacar en una primera aproximación:

- la que atiende a los aspectos **psicológicos** de la Educación Matemática, especialmente a los **aprendizajes** en matemáticas;
- la que se ocupa de los aspectos **pedagógicos y curriculares** generales de la **enseñanza** de la matemática;
- la que se ocupa de los procesos de **enseñanza-aprendizaje** propios del hecho educativo real, en los que interactúan diversos factores de los dos apartados anteriores;

Pero, con ser importante, la integración de diversos aspectos psicológicos y pedagógicos como una simple adición de datos obtenidos desde un enfoque multidisciplinar, no es suficiente. Por el contrario, se constata la necesidad de una elaboración compleja en la que se han de relacionar entre sí las informaciones procedentes de las parcelas mencionadas haciendo intervenir otros elementos básicos, como es el caso evidente de la **Matemática**, su **Epistemología** y su **Historia** o de la **Fenomenología** del conocimiento matemático.

Por otra parte, los análisis epistemológicos de la Matemática en el campo educativo deben tener una orientación marcadamente didáctica. El interés primordial no debe estar en desmenuzar el conocimiento matemático hasta sus últimas consecuencias, sin más, sino en obtener información útil y relevante para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Para ello, los estudios epistemológicos se deben hacer pensando en el alumno, en su pensamiento, en sus necesidades y capacidades, en el aula, en las actividades usuales, en los métodos y técnicas que se utilizan cotidianamente, etc.. Y es conjugando la información obtenida bajo este enfoque peculiar y específico, con los planteamientos actuales sobre la naturaleza y existencia de los objetos y teorías matemáticas así como sobre otros factores que afectan al hecho educativo real, como se encuentra la conexión entre las distintas partes bajo una referencia única: *el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación, no sólo con miras a la simple transmisión del conocimiento matemático sino, lo que es más importante, para que sea posible el perfeccionamiento del conocimiento existente y sobre todo, la creación de nuevos conocimientos*.

Desde este punto de vista la Psicología de la Educación Matemática, al centrar la atención en los procesos de construcción de los conocimientos matemáticos por parte del sujeto individual, cobra todo su sentido como parte íntimamente relacionada con el conocimiento matemático y con las determinaciones curriculares que conforman los procesos educativos.

Por otra parte, la Educación Matemática en su vertiente pedagógica, presenta una estrecha dependencia de los factores anteriores, añadiendo otras consideraciones sociales, políticas, culturales y económicas, que vienen a mejorar y completar los diseños y desarrollos curriculares. No hay más que recordar, por ejemplo, que todos los elementos curriculares deben depender básicamente de consideraciones psicológicas acerca del individuo que se pretende educar y epistemológicas acerca de los conocimientos que van a constituir el contenido de dicha educación (Gimeno y Pérez, 1983).

Desde el punto de vista de la investigación nos encontramos, por tanto, ante la necesidad de *la integración de los aspectos mencionados (Epistemología, Fenomenología, Cognición y Enseñanza y Currículum)* *en un todo coherente y específico de la Didáctica de la Matemática* dentro de una concepción sistémica específica. La necesidad mencionada puede venir, en nuestra opinión, por varias vías: bien por causa de las características especiales de los conocimientos implicados, por la existencia de un cierto estancamiento en las investigaciones o por ambos motivos combinados; también puede producirse por la situación avanzada de los conocimientos en cuanto a cantidad y calidad de los resultados obtenidos, como ocurre con los casos suficientemente conocidos de las funciones (Harel y Dubinsky, 1992) y de los números racionales (Carpenter, Fennema y Romberg, 1993).

Pero la necesidad de integración no parte, únicamente, del desarrollo de los procesos de investigación; la propia naturaleza compleja de los fenómenos en estudio demanda, igualmente, una metodología integradora que resalte especialmente las múltiples relaciones que indudablemente existen en la Educación Matemática. Las relaciones entre campos diversos, en el marco de una intencionalidad didáctica, e influídos por las características socioculturales del entorno, no sólo aporta matices específicos en términos de nuevas interpretaciones a la información aislada de cada uno de dichos campos, que sigue teniendo validez, sino que permite establecer, además, una estructura propia como conjunto de datos organizados; una estructura que se convierte en un nuevo objeto básico de estudio mediante una metodología metaanalítica y relacional que denominamos "análisis didáctico". Esta metodología, que delimitamos en los párrafos que siguen, puede constituír el instrumento que cohesione los diversos factores y dar respuestas específicas a determinadas necesidades de la investigación en este campo. Veamos en que consiste.

En el tipo de estudios denominado *investigación secundaria o de síntesis* se han venido utilizando dos metodologías diferentes: la revisión integrativa tradicional y la revisión cuantitativa también llamada meta-análisis[1]. Recientemente, debido a la necesidad que se detecta en numerosas investigaciones cualitativas de sintetizar e integrar un número grande de estudios, ha surgido una modalidad de síntesis denominada revisión de bibliografía multivocal o, abreviadamente, **revisión multivocal** (Ogawa y Malen, 1991). Se trata de un procedimiento de síntesis cualitativa *"..dirigido a indagar un fenómeno complejo de interés en el que no se pueden manipular los eventos y del que se tienen múltiples fuentes de datos eminentemente cualitativos, confiando en obtener un retrato detallado del fenómeno que se estudia"*. (Fernández Cano, 1995, p. 175).

La revisión multivocal de un tópico se basa en los siguientes criterios, que son similares a los que se proponen para el estudio de casos (op. citada, p.

[1]Para una confrontación de ambas metodologías, ver Fernández Cano, A. (1995, págs. 165 y sgtes.).

176):

1).- Una clara definición del tópico propuesto a indagar a través de:

- consultar múltiples fuentes;
- mantener cadenas de evidencia entre los registros de las fuentes consultadas y las inferencias extraídas;
- incorporar formalmente las reacciones de los informantes a la definición conceptual establecida.

2).- Valorar la fuerza relativa e individual de cada dato utilizando alguno de los siguientes criterios:

- posición y certitud de la fuente (validez externa);
- claridad, detalle, consistencia y factibilidad del contenido (validez interna);
- capacidad para corroborar la información contenida en cada documento con información adquirida de otras fuentes.

3).- Nosotros añadiremos los siguientes criterios procedentes del meta-análisis:

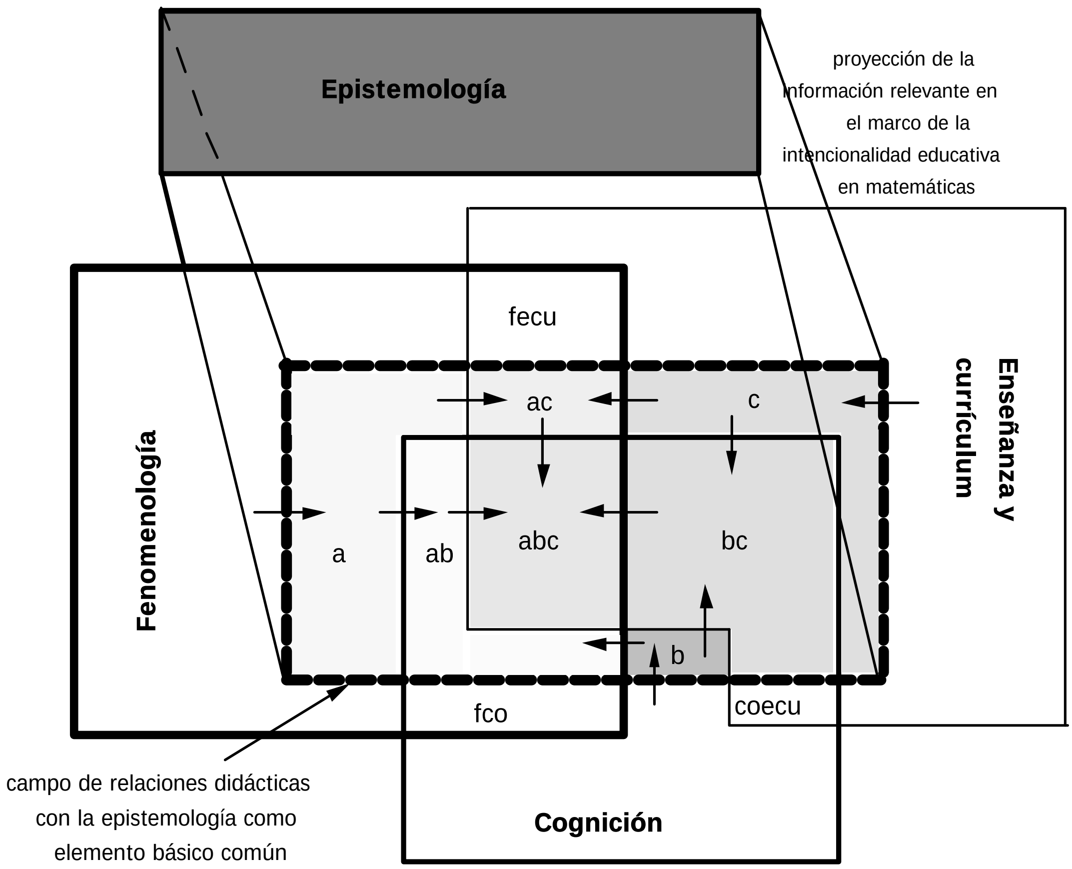
- revisar el mayor número posible de estudios;
- localizar los estudios a través de búsquedas objetivas y replicables;
- no excluir inicialmente estudios en base a su calidad;
- diferenciar y clasificar cada estudio de acuerdo con el grado de incidencia de sus resultados sobre el problema de investigación.

Se configura así un método general, que podemos denominar **meta-análisis cualitativo** en torno al tópico en estudio. La finalidad del meta-análisis cualitativo, como la de cualquier meta-análisis, es:*“ la formulación de teorías que expliquen los fenómenos observados en diferentes investigaciones”* (Bisquerra, 1989, pp. 247 - 252); la diferencia en este caso radica en que se trata de una metodología interpretativa. En consecuencia:

Denominamos ***análisis didáctico*** de un tópico o contenido específico en Educación Matemática al procedimiento metodológico global que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a cuatro áreas básicas de investigación en Educación Matemática: Historia y Epistemología, Aprendizaje y cognición, Fenomenología y, Enseñanza y estudios curriculares (González, 1995, p. 54).

Como consecuencia del proceso integrador descrito se establecen prioridades de investigación, se formulan teorías, se realizan estudios empíricos y comprobaciones experimentales, en su caso, y se deducen consecuencias para futuros estudios teóricos y empíricos. El análisis didáctico procesa, analiza y sintetiza información procedente de diferentes campos interrelacionados entre sí por su objeto de estudio. La técnica utilizada tiene en cuenta la complejidad del campo así como la pluralidad de aproximaciones que se encuentran en la literatura científica al uso y en los resultados de investigación contrastados por la comunidad.

El enfoque sistémico que proponemos trasciende los objetos y métodos de los estudio específicos de cada una de las áreas, consideradas independientemente, de tal manera que la información procedente de las cuatro áreas básicas queda matizada, y no sólo completada, por un conocimiento nuevo, cuya naturaleza y características hacen referencia a un objeto de estudio que creemos que es específico de la Didáctica de la Matemática y que podemos denominar “estructura didáctica de un conocimiento matemático”. El esquema siguiente ilustra esta idea que se explica con detalle más adelante.



a : relaciones entre la Epistemología y la Fenomenología
b : relaciones entre la Epistemología y la Cognición
c : relaciones entre la Epistemología y la Enseñanza y el currículum
ab, ac y bc : relaciones entre tres componentes
abc : relaciones entre las cuatro componentes
las flechas indican el flujo de menor a mayor información sobre la estructura didáctica de un conocimiento matemático

Se trata de un sistema de información organizada constituído por:

- un conjunto de datos procedentes de cuatro **fuentes** básicas de información científica "primaria" sobre el conocimiento matemático en cuestión, obtenidos mediante la aplicación de los métodos propios de las áreas correspondientes: Epistemología, Fenomenología, Cognición y Enseñanza y Currículum.
- una **red de relaciones** entre los conocimientos anteriores bajo la presencia permanente, como elemento común, de **consideraciones epistemológicas sobre el conocimiento matemático en el marco de una intencionalidad didáctica y en un medio sociocultural determinado**; el núcleo de esta red de relaciones lo constituye el campo de interrelación de las cuatro fuentes básicas;
- un conjunto de **conocimientos de carácter didáctico** obtenidos sobre los diferentes campos de la red de relaciones, mediante la aplicación del

Análisis Didáctico como procedimiento metodológico integrador.

La noción de campo conceptual y su relación con el análisis didáctico

La noción de campo conceptual se refiere, originalmente (Vergnaud, 1993, pp. 97 y sgts.; antecedentes en: 1982, 1983 y 1988), a un *conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar un conjunto de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos estrechamente interconectados*. Se trata de una noción que surge por el interés de extender los estudios generales de Piaget sobre la psicogénesis de los conocimientos al problema de la adquisición y el desarrollo de conocimientos y destrezas específicas, en particular de conocimientos y destrezas matemáticas. Según el autor, esta noción resulta necesaria por los siguientes motivos:

- es difícil estudiar separadamente la adquisición de conceptos interconectados, dependientes entre sí desde el punto de vista matemático y que aparecen simultáneamente en los problemas más elementales;
- desde el punto de vista del desarrollo y de la evolución de los conocimientos en un largo período de tiempo, es conveniente establecer dominios amplios de conocimientos relacionados entre sí, que cubran una amplia variedad de situaciones y que admitan diferentes niveles de análisis;
- en el dominio de una misma clase de problemas se mezclan procedimientos, concepciones y representaciones simbólicas diferentes que hacen posible la existencia de distintos niveles o grados de dominio sobre subclases de problemas y que permiten estudiar la evolución de los conocimientos.

Posteriormente, la noción original de campo conceptual se amplía con una tercera componente en el modelo presentado por Castro (1994) y que se detalla en Rico y Castro (1995, pp. 167). Dicho modelo, establecido para estructurar la línea de investigación denominada *Pensamiento Numérico*, contempla tres elementos fundamentales:

a).- unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;
b).- unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;
c).- un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

Las relaciones de los dos planteamientos, entre sí y con las consideraciones realizadas en el apartado anterior, son evidentes:

1.- La línea Pensamiento Numérico amplía las consideraciones de Vergnaud. Hablar de Pensamiento Numérico es hablar, por tanto, de un campo conceptual numérico (en el sentido ampliado) con la consideración añadida de los fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares involucrados en la aplicación, a través de unos *modos de uso y unas funciones cognitivas*, de

un *conjunto de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos* a un *conjunto de situaciones, fenómenos, cuestiones y problemas* que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.
2.- El análisis didáctico contempla, igualmente, las cuatro componentes anteriores, matizando sus conexiones y resaltando la integración de los conocimientos en un todo coherente.

<u>Algunos criterios para categorizar las tareas de un campo conceptual: Enfoques, factores y estructuras</u>
El análisis y la categorización de las tareas que tienen que ver con un campo conceptual, constituye un aspecto de vital importancia para diseñar y desarrollar investigaciones que aborden directamente los problemas cotidianos y aporten soluciones inmediatamente aplicables a la práctica educativa.
Por otra parte, clarificar estas cuestiones básicas es una tarea con frecuencia necesaria y prioritaria a cualquier otra consideración. Los problemas de la práctica se sitúan en un entramado complejo en el que se pueden distinguir varios factores relacionados entre sí que afectan al hecho educativo y que requieren de un exámen detallado del que a veces se deducen consecuencias que pueden modificar profundamente el contenido y la orientación de una investigación. Desde este punto de vista, las tareas matemáticas en el ámbito educativo también participan de ese entramado complejo, se encuentran afectadas por los mismos factores y deben ser consideradas como elementos integrados en la concepción sistémica esbozada en los apartados anteriores.
En consecuencia, para estructurar las tareas de un campo conceptual proponemos los siguientes criterios y categorías:
- cinco <u>factores</u> y un número por determinar (al menos cinco) de <u>estructuras</u> asociadas a dichos factores;
- cuatro <u>enfoques</u> diferentes bajo los que se puede observar una tarea.

Recordemos brevemente y en primer lugar cuáles son los principales <u>**factores**</u>.
- las características **epistemológicas** y **fenomenológicas** del conocimiento matemático, es decir, el conocimiento en sí mismo, sus propiedades, naturaleza y modo de existencia (una especie de realidad mediata), y el conocimiento contextualizado en una serie de fenómenos y situaciones (campo de actuación y realidad inmediata constituída por fenómenos, cuestiones, problemas y situaciones) que le dan significado y que forman parte del medio en el que se desenvuelve el sujeto.
- la **cognición**, las características cognitivas del sujeto individual que

hacen referencia al aprendizaje y al desarrollo cognitivo. Se trata de aquéllas características funcionales y estructurales de la cognición humana que permiten al sujeto, entre otros aspectos, interpretar y dar sentido a las realidades, utilizar y construir instrumentos y comportamientos, organizar, manipular y responder a las situaciones y fenómenos del entorno o, desde un punto de vista más general, adquirir, construir, representar y estructurar el conocimiento para su utilización en diversos ámbitos.

- las condiciones institucionales en las que entran en juego los tres factores anteriores; nos referimos, en concreto, al medio escolar y a todo aquéllo que conforma el entorno educativo formal, es decir, el **Currículum** y todo lo que determina los momentos preactivos e interactivos de la Educación Matemática, o sea, la **Enseñanza**.
- los cuatro factores mencionados se encuentran dentro de un marco más general que condiciona todas las actuaciones humanas; nos referimos al contexto **sociocultural** y al medio social en el que se encuentra inmersa la institución educativa.

De los cinco factores, a cuál más importante en Educación Matemática, tendremos en cuenta, especialmente, los cuatro primeros, sin perder de vista la indudable influencia que el entorno sociocultural tiene sobre algunos aspectos de los fenómenos, problemas y situaciones, sobre el aprendizaje y el desarrollo cognitivo y sobre las determinaciones curriculares y el hecho educativo en el aula.

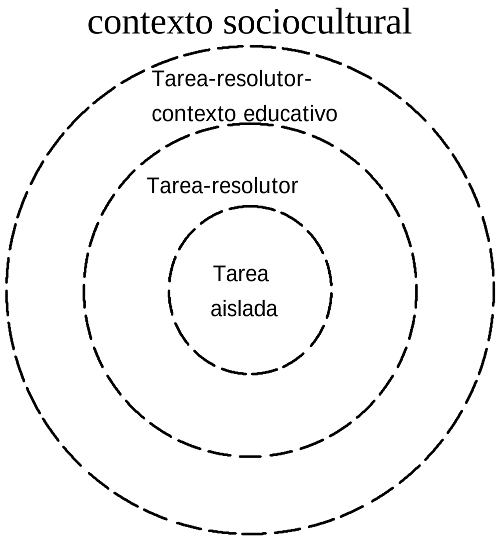
enfoques

Una tarea o situación didáctica en matemáticas no es sólo un contenido concreto, con tales o cuales características y expresado de tal o cual manera, y unas preguntas a las que el alumno debe responder. Por el contrario, a estas y otras características intrínsecas de la propia tarea, observada aisladamente, se deben añadir otras consideraciones que atienden al resolutor, al contexto educativo formal en el que se propone y desarrolla la tarea y al marco sociocultural en el que se encuentran inmersos los tres elementos anteriores, es decir, la propia tarea, el resolutor y la institución educativa.

Cada tarea de un campo conceptual numérico se puede observar, al menos, desde cuatro puntos de vista, estrechamente relacionados y encadenados entre sí en un esquema que contempla el aumento gradual y concéntrico de la perspectiva. Estos enfoques son los siguientes:

a).- Tarea aislada. Características de los conocimientos y relaciones que intervienen;

b).- Tarea-resolutor. Características de la tarea en relación con las competencias y funciones cognitivas asociadas a la misma y que tendría que poner en juego un posible resolutor o resolutores humanos para aprender los conocimientos y relaciones que intervienen y realizar con éxito la tarea; c).- Tarea-resolutor-contexto educativo. Características de la tarea en relación con su situación en la planificación y el desarrollo del currículum que busca educar el pensamiento matemático de un alumno-resolutor, con unas características cognitivas concretas, a través de los conocimientos y relaciones que intervienen en la misma;



d).- Tarea-resolutor-contexto educativo-contexto sociocultural. Características de la tarea que tienen que ver con las claves del entorno sociocultural que puedan afectar a los enfoques anteriores. Se trata del enfoque más general y, por tanto, más complejo de todos.

En cada enfoque se puede observar la dependencia de los anteriores. Los factores relevantes en cada uno de ellos son los siguientes:

a).- (tarea aislada) epistemológico y fenomenológico;

b).- (tarea - resolutor) epistemológico, fenomenológico y cognitivo;

c).- (tarea - resolutor - contexto educativo) epistemológico, fenomenológico, cognitivo y curricular;

d).- (tarea - resolutor - contexto educativo - contexto sociocultural) los cinco factores.

estructuras

Cada factor se identifica y se diferencia de los demás por una serie de estructuras específicas asociadas (cinco al menos, una por cada factor), cuya particularización a cada caso define las características fundamentales de la tarea. Podemos hablar, en consecuencia, de estructura(s) matemática(s) y epistemológica(s), fenomenológica(s), de competencias cognitivas, curricular(es) y sociocultural(es) de una tarea. Estas estructuras asociadas suponen ya un primer escalón de concrección hacia el establecimiento de un sistema de categorías basado en los cinco factores y en los cuatro enfoques tratados. A modo de ejemplo, veamos a continuación la aplicación parcial de estos esquemas al caso del campo conceptual aditivo.

Tareas del campo conceptual aditivo

Factores y estructuras

Siendo conscientes de la necesidad de continuar en esta dirección y de la existencia de numerosas lagunas, unas por razones obvias y otras debidas a las limitaciones del trabajo, se exponen a continuación algunas de las estructuras que pueden incidir en la categorización de las tareas del campo conceptual aditivo:

- Epistemología: Matemáticas
  - Estructura **numérica** (tipo de números)
  - Estructura **aritmética** (operaciones)
  - Estructura **lógica** (proposiciones, relaciones, razonamiento, etc.)
- Fenomenología:
  - Estructuras **fenomenológicas** (por determinar) (relacionadas con la fenomenología matemática, de aplicación concreta, contexto, etc.)
- Cognición: Representación
  - Estructura **semántica**
  - Estructura **sintáctica**
  - Estructuras de **competencias cognitivas** (estrategias, estilos, esquemas, comprensión, traducción..) (por determinar)
- Currículum: Enseñanza
  - Estructura **metodológica** (ejercicio, problema, juego, manipulación, investigación, etc.)
  - Estructuras **curriculares** (por determinar) (relacionadas con los niveles, contenidos, evaluación)

La diversidad de tareas en el campo conceptual aditivo

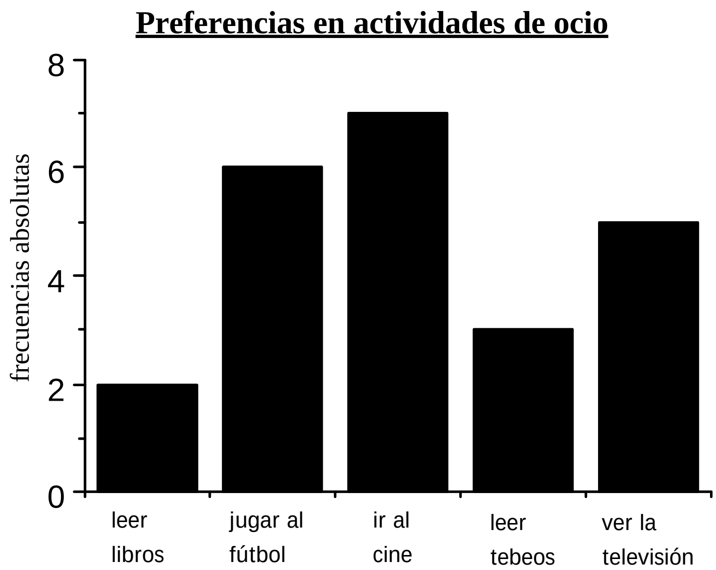
Veamos algunos ejemplos en los que interviene la noción de suma de dos números naturales de una cifra (2 + 3 = 5) y/o las relaciones asociadas con ella. Se han fijado, por tanto, las categorías correspondientes a las estructuras numérica (números naturales) y aritmética (suma). El resto de estructuras y algunas de sus posibles categorías se pueden examinar y delimitar, al menos de forma general, en la mayoría de las tareas.

1).- Completa las siguientes igualdades:

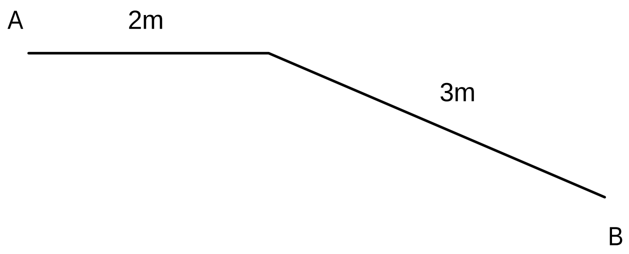
$5 = 2 + 3 = 4 + \quad = \quad + 1 = 3 + \quad = 5 +$

2).- Un ascensor está en el segundo piso y se dirige al quinto. ¿Cuántos pisos tiene que subir?.

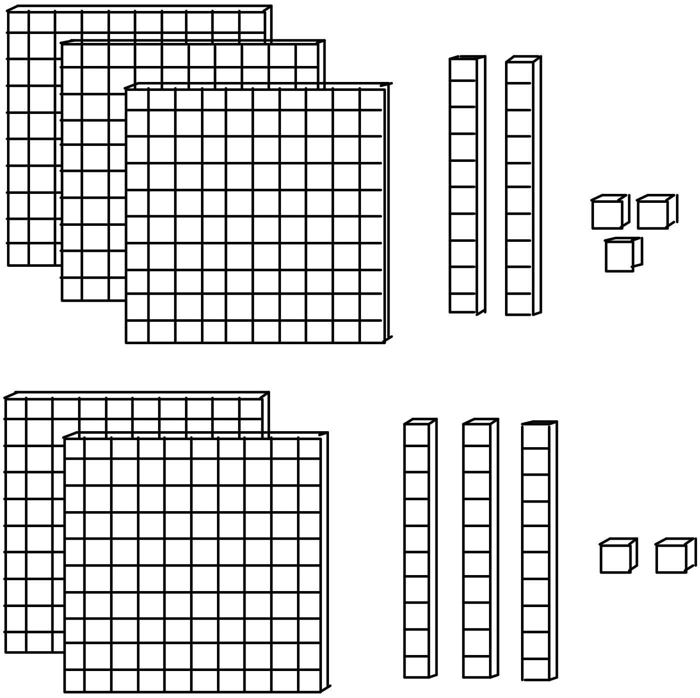
3).- Después de un trabajo práctico de Estadística Descriptiva elemental realizado por los propios alumnos en la clase y a propósito de la lectura e interpretación de los datos: ¿Cuántos alumnos de la clase prefieren leer en sus horas libres?.



4).- Sobre un trayecto realizado y medido en el patio del Colegio a propósito de un juego: ¿Cuántos metros tiene que andar Pedro para ir desde A hasta B?.

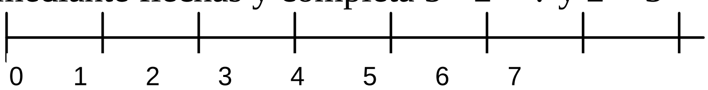


5).- En una actividad manipulativa con los bloques multibase: Efectúa la suma de las dos cantidades siguientes y escribe la operación en tu cuaderno:

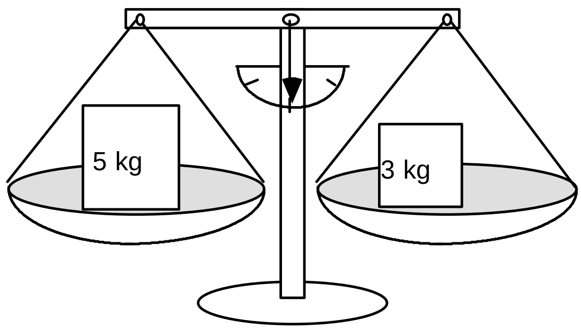


6).- En 3 decenas y 24 unidades, ¿cuántas unidades hay?.

7).- Dibuja mediante flechas y completa 5 - 2 = ? y 2 + 3 = ?

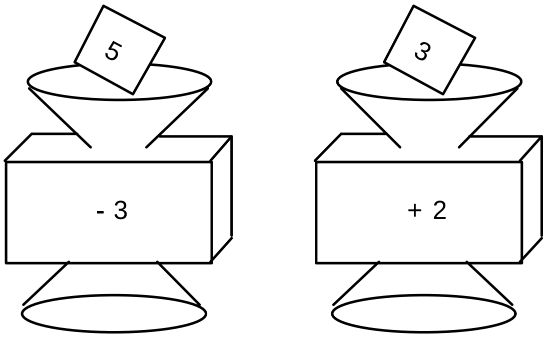


8).- En una actividad realizada en clase con la balanza: ¿Qué ocurre si se coloca un peso de 5 kg en un platillo y uno de 3 kg en el otro?.¿Qué habría que hacer para que en los dos platillos haya el mismo peso?. Prueba con diferentes pesas.

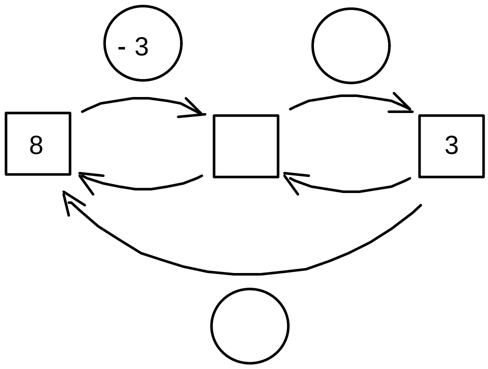


9).- Completa: 2 + 3 = 3 + __ ; 2 + (2 + __) = __ = (2 + __) + 1

10).- ¿Cuál será la salida de estas máquinas?:



11).- Completa:



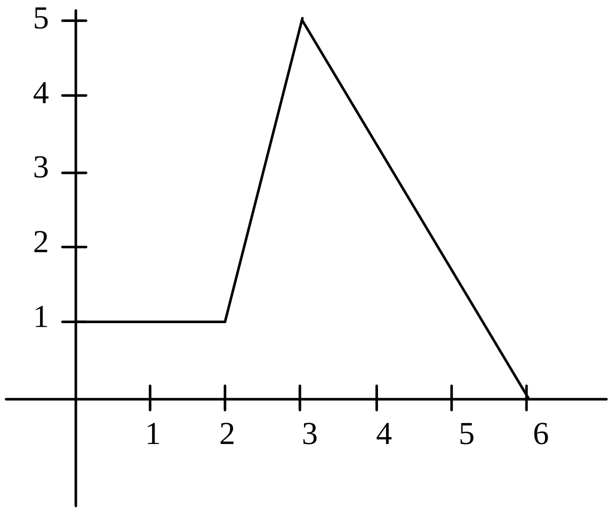
12).- A propósito de una actividad práctica con monedas: De estos artículos (varios con precios entre 300 y 700 pesetas) ¿Cuáles puedes comprar si tienes 3 monedas de 100 pesetas y una moneda de 200 pesetas?.

13).- 3 metros y 200 centímetros, ¿cuántos metros son?.

14).- En una actividad de repartir objetos en grupo: Reparte 5 canicas entre tú y tú compañero de todas las formas posibles anotando los resultados en el cuaderno:

5 <   5 <   5 <   5 <   . . .

15).- Sea f(t) la función cuya gráfica es la de la figura.

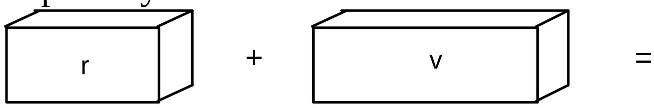


Sea la función definida en R^+:

$$\mathbf{F(x)} = \int_0^x \mathbf{f(t)dt}$$

Calcula **F(3)**.

16).- En una actividad individual con regletas de Cuisenaire: Encuentra la regleta que corresponde y escribe la suma con números:



17).- Razonamiento individual (no observable) de un alumno jugando al parchis (en clase): tengo la ficha en el número 2 y me sale un tres . . cuento 3 o salto al . .

18).- Realiza las siguientes sumas: 2 + 3 =

$$\begin{array}{r} 2 \\ \underline{+\ 3} \end{array}$$

19).- Inventa un problema que se resuelva haciendo 2 + 3 = 5.

20).- Esta mañana Juan tenía 3 canicas. Su madre le regaló 2 canicas más al mediodía. ¿Cuántas canicas tiene Juan?.

21).- Trabajando con la calculadora: ¿Qué saldrá en la pantalla cuando teclees: 2 + 3 = ?. Escribe primero lo que crees que saldrá y compruébalo luego en tu calculadora.

22).- Actividad de investigación: En la trama cuadrada dibuja seis figuras distintas que tengan de área 5 y que estén formadas por dos triángulos de áreas 2 y 3. ¿Puede haber más?.

23).- Razonamiento individual a propósito de un partido de baloncesto en el patio del colegio: . . hasta ahora he encestado una canasta de 2 puntos y acabo de hacer un triple . . en total he hecho . .

24).- Completa: 2 , __ , 8 , 11 , 14

9 , 7 , 5 , __ , __

A la vista de esta pequeña muestra de tareas, ¿habría que añadir algún enfoque, factor o estructura al esquema propuesto?; ¿es posible delimitar todas las tareas mediante las coordenadas propuestas?; ¿son mutuamente excluyentes las categorías que se pueden deducir del esquema?; etc.

Algunas consideraciones sobre los estudios y clasificaciones de los problemas aditivos de enunciado verbal

Los problemas aditivos de enunciado verbal constituyen, como parece evidente, una parte de las tareas del campo conceptual aditivo. Según el modelo que estamos manejando los problemas corresponden a una de las categorías de una de las estructuras curriculares, en particular la que hemos denominado “metodológica”, si bien con una cierta relación con las estructuras de competencias cognitivas. En lo que sigue, centraremos la exposición en este dominio particular comenzando por las cuestiones más relevantes sobre dos enfoques teóricos básicos: las consideraciones de Vergnaud sobre estados y transformaciones y campos conceptuales, y los trabajos relacionados con las teorías cognitivas del procesamiento de la información y con la estructura semántica de los enunciados de los problemas[1]. A parir de estas consideraciones, entre otras, hemos realizado una investigación que pone de manifiesto la necesidad de considerar un tercer tipo de nociones numéricas en el campo aditivo, junto a las de número natural y número entero, al que hemos denominado "número natural relativo" (González, 1995). La introducción de estos números conduce, como veremos posteriormente, a una nueva distribución del campo aditivo y a una nueva clasificación lógico-semántica de los problemas aditivos de enunciado verbal; clasificación que, según nuestro modelo, está basada en las estructuras numérica y semántica de los problemas.

Los trabajos de Vergnaud y Durand (1976)[2] y de Vergnaud (1981[3] y 1982[4]), continuados posteriormente por Conne (1985), encuadran una parte del aprendizaje y el desarrollo cognitivo numérico en el ámbito de la resolución de problemas de aritmética elemental y dentro de lo que se conoce como 'campo conceptual aditivo'. A través de los conceptos de relación y transformación y teniendo en cuenta la dualidad 'estado-transformación', se analizan los tipos de problemas aditivos y se obtienen evidencias empíricas sobre la diversidad y la amplitud de respuestas de los estudiantes, sobre las dificultades que tienen y errores que cometen.

Aunque los estudios no son exhaustivos y resultan incompletos, pretenden aportar *"un marco teórico suficientemente riguroso para que el estudio de la resolución de problemas aritméticos salga del empirismo que lo suele caracterizar"* (Vergnaud y Durand, pp.128). Las cuatro ideas básicas que utilizan los autores son: la inadecuación de la noción de ley de composición interna para caracterizar las relaciones numéricas que aparecen en este tipo de tareas; la necesidad de considerar un campo más amplio para el estudio de las relaciones aditivas; la existencia de dos tipos diferentes de representaciones numéricas bajo la denominación de "estados y operadores"; la distinción entre "cálculo numérico" y "cálculo relacional" como tipos diferentes que responden a características también diferentes; y la existencia de cinco grandes categorías de relaciones numéricas aditivas: composición de dos medidas, transformación de una medida en otra,

---

[1]Extraído de González, J. L., 1995, págs. 119-128.

[2]*Structures additives et complexité psychogénétique*. Revue Francaise de Pedagogie, nº 36, pp. 28-43. Hay traducción al castellano en Coll, C. (1983). En las referencias que siguen utilizaremos la versión castellana de este trabajo.

[3]L'enfant, la mathématique et la réalité. Peter Lang. París.

[4]En Carpenter, T. P.; Moser, J. M. y Romberg, T. (eds.) (obra citada).

composición de transformaciones de medidas, transformación de un estado relativo y composición de dos estados relativos.

A partir de las consideraciones anteriores, los autores realizan diversos estudios experimentales sobre problemas de transformación simple y de composición de transformaciones que proporcionan resultados dispares y difícilmente justificables desde el marco teórico que se propone[1]. Dichos resultados, de los que lógicamente se concluye que *"la aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños (..) e incluso por los adultos"* (Vergnaud y Durand, pp. 124-125), ponen de manifiesto la complejidad de las relaciones que intervienen y dejan abierta la posibilidad de que la categorización establecida no sea la más idónea y que la división entre estados y transformaciones deba ser revisada desde diferentes puntos de vista y, en particular, desde el enfoque epistemológico.

Buena muestra de la necesidad de un replanteamiento teórico de los estudios consultados son los siguientes hechos y consideraciones:

- Con respecto a los modelos de representación, Conne menciona explícitamente la distorsión que se produce en el orden entre dos pérdidas[2] con respecto al orden en el conjunto de los números enteros tomado como modelo para las transformaciones (op. citada, pág. 284).
- La consideración de las transformaciones en un sentido como positivas y en el sentido contrario como negativas no obedece a un criterio uniforme, lo que deja abierta la posibilidad a múltiples confusiones y resultados dispares. Nuestra posición es que dicha asignación es arbitraria (subir-bajar, entrar-salir, etc.), a diferencia de lo que ocurre en los casos de aplicación específica de los números enteros (temperaturas, saldos bancarios, etc.), en los que tal asignación está perfectamente delimitada como consecuencia de la estructura de orden total.
- La propia distinción entre estados y transformaciones o entre número como estado y número como operador, parece que se refiere a dos manifestaciones o papeles diferentes del mismo concepto. Nuestra posición es que existen diferencias más profundas de carácter epistemológico entre dichas acepciones que aconsejan la conveniencia de un análisis más fino, en el que se baraje la hipótesis de la existencia de dos conceptos diferentes que den lugar a estructuras numéricas también diferentes.
- La distinción que se establece entre cálculo numérico y cálculo relacio-

[1]Se han encontrado diferencias de varios años en la resolución de problemas aparentemente similares desde el punto de vista teórico.

[2]En un juego, una pérdida de 7 es una pérdida "mayor" que una pérdida de 5, lo que supone una inversión con respecto al orden de los números enteros.

nal, sometidos a reglas distintas según los casos, pone de manifiesto la posibilidad de que se estén mezclando conceptos numéricos de diferente naturaleza, en vista de que *"sobre la misma operación aritmética se proyectan cálculos relacionales distintos que están muy lejos de ser equivalentes entre sí."* (Vergnaud y Durand, p. 125).

- La necesidad de utilizar tres signos de adición para representar cálculos numéricos de diferente naturaleza (Verganud, 1981, p. 134), plantea serios problemas de legitimidad en la aplicación del conocimiento matemático formal y, por tanto, de compatibilidad entre los conocimientos matemáticos elementales y la aplicación de los mismos en contextos diversos. Se producen desajustes importantes entre las definiciones de las operaciones aritméticas usuales como leyes de composición interna y las aplicaciones concretas, que funcionan en realidad como leyes de composición externa. Así lo ponen de manifiesto cuando afirman: *"El estudio de los problemas de aritmética elemental pone en evidencia otras muchas dificultades que manifiestan la insuficiencia, si no inadecuación, de la noción de ley interna para caracterizar ciertas relaciones numéricas."* (Vergnaud y Durand, p. 106).

De todo ello, resulta dudoso que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros (o en terminología francesa, de los números "relativos") sea, por un lado, un buen modelo para abarcar toda la aritmética de "transformaciones" y, a la vez, un modelo único bajo el que se puedan tratar de manera uniforme todas las situaciones-problema que se consideran en los estudios.

Por otra parte, Bell (1980) expone los resultados de una investigación realizada para poner de manifiesto como influyen diferentes dominios de aplicación de la composición aditiva de números sobre la resolución de problemas aditivos. De sus planteamientos y conclusiones, destacamos los siguientes:

- En las primeras etapas, la interpretación de las operaciones de adición y sustracción no incluye la verdadera composición aditiva. Los niños no ven las operaciones como leyes de composición binarias, sino que distinguen un elemento del otro, el cual actúa como operador aditivo sobre el primero (utilizando la estrategia conocida como "count on") (pp. 114 y 120).
- Aunque el trabajo con números dirigidos proporciona experiencias sobre el modo de combinación de tales números, se observa sorprendentemente que no son integrados en un sistema numérico (p. 121). Esto nos reafirma en nuestra hipótesis de que un dominio sobre los números naturales relativos no supone la realización correcta de tareas equivalentes con números enteros.

Bell sugiere que el estudio de estos problemas puede necesitar de un simbolismo particular diferente de las notaciones matemáticas stándards (p. 141).

En relación con la **estructura semántica** de los problemas aditivos elementales de enunciado verbal se encuentran numerosos trabajos, algunos de cuyos planteamientos básicos son los siguientes:

a).- Se estudian problemas aritméticos de una sóla operación, denominados "problemas de una etapa"; se consideran diferentes componentes de análisis con sus variables correspondientes, entre los que destacan: la estructura lógica de los problemas, la componente semántica y la componente sintáctica (Nesher, 1982, p. 28).

b).- Existen varias categorías de problemas "de una etapa" (Puig y Cerdán, 1988) que varían según los autores y que se deducen del análisis global del significado del texto. Inicialmente, Heller y Greeno (1978), establecieron tres categorías semánticas: Cambio, Combinación y Comparación. Posteriormente, dicha clasificación fué ampliada para incluir los problemas de Igualación (Carpenter y Moser, 1983).

c).- Las estrategias de los niños para resolver los diferentes problemas de adición y sustracción, están fuertemente influenciadas por la estructura del problema, conclusión que es compartida por las investigaciones de Vergnaud y Bell (obras citadas).

d).- En cuanto a la dificultad de resolución medida en porcentajes de éxitos, se han encontrado los siguientes resultados generales: la adición es más fácil que la sustracción; el orden de dificultad en general es: cambio, combinación y comparación, aunque los dos primeros se invierten en el caso de la sustracción.

Algunas de las conjeturas que hemos formulado como consecuencia del análisis de estas investigaciones son las siguientes:

1).- Las categorías de Cambio, Combinación y Comparación, son pertinentes y suficientes para la clasificación de los problemas por su estructura semántica. Tanto la estructura de las relaciones que intervienen, en forma de leyes de composición externa o interna según los casos, como la estructura lógica (Puig y Cerdán, 1988, p. 96) quedan igualmente justificadas mediante las categorías mencionadas.

2).- Teniendo en cuenta el punto de vista anterior, completamos el cálculo relacional de Vergnaud haciendo intervenir un tercer modelo numérico (el de los números "naturales relativos") que permite enlazar dichos aspectos.

3).- En el marco anterior, la cuarta categoría introducida por Carpenter y Moser (1983), denominada de Igualación, resulta ser diferente a las otras tres, por tener una estructura lógica y semántica distinta y más compleja que la que poseen las anteriores.

4).- Es necesario distinguir entre "problemas simples" y "problemas compuestos", que no coincide en general con la división usual en problemas de una etapa y de más de una etapa. Las tres categorías del apartado 1 pertenecen al grupo de problemas simples, mientras que los problemas de igualación, pertenecerían al grupo de problemas compuestos. Igualmente, algunos de los tipos de problemas establecidos por Vergnaud, como por ejemplo la composición de transformaciones, pertenecen a esta segunda clase, a diferencia del resto que son simples.

El campo conceptual de los números naturales relativos y la clasificación de problemas aditivos basada en las estructuras numérica, aritmética y semántica

Los desajustes y limitaciones que se han citado en los párrafos anteriores han servido de base, junto a otras consideraciones, para realizar una investigación[1] que ha puesto de manifiesto:

I.- En el dominio de aplicación concreta usual de la estructura aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros, existe un subdominio caracterizado por la intervención de un tipo de medidas discretas relacionadas con la comparación de medidas naturales y a las que llamaremos *medidas naturales relativas*, entre las que se puede establecer una estructura de orden parcial y una ley de composición interna aditiva específica.

II.- Existe un conjunto de números a los que llamaremos *números naturales relativos* que, con la adición y el orden convenientes, es isomorfo al conjunto de *medidas naturales relativas*.

III.- El conjunto de los números naturales relativos con la adición y el orden definidos, presenta cinco diferencias estructurales básicas con respecto al grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Estas diferencias son: 1) Orden total / orden parcial con inversión en la "región negativa"; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones "positiva" y "negativa"; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa).

IV.- Los números naturales relativos abren una nueva via de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio, regulando las estructuras aritméticas aditivas correspondientes.

V.- El modelo mencionado permite establecer una clasificación lógico-semántica de los problemas y situaciones del dominio, que amplian y

[1]Que ha servido de base para la lectura y defensa de la tesis doctoral "El campo conceptual de los números naturales relativos" (González, J. L., 1995).

precisan otras ya realizadas sobre los problemas aditivos de enunciado verbal.

VI.- Individuos con estudios superiores a los de Enseñanza Obligatoria[1], dan un tratamiento semántico diferenciado a los números naturales relativos y a los números enteros cuando se presentan en situaciones elementales de comparación de medidas discretas, sobre la base de la primera de sus diferencias ordinales.

Algunas de las consecuencias que nos interesan son las siguientes:

A).- La delimitación del ***campo conceptual de los números naturales relativos*** como la parte del campo conceptual aditivo constituída por:

- el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura lógico-formal de los números naturales relativos.
- el conjunto de actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios del sistema simbólico de los números naturales relativos.
- el campo de actuación formado por el conjunto de cantidades y medidas naturales relativas que dan lugar a situaciones y problemas que admiten ser analizados mediante la estructura de los números naturales relativos.

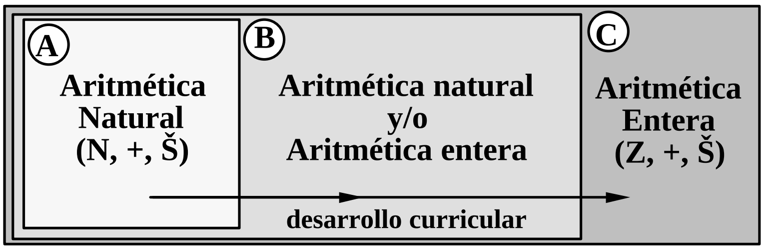
B).- Una nueva ***distribución*** del campo aditivo al diferenciar las tres nociones numéricas que intervienen.

Las diferentes partes que integran la nueva distribución, son las siguientes (ver esquema en la página siguiente):

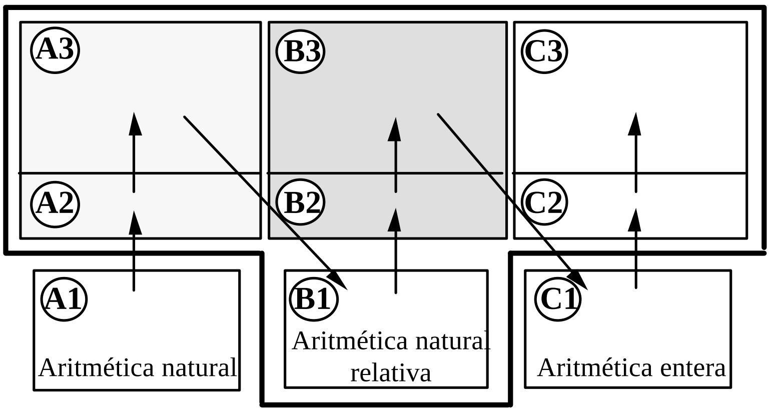
A1.- Combinaciones naturales simples.
A2.- Comparaciones y transformaciones naturales simples.
A3.- Composiciones de dos o más relaciones naturales simples.
B1.- Combinaciones naturales relativas simples.
B2.- Comparaciones y transformaciones naturales relativas simples.
B3.- Composiciones de dos o más relaciones naturales relativas simples y composiciones de al menos una relación natural relativa simple con al menos un elemento de A2 o de A3.
C1.- Combinaciones enteras simples.
C2.- Comparaciones y transformaciones enteras simples.
C3.- Composiciones de dos o más relaciones enteras simples; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de A2 o de A3; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de B2 o de B3.

[1]En el momento de realización de la tesis, la Enseñanza Obligatoria abarca hasta el curso 8º de Educación General Básica correspondiente a la edad de 14 años.

Dominios de aplicación elemental del campo
numérico aditivo según el proceso didáctico usual



Dominios de aplicación elemental del campo numérico
aditivo como conclusión del estudio teórico



(En línea gruesa: dominios en los que intervienen los números naturales relativos)
(Las flechas indican un posible proceso a seguir en el desarrollo curricular).

C).- Una nueva ***clasificación de los problemas aditivos*** como consecuencia de la distribución anterior.

***** Se detectan los siguientes tipos de relaciones básicas:

- ***Combinación natural y combinación entera***.
- ***Comparación y transformación naturales***, donde se excluye la combinación natural por no intervenir cantidades/medidas relativas sino únicamente la adición natural.
- ***Comparación y transformación enteras***, donde se excluye la combinación entera por el mismo motivo del párrafo anterior (sólo interviene la adición entera).
- ***Comparación, transformación y combinación relativas***, con particularidades motivadas por el doble cero, el paso de medidas de un signo al otro, etc.

***** Se obtienen 9 tipos de situaciones/problemas aditivos simples. Igualmente, de la composición de los tipos simples entre si, se obtienen 34 tipos de situaciones/problemas aditivos compuestos por dos situaciones simples.

Situaciones relativas discretas simples con estructura aditiva

	comparación simple	transformación simple	combinación simple
natural	$C_{D_N} : D_N \times D_N \longrightarrow D_{N_R}$ $(a, b) \longrightarrow (a - b)^{+}$ a = b + x ; x 0 $(b - a)^{-}$ b = a + x ; x 0	$T_{D_N} : D_{N_R} \times D_N \longrightarrow D_N$ $(a^{i}, b) \longrightarrow$ b + a ; i = { + } b - a ; i = { - } y a Š b	**no aparecen números naturales relativos**
natural relativo	$\oplus : D_{N_R} \times D_{N_R} \longrightarrow D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7)	$\oplus : D_{N_R} \times D_{N_R} \longrightarrow D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7)	$\oplus : D_{N_R} \times D_{N_R} \longrightarrow D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7)
entero	$C_{D_Z} : D_Z \times D_Z \longrightarrow D_{N_R}$ (z, z') $\longrightarrow$ $\lvert(z' - z)\rvert^{-}$ z Š z' $\lvert(z - z')\rvert^{+}$ z' Š z	$T_{D_Z} : D_{N_R} \times D_Z \longrightarrow D_Z$ $(a^{i}, z) \longrightarrow$ z + a ; i = {+} z - a ; i = {-}	**no aparecen números naturales relativos**

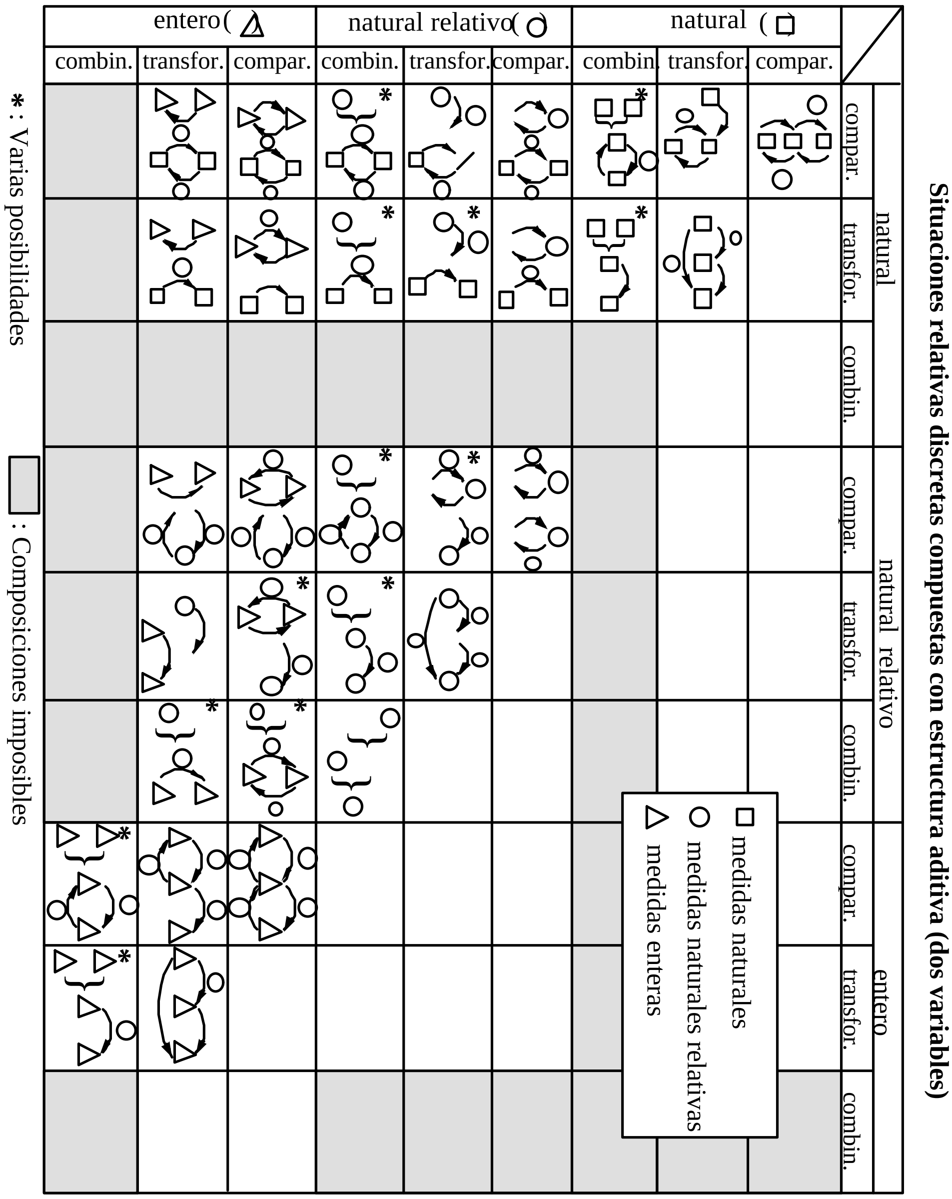
* Si restringimos la clasificación a las medidas naturales y naturales relativas se obtienen:

1).- ***5 tipos de situaciones relativas simples*** que, unidos a la combinación natural, dan un total de 6 tipos de situaciones/problemas aditivos simples, que contrasta con los cuatro tipos que se proponen en Carpenter y Moser (1982, pp. 10 y sgts.) y con la clasificación que propone Vergnaud (1983, p. 107). Además de la no consideración de los números y medidas naturales relativas como elementos con entidad propia y características específicas diferenciadas de las que poseen los números naturales, hemos detectado los siguientes ***defectos en dichas clasificaciones***:

- la consideración de los problemas de "igualación" como un tipo simple, que en nuestra clasificación se sitúan entre los tipos que hemos denominado compuestos,
- la consideración bajo una misma estructura numérica (la natural) de entes semántica y lógicamente diferentes,
- la consideración, como "composición de transformaciones", de los problemas propios del tipo que hemos denominado combinación natural relativa,
- la consideración, como tipo simple o, al menos, al mismo nivel que el resto de las categorías, de los problemas de composición de transformaciones,
- la atribución de dos papeles o significados diferentes a las medidas naturales relativas: estados relativos y transformaciones,

- la separación expresa entre cálculo numérico y cálculo relacional, obligada por la complejidad de un campo aún sin organizar.

2).- ***18 tipos de situaciones relativas compuestas*** por dos simples.



Los esquemas sintetizan las clasificaciones de problemas aditivos, simples y compuestos por dos simples, que se deducen del estudio[1]. Estas clasificaciones se basan en la **estructura numérica** (natural, natural relativa y entera), la **estructura aritmética** (adición natural, adición entera y adición natural relativa) y la **estructura semántica** (combinación, comparación, transformación), habiéndose fijado, obviamente, la **estructura metodológica** en la categoría de problemas de enunciado verbal.

[1]Nos remitimos a la obra original para una información más detallada.

Referencias

Bell, A. W. Developmental studies in the additive composition of numbers. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 1980; pp. 113-141.

Bisquerra, R., *Métodos de investigación educativa*. CEAC. 1989.

Carpenter, T.; Fennema, E. & Romberg, T. (eds.).- *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1993.

Carpenter, T.; Moser, J.; Romberg, T. (eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers; 1982.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. The acquisition of addition and subtraction concepts. En Lesh, R.; Landau, M. (eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press, New York. 1983.

Castro, E. *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 1994.

Conne, F. Calculs numeriques el calculs relationnels dans la resolution de problémes d'arithmetique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 5(3), págs. 269-332. 1985.

González, J. L. (1995) *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis doctoral Universidad de Granada. Microfilm: SPICUM Universidad de Málaga.

Davis, P. J., Hersh, R. *Experiencia Matemática*. Labor. 1987.

Fernández Cano, A. *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Síntesis. Madrid, 1995.

Gimeno, J.; Pérez, A. *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Akal Universitaria. Madrid, 1983.

Harel, G.; Dubinsky, Ed. (eds.) *The concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes 25. 1992.

Nesher, P. Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. En Carpenter, T. P.; Moser, J. M.; Romberg, T. A. (eds.).- *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Hillsdale, New Jersey. 1982.

Ogawa y Malen. Towards Rigor in Reviews of Multivocal Literatures: Aplying the Exploratory Case Study Method. *Review of Educational Research,* v. 61(3), págs. 265-286. 1991.

Popper, K. *El desarrollo del conocimiento científico*. Buenos Aires: Paidós; 1979.

Puig, L., Cerdán, F. *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis. Madrid, 1988.

Romberg, T.; Fennema, E. & Carpenter, T. *Rational numbers.* LEA.

1993.
Vergnaud, G.; Durand, C. Structures additives et complexité psychogénetique. *Revue Francaise de Pédagogie,* 36, pp. 28-43. 1976.
Vergnaud, G. *L'enfant, la Mathématique et la réalité:* Peter Lang; 1981.
Vergnaud, G. La teoría de los campos conceptuales. En: Sánchez, E.; Zubieta, G. (eds.).- *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa.* Cinvestav-IPN. México D. F., pp. 88-117. 1993.

CLASIFICAR Y SIGNIFICAR

Luis Puig
Universitat de València

1. No es fácil dar cumplida cuenta en esta réplica de todo lo que los tres textos en torno a la clasificación de problemas aditivos presentados para ser debatidos en este seminario contienen o suscitan. Son textos largos y minuciosos no pergeñados para la ocasión, sino que responden a trabajos de investigación ya culminados, que se encuentran en ejecución o que se enmarcan en programas de investigación de largo alcance. Simplemente por ello la réplica sería ardua en cualquier caso, pero en mi caso se añade el hecho de que, a diferencia de sus autores, yo no me he visto involucrado en ninguna investigación empírica sobre el asunto. Lo que sí que he hecho ha sido dedicar tiempo —y el esfuerzo que González Marí pregunta al comienzo de su texto si merece la pena— a su estudio.
La lectura de un texto se hace siempre a partir de lo que uno sabe —no podría ser de otro modo—, con ello es con lo que se le da sentido, ésa es nuestra lectura; pero lo que uno sabe tiene el sentido que le confiere el uso que uno le da. Por ello me ha parecido conveniente comenzar por esa diferencia entre lo que yo sé sobre clasificar problemas aditivos y lo que comparten los textos presentados a este seminario.

2. Hay otra diferencia aún que quiero señalar: Fernando Cerdán y yo estudiamos sistemáticamente y en detalle cómo clasificar los problemas aritméticos hace ya más de diez años. Al libro *Problemas aritméticos escolares* que escribimos entonces he vuelto a menudo y lo he usado con fines diversos y en distintos contextos, pero aquí no creo que tenga sentido exponerlo ni menos aún hacer su exégesis: lo que sí que me interesa es el poso que ha dejado en mí tras lo que el paso del tiempo ha ido relegando en el olvido, porque, a mi entender, permite pensar el asunto que nos ocupa de otra manera que también merece la pena ser explorada. Esto es pues lo que me parece pertinente traer a colación aquí:

- Los problemas aritméticos escolares, en particular los problemas aditivos, desempeñan un papel crucial para la constitución del campo semántico de las operaciones aritméticas. Una vez hemos establecido que las operaciones aritméticas, vistas desde su uso civil, tienen significados distintos en su uso en contextos distintos, los problemas son una de las tareas que proporcionan a los alumnos la oportunidad de enfrentarse a tales significados de las operaciones. Además, hay problemas que conllevan significados de las operaciones que no forman parte de los significados primarios de éstas: es el caso, por ejemplo, de los problemas de comparación; por lo que los problemas también amplían en este nuevo sentido el campo semántico de las operaciones.
- La descripción de los problemas puede hacerse tomando en consideración gran número de variables de distinta naturaleza. Sin embargo, para organizar el conjunto de las variables conviene adoptar como punto de vista central lo que permite distinguir significados distintos o formas de significar distintas. Esto se desprende de gran número de estudios empíricos y además es coherente con el papel de los problemas en la constitución del campo semántico de las operaciones aritméticas, que acabo de señalar.

A este respecto, me parece importante subrayar que “el orden de las operaciones” no es una variable semántica[1], ya se represente con expresiones del tipo

$$a + b = \square \qquad a + \square = c \qquad \square + b = c$$

o con esquemas como

$$\square + \bigcirc = \square \qquad \square + \square = \bigcirc.$$

- La estructura de un problema aritmético de varias operaciones combinadas (PAVOC), examinada desde el punto de vista del proceso de resolución, no puede describirse como acumulación de las de varios problemas de una etapa, ya que en su proceso de resolución intervienen elementos que no están presentes en el de los de una etapa y que son de naturaleza diferente; en concreto, la determinación de las incógnitas auxiliares o cantidades intermedias y la elaboración de una cadena de operaciones que conduce desde los datos a la incógnita. Además, la clasificación de esas cadenas en tipos se enfrenta, por pocas operaciones que intervengan, a la explosión combinatoria, si se distinguen los problemas de una etapa que se engarzan en la cadena en función de su categoría semántica. El caso de los problemas de dos etapas es singular porque sólo hay en ellos una incógnita auxiliar —lo que hace que sólo haya una cadena—, pero esto no los salvaguarda de la explosión combinatoria.
- Hay situaciones en que las categorías semánticas que sirven para clasificar los problemas de una etapa se extienden naturalmente, como consecuencia de la adopción de nuevos significados para las operaciones implicadas. Hacia los PAVOC esto sucede cuando se itera una misma operación con el mismo significado. Para lo que persigue el texto de Socas, Hernández y Noda, esto sucede cuando las operaciones adquieren nuevos significados al realizarse con números distintos de los naturales, como señalaré más adelante.
- La noción de campo conceptual tal como la usa Vergnaud es demasiado grande para ser eficaz en el estudio de los problemas con que los alumnos son enfrentados en la escuela primaria. Lo que Vergnaud llama campo multiplicativo contiene partes que se describen conceptualmente de la misma manera, pero que vistas desde lo que los alumnos han de aprender en la escuela son mucho más diferentes entre sí que lo son las partes de los campos conceptuales aditivo y multiplicativo con que los alumnos se enfrentan en ella. Si un estudio pretende elaborar modelos teóricos locales, es conveniente reinterpretar los productos de los análisis de Vergnaud en el terreno local en cuestión.

3. De las observaciones generales que acabo de exponer se desprende que mi contestación a las preguntas de González Mari “¿Es posible obtener una categorización

---

[1] Esto no quiere decir que las expresiones en cuestión “carezcan de significado” o sean “puramente sintácticas”. Lo que quiere decir es que para examinar desde el punto de vista del significado estas expresiones ya no debemos recurrir a las categorías semánticas, que lo describen en función del significado de las cantidades en la historia que narra el enunciado del problema verbal (inicial, final, de cambio, parte, todo, comparada, de referencia, etc.), ni a las variables semánticas que describen el tipo de dependencia semántica que establece que las relaciones lógicas entre las proposiciones del enunciado tengan la estructura de un problema aditivo.

exhaustiva y minuciosa de las tareas de un campo conceptual?; ¿merece la pena dedicar esfuerzos a obtener categorizaciones de tal tipo?” tiene que ser, al menos si me atengo a la letra de lo que él ha escrito, que no es posible, ni deseable. La explosión combinatoria nos lo impide —pero no sólo es un problema de tamaño, la ambición de catalogar el mundo siempre tropezará con posibilidades y singularidades impensadas o no describibles sin salirse del sistema de catalogación— y, lo que desde mi particular punto de vista es más importante, un programa de investigación que tiene como idea motriz la elaboración de modelos teóricos locales no lo desea, no sólo por el carácter local de los modelos, sino también por la naturaleza recursiva del proceso de su elaboración.

4. Dicho esto sobre la ambición del proyecto de clasificar los problemas aditivos, quiero ahora subrayar que no se trata de abandonar todo empeño analítico —que siempre conlleva clasificar—, sino por el contrario de subrayar que el análisis de las tareas es crucial tanto para la organización de la enseñanza —y de Freudenthal he aprendido una forma de abordar ese análisis— como para la organización de la investigación. Por ello voy a entretenerme ahora en presentar un esbozo de análisis que sirva de contraste más que de réplica al análisis presentado por Castro y otros del caso singular de PAVOC que son los problemas aritméticos de dos operaciones combinadas (PADOC).
Lo que presento puede verse como un ejercicio de lectura: para entender el análisis de Castro y otros, decidí esbozar cómo hubiera hecho yo el análisis de los PADOC, siguiendo la vía abierta por el análisis que Fernando Cerdán y yo hicimos de PAVOC y problemas aritméticos elementales verbales (PAEV), y usar lo que produjera para interpretar el análisis de Castro y otros.

5. Señalaré para empezar que el análisis de los PAEV que realizamos toma en consideración lo siguiente:

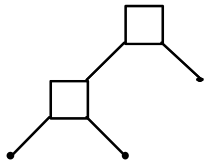
- La situación subyacente.
- El significado de las cantidades involucradas.
- La traducción del texto a una expresión aritmética.
- La operación que resuelve el problema, si la solución consiste en realizar una operación aritmética.
- Los límites que las categorías semánticas imponen a las estrategias afortunadas, en función de las representaciones correspondientes.
- El desprendimiento del significado de la situación y la elaboración de un texto más abstracto. La resolución a partir de los significados de esos textos más abstractos.

Con ello los problemas escolares se ven también como mundos creados para el desarrollo de la competencia aritmética, a partir de la elaboración de significados para las operaciones mediante su uso en los problemas.
Cuando entran en escena los PADOC, mi análisis toma muy en serio, por tanto, la importancia explicativa de las categorías semánticas y lo integra en lo que mi análisis de los PAVOC mostró como nuevo y característico de esta clase de problemas, a saber, la elaboración de la cadena de operaciones, para cuya descripción usamos el diagrama descrito en nuestro libro *Problemas aritméticos escolares*.

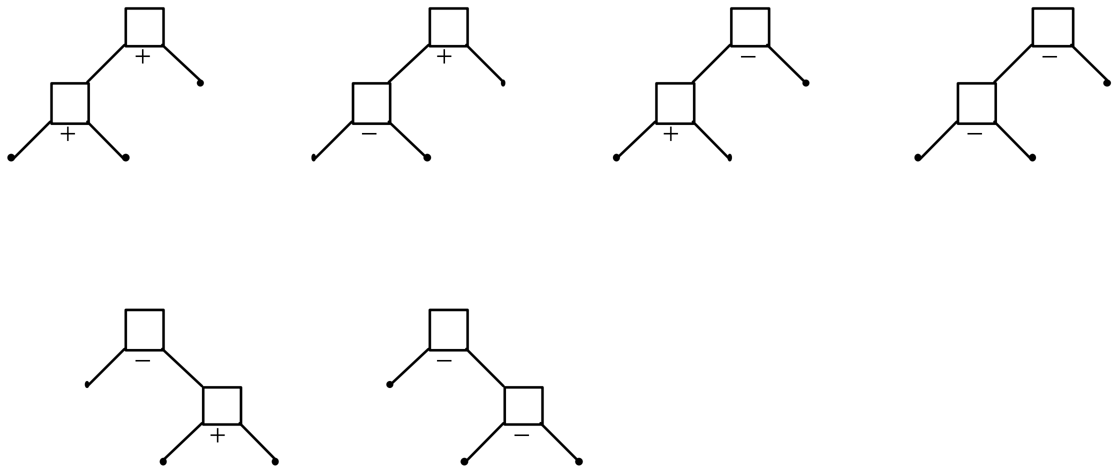
6. El esbozo que presento comienza pues con 1) la consideración del diagrama de un PADOC e incorpora progresivamente a él 2) las operaciones que resuelven los PAEV

combinados y 3) las categorías semánticas de cada uno de ellos. El empeño subsiguiente será averiguar si todas las combinaciones obtenidas pueden ser efectivamente PADOC a los que se pueda dotar de sentido en algún contexto.

6.1. Desde el punto de vista del diagrama de análisis-síntesis, como un PADOC tiene una incógnita, tres datos y una incógnita auxiliar, no hay más que un tipo de problema. La estructura del proceso de resolución de un PADOC es única:



6.2. Esta única estructura puede ahora desglosarse en tipos en función de las operaciones que resuelven cada uno de los dos PAEV involucrados. Si consideramos sólo los problemas aditivos y, por tanto, las operaciones de adición y substracción, obtenemos los siguientes diagramas:



Si consideramos las cuatro operaciones elementales, el número de diagramas se hace ya grande, lo que hará aumentar extraordinariamente las clasificaciones subsiguientes, por lo que sólo voy a considerar estas dos operaciones.

6.3. Hagamos ahora entrar en juego las categorías semánticas. Lo más simple es comenzar considerando que los dos PAEV pertenecen a la categoría semántica combinación ya que ésta sólo tiene dos subcategorías, que se corresponden con los diagramas siguientes:

combinación 1 — incógnita: el todo

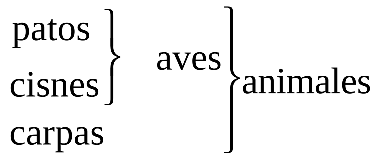
combinación 2 — incógnita: una parte

7. Así que, si los dos PAEV son de combinación, no hay más que añadir a las posibilidades que hemos encontrado. Se trata ahora de dilucidar si las combinaciones obtenidas pueden ser efectivamente PADOC a los que se pueda dotar de sentido en algún contexto. Para ello hay que encontrar situaciones de combinación que den lugar

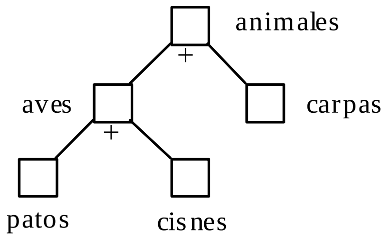
a problemas cuya solución se pueda describir con esos diagramas. Para conseguirlo, necesité recurrir a situaciones de tres tipos:
7.1. Un ejemplo del primero es la siguiente situación:

> En un estanque hay 3 patos, 5 cisnes, 7 carpas, 8 aves, 15 animales.

En esta situación, las cantidades están relacionadas así:

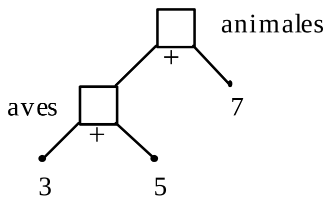


El diagrama correspondiente es:

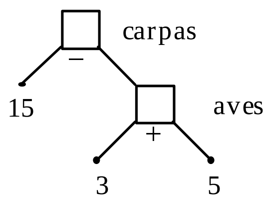


A partir de ella pueden escribirse problemas tomando como incógnita cualquiera de las cuatro cantidades, que no se encuentran en el diagrama en la posición de la cantidad intermedia (las aves) y dando como datos las tres restantes:

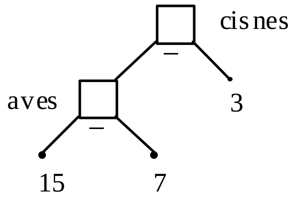
> En un estanque hay 3 patos, 5 cisnes y 7 carpas. ¿Cuántos animales?



> En un estanque hay 3 patos, 5 cisnes y algunas carpas. Hay 15 animales. ¿Cuántas carpas?



En un estanque hay 3 patos, algunos cisnes y 7 carpas. Hay 15 animales. ¿Cuántos cisnes?



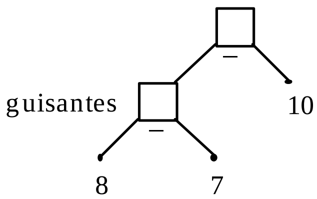
Si la incógnita es los patos, el diagrama es igual que en el caso de que sea los cisnes, y, si la incógnita es las aves, el problema no es PADOC. Así que esta situación da origen a tres tipos de problemas. Por la forma del diagrama podemos llamarlos problemas de "combinación encadenada".

7.2. El segundo tipo de situación consiste en un universo dividido dicotómicamente dos veces. Un ejemplo es:

15 guisantes. 8 verdes y 7 amarillos. 10 lisos y 5 rugosos.

A partir de ella pueden escribirse problemas tomando como incógnita cualquiera de las cinco cantidades. Ahora bien, si la incógnita es el número de guisantes y tres de las otras cuatro cantidades son datos, no es un PADOC. Las otras cuatro elecciones de incógnita conducen a diagramas iguales desde el punto de vista del significado de las cantidades y de las relaciones entre cantidades, que es el criterio de igualdad que estoy utilizando, siempre que los guisantes no sea un dato, porque en ese caso no es un PADOC. Un ejemplo es:

Hay guisantes. 8 verdes y 7 amarillos. 10 lisos. ¿Cuántos rugosos?

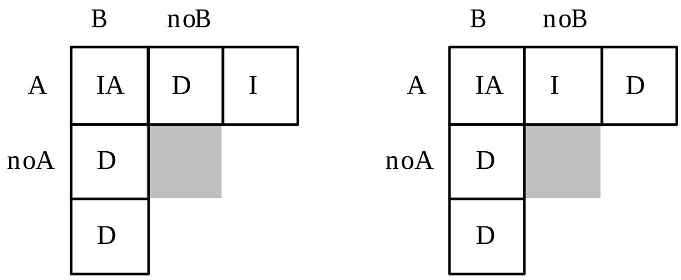


La doble división del universo me sugirió el nombre de "combinación cruzada".

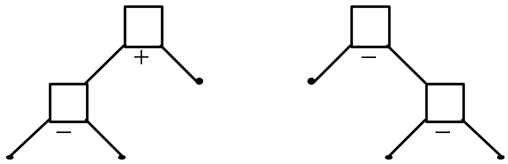
7.3. La tercera situación la daré sólo esbozada. Se trata de un universo dividido dicotómicamente dos veces mediante dos propiedades cuya unión cubre el universo.

Hay dos problemas posibles, según la incógnita sea uno de los todos o una de las partes. La incógnita auxiliar ha de ser siempre la intersección, para poder tener un PADOC con sentido.

Estos diagramas de Carroll de la situación, con indicación de los dos problemas, ilustran su diferencia con la situación anterior:

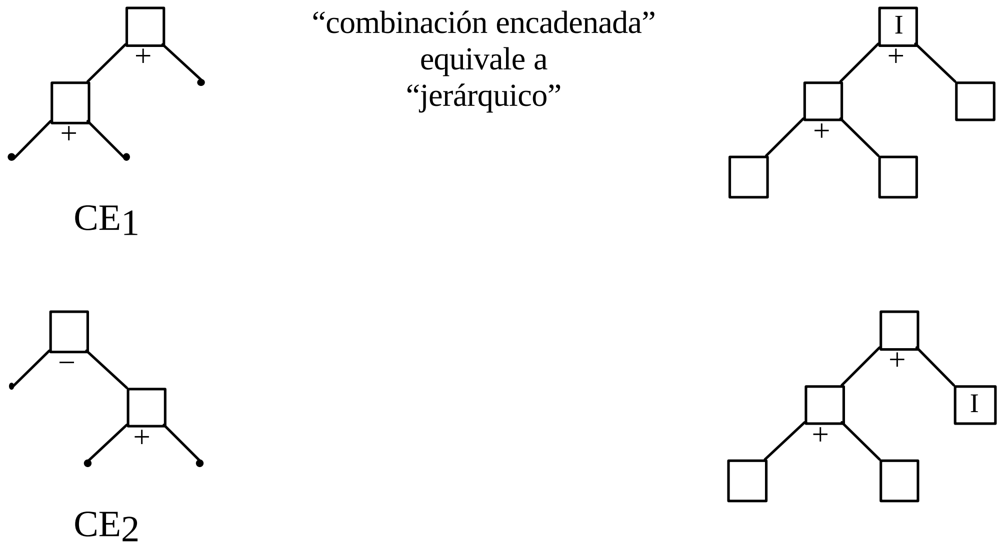


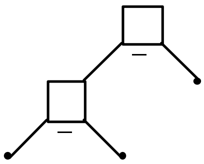
Los diagramas correspondientes son:

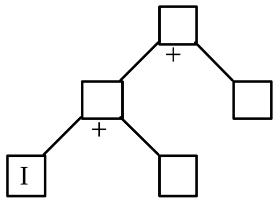


El nombre con el que me pareció oportuno bautizar esta situación, sugerido por el sombreado del diagrama de Carroll, fue “combinación sin exterior”.
La consideración de la categoría semántica de combinación en las posibilidades generadas por la consideración de las operaciones que resuelven los PAEV involucrados no introducen, por tanto, nuevos tipos, sino que reaparecen los seis ya obtenidos, sin que falte ni sobre ninguno. Lo que obtenemos ahora es una subdivisión en función de los tipos de situaciones subyacentes.

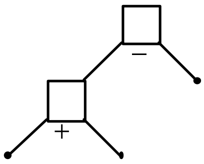
8. Partiendo de otras premisas, Nesher y Hershkovitz (1994) también obtuvieron seis esquemas, que se corresponden con éstos como muestro a continuación (aprovechando la figura para identificar mis diagramas con siglas que usaré en lo que sigue):



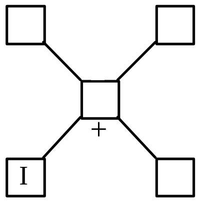




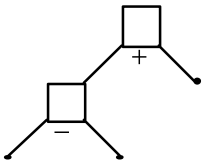
CE_3



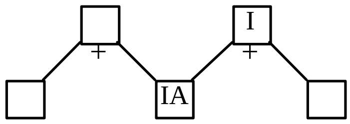
“combinación
cruzada”
equivale a
“compartir el todo”



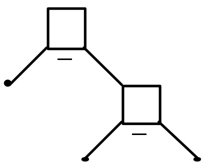
CC

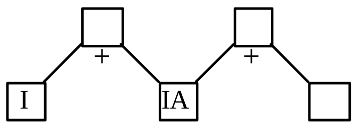


“combinación
sin exterior”
equivale a
“compartir una parte”



CSE_1





CSE_2

Mis diagramas representan la solución, por eso son todos iguales, salvo la combinatoria de las operaciones; y esta combinatoria produce todos los tipos y, en un cierto sentido, garantiza que no hay más posibilidades teóricas. Los esquemas de Nesher y Hershkovitz ponen de relieve las tres situaciones que yo he encontrado al querer dotar de sentido a las posibilidades teóricas[1] una vez se introduce en el análisis la consideración de las categorías semánticas.

[1] En realidad Nesher y Hershkovitz no usan esos esquemas para describir las mismas situaciones que yo he encontrado, ya que las mías son situaciones aditivas en las que el significado de las cantidades y de las relaciones entre ellas es siempre el de las propias de la categoría semántica de combinación. Nesher y Hershkovitz usan sus esquemas para describir situaciones en los que hay una relación aditiva de combinación y una relación multiplicativa. Aunque no me he entretenido en desbrozar este caso, no me parece que pueda tratarse de la misma manera una relación aditiva de combinación —que se caracteriza porque dos cantidades tienen el mismo significado y, por tanto, sólo dan origen a dos tipos de problemas— y una relación multiplicativa en que los factores tienen significados distintos, multiplicador y multiplicando, y dan origen por tanto a tres tipos de problemas.

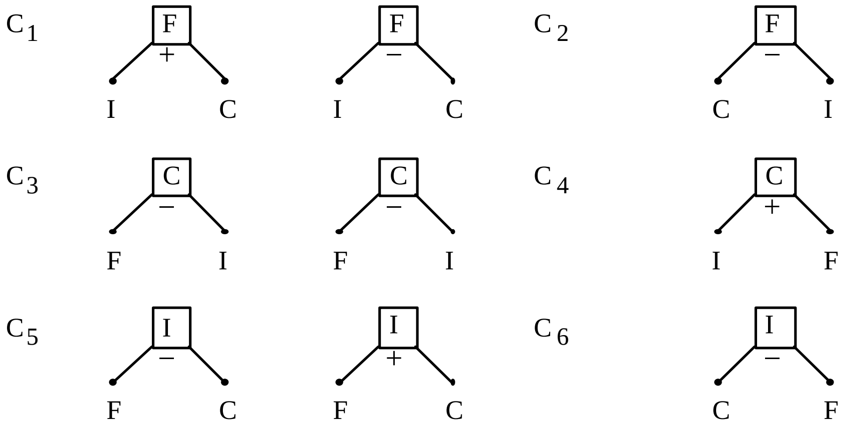
9. Para continuar mi análisis de los PADOC en la vía trazada, basta con cambiar de categoría semántica y reiterar la búsqueda de situaciones en que se puedan dotar de sentido a las posibilidades teóricas. Sin embargo, como mi intención no es ser exhaustivo sino desarrollar un instrumento para leer el análisis de Castro y otros, éste está hecho a partir de los esquemas de Nesher y Hershkovitz, y acabo de establecer una correspondencia entre mis diagramas y esos esquemas, ya puedo realizar una lectura de los tipos de Castro y otros con mis diagramas.
El resultado de esa lectura es esquemáticamente el siguiente:

- El tipo 1 de Castro y otros es mi CE_1, salvo que los PAEV involucrados no son ambos de la categoría semántica combinación, sino que uno es de cambio y el otro de combinación.
- El tipo 2 es CE_3, salvo que es cambio y cambio.
- El tipo 3 es CC, salvo que es combinación y cambio.
- El tipo 4 es CSE_1, salvo que es combinación y cambio.
- El tipo 5 es CC, aunque esté calificado como “jerárquico” en la terminología de Nesher y Hershkovitz y, por tanto, tendría que ser CE en la mía. La diferencia con el tipo 3 es la subcategoría a la que pertenece el problema de cambio.
- El tipo 6 es CSE_2.

Leído pues con mis diagramas, la tipología de Castro y otros tiene dos tipos que son iguales y no recoge uno de los tipos (CE_2). Además, esta tipología no incorpora de manera sistemática las categorías semánticas en ella.

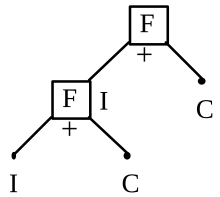
10. Aunque ya he dicho que no voy a proseguir esa incorporación sistemática sí que quiero esbozar las modificaciones que es preciso realizar en los diagramas anteriores tan pronto como se va más allá de la categoría semántica de combinación. En efecto, cualquiera de las otras categorías semánticas de los problemas aditivos se diferencian de la de combinación en que las tres cantidades tienen significados diferentes[1]. Esto obliga a incorporar el significado de las cantidades en el diagrama de análisis para poder dar cuenta de todas las subcategorías establecidas. En la ilustración siguiente muestro esto y añado las otras tres posibilidades que aparecen al combinar sistemáticamente los significados de las cantidades, la cantidad que es desconocida y las operaciones que resuelven el problema. Esas tres posibilidades que aparecen en columna a la derecha no pueden dotarse de sentido en ningún contexto mientras los números sean naturales y las operaciones tengan el significado de aumento o disminución correspondiente. Es posible dotarlas de sentido si se extiende el significado correspondiente de las operaciones incorporando el que conlleva su extensión a los números negativos. (Las letras designan lo habitual. I: cantidad inicial, C: cantidad de cambio, F: cantidad final, C_i: cada una de las seis subcategorías de la categoría semántica de cambio en el orden más usual.)

[1] Esto también ocurre en las categorías semánticas de los problemas multiplicativos, salvo en la de producto de medidas, pero aquí me estoy restringiendo a los PADOC formados por dos relaciones aditivas.

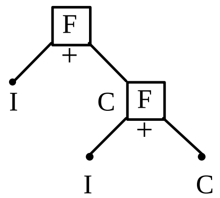


Si estas son las piezas con que se construyen los diagramas de los PADOC de dos cambios, las posibilidades son numerosas y se trata de nuevo de buscar situaciones en que se pueda dotar de sentido a estas posibilidades teóricas.

A título de ejemplo, presento el caso en que el PADOC está formado por dos C_1, que tiene dos posibilidades, que acompaño de dos enunciados esquemáticos:

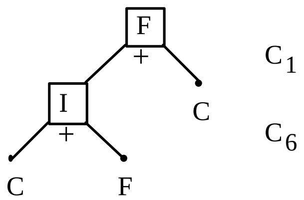


Juan tiene 4.
Le dan 3.
Le dan 5.
¿Cuántos tiene?

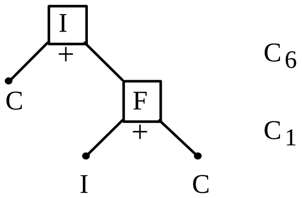


Juan tiene 4.
Le dan 3.
Pepe tiene 6.
Juan le da todo lo que tiene.
¿Cuánto tiene Pepe?

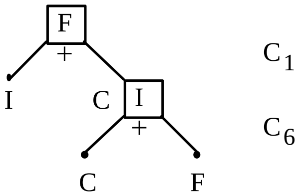
A título de ejemplo más complejo, presento el caso en que el PADOC está formado por un C_1 y un C_6, que tiene cuatro posibilidades. Acompaño las posibilidades de dos enunciados esquemáticos e invito al lector a buscar enunciados para las dos restantes.

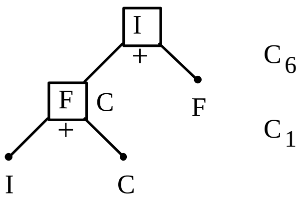


Pepe tenía.
Perdió 3.
Le quedan 7.
Si hubiera ganado 4,
¿cuántos tendría?



Si Pepe tuviera 4
y ganara 3,
tendría los mismos que
si pierde 5.
¿Cuántos tiene?





Todos estos tipos son “jerárquicos”, en la terminología de Nesher y Hershkovitz o de Castro y otros.

11. Los análisis que he realizado hasta aquí están hechos sobre la base de los primeros significados asociados a las operaciones aditivas. Esto es razonable para empezar. Para empezar tanto desde el punto de vista de no complicar de entrada el análisis, pero también porque ésos son los significados con que los alumnos van a tener que tratar en los primeros años de su escolaridad. Ahora bien, de la misma manera que avanzan los alumnos, también lo han de hacer los análisis no situándose perpetuamente en lo que Freudenthal llamaba “el nivel más bajo”. Los significados de las operaciones se amplían y se modifican en dos direcciones distintas: una por ampliación del campo semántico al usarse en nuevas situaciones con nuevos tipos de números (una dirección más o menos horizontal, como lo es la de la “matematización horizontal”), y otra por desprendimiento de los significados de las situaciones concretas en que se usan, su algoritmización y la constitución de nuevos significados puramente aritméticos (una dirección vertical, como lo es la de la “matematización vertical”). Esta última dirección se ve favorecida en el propio campo de los problemas por la mediación de los problemas de ábaco, en los que las historias que se narran tratan sobre números y los acontecimientos que se producen son operaciones aritméticas. No voy a intentar siquiera esbozar las consecuencias que el avance en esta dirección tiene para los análisis de los PADOC que estamos tratando. Pero sí que voy a usar el avance en la primera dirección para apuntar una lectura del comienzo del texto de Socas y otros que conduciría a un análisis de los problemas en que aparecen cantidades discretas relativas más parsimonioso.

12. La lectura consiste simplemente en nombrar las cantidades que aparecen en los ejemplos que ellos traen a colación y en mostrar que pueden clasificarse con arreglo a las categorías usuales, con sólo tomar en consideración que las operaciones y las cantidades tienen los nuevos significados involucrados por los nuevos tipos de números.
El problema

> Juan tiene 6 boliches y juega una partida con Luis y pierde 8 boliches. ¿Cuántos boliches debe Juan a Luis?

tiene
una cantidad inicial: los boliches de Juan,
una cantidad de cambio: los boliches que pierde Juan,
una cantidad final: los boliches que Juan debe.
El cambio es de disminución y la incógnita es la cantidad final, así que se trata de C_2.
O bien, se corresponde con el diagrama que en la ilustración anterior está junto a C_2 y que antes hemos dicho que carecía de sentido, salvo teniendo en cuenta los nuevos significados que ahora estamos considerando.
El problema

> En el recreo Juan ganó 6 canicas y Pedro ganó 5 más que Juan. ¿Cuántas canicas ganó Pedro?

tiene
una cantidad de referencia: las canicas que ganó Juan,
una cantidad comparada: las canicas que ganó Pedro,
una cantidad de diferencia: las canicas que Pedro ganó más que Juan.
La comparación es del tipo "más que" y la incógnita es la cantidad comparada, así que nada impide clasificar este problema en esa subcategoría de la categoría de comparar. Digo simplemente que nada lo impide, otra cosa es argumentar qué se gana y qué se pierde usando de forma nueva la vieja clasificación o elaborando una nueva.

13. El final del párrafo anterior ya indica que mi réplica no acaba con conclusiones concretas sobre las clasificaciones expuestas en los tres textos presentados al seminario. Durante el tiempo que le he dedicado a la lectura de esos textos y la preparación de mis notas para la réplica, al embarcarme yo también en la minucia de un análisis pormenorizado y cuidadoso en los detalles para poder ver qué sentido puedo darle a análisis de ese estilo, no he dejado de tener presente un libro que leí por primera vez hace ya veinte años y al que he vuelto recientemente de la mano de mi hija quinceañera. Se trata del libro de Robert Pirsig, *Zen y el arte del mantenimiento de la motocicleta*, que lleva como subtítulo "Una indagación en los valores". No está lejos el trabajo de desmenuzamiento de los problemas aritméticos escolares, en los análisis que he estado realizando o examinando, del arte del mantenimiento de la motocicleta, que exige el conocimiento minucioso de cada una de sus piezas, hasta el tornillo más menudo, y de las herramientas para montarlas y desmontarlas, cuidarlas, afinarlas y tener cada una a punto para que la motocicleta funcione con suavidad. Para Pirsig, el arte del mantenimiento de la motocicleta tiene como objetivo la paz espiritual y sólo ésta permite tratar con parsimonia cada uno de los detalles del mantenimiento.

Referencias

Nesher, P. and Hershkovitz, S. 1994. The role of schemes in two-step problems: analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 26, págs. 1-23.

Pirsig, R. P. 1974. *Zen and the Art of Motorcycle Maintenance. An Inquiry into Values*. London: Vintage.

Puig, L. y Cerdán, F. 1988. *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

TERCER SEMINARIO

TEMA:
METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DESARROLLO DEL TERCER SEMINARIO

INTERVENCIONES:
PONENCIA: ESTRATEGIAS DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA EL TRATAMIENTO DE LAS CUESTIONES DE DIDÁCTICA.
PONENTE: DR. E. LACASTA, UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA.

DESARROLLO DEL TERCER SEMINARIO

El tercer Seminario tuvo lugar el segundo dia del Simposio, sobre el tema "Estrategias de Análisis Estadístico para el tratamiento de cuestiones Didácticas". Este seminario fue presentado por el profesor E. Lacasta, de la Universidad Pública de Navarra. Debido a la orientación principalmente informativa dada por la organización a este Seminario, no contó con ningún ponente que hiciese la réplica a la exposición. Modera la sesión el profesor L. Rico.

La ponencia comenzó con una presentación general sobre las conexiones entre Estadística e investigación en Didáctica de la Matemática, en la cual se señalan algunos principios generales y se destaca la conveniencia de situar una medida en relación a una distribución. Avanza algunas respuestas a la pregunta de si es necesaria la estadística y señala algunas dificultades que surgen de su utilización. Establece como principio la descripción fiel y económica de la información recogida en un trabajo experimental; a partir de este principio presenta una serie de reflexiones en torno a la contingencia, las variables, los modelos y la situación de una medida en relación con una distribución.

Ante la cuestión: ¿qué nos debemos preguntar? realiza una reflexión sobre la rareza de algunos valores y hace una discusión sobre la utilidad de los tests de hipótesis, recordando que rechazo y aceptación no son las opciones alternativas. Recuerda las dificultades del muestreo; discute las nociones de legitimidad y complejidad para los procedimientos. Presenta la distinción entre técnicas paramétrica y no paramétricas y propone un ejemplo aclaratorio.

Una segunda estrategia estadística presentada surge al diferenciar entre el análisis multivariante y la inferencia estadística. Señala la distancia de un modelo a la contingencia y hace una discusión sobre variables no contingentes y algunas estrategias de trabajo. Presenta a continuación diversas técnicas de análisis: análisis en componentes principales, análisis factorial de correspondencias, análisis clúster, análisis implicativo y análisis de la varianza. Finalmente, hace un balance con las ideas principales.

Concluida la presentación intervinieron 3 de los asistentes. Se plantearon las cuestiones ¿cuando es necesaria la técnica estadística?, ¿para qué tipos de preguntas? También se insistió en las diferencias entre los métodos inferenciales y el análisis multivariante.

ESTRATEGIAS DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA EL TRATAMIENTO DE CUESTIONES DE DIDÁCTICA

Eduardo Lacasta Zabalza
Universidad Pública de Navarra (UPNA-NUP)

Resumen

El bagaje científico de los investigadores en didáctica de las matemáticas incluye en muchos casos algunos conocimientos de estadística matemática. Sin embargo, la distancia entre la estadística matemática y la estadística aplicada dificulta la aplicación de esos conocimientos. El objetivo de este seminario es facilitar la incorporación de herramientas estadísticas al trabajo de los investigadores en didáctica de las matemáticas.

A partir del establecimiento de unos conceptos básicos: modelo, variable, contingencia, significación de una medida, condiciones del rechazo o aceptación de una hipótesis, etc., se presentan de una manera razonada algunos de los principales métodos estadísticos aplicables.

En particular se describen algunas aportaciones que, dentro del análisis multivariante de datos, se han realizado desde el campo de la didáctica de las matemáticas, y más concretamente el análisis implicativo.

Se exponen con detalle la construcción de un sencillo test de hipótesis para tratar un caso puntual surgido en el tratamiento de una encuesta y el análisis de un resultado concreto, obtenido a través del análisis implicativo.

Abstract

The scientific background of researchers in Mathematics Education includes some knowledge of Mathematical Statistics. Nevertheless, the distance betwen Mathematical Statistics and Applied Statistics is a handicap in order to apply that knowledge. The purpose of this lecture is to provide researchers in Mathematics Education with tools form Applied Statistics.

Based upon some basic concepts such as model, variables, contingency, significance of a measure, conditions of rejection or acceptance of a hypothesis, etc., some of the main techniques in Applied Statistics will be presented in a reasoned sequence.

Contributions from the field of Mathematics Education to the Multivariate Analysis of Data, such as implicative analysis, will be specially described.

Furthermore, the lecture includes the detailed designing of a simple test of hypothesis for a case which appears in the treatement of a particular item and the analysis of a particular result obtained by Implicative Analysis.

1. La estadística en la Investigación en Didáctica de la Matemática

¿Es necesaria la estadística?

La didáctica de las matemáticas no dispone en general actualmente de respuestas para la mayor parte de las preguntas que se le plantean. Sin embargo, para fundamentarse científicamente, superando la mera opinión, tiene que poder formular hipótesis correspondientes a esas preguntas.

Dependiendo del problema de investigación y de los datos disponibles, será adecuado o no el uso de la estadística. Por tanto, no se puede pretender que sea imprescindible. Sin entrar en el fondo del debate metodológico, sí que pensamos que en didáctica de matemáticas se dan las condiciones necesarias para asegurar al máximo que, cuando se utilice, se haga con un control y un conocimiento de los métodos estadísticos utilizados.

¿Existen barreras también en didáctica de las matemáticas para una utilización ágil de la estadística?

Quien hace una investigación o más en concreto una tesis en didáctica de las matemáticas, tiene la posibilidad de recurrir a expertos que le proporcionen las técnicas estadísticas a aplicar para completar su trabajo. Pero creemos que, aún siendo a veces muy necesaria la ayuda de expertos en estadística aplicada –que es deseable que tengan una buena formación matemática–, el investigador debe responsabilizarse al menos del conocimiento y control de los métodos empleados.

A primera vista pudiera parecer que la formación matemática que normalmente posee el investigador en didáctica de las matemáticas –que ha podido estudiar en su carrera probabilidad y estadística matemática con un alto nivel de formalización– le ha de permitir abordar directamente el uso de los métodos estadísticos aplicados que le son de interés. Sin embargo, la experiencia nos muestra que hay una gran distancia entre el conocimiento teórico y su aplicación a problemas particulares y que normalmente el investigador no cuenta con una formación práctica en la aplicación de la estadística. Además, el crecimiento y la diversificación de los métodos estadísticos en los últimos años ha sido tan espectacular, que es difícil para el no especialista mantenerse al día en las nuevas técnicas y posibilidades del análisis de datos.

Por otro lado, la presentación clásica de la estadística inferencial, apoyada en una construcción previa de la teoría de la probabilidad –presente en muchos manuales de estadística aplicada, como el excelente libro de Amón (1990)– se aleja a veces de las bases intuitivas y de las fuentes históricas de la estadística, tan necesarias para la comprensión de los conceptos y para sus aplicaciones prácticas.

Sin embargo, como veremos, es posible dar una introducción intuitiva de las ideas básicas en inferencia, necesaria para la comprensión de los conceptos y para su aplicación práctica. Así pues, no es absolutamente necesario seguir una exposición formal para enseñar métodos estadísticos, existiendo buenos libros de estadística aplicada sin este enfoque.

Aportaciones desde la didáctica de las matemáticas

Régis Gras (1992) propone "poner en marcha un dispositivo particular de recogida y tratamiento de datos, susceptible de confirmar o invalidar las hipótesis correspondientes a las preguntas que se plantean en didáctica de las matemáticas y de avanzar conclusiones". Él mismo reconoce que es una estrategia muy ambiciosa y que no se puede aplicar efectivamente desde las primeras aproximaciones de los fenómenos a observar y de los que surgen las cuestiones, pero "acaba imponiéndose posteriormente si se quiere que las decisiones didácticas se apoyen en una estabilidad y una pertinencia de las respuestas, ganando así precisión, validez y capacidad de predecir".

Varias aportaciones en esta línea estratégica, como el análisis *a priori* de la contingencia ideado por Brousseau o los estudios de Pluvinage sobre los "cuestionarios con modalidades" han enriquecido el bagaje científico de la didáctica de las matemáticas. Un caso particular es el del análisis implicativo de Gras (1996) al que nos referiremos más adelante con cierto detenimiento.

Objetivo de este Seminario

Más que exponer los pros y contras de los distintos métodos estadísticos, nuestro objetivo es el de exponer de una manera sistemática un abanico metodológico lo más amplio posible. En el fondo, lo más importante es que el investigador tenga un criterio para decidir los métodos adecuados y conocer su alcance y sus límites.

Hemos dicho que la exposición de métodos estadísticos será "sistemática", pero no seguiremos la presentación formal –como se ha visto, no sólo por razones de espacio–, sino que, entre las diferentes aproximaciones posibles, nos apoyaremos en Brousseau (1993a).

2. Algunos principios generales del análisis estadístico

Con el fin de establecer un mínimo repertorio de conceptos necesarios para desarrollar nuestros objetivos, describiremos algunos de ellos, siguiendo el trabajo que acabamos de citar.

El primer objetivo del análisis estadístico es el de describir un conjunto de datos de manera *fiel y económica,* es decir, dar un resumen. Pero estas dos condiciones son bastante contradictorias, porque para ser fiel hay que dar toda la información y entonces no hay tal economía.

La contingencia

La contingencia es todo lo que es y podría no ser o podría ser de otra manera. Considerar un hecho como contingente supone pues tener en cuenta que podrían haber ocurrido otros hechos en su lugar y supone por tanto situarlo en un conjunto de hechos posibles, es decir, en una estructura. En la práctica, la contingencia está constituída por observaciones, datos recogidos, etc.

Las variables

Los datos recogidos tienen que estar estructurados a priori; es decir, tienen que reconocerse, antes de cualquier tratamiento, como un objeto matemático de un cierto

tipo. Cada hecho que se produzca se considerará como un "valor" tomado en un cierto conjunto, llamado variable, en el que se han definido ciertas operaciones.
Las variables son pues estructuras y, por tanto, es importante identificar a priori la estructura pertinente más completa posible. Ejemplos de estructuras son las variables nominales, ordinales, de intervalo, de razón…

Los resúmenes o modelos

En la práctica, la contingencia, los datos, se representan mediante resúmenes. Los mejores resúmenes son aquéllos que, a igual longitud, permiten reconstituir la información inicial de la manera más precisa. Esta reconstitución exige que el receptor conozca el código utilizado por el autor del resumen. Por otra parte, será útil indicar la fidelidad del resumen mediante una medida de su parecido a la contingencia inicial.
Pero representar la contingencia mediante sistemas matemáticos es también el objeto de la modelización. Una misma contingencia puede modelizarse de distintas formas; por ejemplo, mediante una distribución de probabilidad, una serie de reúmenes o de características estadísticas. Los modelos habrá que escogerlos de modo que representen los datos lo mejor posible.
Para Brousseau (1993a), "la *estadística matemática* es el estudio de estos códigos, de las distintas modelizaciones de la contingencia, de sus propiedades y de los métodos de elección".

Propiedades de los modelos

En una primera aproximación, el modelo debe:

- Representar bien las observaciones (pertinencia).
- Constituir un resumen más simple que las observaciones (comunicabilidad).
- Permitir lo mejor posible la reproducción del conjunto de las observaciones (fidelidad).
- Permitir la comprensión de los datos, es decir, poder situarlos con relación a modelos familiares, universales y, por tanto, poder compararlos con otros modelos (inteligibilidad).
- Ser accesibles al control matemático (consistencia).

Ejemplos de modelos pueden ser una función, una ley, etc.

3. Primera estrategia estadística: situar una medida con relación a una distribución

Significación de una medida

Con frecuencia vemos en artículos de investigación (aún en revistas de reconocido prestigio) hacer comparaciones de valores, de medias o de porcentajes y establecer conclusiones sin tomar precauciones. También se puede ver cómo se adjudica el carácter de "significativa" a una diferencia de valores, sin que se describa claramente el criterio empleado. A lo más, se suele recurrir al tamaño de la muestra para relativizar la solidez de la argumentación, sin ir más allá de la intuición. En lo que sigue, haremos una aproximación de la significación estadística, que permite tomar una decisión sobre si las diferencias encontradas se pueden explicar fácilmente por la variabilidad aleatoria del muestreo, o bien si es muy *raro* que esos valores se hayan obtenido debido a esa variabilidad (azar).

La significación estadística indica la *rareza* de un valor, o más bien la rareza de los valores mayores (o menores) que él; es decir, lo que indica si ese valor es grande o pequeño en las condiciones en las que se ha medido y bajo unas hipótesis determinadas (o sea, en relación con un cierto modelo). La rareza relativa de un valor será la proporción de valores mayores (o menores) que él en un cierto modelo. Habitualmente se expresa en procentaje y viene a ser la "significación" de un valor; es decir, en una perspectiva clásica, la probabilidad de obtener ese valor u otro mayor (alternativamente menor) debido a la variabilidad aleatoria, en las condiciones de medición dadas y bajo un modelo supuesto.

Evidentemente, para poder determinar la rareza relativa de un valor, la variable tiene que ser al menos de carácter ordinal. En la figura 1 hemos reproducido un histograma de frecuencias de una variable en porcentajes.

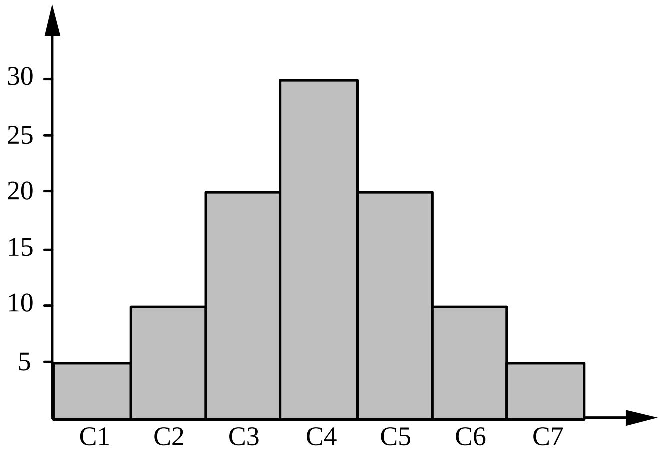


Fig. 1

Frecuencias (%)

En el caso del histograma de la figura 1, un valor que esté en la clase C1 es bastante raro, puesto que a lo sumo hay un 5% más pequeños que él; también un valor que estuviese en la clase C7 sería bastante raro, porque a lo sumo habría un 5% mayores que él. En ambos casos podemos medir la *rareza* de ese valor, diciendo que ese valor es *raro* o no se puede explicar por el azar, con una probabilidad del 95%. En psicología, por ejemplo, se puede rechazar un modelo que proporciona una distribución en la que el valor encontrado (la contingencia) es raro con una probabilidad del 95%, pero en medicina, las probabilidades habitualmente utilizadas son por lo menos del 99,9%.

Para determinar la significación de un valor o una diferencia de valores encontrados, existen en la mayoría de los casos pruebas o tests, que nos dicen cuál es la probabilidad de encontrar esos valores, para el tamaño de la muestra utilizado.

Los tests de hipótesis

Para explicar un hecho dado, se elige un modelo de distribución. La *hipótesis nula* consiste en la declaración "el hecho observado está de acuerdo con el modelo". En la literatura estadística existen numerosos tests de hipótesis aplicables a lo distintos casos que el investigador se pueda encontrar. En estos tests se calcula el valor de un estadístico de contraste cuya distribución es conocida y que nos permite rechazar o aceptar la hipótesis nula, según que dicho valor sea "raro" en esa distribución o no, con una probabilidad dada.

Condiciones del rechazo o de la aceptación de una hipótesis

El rechazo y la aceptación no constituyen una alternativa; no rechazar un modelo no quiere decir que se acepte. En efecto, puede ser que varios modelos estén lo suficientemente próximos de la contingencia como para no rechazar ninguno, pero al mismo tiempo sería absurdo aceptarlos todos con sus contradicciones. Por el contrario, no hay ningún inconveniente en rechazar varios modelos, ya sean compatibles o no entre ellos.

El conocimiento científico debe pues fundamentarse en el rechazo de modelos y no en su aceptación.

Los riesgos de rechazar o no un modelo

Desde el momento en que se acepta la idea de que la contingencia observada no es más que un ejemplar extraído de un conjunto con muchos ejemplares parecidos y que se fija una probabilidad arbitraria para la decisión, aparecen dos riesgos:

- el de rechazar un buen modelo del que la contingencia se aleja accidentalmente, que se llama *error de tipo I.*
- el de no rechazar un mal modelo, porque ocasionalmente está cerca de la contingencia, que es el *error de tipo II.*

Todo modelo que no es rechazado puede "aceptarse" de manera hipotética, aunque no se pueda establecer como verdadero. Hay pues que poner en pie una jerarquía de preferencias en el conjunto de los modelos, en función de su verosimilitud. Pero será preciso controlar estas decisiones y estos niveles de confianza arbitrarios bajo el control de una teoría para poder controlar esos riesgos; ese es el objeto de la teoría de la decisión.

Los procedimientos de la estadística inferencial

Régis Gras (1992) resume la manera de proceder en la estadística inferencial: a partir de un muestreo de una población, que hay que suponer que se ha efectuado mediante pruebas independientes y de la misma distribución:

- se ajusta a la variable o a dos variables […] una variable predictiva con una finalidad de predicción o de explicación;
- se decide validar o invalidar juicios e hipótesis de modelos mediante los llamados tests de hipótesis (esto último también en el caso de la estadística no paramétrica). »

Las condiciones que legitiman estos procedimientos propios de lo que hemos llamado "primera estrategia" son:

- presuponer en la mayoría de los casos hipótesis de normalidad de las variables, lo que es difícilmente verificable y restrictivo (no es el caso para los métodos no paramétricos);
- aceptar métodos largos y fastidiosos de cruce de variables 2 a 2;
- saber formular las hipótesis nulas y
- diluir la individualidad de los sujetos en el muestreo. »

Sin embargo, estas condiciones no se satisfacen fácilmente en el estado actual de la didáctica de las matemáticas. Parece indispensable poder recurrir a otros métodos distintos para sintetizar y estructurar los datos y poder identificar las variables, los factores implicados, sus relaciones, su jerarquía, etc.

El caso de la estadística no paramétrica

Dentro de la estadística clásica, las técnicas no paramétricas se prestan especialmente a tratar los datos de didáctica y en general de ciencias de la conducta, puesto que en ellas no se supone que los datos que se están analizando se hayan sacado de una población distribuída de una determinada manera; por ejemplo, de una población distribuída normalmente. Sidney Siegel (1990) hace una exposición amplia de los métodos no paramétricos, acompañada de ejemplos, en la que se analizan las exigencias de la estadística paramétrica y no paramétrica. Guy Brousseau (1993b) desarrolla en un volumen los tests no paramétricos más utilizables en nuestro caso, en la misma perspectiva que aquí hemos adoptado y con abundantes ejemplos, todos ellos referidos a la didáctica de las matemáticas.

La estadística no paramétrica dispone de tests aplicables a distintos casos (como los de Wilcoxon, Cochram, Kendall, etc.). Todos los paquetes estadísticos estándar (Statgraphics, SPSS, BMDP, etc.) tienen incorporados los cálculos no paramétricos.

Un test de hipótesis para un caso particular

Si no se dispone de tests ya confeccionados, o si no existen, se pueden crear pruebas *ad hoc*, que a veces pueden ser muy simples, como la que exponemos a continuación.

En el ejemplo correspondiente a la tabla 1, tomado de Lacasta (1995), se pasó un cuestionario a 23 profesores de instituto, sobre diversas cuestiones relacionadas con el papel de los gráficos cartesianos de funciones en la enseñanza. Se observó que en algunas preguntas abiertas, se repetían algunos tipos de respuesta, que en la tabla 1 se han codificado con las letras a, b, c, etc.

Nos encontramos por ejemplo con que el 71,4% de los profesores (15 profesores de los 21 que contestaron a esta pregunta) responden de la manera "a" (en concreto, declaran que "al acabar el COU, los alumnos utilizan correcta y suficientemente los gráficos cartesianos").

Con una muestra de 23 profesores de instituto, no podemos pretender establecer conclusiones para el conjunto de todos los profesores de instituto, pero sí que nos podemos plantear si ese conjunto de profesores se decanta claramente ("significativamente") por el "sí" o por el "no". En particular queremos saber si ese

71,4% puede haberse obtenido por azar o se aleja tanto del 50% que es demasiado raro que ocurra por azar y, por tanto, refleja más bien una tendencia clara por el "sí".

	Tipos de respuesta					
Profesores	a	b	c	d	e	f
p01	1	0	–	–	0	1
p02	0	1	1	0	0	0
p03	–	–	–	–	–	–
p04	0	1	1	1	0	1
p05	1	1	1	1	–	–
p06	0	1	–	–	–	–
p07	0	1	–	–	–	–
p08	0	0	1	1	0	1
p09	0	1	0	0	0	0
p10	1	0	1	0	0	0
p11	–	–	–	–	–	–
p12	1	0	1	1	1	1
p13	1	0	1	1	0	1
p14	1	1	–	–	–	–
p15	1	0	1	0	0	0
p16	1	0	1	0	1	0
p17	1	0	0	1	0	0
p18	1	0	0	1	1	0
p19	1	0	1	0	0	0
p20	1	0	1	1	0	0
p21	1	1	1	0	0	0
p22	1	1	1	0	–	–
p23	1	1	1	1	1	1
Total	15	10	14	9	4	6
Nº de respuestas	21	21	17	17	16	16
Porcentajes	71,4	47,6	82,4	52,9	25	37,5

Tabla 1

Tipos de respuestas de profesores a preguntas de un cuestionario

Naturalmente, si no hay una preferencia de estos 23 profesores por el "sí" o por el "no", el porcentaje de síes no tiene por qué ser exactamente del 50%; podrá ser un poco más (por ejemplo, 52,9%), un poco menos (37,5%)… ¿Cómo definir un criterio de decisión para saber si existe o no un acuerdo entre los 21 profesores que han contestado a la cuestión?

En este caso se tomó el proceso de decisión como una distribución binomial en la que existían n = 21 decisiones "sí" o "no", cuyas probabilidades, de no haber acuerdo, eran p = q = 0,50. La media de esta distribución es = np = 10,5 y la varianza es ^{2} = npq = 5,25. Aproximando la distribución a la normal, la probabilidad de obtener al menos 15 veces la misma respuesta es: P(X 15) = 0,025… Así pues, no hay más que un

2,5% de probabilidad de obtener este valor por azar, luego este resultado *es significativo* con una probabilidad del 95%.
Análogamente se puede calcular que el 37,5% de respuestas afirmativas (6 respuestas de 16 que contestan) del tipo"f" (que consiste en una declaración explícita de la superioridad o de la necesidad del gráfico en la enseñanza, del tipo "una imagen vale más que mil palabras" o similares) se produce por azar con una probabilidad: P(X 6) = 0,158… O sea, que hay aproximadamente hasta un 16% de probabilidad de obtener por azar este valor, luego este resultado *no es significativo* con una probabilidad del 95% y no podremos argumentar que exista una tendencia clara de esos profesores a hacer o a no hacer ese tipo de declaraciones.
La primera estrategia consiste en comparar la estadística observada (datos, modelo, medida de calidad) a la distribución de la cual ha sido extraída y, cuando sea preciso, decidir acerca de su interés en tanto que resumen, según la rareza relativa.

4. Segunda estrategia estadística: la elección del mejor modelo

Los métodos propios de esta segunda estrategia se suelen conocer como *análisis de datos,* aunque ésta es una expresión que tiene distintos significados para algunos autores. En ella se pueden llegar a englobar el análisis multivariante, el análisis exploratorio o el análisis cualitativo de datos (que a su vez puede ser también exploratorio e inferencial, multivariante o univariante); incluso hay autores que consideran la inferencia estadística dentro del análisis de datos. En lo que sigue, nosotros nos referiremos preferentemente al análisis multivariante.
Para Gras (1992) el análisis de datos (que sitúa en una "ruptura epistemológica" de la estadística) se distingue a la vez de la estadística inferencial y de la estadística descriptiva clásica. Su nacimiento histórico se debe a la formalización del álgebra lineal, de la geometría y de las probabilidades y por otro, al hecho de que los ordenadores permiten cálculos rápidos en estructuras complejas, sin tener que disminuir el tamaño de las tablas de datos a tratar, y permitiendo al mismo tiempo representaciones variadas de la información obtenida.
En el análisis de datos se asigna al conjunto de observaciones un conjunto de puntos, entre los que se define una distancia. Esta idea permite adoptar un punto de vista geométrico, lo que explica la potencia de este tipo de análisis. El establecimiento de una distancia abre pues nuevas posibilidades; entre otras, la de conseguir representaciones gráficas que permiten visualizar los datos y, como vemos a continuación, la de controlar la calidad de un modelo.

Las distancias de un modelo a la contingencia

Para saber si un modelo es un buen representante de la contingencia, la segunda estrategia estadística consiste en representar la calidad de la representación mediante un número, una medida de la calidad y, más concretamente, mediante una distancia entre el modelo y los datos.
Para un tipo de distancia dado (euclídea, euclídea relativa, ^{2}, etc.) el mejor modelo será aquél para el que se obtiene el valor más pequeño. Aunque muchas veces no es

posible encontrar un modelo que sea con certeza óptimo, podemos decir en general que el resultado de un análisis estadístico será el mejor modelo obtenido en su categoría, junto con la distancia de este modelo a la contingencia. Esta distancia es indispensable para indicar la calidad del modelo propuesto.
El modelo se puede interpretar como la parte explicada de la contingencia y la distancia como una parte que no se ha tomado en cuenta; por ello se la llama distancia "residual".
¿Qué tipo de mejor modelo propone cada distancia en el estudio de la representación de un conjunto de números por un número?

La elección de las distancias

Según las condiciones, existen distancias más apropiadas que otras. Ya sea porque tienen propiedades matemáticas más interesantes, ya sea porque nos sitúan en un lenguaje familiar al analista o al destinatario del análisis.

Ejemplo: la distancia euclídea relativa

La distancia euclídea es la de nuestro espacio familiar y estamos acostumbrados a ella para hacer comparaciones, pero la dimensión del espacio es en este caso invariante. Sin embargo, en estadística, la dimensión de los vectores cambia con el tamaño del conjunto de los datos. Como la distancia euclídea es una suma de términos positivos, crece con el número de términos. Así pues se hace difícil comparar, por ejemplo, la calidad de un modelo para representar un conjunto de 10 valores, con la calidad de un modelo que representa un conjunto de 1.000 valores.
Por tanto, se prefiere utilizar la distancia euclídea relativa, en la que la suma de las diferencias cuadráticas está dividida por el tamaño de la muestra (es decir, la dimensión del espacio). En el caso particular de la distancia entre un número y una variable numérica (por ejemplo, un conjunto de números $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots, x_n\}$ y un número "a"), se pueden considerar esos "n" números como las componentes de un vector $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots, x_n)$. Entonces, buscar un número que represente al vector X consiste en buscar un vector constante A = (a, a, a, …, a, …, a) que esté a la menor distancia posible de X. En estas condiciones, la distancia euclídea relativa es:

$$d\,(A, X) = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\Sigma\ (a - x_i)^2\right)}$$

Lo mismo que con la distancia euclídea, el modelo que minimiza la distancia "d" es también la media aritmética. A la distancia euclídea relativa se le llama *desviación típica* y a su cuadrado *varianza.*

Ejemplo: la distancia de ^{2}

Supongamos ahora que se tiene como modelo un conjunto de frecuencias teóricas o esperadas, que proporcionan el vector $E = (E_1, E_2, E_3, \ldots E_i, \ldots, E_n)$ y que el conjunto de las frecuencias observadas empíricamente (es decir, en la contingencia) da el vector $O = (O_1, O_2, O_3, \ldots O_i, \ldots, O_n)$. Si se considera en cambio que la aproximación de "E_i" a "O_i" es tanto mejor cuanto pequeño sea $(E_i - O_i)^2$ respecto a "E_i", se obtiene la distancia[1] de ^{2} del vector "E" al vector "O":

$$d\ (E, O) = \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

La modelización estadística

En forma simplificada, en la filosofía del análisis de datos, a la *contingencia* (lo que es, pero podría no ser, la variabilidad) se opone la *necesidad* (las tendencias). Idealmente las tendencias serían consecuencia lógica obligada de los hechos realizados.

Teóricamente, las tendencias se expresarían mediante reglas, leyes, teoremas, relaciones establecidas, deducciones, explicaciones, razonamientos, cálculos de previsión…

Para construir un resumen de un conjunto de hechos, parece razonable y económico identificar todos los que ya están determinados o casi (se les llama ligados) por otros (llamados libres), con el fin de no comunicar más que estos últimos, acompañados de la ley de producción o de dependencias de los primeros.

Cuando la estadística debe rendir cuenta de diversas variables, nos hemos planteado si la mejor estrategia es la de dar un modelo para cada una de ellas, incluso si es localmente el mejor modelo posible. Nos planteamos ahora la cuestión de saber si no sería mejor tener en cuenta las informaciones que algunas de las variables pueden dar sobre otras, para disminuir el tamaño de un modelo único más general o aumentar su inteligibilidad o su precisión.

Así pues, siempre hay que tratar de buscar modelos y clasificarlos. Siguiendo siempre la primera estrategia, un estudio estadístico consistiría entonces, a la vista de la contingencia, en proponer no sólo un objeto matemático, o varios, encargados de representarla –un resumen–, sino también un conjunto de relaciones organizadas en un verdadero modelo, acompañado de parámetros que los determinen y que sirva para discriminar en las observaciones lo que es explicado por una regularidad o, metafóricamente, por una "necesidad".

Presentación y tratamiento de los datos

La elección de la estructura a priori tiene su importancia, como se ha visto para determinar el tipo de distancias utilizables.

En un caso bastante general, un conjunto de datos puede presentarse en forma de una tabla (ver tabla 2) en la que las "n" líneas son los individuos observados y las "m" columnas representan variables cuyos valores son las observaciones hechas en relación con esos individuos. Cada elemento de esa matriz es por ejemplo un número que puede representar una medida, un rango, una frecuencia absoluta, una presencia o una ausencia. En sentido estricto, esta matriz es la matriz de contingencia si los valores que la constituyen son frecuencias absolutas.

---

[1] Hay que advertir que, de hecho, esta fórmula no satisface todos los axiomas de las distancias; es más bien un índice de distancia

	Variables				
Individuos	V_1	V_2	V_3	………..	V_m
01					
02					
03					
…	…	…	…		…
n					

Tabla 2

El análisis factorial (en las dos versiones que presentaremos brevemente más adelante) permite el tratamiento de un cierto número de variables y/o de individuos llamados *suplementarios,* que no entran a formar parte de la contingencia, pero cuya situación se puede determinar en relación a la representación de los individuos y variables contingentes. El análisis *a priori* antes citado consiste básicamente en el control de las dependencias de variables y/o individuos, independientemente de la contingencia. De esta manera se puede saber si las dependencias puestas de manifiesto por el análisis factorial son debidas a la contingencia o si estaban ya determinadas previamente. Un desarrollo de este análisis se encuentra en Brousseau y Lacasta (1995).

Entonces se puede considerar esa tabla ("n" individuos x "m" variables) de maneras muy diferentes, por ejemplo como:

a) Un conjunto amorfo de n x m puntos en R.

b) Un punto único de $R^{n \times m}$ (el espacio sobre R de dimensión n x m).

c) m vectores de R^n que representan las p variables.

d) n vectores de R^m que representan las n observaciones.

e) una aplicación de R^{n-1} en R

f) una aplicación vectorial de R^k en R^{m-k}, etc.

Aplicando nuestro primer principio a la modelización de esta tabla, siguiendo estas diferentes estructuras a priori, se engendran tipos de análisis estadísticos distintos.

Algunos métodos del análisis de datos

<u>El Análisis en Componentes Principales</u> (ACP)

En el caso general del punto d), los sujetos son puntos en el espacio R^m, cuyos ejes representan cada uno caracteres observados. El método consiste en buscar los planos principales determinados por los ejes de inercia y el centro de gravedad de la nube, para representarla según las mejores proyecciones, realizadas con la métrica euclídea.

Este análisis permite además precisar en qué medida las variables están correlacionadas o ligadas entre ellas. En la interpretación estadística los ejes principales se llamarán "factores principales".

En teoría no se excluye utilizar el ACP para estudiar el punto de vista c), pero las correlaciones entre los sujetos son más delicadas de interpretar.

La calidad de la representación se define en este método como el coseno del ángulo formado por una observación (un vector de R^m) con su proyección sobre el subespacio de los ejes factoriales que se consideren. Esto hace que las observaciones que están próximas al origen estén mal representadas.

<u>El Análisis Factorial de Correspondencias</u> (AFC)

Sigue el mismo principio, pero la distancia utilizada es la de ^{2}, lo que permite tratar mejor el caso de una matriz de incidencia (variables dicotómicas).

Además los sujetos y las variables se pueden situar en un mismo espacio. De esta manera es posible interpretar las proximidades de los sujetos entre ellos, la de las variables entre ellas y las de los sujetos con las variables. Este análisis trata a la vez los puntos de vista c) y d).

El AFC utiliza como datos tablas de contingencia (análisis de correspondencias simple) disyuntivas completas o de datos ordinales (análisis de correspondencias múltiples). Para el caso de tablas de contingencia se estudia la estructura de asociación entre dos variables cualitativas, permitiendo apreciar qué valores de cada una de las variables está asociado con cada valor particular de la otra variable.

En el caso del análisis de correspondencias múltiple, se propone dar una representación geométrica, en general en un espacio de dimensión grande, de una distribución conjunta de dos conjuntos: E (en general el conjunto de los sujetos) y V (en general el de variables o el de las modalidades de las variables).

Cada uno de estos conjuntos E y V admite un espacio de representación en el que los puntos son los "perfiles" de uno sobre el otro, traduciendo así las relaciones, las correspondencias entre E y V. Al estar estos espacios provistos de una distancia ^{2}, diremos que dos sujetos están tanto más próximos cuanto más parecido es su comportamiento en relación con las variables y, en particular, en relación con las variables menos frecuentes y por tanto las menos triviales.

El método analítico consiste entonces en entonces en extraer, a partir de los espacios de representación, subespacios de dimensión reducida, pero tales que, en ellos, la nube de puntos de E o de V se represente de manera óptima mediante sus diferentes proyecciones. A los ejes de estos subespacios corresponden factores discriminantes en los conjuntos E y V: el primero es el que más información suministra, el segundo algo menos, etc. El investigador en didáctica debe entonces determinar la significación de estos factores, mediante la observación de la oposición y la proximidad de las proyecciones de los puntos. Esta significación le servirá para analizar y después interpretar las informaciones más escondidas que se deducen de ella. Asimismo se interesará en las contribuciones de ciertos puntos a estos factores y, por ejemplo, en las posiciones relativas de los subgrupos de la población estudiada, entre otras cuestiones.

El Análisis Jerárquico de Similitudes según I. C. Lerman

Como en todos los métodos de clasificación, se busca constituir particiones cada vez menos finas, en el conjunto V de las variables, construídas de manera ascendente en árbol, con la ayuda de un criterio de similitud entre variables. El investigador en didáctica se interesa en este tipo de análisis que le permite estudiar e interpretar en términos de tipología y de proximidad (y de lejanía) decreciente de los núcleos de variables, constituídos significativamente a ciertos niveles del árbol, oponiéndose a otros núcleos en esos mismos niveles.

El criterio de similitud se expresa de la manera siguiente:

- Dos variables "a" y "b" están tanto más próximas, cuanto más importante es el número de sujetos que las satisfacen simultáneamente (A B) con relación a los cardinales de A y B y con relación a los que habría habido si las variables "a" y "b" no hubiesen estado ligadas a priori (ver figura 2). Esta proximidad se mide a través de la probabilidad de su inverosimilitud.

De esta manera, el índice definido entre las variables no está sesgado por las frecuencias absolutas y puede servir posteriormente para definir un índice de similitud entre clases de variables.

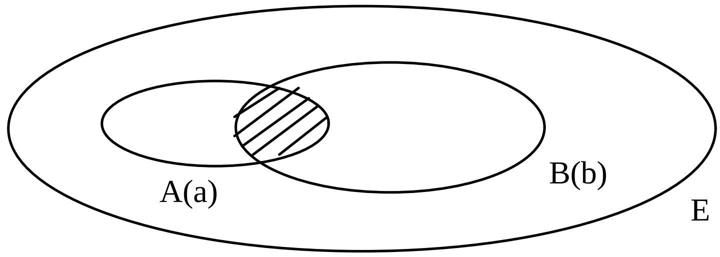


Figura 2

Así pues, para construir un árbol de clasificación, primeramente se reúnen en una clase al nivel más bajo las dos variables que más se parecen según este índice, después se unen otras dos variables o, como en el ejemplo de la figura 3, una variable a la clase ya formada, después otras variables o clases de variables, etc.

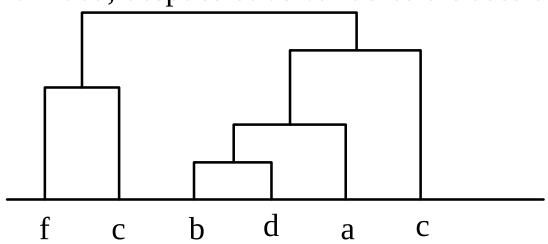


Figura 3

El Análisis Implicativo

Al contrario de todos los métodos anteriores, en los que la distancia o el índice de similitud son simétricos, el método implicativo no es simétrico. La problemática general que introdujo el método es la siguiente (ver figura 4), en el caso en el que las variables consideradas son binarias (un individuo satisface o no una variable):

Si A y B son las subpoblaciones de los sujetos que han satisfecho respectivamente las variables "a" y "b", ¿en qué medida se puede decir a entonces b, sin que la implicación sea debida al azar?

Si B   A, la proposición se verifica, pero normalmente lo que se tiene es una intersección $A \quad \bar{B}$ no vacía.
El índice de implicación mide, de una manera comparable al de similitud, hasta qué punto es la pequeñez de $A \quad \bar{B}$ con relación a la independencia a priori y a las frecuencias absolutas observadas. Así pues, se dirá por ejemplo que, siendo X e Y dos partes aleatorias de E, que tienen respectivamente los mismos cardinales que A y B, es admisible con una probabilidad igual a 0,95 si y solamente si:

Prob [card $(X \quad \bar{Y}) <$ card $(A \quad \bar{B})$] < 0,05.

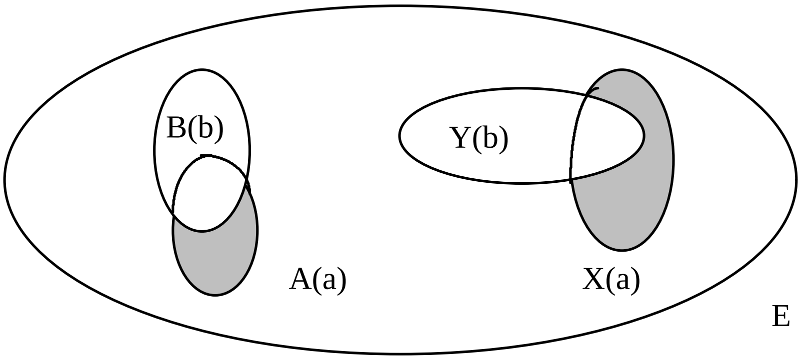


Figura 4
Un árbol implicativo rinde cuenta del orden parcial inducido por esta intensidad de implicación.
La implicación entre variables no resulta suficientemente sintética en algunos casos y Régis Gras creó a partir de ella (y para satisfacer una demanda surgida de la didáctica de las matemáticas, en concreto de Gérard Vergnaud) la implicación entre clases de variables.
En una reciente obra (Gras 1996), el autor expone en detalle el método, su fundamento teórico y sus aplicaciones didácticas.
De una manera general, los dos métodos basados en la similitud y la implicación han permitido en diversos trabajos definir procedimientos e incluso concepciones estables y consistentes, a partir de clases de comportamientos; Batanero C., Godino J. D. y Navarro-Pelayo V. (1995), aplican el análisis implicativo, en combinación con otros métodos, a la evaluación del razonamiento combinatorio de alumnos secundaria.
Procedimiento para la utilización de los métodos del análisis de datos
Para Gras (1992), las nuevas perspectivas que ofrece el análisis de datos crean la *ilusión* de que los datos recogidos y tratados sin una elección oportuna del método a seguir y sin hipótesis previas, van a proporcionar informaciones claras y resultados organizados.
El procedimiento que propone Gras (1992) es el siguiente:

- elegir un método de análisis;

- elaborar una tabla de datos exhaustiva, pertinente, homogénea y compatible con el método elegido;

- poseer un conocimiento matemático que controle y facilite la interpretación e

- interpretar los resultados numéricos y gráficos de manera sintética y con una cierta distancia y saber restringir o extender los datos para un segundo análisis que confirme o critique las primeras interpretaciones. Finalmente y, llegado el caso, practicar un método inferencial».

El "segundo análisis" puede convertirse en varios análisis sucesivos, puesto que las observaciones efectuadas en didáctica de las matemáticas tienen en general un carácter dinámico y para dar cuenta de él no basta con un solo análisis, que vendría a ser como una instantánea –una fotografía– de la contingencia.

5. Un resultado del análisis implicativo

En un cuestionario sobre proporcionalidad (Lacasta 1995) en el que se planteaban a una muestra de 110 alumnos problemas paralelos, redactados de diversas formas (a través de un gráfico, de un texto y de una tabla numérica), entre otros análisis multivariantes, se realizó un análisis implicativo[1] y se encontró que el éxito en los problemas planteados a través de un texto o de una tabla numérica (variables "Tx" y "Tb"), implicaba el éxito en los problemas planteados gráficamente (variable "G"):

{Tx, Tb}   {G}

Se podría pensar que será mejor plantear primero los problemas mediante textos o tablas, porque su resolución implica la resolución gráfica.

Ahora bien, en términos conjuntistas, el conjunto de los alumnos que resuelven los problemas planteados a través de texto o tabla (llamémosle "T") está "estadísticamente incluído" en el de los alumnos que resuelven los problemas de proporcionalidad planteados gráficamente (llamémosle "G"):

G   T

Se podría pues pensar también que, puesto que prácticamente sólo entre los alumnos que resuelven gráficamente esos problemas, se pueden encontrar aquéllos que continuarán resolviéndolos planteados de otra forma, será mejor empezar por el planteamiento gráfico.

Esta especie de paradoja pone de manifiesto que, si bien el análisis implicativo es un buen instrumento para el investigador, el establecimiento de conclusiones no se puede hacer, llevados por la novedad o por la pertinencia del método (éste u otro), de manera simplista o meramente empirista. François Pluvinage (1986), sin referirse en particular al análisis implicativo, advierte que no existe un "método canónico" que pueda practicarse con la exclusión de los demás y que .

6. Tercera estrategia estadística: ordenar los modelos sucesivos, separar la variabilidad explicada de la variabilidad aleatoria

---

[1] Se realizó a través de una de las versiones del programa informático CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive), Université de Rennes 1, IRMAR, 35042 Rennes Cedex - FRANCIA.

Las dos estrategias anteriores ponen de manifiesto que, ante un conjunto de datos, se pueden proponer distintas leyes matemáticas y modelos estocásticos y se pueden aplicar varios métodos para probar el valor de esas leyes como modelos para esos datos. Tras esta aplicación de los métodos, finalmente se retendrán algunas de esas leyes y se rechazarán otras.

Pero en este caso hay que establecer una estrategia de conjunto para elegir los modelos que se examinarán sucesivamente.

Se trata de examinar las fluctuaciones de los valores en torno a la media, o más generalmente en torno al modelo y la ley que se le puede atribuir: es decir, analizar la varianza.

La tercera estrategia consiste en descomponer la varianza en varianza explicada por el modelo determinista y varianza residual explicada por el azar y comparar las proporciones de una y otra.

7. A modo de conclusión

En la búsqueda de la validación de una hipótesis, coincidimos con Régis Gras en que se trata de encontrar un justo equilibrio entre el desprecio de los métodos estadísticos, el rechazo a invertir tiempo y esfuerzo en este campo y la "estadísticomanía", que conduce a una gran cantidad de resultados inaprovechables. Si el investigador en didáctica de las matemáticas conoce los principios, alcance y limitaciones de esos métodos, podrá usarlos o no, pero estará en mejores condiciones para tomar las decisiones oportunas en su trabajo y para juzgar la pertinencia del aparato estadístico utilizado en otras investigaciones.

La existencia de numerosos programas estadísticos (SPSS, STATITCF, BMDP, Excel, CHIC, etc…) puede facilitar el que el investigador se lance a una vorágine estéril de representaciones y cálculos, utilizando el máximo de métodos, lo más sofisticados posible, despreciando algunas veces las aplicaciones estadísticas más sencillas (como la mera observación de un histograma de frecuencias), que le pueden ayudar mucho más eficazmente en los primeros pasos de su investigación.

Reconocimientos

Agradezco a Carmen Batanero el interés mostrado por este escrito y sus acertadas sugerencias, que he procurado seguir. Asimismo agradezco a Guy Brousseau sus críticas y el ánimo recibido.

Bibliografía

AMON, J. (1990): *Estadística para psicólogos,* Ed. Pirámide. Madrid.

BATANERO C., GODINO J. D. y NAVARRO-PELAYO V. (1995): 'The Use of Implicative and Correspondence Analysis for assessing Pupil's Combinatorial Reasoning', Actes du Colloque *Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques,* pp. 245-256, IUFM Caen, R. Gras éd. U. de Rennes.

BROUSSEAU G. (1993a): *Stratégies de l'analyse statistique,* LADIST. Université Bordeaux I.

BROUSSEAU G. (1993b): *Fiches de Statistiques non paramétriques pour la didactique,* LADIST. Université Bordeaux I.

BROUSSEAU G. y LACASTA E.(1995): 'L'analyse statistique des situations didactiques', Actes du Colloque *Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques,* pp. 53-90, IUFM Caen, R. Gras éd. Université de Rennes.

GRAS R. (1992): 'L'analyse des données : une méthodologie de traitements de questions de didactique' *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 12 nº 1, pp. 59-72.

GRAS R. (1996): *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données. Applications à la didactique.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

LACASTA ZABALZA E. (1995): *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: illusions et contrôles,* LADIST, Université Bordeaux I.

PLUVINAGE F. (1986): 'Codages et analyses de réponses à des questionnaires de mathématiques'. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Année 1985-86,* pp. 211-228, LSD-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

SIEGEL S. (1990): *Estadística no paramétrica. Aplicada a las ciencias de la conducta,* Trillas, México.

GRUPOS DE TRABAJO

INFORME DE LA COORDINADORA, DRA. V. SÁNCHEZ

INFORMES DE LOS COORDINADORES DE LOS GRUPOS

DEBATE FINAL

BALANCE DE LOS GRUPOS DE TRABAJO

Victoria Sánchez
Universidad de Sevilla

Resumen
Se presenta una panorámica de las sesiones de discusión llevadas a cabo por los diferentes grupos dentro del Simposio. Se recogen las conclusiones elaboradas por los coordinadores de las sesiones de los distintos grupos, así como los aspectos mas relevantes de la discusión final.

Introducción

Uno de los objetivos fundamentales de la SEIEM desde su creación, incluído dentro de los Estatutos de la Sociedad, ha sido "Promover la constitución de grupos de investigación estables en Educación Matemática, con producción propia cualificada, que delimiten prioridades y aborden cuestiones de indagación específicas". La puesta en marcha de estos grupos dentro de la SEIEM ha sido muy diversa, variando desde aquellos que nacieron ya como grupos consolidados, a los que se han formado dentro de la sociedad o nacido dentro de ella.

Estas diferentes situaciones han tenido su influencia en la relación entre los miembros de los grupos en este último año. En algunos de ellos, la comunicación entre sus componentes ha sido fluída, bien por pertenecer ya a algún grupo estable o por haber participado en reuniones organizadas por los coordinadores. En otros, con una mayor dispersión, el tiempo ha transcurrido tratando de establecer tomas de contacto.

Todos estos esfuerzos de coordinadores y miembros de los distintos grupos han logrado que, en el Simposio de Zamora, se pudiese contar ya con una base que permitirse establecer discusiones que comenzaban a ir más allá de las puramente organizativas. En la sesión dedicada a la reunión de los diferentes grupos, se fueron ya perfilando diferentes líneas de actuación, tanto en la búsqueda de información sobre temas de investigación concretos como en la delineación de posibles puntos de discusión y líneas de trabajo.

Los coordinadores de los grupos, o sus representantes en el caso de los grupos de Aprendizaje de la Geometría y Didáctica de la Estadística, que ante la imposibilidad de asistir de Angel Gutiérrez y Carmen Batanero encargaron la coordinación de las sesiones a Modesto Arrieta y Antonio Estepa respectivamente, elaboraron y presentaron unas conclusiones. Siguiendo nuestro criterio de potenciar al máximo el papel de los grupos, las incluímos textualmente a continuación. Asimismo, incluímos la propuesta enviada por el coordinador del grupo de Historia de la Educación Matemática.

Conclusiones presentadas por los coordinadores de las Sesiones de cada uno de los Grupos de Investigación.

Grupo de Trabajo: Didáctica del Análisis

Después de una presentación personal de los asistentes (11 personas), se trataron los siguientes temas:

* Grupos de trabajo y líneas de Investigación

Citamos los grupos de trabajo representados, su ubicación, temas de estudio e infraestructura disponible junto con personas que asistieron.

Universidad de Salamanca: Modesto Sierra, Maite González Astudillo y Carmen López Esteban.

Tema de estudio: Límites y continuidad.

2 proyectos de investigación financiados por el CIDE y la Junta de Castilla-León.

Se ocupan de las concepciones de los alumnos, la transposición didáctica, y la evolución de los libros de texto desde la Guerra Civil hasta ahora.

Disponen de buena infraestructura (biblioteca, ordenadores, software).

Universidad de Valladolid: Tomás Ortega, Sonsoles Blázquez y Consuelo Monterrubio.

Tema de estudio: Límites. Desarrollo numérico y desarrollo curricular.

1 proyecto financiado por la Junta de Castilla-León para preparar software educativo (proyecto curricular).

Tienen un programa de doctorado.

Disponen de buena infraestructura (biblioteca, ordenadores, software).

Universidad de La Laguna: Matías Camacho.

Tema de estudio: Uso de la calculadora gráfica para la enseñanza del análisis.

Tienen un programa de doctorado (12 créditos) que inicia el cuarto bienio. Se da un curso de Didáctica del Análisis.

Tienen un seminario donde participan varios estudiantes hispanoamericanos becados que hacen su doctorado y profesores de instituto.

Disponen de buena infraestructura (biblioteca, ordenadores, software).

Universidad Pública de Navarra (Pamplona): Eduardo Lacasta.

Tema de estudio: Funciones y tratamiento gráfico.

Tienen un programa con fondo europeo Aquitania-Navarra.

Tienen un programa de doctorado (dos cursos).
Disponen de buena infraestructura (biblioteca, ordenadores, software).

Universidad de Albacete: Pilar Turégano.
Tema de estudio: Modelización de ciertos fenómenos naturales. Fractales.
Trabaja sola. Dispone de buena infraestructura.

Universidad de Autónoma de Barcelona: Carmen Azcárate y Juan Manuel García Dozagarat (que es de Madrid pero sigue el programa de doctorado de la UAB).
Tema de estudio: Límites de funciones (aprendizaje y enseñanza). Aprendizaje de las derivadas. Aprendizaje de las integrales. Infinito. Aprendizaje de las funciones. Enseñanza de las ecuaciones diferenciales en facultades de Biología y Química.
1 proyecto que ya se acaba, financiado por la Generalitat. Pendientes de su prolongación. Pendientes de un proyecto de la DGYCIT en coordinación con las universidades de Salamanca (Modesto Sierra) y La Laguna (Matías Camacho).
Tienen un seminario donde participan varios estudiantes hispanoamericanos

Bibliografía Básica
En la lluvia de nombre de nuestra bibliografía, se comparten los nombres de Tall, Vinner, Dreyfus, Artigue, Cornu, Sierpinska, Janvier y aparecen algunos otros, pero sin concretar el área específica.

Propuestas Concretas
- Se propone celebrar dos reuniones anuales. La próxima podría coincidir con el Simposium de la Universidad Autónoma de Barcelona a finales de febrero de 1998. Carmen Azcárate enviará más información;
- Se propone intercambiar las producciones sobre Didáctica de las Funciones y del Análisis entre los equipos de trabajo; artículos, tesinas, tesis y ponencias.
- Se constata la necesidad de hacer lecturas comunes y discutir el marco teórico y la terminología. Para ello se propone hacer alguna lectura común y discutirla en las reuniones. Se propone trabajar sobre la conferencia de Artigue en las JAEM (publicada en las actas);
- En las reuniones se presentarán investigaciones en curso o recientes. En cada reunión, una o dos personas deberán comprometerse a presentar su trabajo, con las dificultades metodológicas que implica.

Coordinación:Carmen Azcárate
Departament de Didáctica de la Matemática i les Ciencies Experimentals

Universitat Autonoma de Barcelona. 08193 Bellaterra.
Tel: 93 581 26 43; Fax: 93 581 11 69
e-mail: c.azcarate@cc.uab.es

Grupo de Trabajo: Aprendizaje de la Geometría

Coordinador: Modesto Arrieta

* A la reunión han asistido 5 personas, lo cual ha permitido plantearla como un seminario de trabajo. Después de una presentación personal se ha pasado a informar sobre los temas en los que, habitualmente, trabaja cada uno de los asistentes y que más les interesan.
* Se ha elaborado una ficha con los datos anteriores, con las cuales comenzar la elaboración de un informe sobre los miembros del grupo.
* Un acuerdo adoptado ha sido comenzar a recopilar referencias de las tesis dedicadas a la Didáctica de la Geometría en España, y ampliar la información con tesis realizadas en otros países.
* Los temas sobre los que se mostró más interés fueron:
- Capacidad espacial de los alumnos de Infantil y Primaria. Mejora de esa capacidad.
- Análisis de los procesos para el aprendizaje de la demostración.
- Influencia de los recursos (materiales, software,...) en el aprendizaje de la Geometría.
- Diagnóstico de las dificultades de aprendizaje en Geometría.
* Se realiza una valoración positiva del planteamiento que se ha hecho en este primer Simposio con la presentación de dos de las líneas de investigación, centradas en el conocimiento didáctico de los profesores de Matemáticas y en la clasificación de los problemas aditivos. Por ello se sugiere al coordinador de Grupo, Angel Gutiérrez que convoque un Seminario para la presentación y debate de las líneas de investigación más relevantes sobre aprendizaje de la Geometría que actualmente hay en España. De este modo se estará en condiciones de planificar a corto y medio plazo el funcionamiento del grupo.

Coordinador: Modesto Arrieta. Universidad del País Vasco

Grupo de Trabajo: Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Introducción

Los orígenes de este grupo se remontan a 1985, cuando se estableció un grupo de investigación sobre el tema en el Colegio Universitario de Jaén, que trasladó su sede a la Universidad de Granada y se consolidó definitivamente con la aparición del primer Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada en el año 1988.

Posteriormente, en la reunión de constitución de la Sociedad, profesores de otras universidades se incorporaron al grupo, cuya coordinadora inicial durante este período ha sido Carmen Batanero.
En la reunión de Zamora la coordinadora no pudo asistir, y el grupo fue coordinado por Antonio Estepa. Asistieron a la reunión los profesores Mª Jesús Cañizares, Juan Jesús Ortiz, Luis Serrano y Angustias Vallecillos, quienes elaboraron el informe que se presenta a continuación, que resume el trabajo desarrollado en los últimos diez años.

Situación actual de las investigaciones del grupo
1. El grupo ha participado en proyectos con financiación externa en el Programa de Promoción General del Conocimiento (DGICYT), Acciones integradas Hispano-Británicas e Hispano-Italianas, Proyecto Europeo Tempus Phare y Plan Andaluz de Investigación.
2. Se han publicado artículos en las revistas *Journal for Research in Mathematics Education*, *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, *Hiroshima Journal in Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics Education*, *Teaching Statistics*, *International Journal in Mathematics Education Science and Technology*, *Induzioni*, *Educación Matemática* y *EMA*, así como en la mayoría de revistas nacionales de educación matemática.
3. Se han finalizado 5 Tesis Doctorales y 6 Memorias de Tercer Ciclo sobre Didáctica de la Estadística o Probabilidad y otras dos tesis están a punto de defenderse en Granada y Cádiz.
4. Hay una tradición consolidada de participación en Congresos Internacionales, destacando ICOTS 1994, PME 1990 a 1997, ICME 1992 y 1998, I CIBEM, 51 Sesión del ISI 1997, 1996 IASE Round Table Conference, Colloque: Methodes d'Analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathematiques, 1995.
5. Miembros del grupo participan activamente en Grupos de Investigación Internacionales. Desde Granada se coordina el International Study Group on Learning and Teaching Statistics and Probability, y el Stochastic Teaching and Learning PME Group. También se edita la revista electrónica *Newsletter of the International Study Group on Learning and Teaching Statistics and Probability*. Se ha organizado la 1996 IASE Round Table Conference, que se celebró en Granada, con el tÌtulo: "*Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics*". Se participa actualmente en la organización de otros congresos internacionales.
6. Se participa en los siguientes Programas de Doctorado:
* Universidad de Granada. Tres programas en los departamentos de

Didáctica de la Matemática, Didáctica de la Lengua, Didáctica y Organización escolar
* Universidad de Almería. Departamento de Didáctica
* Universidad de Jaén. Departamento de Matemáticas
7. Esta información se está organizando e incluyendo en una página Web (http://www.ugr.es/~batanero).

Perspectivas de futuro
El grupo se propone potenciar y perfeccionar la investigación en esta línea, así como la difusión y aplicación de los resultados de investigación, en programas de formación de profesores y desarrollos curriculares. En concreto, para lograr estas metas, nos proponemos los siguientes objetivos:
1. Organizar el Grupo español de Investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
2. Continuar las relaciones internacionales y potenciarlas, especialmente con Hispanoamérica
3. Continuar editando y mejorando una revista electrónica.
4. Coordinar y desarrollar una agenda de investigación para los próximos años que incluya alguno de los temas siguientes:
* Seleccionar problemas, temas y metodología de investigación relevantes
* Construcción de instrumentos de investigación propios
* Diseñar y desarrollar experimentos de enseñanza
* Análisis curriculares de los distintos niveles educativos
* Desarrollos curriculares
* Diseño de programas de formación para profesores de enseñanza no universitaria de contenido estocástico y didáctico

Nuevo coordinador
Carmen Batanero ha sido elegida recientemente miembro del comité ejecutivo del IASE (International Association for Statistical Education) para el perÌodo 1997 -99. Por este motivo, se decidió proponer un nuevo coordinador del grupo SEIEM, con el fin de repartir las responsabilidades. Por acuerdo general de los asistentes a la reunión se decidió elegir como nuevo coordinador a Antonio Estepa.

Coordinador: Antonio Estepa. Universidad de Jaén

Grupo de Trabajo: Pensamiento Numérico y Algebraico

Asistentes:

Castro Martínez, Encarnación (Universidad de Granada); Castro Martínez, Enrique (Universidad de Granada); Cubillo Durán, Carmen (Universidad de Valladolid); Fernández Lajusticia, Alejandro (Universidad de Valencia); Fernández Méndez, José Luis (Universidad de Vigo); Girondo Pérez, Mª Luisa (Universidad Rovira i Virgili); Gómez Alfonso, Bernardo (Universidad de Valencia); Margarit Garrigues, Juan (Univerdidad de Valencia); Martinón Cejas, Antonio (Universidad de La Laguna); Méndez Domínguez, Azucena (Universidad de Valladolid); Pascual Bonís, J. Ramón (Universidad Pública de Navarra); Puig Espinosa, Luis (Univerdidad de Valencia); Rico Romero, Luis (Universidad de Granada); Socas Robayna, Martín (Universidad de La Laguna).

En esta primera reunión los asistentes acuerdan constituir formalmente el Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico y proceden a perfilar sus metas y objetivos para el futuro inmediato.

Los objetivos propuestos son:

Próxima reunión del grupo a celebrar en Valencia en el mes de Marzo o Abril de 1998. En su momento se hará la convocatoria pertinente.

Se acuerda elaborar un boletín con soporte electrónico para información interna de los miembros del grupo, transmisión de noticias, y recopilación sistemática de datos de interés con el fin de elaborar una base de datos del grupo. En este boletín del grupo NAT (Numerical and Algebraical Thinking) se incluirá información sobre: bibliografía básica, resúmenes de tesis y trabajos realizados, síntesis de proyectos en curso, programas y cursos de doctorado, y otros.

Se elabora una lista de temas para próximas reuniones del grupo: discusión sobre un problema o tema de investigación de interés común; difusión de las producciones de los miembros del grupo; sintetizar los trabajos del grupo mediante elaboración de documentos; presentación de trabajos en curso.

Los asistentes presentaron su línea o líneas principales de investigación. Esta presentación dió lugar a precisar los temas y problemas que preocupan a los miembros del grupo. También surgen otras cuestiones conexas a saber: necesidad de presentar líneas de investigación abiertas que sirvan para iniciar nuevos trabajos; necesidad de discutir y unificar criterios sobre el significado de los términos y conceptos utilizados mediante la delimitación de descriptores.

Coordinador: Bernardo Gómez. Universidad de Valencia.

Grupo de Trabajo: Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor

Asistentes:

C. Abraira (Universidad de León), P. Azcarate (Universidad de Cadiz), L. Blanco (Universidad de Extremadura), L.C. Contreras (Universidad de Huelva), J. Carrillo (Universidad de Huelva), M. García (Universidad de Sevilla), S. Llinares (Universidad de Sevilla), Mª C. Martín (Universidad de Valladolid), V. Sánchez (Universidad de Sevilla), E. Vidal (Universidad de Santiago)

Previo al simposio se repartió entre los miembros del grupo el siguiente orden del dia derivado de la reunión celebrada en Sevilla en Noviembre - 96

Orden del dia:

1. Dossier
    1.1. Actualización directorio miembros del grupo
    1.2. Establecer indice del dossier y criterios de introducción bibliográfica
2. Caracterizar líneas de investigación dentro del grupo
    * ¿qué entendemos por líneas de investigación en formación de profesores de matemáticas?
3. Terminología, significados y constructos teóricos utilizados en las investigaciones
    * concepciones, creencias
    * conocimiento de contenido pedagógico/ conocimiento didáctico del contenido
    * conocimiento profesional
4. Discusión documento Dic-96 "Caracterizar las cosas que nos unen"
5. Contenido y organización de la presentación del grupo en la sesión del sábado.

Debido a lo denso del orden del dia solo se trataron los siguientes puntos:

1.1.Se actualizó el directorio del grupo

1.2. Se determinó el siguiente indice del dossier como una guía para cada uno de los miembros del grupo:

* Publicaciones
    - libros
    - capítulos de libros
    - artículos
    - actas
* Ponencias, conferencias, comunicaciones
    - conferencias

- ponencias
- comunicaciones, poster, etc

* Proyectos de investigación subvencionados
* Grupos de investigación

2. Se discutió la necesidad de modificar el nombre del grupo para adecuarlo a las líneas de trabajo que estan desarrollando los diferentes componentes.

Por consenso se acordó como nuevo título del grupo de trabajo dentro de la Sociedad:

Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor

con los siguientes descriptores:

* Actitudes, creencias, conocimiento y comprensión, cambio y desarrollo profesional, formación de profesores

Las lineas de investigación desarrolladas por los miembros del grupo de trabajo en estos momentos son:

* concepciones y resolución de problemas
* concepciones y núcleos temáticos
* estrategias de formación
* teorización sobre el desarrollo profesional
* conocimiento profesional del profesor de matemáticas
* aprender a enseñar matemáticas

Coordinador: Salvador LLinares. Universidad de Sevilla.

Grupo de Trabajo: Educación Infantil

En el Primer Simposio de la SEIEM, se ha constituido el Grupo de trabajo de Educación Infantil. Después de un serio debate sobre los distintos puntos de vista de los miembros del grupo respecto a la investigación en este campo, se ha acordado con entusiasmo:

* Involucrar a todos los asistentes al I Simposio para que difundan en sus respectivas Universidades la constitución y funcionamiento del Grupo de Trabajo.

* El compromiso por parte de los miembros del Grupo de trabajo de:

- Elaborar un dossier que recoja tesis, tesinas, publicaciones, trabajos, proyectos de investigación y proyectos docentes presentados en los concurso-oposición con el perfil de Educación Infantil. Todo ello encaminado a engrosar· el dossier que la SEIEM quiere conseguir, al que luego podremos acceder desde cualquiera de los grupos.
- Revisión bibliográfica de investigación en Matemática, desde cualquiera de los grupos.
- Revisión bibliográfica de investigación en Matemáticas, en Educación

Infantil (3-6 años).

- Reflexión sobre los problemas básicos actuales, en el Area de Comunicación y Representación Matemática, acerca del proceso de aprendizaje y enseñanza en Educación Infantil, diferenciándolos de los que suponen la adecuación de programas en la formación de profesores de Educación Infantil, tema de estudio en otro foro.
- Fechar una reunión, para principios del 98, en el lugar que se decida, después de haber contactado con los interesados en el grupo.

Coordinadora : Carmen Corral, Universidad de Oviedo.
E.U. de Magisterio. C. Aniceto Sela s/n 33005 (Oviedo)
e-mail : ccorral@pinon.ccu.uniovi.es

Grupo de Trabajo: Historia de la Educación Matemática

Propuestas presentadas sobre posibles lÌneas de acción del grupo de Historia de la Educación Matemática

A. Concretadas al ámbito de la Historia de la Educación Matemática.

1. Inventariado de los textos antiguos españoles de matemáticas correspondientes a todos los niveles del sistema educativo (desde la enseñanza infantil hasta la universitaria). El intervalo temporal podría ceñirse inicialmente al siglo XIX y una parte del XX (hasta los años 50). Supondría la cooperación de personas o equipos de diferentes autonomías para llevar a cabo una búsqueda sistemática en bibliotecas y archivos de cada comunidad. Cada obra localizada podría identificarse mediante una ficha técnica que incluiría, junto con los datos físicos de libro, información sobre contenidos, metodología, innovaciones pedagógicas, nivel escolar y ámbito de utlización. Además, y de ser ello posible, referencias sobre las circunstancias de la edición, su número, y sobre el autor o autores. Podría así constituirse un catálogo que sería una fuente primaria básica para las investigaciones en el campo de la Historia de la Educación Matemática en la España contemporánea. Esta tarea ha sido sólo parcialmente realizada en algunos ámbitos reducidos, por ejemplo para los libros de texto en lengua catalana.
2. Localización y valoración de aquellos fondos relacionados con la educación en general y matemática en particular, dispersos en centros de enseñanza e instituciones tanto privados como públicos. También esta línea implica la cooperación de personas o grupos de diferentes comunidades españolas. El objetivo es no sólo el de inventariar fondos para futuras investigaciones, sino también el de intentar preservar esos materiales de su destrucción.

B. Trascienden el ámbito propiamente dicho de la Historia de la Educación

Matemática.
Se ha propuesto ampliar el campo de acción de este grupo incluyendo otros temas que gozan de cierta afinidad con la Historia de la Educación Matemática bien por requerir, en mayor o menor medida, el uso de las metodologías empleadas en las investigaciones históricas, o por recurrir con frecuencia a la perspectiva diacrónica en el análisis de la información estudiada, o bien por compartir con la Historia de la Educación Matemática la misma preocupación por relacionar las matemáticas, la educación y la sociedad. Este sería el caso, entre otros, de temas como el de la etnomatemática, de las relaciones entre lenguaje y matemáticas, de la literatura didáctico- matemática, de las matemáticas y la diversidad, y otros.
Todos aquellos compañeros que estéis interesados en estas propuestas o en sugerir otras dirigiros al coordinador del grupo.

Coordinador: José Mª Núñez Espallargas. Universidad de Barcelona.
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática.
Passeig de la Vall d'Hebrón, 171, 08035, Barcelona.
Tel: (93) 4 03 50 31. Fax: (93) 4 03 50 13

Debate final

Estas conclusiones fueron presentadas y debatidas en una sesión posterior conjunta de la que mencionamos algunas intervenciones que, a su vez, fueron motivo de intercambio colectivo de opiniones que nos ha sido imposible recoger. En la primera de ellas, retomando ideas planteadas en algunos grupos sobre las que le parecía importante incidir, Carmen Azcárate sugirió la necesidad de potenciar una comunicación lo más fluida posible, utilizando un Boletín electrónico como medio de difusión. También señaló como positivo incluir los descriptores de cada grupo en su identificación, con objeto de facilitar la posibilidad de ver las intersecciones con los descriptores de otros grupos. Asimismo, llamó la atención sobre la importancia de una proyección adecuada de los trabajos de la sociedad por parte de sus miembros.

Qué se podría considerar una proyección adecuada fue objeto de diferentes intervenciones. Entre ellas, Luis Rico indicó como aspecto positivo la mención a la pertenencia como miembro de la Sociedad siempre que fuese pertinente.

Posteriormente, Lorenzo Blanco insistió en la necesidad de crear canales de información entre grupos, sugiriendo que el coordinador de cada grupo enviase a los otros coordinadores información periódica, y que estos la divulgasen entre su grupo. Se entabló un debate y se sugirió por varios asistentes, entre ellos por Tomás Ortega, la posibilidad de elaborar una página Web, solicitándose a este último que recogiese información, para tomar una futura decisión.

Pensamos que, en conjunto, las dos sesiones dedicadas dentro del Simposio a los grupos de trabajo han cumplido ampliamente su objetivo. A partir de ahora, podemos afirmar que su consolidación es ya un hecho y que, gracias al esfuerzo de sus miembros, empiezan a tomar el papel relevante que se pretendía cuando se redactó el objetivo de nuestra Sociedad que nos ha servido como punto de partida para comenzar estas páginas.

EVALUACIÓN DEL SIMPOSIO

ENCUESTA DE EVALUACIÓN A LOS PARTICIPANTES

RECULTADOS DE LA ENCUESTA: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS.

DR. E. LACASTA.

Encuesta a los participantes en el
Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Gracias por remitir este cuestionario a la organización antes de las 13h. del sábado día 13.

1 Organización material

1.1- ¿Cómo te has enterado de la celebración del Simposio?
....
....
....

1.2- ¿Qué piensas de los documentos de presentación de este Simposio?
O información suficiente O información insuficiente *(precisa)*
....
....
....

1.3- Estancia

Estás satisfecho de:	mucho	bastante	poco	nada
el lugar elegido				
las salas de trabajo de los grupos de trabajo				
las salas de trabajo de los seminarios				
la comunicación de las informaciones (anuncio…)				

1.4- Ayuda puesta a tu disposición

	¿Has utilizado?		*¿Estás satisfecho?*			
	sí	no	mucho	bastante	poco	nada
Secretaría						
Material informático						
Biblioteca						

1.5- ¿Qué es lo que más te ha gustado?...
....
....

1.6- ¿Qué es lo que más has echado en falta? ....
....
....

2 Organización de las sesiones (independientemente de los contenidos)

Has apreciado	Mucho	Bastante	Poco	Nada
la densidad del trabajo diario				
los resúmenes de presentación de los seminarios y grupos de trabajo repartidos a tu llegada				
la disposición en paralelo de los grupos de trabajo				
la duración y frecuencia de los descansos				
la labor realizada en los grupos de trabajo				

3 Contenidos

3.1- Si has asistido, has apreciado el contenido de los seminarios y grupos de trabajo siguientes

	mucho	bastante	poco	nada
Seminario I : Profesor de matemáticas y contextos de investigación (viernes, 9:30)				
Seminario II: ¿Cómo estructurar las tareas que aparecen en un campo conceptual? (viernes, 12:00)				
Grupo: Didáctica del análisis matemático				
Grupo: Aprendizaje de la geometría				
Grupo: Didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria				
Grupo: Pensamiento numérico y algebraico				
Grupo: Formación de profesores de matemáticas				
Presentación del grupo de historia de la educación matemática				
Presentación del grupo de Educación Infantil				
Seminario III: Metodología de Investigación en Educación Matemática (sábado, 11:00)				

Comentarios a tus respuestas
....
....
....
....
....

3.2- Da las razones de tu decepción en el caso de los seminarios o grupos que menos te han gustado:
....
....
....
....
....

3.3- Cita uno o dos seminarios o grupos de trabajo que hayas apreciado particularmente y da la razones de tu
....
....
....

3.4- Los seminarios y grupos te han permitido:
- una apertura hacia otras problemáticas sí O no O
- informaciones sobre lo trabajos en marcha sí O no O
- debates sí O no O

3.5- Desearías que se tengan en cuenta otros aspectos, o que se organicen de distinta manera? *(precisa)*...
....
....

3.6- ¿Cuáles son a tu juicio los principales problemas de la investigación en didáctica de las matemáticas?...
....
....
¿Te ha ayudado este simposio a abordar mejor esos problemas?...
....

....
3.7- ¿Qué temas te van a ser de utilidad en la docencia o en la investigación?:
....
....
....
....
En las semanas o meses siguientes, ¿piensas volver a trabajar algunos puntos de los que se han tratado en el Simposio? :

sí O no O no sé O

En caso afirmativo, ¿cuáles? ....
....
. ...
....
3.8- Hay algunos elementos de los tratados que podrás utilizar

¿en tu investigación? O ¿en la formación de profesores? O

En caso afirmativo, ¿cuáles son los principales? ....
....
. ...
....

4 Los debates

4.1- La organización de un debate a partir de las intervenciones te parece:

absolutamente necesaria O relativamente útil O no necesaria forzosamente O

4.2- Momento de los debates : *prefieres que los debates tengan lugar*

inmediatamente después de cada intervención O

después de un cierto tiempo O

en ambas ocasiones O

4.3- Los debates te han aportado:

	en los seminarios	en los grupos
muy pocas cosas, casi nada	O	O
una aclaración	O	O
la confrontación con otros puntos de vista	O	O
otras	O	O

Opinión personal sobre los debates del simposio.: . ...
....
....
....
....

5 Próximos encuentros de la SEIEM

5.1- Por distintos motivos, este primer encuentro científico general de la SEIEM tras su constitución se ha realizado bajo la forma de un **Simposio** dentro del que se han celebrado seminarios con temas de debate y sesiones en paralelo de distintos grupos de trabajo. Otras posibles formas de trabajo en común se podrían organizar como **congreso**, en el que, sobre temas previamente elegidos se confrontarían resultados obtenidos en distintas investigaciones. Una **escuela** supondría la articulación del trabajo en torno a unos cursos de alto nivel, con la puesta en marcha de talleres y grupos de trabajo, en los que existiría un mayor reparto de trabajo e implicación de los asistentes para realizar diversas tareas (resúmenes de intervenciones, replicantes, comités de organización y de evaluación, biblioteca…)

¿Con qué fórmula estarías más de acuerdo?

Simposio O Congreso O Escuela O Indiferente O
Otros O
Precisa tu respuesta...
....
....
....
....
....
....
....

5.2- ¿Con qué frecuencia se debería hacer una reunión general de trabajo (simposio, congreso…) de la SEIEM?
3 veces al año O 2 veces al año O anual O una vez cada 2 años O
Otros O
Precisa tu respuesta...
....
....

5.3- ¿Cuál sería para tí la duración óptima de esa reunión?
más de una semana O una semana O 3 días O
otras O
Precisa tu respuesta...
....
....

5.4- ¿Qué época del año te parece la más adecuada para esa reunión?
....
....
....

5.5- Tienes alguna sugerencia en cuanto a los contenidos o los temas a tratar en la próxima reunión de la SEIEM?
. ...
....
....
....
....

6 Situación personal

6.1- Eres : O hombre O mujer
Tienes : O menos de 35 años O de 35 a 50 O más de 50

6.2- ¿A qué universidad perteneces?:
....
....
....

6.3- ¿A qué departamento perteneces?
O Didáctica de las Matemáticas O Matemáticas O otros (precisar)
....
....

6.4- Indica tu formación para la investigación

	Realizado	Estoy haciendo
Cursos de doctorado		
Doctorado		

6.5- ¿Cuál es tu situación profesional?:
O profesor titular de escuela universitaria O profesor titular de universidad
O catedrático de escuela universitaria O catedrático de universidad
O otras (precisar)
....

6.6- Asistes habitualmente a algún seminario o reunión científica?
O sí O no
En caso afirmativo, precisa la respuesta
....
....

6.7- Has venido al Simposio en tanto que: *(indica a lo más tres opciones, numerándolas por orden de importancia, siendo 1 la más importante)*
O profesor de didáctica O profesor de matemáticas O formador de profesores
O investigador en didáctica O tesando de didáctica de matemáticas O otras *(precisa)*
....

6.8- Otras precisiones que se te ocurran respecto a tu situación
....

Di alguna pregunta que te hubiera gustado encontrar en esta encuesta
....
....
....

Otras observaciones o propuestas
....
....
....

¡GRACIAS POR TU COLABORACIÓN!

RESULTADOS DE LA ENCUESTA A LOS PARTICIPANTES EN EL I SIMPOSIO

Eduardo Lacasta Zabalza

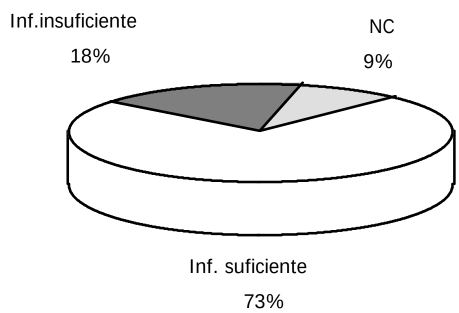
El objeto de este informe es el de proporcionar a los participantes del primer Simposio y a los organizadores del siguiente simposio, datos sobre las condiciones materiales, expectativas cumplidas o no, apreciaciones sobre los seminarios y grupos, posibles propuestas alternativas para los siguientes encuentros y estadísticas sobre los participantes.

Para ello se distribuyó una encuesta que fue respondida por 34 personas. Dado lo pormenorizado de algunas de las cuestiones, hemos hecho una selección –creemos que suficientemente descriptiva– del resultado. En concreto, algunas de las preguntas sobre los grupos de trabajo, al contar con pocos integrantes cada uno y al estar en distintas fases de existencia (unos muy consolidados y otros en período de formación), no se han tenido en cuenta. Exponemos a continuación algunos de los resultados generales.

I Análisis en términos de frecuencia

1 Organización material

¿Qué piensas de los documentos de presentación del Simposio?

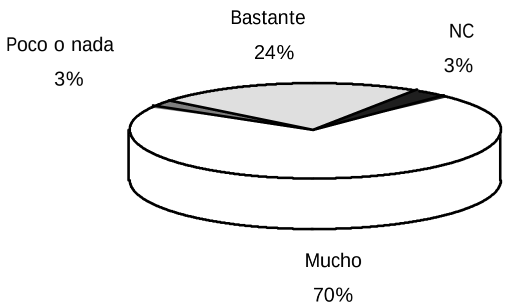


Información suficiente: 25 Información insuficiente: 6

No contestan (NC): 3

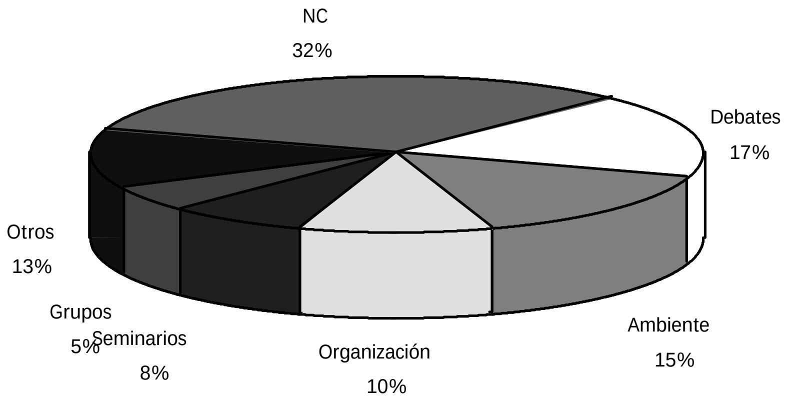
Además, 3 encuestados declaran que "es necesaria más antelación en la información" y uno que la "información es insuficiente, pero correcta, dadas las circunstancias".

¿Estás satisfecho del lugar elegido?



Mucho: 24 Bastante: 8 Poco o nada: 1 NC: 1

¿Qué es lo que más te ha gustado?



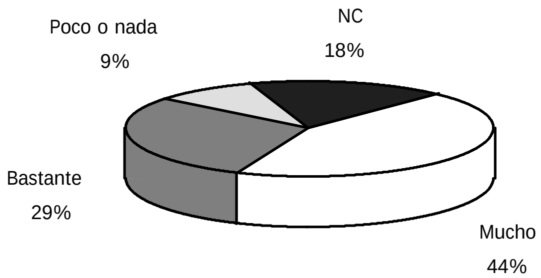
Los debates: 7
El ambiente, relaciones, contactos e intercambio personales: 6
La organización:4 Los seminarios: 3 Los grupos: 2
Otros: 5 NC: 13

2 Organización de las sesiones (independientemente de los contenidos)

En general se han apreciado "mucho" o "bastante" los distintos aspectos de la organización. No obstante, 7 asistentes no han apreciado la disposición en paralelo ni la labor realizada en los grupos de trabajo. Otros 8 tampoco han apreciado los resúmenes de presentación de los seminarios y grupos de trabajo.

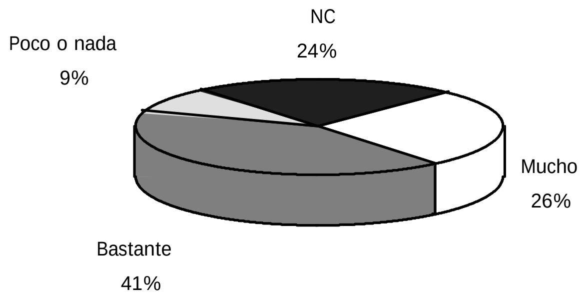
3 Contenidos

Has apreciado el contenido del Seminario I: "Profesor de matemáticas y contextos de investigación"



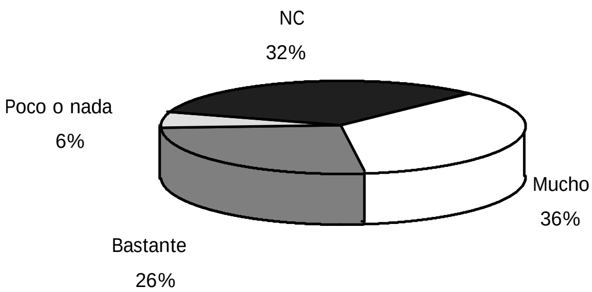
Mucho: 15 Bastante: 10 Poco o nada: 3 NC: 6

Has apreciado el contenido del Seminario II: "¿Cómo estructurar las tareas que aparecen en un campo conceptual?"



Mucho: 9 Bastante: 14 Poco o nada: 3 NC: 8

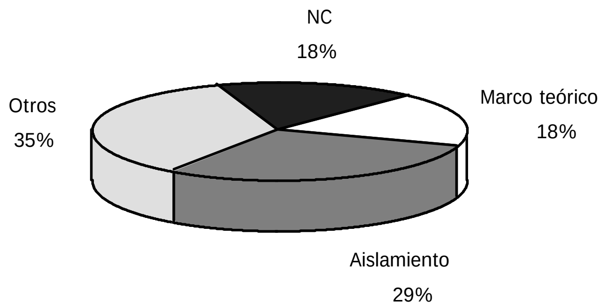
Has apreciado el contenido del Seminario III: "Estrategias del análisis estadístico para el tratamiento de cuestiones de didáctica"



Mucho: 12 Bastante: 9 Poco o nada: 2 NC: 11

La mayoría (entre 21 y 26 encuestados) piensan que los seminarios y grupos han permitido en general una apertura hacia otras problemáticas, informaciones sobre los trabajos en marcha y debates.

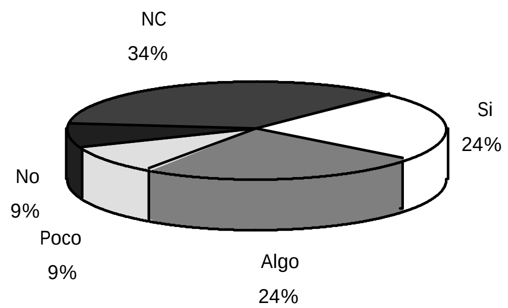
¿Cuáles son a tu juicio los principales problemas de la investigación en didáctica de las matemáticas?



A pesar de su carácter abierto, se dieron las siguientes coincidencias:

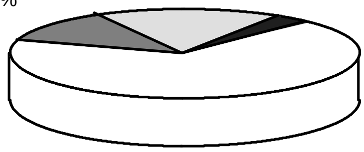
- Aislamiento de los investigadores: 10
- La existencia de distintas perspectivas teóricas inconciliables, unificación de la terminología, desarrollo y construcción de un marco teórico, formación específica en investigación (metodología), que hemos agrupado arbitrariamente en un solo apartado: 6
- Otros diversos: 12
- No contestan: 6

¿Te ha ayudado este Simposio a abordar mejor esos problemas?



Sí : 8 Algo: 8 Poco: 3 No: 3 NC: 12

En las semanas o meses siguientes, ¿piensas volver a trabajar algunos puntos de los que se han tratado en el Simposio?



Sí: 23	No: 4	No sé: 6	NC: 1

Hay algunos elementos de los tratados que podrás utilizar

¿En tu investigación?

Sí: 16 NC: 18

¿En la formación de profesores?

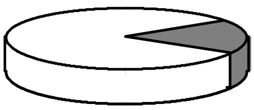
Sí: 15 NC: 19

¿Cuáles?

Seis asistentes mencionan temas relacionados con el Seminario III. En menor medida se mencionan la didáctica de la estadística, temas del Seminario II, del Seminario I, y cuestiones de terminología.

4 Los debates

La organización de un debate a partir de las intervenciones te parece



Absolutamente necesaria: 28; Relativamente útil: 6; No necesaria forzosamente: 0.

Momento de los debates

La práctica totalidad (32) prefieren los debates inmediatamente después de cada intervención.

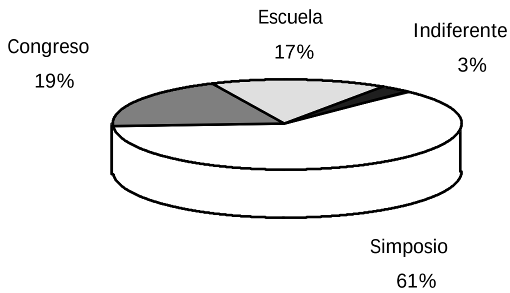
Los debates te han aportado:

	en los seminarios	en los grupos
muy pocas cosas, casi nada	2	3
una aclaración	7	2

la confrontación con otros puntos de vista 26 17

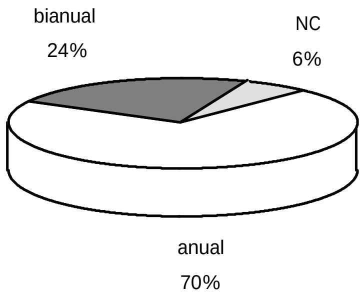
5 Próximos encuentros de la SEIEM

¿Con qué fórmula estarías más de acuerdo?



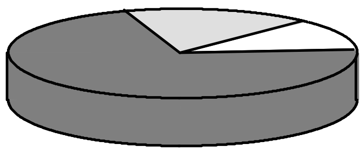
Simposio: 22 Congreso: 7 Escuela: 6 Indiferente: 1

¿Con qué frecuencia se debería hacer una reunión general de trabajo (simposio, congreso…) de la SEIEM?



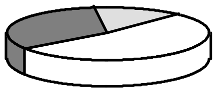
3 veces al año: 0; 2 veces al año: 0; anual: 24; una vez cada 2 años: 8; NC: 2

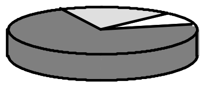
¿Cuál sería para tí la duración óptima de esa reunión?



más de una semana: 0 una semana: 4 3 días: 24 otras (2 días): 6

6 Situación personal

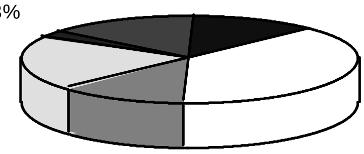




Eres hombre: 18 mujer: 11 NC: 5
Tienes menos de 35 años: 3 de 35 a 50: 22 más de 50: 6 NC: 3

En cuanto a la formación para la investigación, 22 declaran ser doctores, 6 estar haciendo una tesis y 2 estar haciendo los cursos de doctorado.

¿Cuál es tu situación profesional?



Profesor titular de escuela universitaria (TEU): 13
Catedrático de escuela universitaria (CEU): 7
Profesor titular de universidad (TU): 4
Catedrático de universidad (CU): 1
Otras: 5 NC: 4

Asistes habitualmente a algún seminario o reunión científica?

Sí: 26 No o no contesta: 8

Has venido al Simposio en tanto que: (indica a lo más tres opciones, numerándolas por orden de importancia, siendo 1 la más importante)

Rango:	prof. de Did^{a}	prof. de Mat^{a}	for.de prof.	inv. en Did^{a}	docto-rando	otros
1º	4	0	3	18	2	
2º	4	1	6	2	0	
3º	4	2	3	3	1	

Los encuestados han participado mayoritariamente en primer lugar como investigadores en didáctica de las matemáticas. El segundo y el tercer lugar corresponderían a "formador de profesores" y "profesor de didáctica". "Profesor de matemáticas" y "doctorando" son facetas claramente minoritarias.

Otras observaciones o propuestas:

Se han recogido las siguientes (cada una con una sola mención):

- Potenciar creación página www para difundir las producciones de la Sociedad,
- Analizar la edición de una revista.
- No es posible valorar grupos distintos. Sólo cuando se ha trabajado en uno.
- "La encuesta es larguísima, pero buena, porque hace pensar las respuestas".
- "No soy bueno contestando encuestas abiertas".

II Un análisis multivariante

Hemos llevado a cabo un análisis implicativo (ver Seminario III) de algunos de los datos proporcionados por las 34 encuestas contestadas. Ciertamente, el número de respuestas es algo escaso para este tipo de análisis, pero lo obtenido no deja de tener interés, en tanto que exploración de lo declarado por los participantes.

Las variables

Hemos decidido cruzar las variables

- de la cuestión 3.1 ("… has apreciado el contenido de los seminarios…"), anotando solamente los que han contestado "mucho" al Seminario I ("Profesor de matemáticas y contextos de investigación…"), al Seminario II ("¿Cómo estructurar las tareas que aparecen en un campo conceptual?") y al Seminario III ("Estrategias del análisis estadístico para el tratamiento de cuestiones de didáctica")

- de la cuestión 3.6, en la primera pregunta ("¿cuáles son… los principales problemas de la investigación en didáctica de las matemáticas?"), a pesar de ser abierta, se han anotado las dos contestaciones más frecuentes: "el aislamiento del investigador" y aseveraciones relativas a la existencia de distintos marcos teóricos, metodologías, terminología, etc., dando origen a dos variables. También se han anotado las respuestas a la segunda pregunta de esta misma cuestión ("¿Te ha ayudado este simposio a abordar mejor estos problemas?") para definir la variable "El Simposio Ayda en inv.".
- de la cuestión 3.8 ("Hay algunos elementos de los tratados que podrás utilizar ¿en la investigación? ¿en la formación de profesores?"). Las contestaciones positivas a estas dos preguntas se han anotado respectivamente en el gráfico "Utilidad para la investigación" y "Utilidad para la docencia". En la misma cuestión, se pregunta cuáles son los principales; se han anotado las contestaciones más frecuentes, que son las relativas al Seminario I ("Utilidad Semº I"), al Seminario III ("Utilidad Semº III") y al grupo de pensamiento numérico y algebraico.
- de la cuestión 6.1, sexo ("Mujer" y "Hombre"), edad ("menor de 35 años", "entre 35 y 50" y "mayor de 50"), aunque algunos de los encuestados no han contestado.
- de la cuestión 6. 4, sobre la formación para la investigación, en donde se ha anotado solamente la posesión del título de doctor ("Doctor").
- de la cuestión 6.5, sobre la situación profesional, anotando solamente las dos modalidades más frecuentes: catedrático de universidad o de escuela universitaria o titular de universidad ("Catº o Tit.") y de titular de escuela universitaria ("Tit. de Escª Unª").
- de la cuestión 6.6 ("¿Asistes regularmente a algún seminario o reunión científica?")
- de la cuestión 6.7 ("Has venido al Simposio en tanto que…"), anotando solamente las opciones más frecuentes dadas en primer lugar: "investigador en didáctica" y "profesor de didáctica".

Características del grafo implicativo

En el grafo implicativo de la figura 1 aparecen solamente las variables que reflejan implicaciones significativas a los tres niveles de confianza utilizados (95%, 90% y 80%). En el eje vertical se dan las proporciones de respuestas "sí" o "1" de las variables. No hay eje horizontal; por tanto, la altura a la que está cada variables indica aproximadamente la proporción de veces que aparece, mientras que la distribución horizontal de la representación de las variables es irrelevante.

En la versión del programa CHIC que hemos utilizado[1], es posible reorganizar el grafo, desplazando la representación de las variables. En este caso los desplazamientos han sido horizontales, para respetar las frecuencias asociadas a las variables.

Algunos resultados

- En el grafo de la figura 1 aparecen implicaciones que no sorprenden demasiado o que, dicho en otros términos, son más fruto de la necesidad que del azar. Por ejemplo, que los catedráticos o titulares son doctores o que quienes encuentran entre lo tratado elementos útiles para la investigación, consideran que el Simposio ayuda a abordar los principales problemas de la investigación.
- Entre las implicaciones detectadas al 95%, parece menos evidente que quienes han apreciado al máximo el Seminario III, también han apreciado al máximo el Seminario I.
- Quienes declaran la utilidad de los contenidos del Seminario III son sobre todo los titulares de escuela universitaria.
- Los que dan el aislamiento como uno de los principales problemas del investigador, declaran la utilidad de lo tratado para la investigación (con un riesgo del 15% de que esta implicación se haya obtenido al azar).
- Con el mismo riesgo, quienes encuentran útil el Seminario I, también declaran que el Simposio supone una ayuda para la investigación. Sin embargo el contenido del Seminario I haría pensar en que su utilidad tendría que implicar la utilidad de lo tratado para la formación del profesorado ("Utilidad para la docencia") y no se ha detectado tal implicación.

---

[1] CHIC (Classification hiérarchique Implicative et Cohésive), version sous Windows - CHIC 0.6 - 15 JUIN 1997, Université de Rennes 1, IRMAR, 35042 Rennes Cedex - FRANCIA.

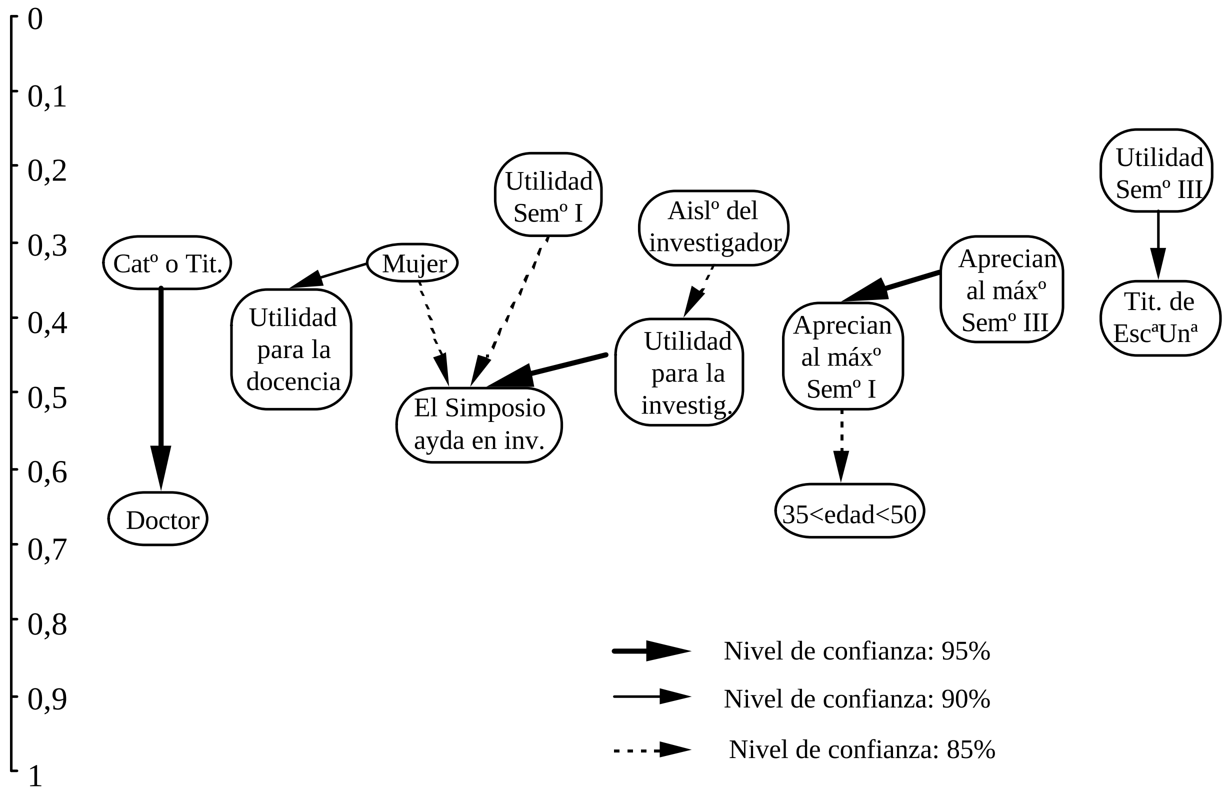


Fig. 1: Grafo implicativo entre variables

- Mientras el hecho de ser hombre no interviene en las implicaciones detectadas, las mujeres están más dispuestas a declarar lo tratado útil para la formación del profesorado y también que el Simposio ayuda a abordar los problemas de la investigación.
- Las variables que reflejan haber asistido al Simposio en tanto que investigador en didáctica y en tanto que profesor de didáctica no participan en ninguna implicación, a pesar de que podría parecer evidente que quienes asisten como investigadores hayan declarado la utilidad de algunos puntos tratados en el Simposio para la investigación y análogamente para la formación de profesores. No se detecta pues ningún indicio de que exista un perfil "investigador" y un perfil "docente" de los participantes.
- Tampoco la preocupación por el marco teórico participa en ninguna implicación. No se puede detectar ningún resultado que haga pensar en temás más interesantes que otros o en una predilección, por ejemplo, por la docencia o la investigación, según esa preocupación.

III Resumen

Se detecta una satisfacción general en lo que respecta a la organización material. La organización de las sesiones también es juzgada favorablemente, con algunos reparos a los resúmenes de presentación de seminarios y grupos y al hecho de que no se haya podido asistir a más de un grupo (a causa de la organización en paralelo). Probablemente éste sea un punto a debatir de cara a los futuros encuentros.

Los contenidos de los seminarios también han sido juzgados positivamente. El aislamiento del investigador es un problema de la investigación que hay que tener en cuenta especialmente. La ayuda que ha significado el Simposio para la resolución de los problemas de la investigación en general es apreciada casi por la mitad…¡aunque se puede también decir que más de la mitad no ha apreciado tal ayuda! En todo caso, se puede considerar un resultado esperanzador para un primer encuentro, dada la distancia entre las necesidades y problemática individual y las características de la reunión.

Más clara resulta la declaración mayoritaria de continuar trabajando algunos de los puntos tratados.

En general los debates han sido especialmente apreciados.

Aunque las fórmulas "simposio", "congreso" y "escuela" no han sido suficientemente descritas y debatidas y alguno de los encuestados da más de una respuesta, una mayoría se inclina por la fórmula experimentada de simposio anual de 3 días en septiembre. No obstante la "escuela" es citada 6 veces y la celebración cada 2 años, 8 veces. Algunos citan la dependencia de la marcha de los grupos de trabajo. Es posible que la fórmula del encuentro merezca una reflexión y un debate.

Es de destacar la escasa presencia, explicable por la corta historia de la SEIEM, de jóvenes investigadores y doctorandos. Se debería ver quizás la forma de incentivar tal participación.

A través del análisis implicativo, se aprecia un entramado de intereses por los diversos temas de investigación, más que una existencia de colectivos dirigidos hacia perspectivas o tópicos concretos. Asimismo, la participación según las distintas facetas de los participantes (en tanto que investigador, profesor de didáctica…) no parecen que condicione sus intereses respecto a los puntos tratados. Es de señalar que la condición de "profesor de matemáticas" es aludida por muy pocos participantes al responder a la pregunta: "Has venido al Simposio en tanto que…".

RELACIÓN DE INSCRITOS EN EL PRIMER SIMPOSIO DE LA SEIEM

Profesor:	Universidad:	G. Trabajo:	e-mail:
C. Abraira Fernández	León	CDPP	demcaf@isidoro.unileon.es
M. Arrieta Illaramendi	P. Vasco	AG	
C. Azcárate Giménez	A. Barcelona	DAM	c.azcarate@cc.uab.es
P. Azcárate Goded	Cádiz	CDPP	pilar.azcarate@uca.es
R. Barroso Campos	Sevilla	AG	
S. Blázquez Martín	Valladolid	DAM	
L. Blanco Nieto	Extremadura	CDPP	ljblanco@grn.es
M. Camacho Machín	La Laguna	DAM	mcamacho@ull.es
Mª J. Cañizares	Granada	DEPC	canizares@platon.ugr.es
J.Mª Cardeñoso	Granada	CDPP	josem@platon.ugr.es
J. Carrillo Yáñez	Huelva	CDPP	carrillo@uhu.es
E. Castro Martínez	Granada	PNA	ecastro@platon.es
Enc. Castro Martínez	Granada	PNA	encastro@platon.es
L.C. Contreras Glez	Huelva	CDPP	lcarlos@uhu.es
M. Coriat Benarroch	Granada	PNA	mcoriat@platon.ugr.es
C. Corral Zapico	Oviedo	EI	
C. Cubillo Durán	Valladolid	PNA	carmen@aleph2.fed.uva.es
J.Mª Chamoso	Salamanca	CDP	jchamoso@gugu.usal.es
E. de la Torre Fdez	A Coruña	AG	torref@udc.es
M. Edó y Basté	A. Barcelona	EI	m.edo@cc.uab.es
I. Mª Escudero	Sevilla	CDPP	
A. Estepa Castro	Jaén	DEPC	aestepa@piturda.ujaen.es
F. Fdez García	Granada	PNA	
A. Fdez Lajusticia	Valencia	PNA	alejandro.fernandez@uva.es
J.L. Fdez Méndez	Vigo	PNA	
P. Flores Martínez	Granada	CDPP	pflores@platon.ugr.es
M. García Blanco	Sevilla	CDPP	
J.M. Gavilán Izqdo	Sevilla	CDPP	
P. Gelado Rodguez	Salamanca	AG	
Mª L Girondo Pérez	Tarragona	PNA	
B. Gómez Alfonso	Valencia	PNA	bernardo.gomez@uv.es
Mª D. Gómez Monge	Valladolid	CDPP	
Mª T. Glez Astudillo	Salamanca	DAM	maite@gugu.usal.es
J. L. González Marí	Málaga	PNA	g_mari@ccuma.sci.uma.es
A. Gutiérrez Rdez	Valencia	AG	angel.gutierrez@uv.es
M. Ibañes Jalón	Valladolid	AG	
A. Jaime Pastor	Valencia	AG	

E. Lacasta Zabalza	U.P. Navarra	DAM	elacasta@upna.es
C. López Esteban	Salamanca	DAM	lopezc@gugu.usal.es
S. Llinares Ciscar	Sevilla	CDPP	llinares@cica.es
J. Margarit	Valencia	PNA	
Mª C. Martín Yagüez	Valladolid	CDPP	mamen@aleph2.fed.uva.es
A. Martinón Cejas	La Laguna	DAM	anmarce@ull.es
A. Méndez Domínguez	Valladolid	AG	fcano@cpd.uva.es
C. Monterrubio Pérez	Valladolid	DAM	
Mª L. Oliveras	Granada	CDPP	oliveras@platon.ugr.es
T. Ortega del Rincón	Valladolid	DAM	ortega@aleph2.fed.uva.es
J.J. Ortiz de Haro	Granada	DEPC	jortiz@desierto.ugr.es
M. Ortiz Vallejo	Valladolid	AG	mortiz@cpd.uva.es
J.R. Pascual Bonís	U.P. Navarra	PNA	jrp@si.upna.es
L. Puig Espinosa	Valencia	PNA	luis.puig@uv.es
L. Rico Romero	Granada	PNA	lrico@goliat.ugr.es
N. Rosich Sala	Barcelona	HEM	
V. Sánchez García	Sevilla	CDPP	mvsanche@cica.es
A. Sánchez Sotelo	Sevilla	PNA	
I. Segovia Alex	Granada	PNA	isegovia@platon.ugr.es
J. Servat Susagne	Barcelona	HEM	
L. Serrano Romero	Granada	DEPC	serrano@platon.ugr.es
M. Sierra Vázquez	Salamanca	DAM	mosiva@gugu.usal.es
M.M. Socas Robayna	La Laguna	PNA	msocas@ull.es
P. Turégano Moratalla	C.La Mancha	DAM	pturegano@mag.ab.uclm.es
A. Vallecillos Jiménez	Granada	DEPC	avallec@platon.ugr.es
E. Vidal Costa	Vigo	PNA	

Grupos de Trabajo:
DAM: Didáctica del Análisis Matemático
AG: Aprendizaje de la Geometría
DEPC: Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria.
PNA: Pensamiento Numerico y Algebraico.
CDPP: Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor
EI: Educación Infantil
HEM: Historia de la Educación Matemática

Edición en Internet: Juan. D. Godino