ACTAS DEL II SIMPOSIO DE LA

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN

EDUCACIÓN MATEMÁTICA (S.E.I.E.M.)

Pamplona, 24-26 de Septiembre de 1998

Organizadores locales:

Eduardo Lacasta y José R. Pascual

PRESENTACIÓN

El Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), organizado por el Área de Didáctica de la Matemática del Departamento de Matemática e Informática de la Universidad Pública de Navarra y la SEIEM, se ha celebrado los días 24, 25 y 26 de septiembre de 1998 en el Salón de Actos de la Escuela Universitaria de Estudios Sanitarios de esta Universidad. Han asistido 67 especialistas, profesores del área de Didáctica de la Matemática de 21 universidades españolas y profesores de Matemáticas de diversos centros de Educación Secundaria.

La sesión de apertura, celebrada el día 24 a las cinco de la tarde, fue presidida por el Vicerrector de Proyección Universitaria de la Universidad Pública de Navarra, Dr. Heliodoro Robleda, en representación del Rector y del Vicerrector de Investigación. En este acto intervinieron además el Presidente de la SEIEM Dr. Luis Rico, el Director del Departamento de Matemática e Informática Dr. Luis Ezquerro y el Coordinador del Simposio D. José Ramón Pascual.

Al margen de las actividades científicas, los asistentes fueron recibidos el día 25, a las 13:30 horas, en el Salón de Recepciones del Ayuntamiento de Pamplona por el Primer Teniente de Alcalde, en representación del Alcalde, y por concejales de los distintos grupos políticos que conforman el ayuntamiento.

A lo largo de estos días, siguiendo el modelo ya utilizado en el Simposio anterior, se han celebrado tres seminarios con ponencias, réplica y debate, una confrontación en torno a una investigación realizada hace cinco años, una sesión de los grupos de trabajo y la Asamblea anual ordinaria de la Sociedad.

Los seminarios han abordado los tres temas siguientes:

- Metodología de investigación: la entrevista
- El papel de las gráficas cartesianas en el estudio de las funciones
- La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos: Reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza y aprendizaje de la estadística

En este simposio, se ha introducido como novedad el debate sobre un trabajo de investigación realizado hace cinco años. A este objeto, se ha seleccionado el libro de Luis Puig "Elementos de resolución de problemas".

El reto, que –para una sociedad científica tan joven como la nuestra– suponía la celebración de un segundo Simposio apenas un año más tarde de la celebración del primero, se ha resuelto de la manera más favorable para la SEIEM. Se ha dado un nuevo paso en la consolidación de un espacio para el debate de la investigación realizada en el área, se ha revitalizado el funcionamiento de los grupos de Investigación, ha surgido un nuevo grupo y se ha dado cumplimiento a las previsiones estatutarias con la renovación parcial de los miembros de la Junta Directiva.

COMITÉ CIENTÍFICO

Presidente: Dr. Luis Rico, Catedrático de la Universidad de Granada.

Secretario: Dr. Eduardo Lacasta, Profesor Titular de Escuela Universitaria de la UPNA.

Vocales:

Dra. Carmen Azcárate, Profesora Titular de la U. Autónoma de Barcelona.

Dr. Luis Puig, Profesor Titular de la Universidad de Valencia.

Dra. Mª Victoria Sánchez, Profesora Titular de la Universidad de Sevilla.

Dr. Modesto Sierra, Catedrático de Escuela Universitaria de la U. de Salamanca

COMITÉ DE ORGANIZACIÓN

Integrado por los siguientes profesores del Departamento de Matemática e Informática de la Universidad Pública de Navarra

Eduardo Lacasta, Alfredo Pina y José Ramón Pascual (como Coordinador del Simposio).

SEGUNDO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (SEIEM) ESCUELA UNIVERSITARIA DE ESTUDIOS SANITARIOS DE LA UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA: 24, 25 Y 26 DE SEPTIEMBRE DE 1998

PROGRAMA

Día 24, jueves

16:00–17:00 Recepción, entrega de documentación.

17:00–17:30 Apertura.

17:30–19:30 Seminario I: "Metodología de investigación: la entrevista".

- Coordinador: Luis Rico.
- Ponentes: Carmen Azcárate, Pedro Cobo, M. Pedro Huerta y Alfonso Ortiz.
- Debate.

Día 25, viernes

9:00–11 Tema de debate: "El libro *Elementos de resolución de problemas,* cinco años después".

- Coordinador: Modesto Sierra.
- Ponentes: José Carrillo y Luz Callejo.
- Contestación: Luis Puig.
- Debate.

11:00–11:30 Descanso.

11:30–13:15 Seminario II: "El papel de las gráficas cartesianas en el estudio de las funciones".

- Coordinadora: Carmen Azcárate.
- Ponente: Eduardo Lacasta: "Funcionamiento de las gráficas de funciones en el sistema didáctico".
- Réplica: Tomás Ortega.
- Debate.

13:30 Recepción en el Ayuntamiento.

17:00–19:30 Sesiones de trabajo de los grupos de investigación.

19:30–20:30 Encuentros y debates informales. Reunión de los coordinadores.

Día 26, sábado

9:00–10:30 Conclusiones de los grupos de investigación.

10:30–11:00 Descanso.

11:00–13:00 Seminario III: "La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos: Reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza y aprendizaje de la estadística".

- Coordinadora: Mª Victoria Sánchez.
- Ponentes: Carmen Batanero, Juan Díaz Godino y Antonio Estepa.
- Réplica: Concepción Abraira y Andrés Nortes.
- Debate.

13:00–14:00 Asamblea de la SEIEM. Clausura.

Según lo establecido en los estatutos de la SEIEM, disposición transitoria, corresponde realizar en la Asamblea de este año la elección de dos miembros para la Junta Directiva.

14:00 Comida ofrecida por la SEIEM

PRIMER SEMINARIO

TEMA DE DEBATE:
METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN: LA ENTREVISTA

DESARROLLO DEL PRIMER SEMINARIO
INTERVENCIONES:
PRESENTACIÓN: DR. LUIS RICO, UNIVERSIDAD DE GRANADA
PONENCIA: LAS ENTREVISTAS EN INVESTIGACIONES DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. ANÁLISIS DE ALGUNAS EXPERIENCIAS PRÓXIMAS
PONENTE: DRA. CARMEN AZCÁRATE, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
PONENCIA: ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS UNA APLICACIÓN EN EDUCACIÓN PRIMARIA
PONENTE: DR. ALFONDO ORTIZ, UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
PONENCIA: LA ENTREVISTA CLÍNICA Y LOS MAPAS CONCEPTUALES
PONENTE: DR. PEDRO HUERTA, UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

PONENCIA: ANÁLISIS DE LAS INTERACCIONES ENTRE PARES DE ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

PONENTE: DR. PEDRO COBO, IES PIUS FONT Y QUER, MANRESA

DESARROLLO DEL PRIMER SEMINARIO

El primer seminario trató el tema**:** “Metodología de la Investigación: La entrevista”. Fue moderado por el Dr. Luis Rico de la Universidad de Granada, que lo inició presentando a los ponentes y haciendo una recopilación de conceptos e ideas relativos a la encuesta extraídos de diversos autores: Gutiérrez (1997), Cohen&Manion (1990), Woods (1992) y Taylor&Bodgan (1992).

En la primera ponencia “Las entrevistas en investigaciones de Didáctica de las Matemáticas. Análisis de algunas experiencias próximas”, Carmen Azcárate detalla su experiencia personal en el planteamiento de la investigación y en el desarrollo y análisis de las entrevistas y destaca como conclusión la utilidad de la técnica de entrevistas como fuente fundamental de datos así como complemento de otras fuentes de datos.

Alfonso Ortiz en "Entrevistas semiestructuradas. Una aplicación en Educación Primaria" nos presenta la utilidad de este tipo de entrevista en un estudio realizado con alumnos de Educación Primaria.

Pedro Huerta en "La entrevista clínica y los mapas conceptuales" analiza el uso de la entrevista clínica –método que inicialmente no había previsto en su proyecto– para la validación de los mapas conceptuales previamente construidos.

Para terminar, Pedro Cobo en "Análisis de las interacciones entre pares de alumnos en la resolución de problemas de matemáticas" nos presenta esta técnica de recogida de datos orales para caracterizar las interacciones de alumnos en la resolución de problemas.

PRESENTACIÓN DEL PRIMER SEMINARIO

Luis Rico
Universidad de Granada

El presente Seminario está dedicado a la reflexión y el debate sobre cuestiones de metodología de investigación, referidas al campo de la Didáctica de la Matemática. Continúa el camino emprendido en el Primer Simposio con el Seminario 'Estrategias del Análisis Estadístico para el tratamiento de las cuestiones de Didáctica". De hecho, estuvo previsto que en Zamora se hubiese dedicado parte del Seminario metodológico al tema de la entrevista, pero por diversas razones esto no fue posible y retomamos aquella iniciativa en este segundo encuentro. Esperamos que el aplazamiento de un año y su tratamiento monográfico permita tratar en profundidad esta técnica de investigación.

Para esta ocasión hemos cambiado el formato del Seminario. Hemos invitado a cuatro investigadores que han utilizado la entrevista como método de indagación en sus tesis doctorales.

Carmen Azcárate nos va a hablar de "Las entrevistas en investigaciones de didáctica de las matemáticas. Análisis de algunas experiencias próximas", en donde analiza las ventajas de esta técnica tanto en su propia tesis como en los trabajos que ha dirigido posteriormente.

Alfonso Ortiz en "Entrevistas semiestructuradas. Una aplicación en educación primaria" nos presenta la utilidad de esta variante del método de encuesta para complementar y profundizar los resultados de un estudio experimental.

Pedro Huerta en "La entrevista clínica y los mapas conceptuales" hace una discusión de las ventajas que presenta la entrevista clínica para confirmar la validez de un estudio previo.

Finalmente, Pedro Cobo en "Análisis de las interacciones entre pares de alumnos en la resolución de problemas de matemáticas" nos presenta detalladamente una técnica para analizar interacciones, cuya similitud con las interacciones que se pueden producir en el transcurso de una entrevista, dotan de interés a este estudio.

Como vemos, cada uno de los ponentes ofrece una perspectiva diferente de la puesta en práctica y de la utilidad de la entrevista, si bien mantienen un marco general común.

En este documento se presenta el texto completo de cada una de las ponencias, para facilitar su seguimiento y permitir a los ponentes que, dada la limitación de tiempo, se dediquen a la cuestiones centrales durante su exposición, con la seguridad de que todos los asistentes disponemos de la información necesaria para su correcta comprensión. Este documento se inicia con una breve recopilación de conceptos e ideas relativos a la encuesta de diversos autores, realizada por el coordinador del seminario.

I CUESTIONES GENERALES (GUTIÉRREZ, 1997)

FINALIDAD DE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA:

Como forma de discurso humano, la investigación es la aplicación del método como estructura lógica y herramienta sistemática para entender, explicar, interpretar o mejorar una determinada realidad educativa.

ENFOQUES METODOLÓGICOS CONTEMPORÁNEOS:

Experimental y cuasi-experimental

Descriptivo y correlacional

Cualitativo

Las diferencias entre los distintos métodos radican en:

* los modos alternativos de planificar, recoger información, analizar datos y divulgar resultados;
* los distintos tipos de preguntas que tratan de responder.

Los enfoque metodológicos se pueden situar dentro de un continuo, cuyos dos polos se encuentran en las metodologías experimentales y en las metodologías no experimentales.

Dualidades que diferencian entre distintos modelos racionalistas

Metodologías experimentales	**Metodologías no experimentales**
Hipótesis causales	Hipótesis correlacionales
Manipulación variable independiente	No manipulación variable independiente
Aleatorización	No aleatorización
Control riguroso	Control ligero
Diseño experimental	Diseño correlacional u observacional
Verificación por concomitancia	Verificación por covariación

CRITERIOS PARA TIPIFICAR DISTINTAS VARIANTES DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA:

a) Según su finalidad:

Investigación básica

Investigación aplicada

b) Según su dimensión temporal:

Investigación histórica

Investigación transversal

Investigación longitudinal

c) Según los datos que se estudian:

Investigación cuantitativa

Investigación cualitativa

d) Según el nivel de control de las variables:

Investigación descriptiva

Investigación ex-post-facto

Investigación experimental

e) Según la orientación predominante:

Investigación orientada a la comprobación

Investigación orientada al descubrimiento

Investigación orientada a la aplicación y al cambio

***DISEÑO DE INVESTIGACIÓN*:** estructura formal a la que debe ajustarse cada metodología para ser aceptable por la comunidad científica.

INVESTIGACIONES DESCRIPTIVAS Y CORRELACIONALES

CARACTERÍSTICAS:

a) La técnica fundamental para la recogida de datos es la observación; se apoyan en un enfoque inductivo para formular conclusiones; su objeto es descubrir hipótesis;

b) atienden a una variedad de tareas: identificar acontecimientos y fenómenos educativos relevantes, describir variables, registrar conductas, abordar problemas no resueltos por los estudios experimentales;

c) ámbito de aplicación: innovación educativa, evaluación y diagnóstico de errores y dificultades, planificación curricular, formación de profesorado, orientación psicopedagógica, etc.;

d) utilidad de la información aportada: los resultados de estas investigaciones permiten tomar decisiones en contextos escolares, sociales, políticos y administrativos relacionados con la educación.

INVESTIGACIÓN POR ENCUESTA

Dentro de las metodologías descriptivas y correlacionales se encuentra la investigación por encuesta, de la que forman parte las entrevistas con carácter general.

TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

La técnica es cada uno de los modos específicos de obtener información mientras que el instrumento es más bien el recurso concreto empleado para operar con la realidad y recoger de ella la información pertinente. La técnica es un método o procedimiento específico; el instrumento es la herramienta concreta para llevar a cabo el procedimiento. Una misma técnica puede utilizar diversos instrumentos; un mismo instrumento puede ser útil para diversas técnicas.

La entrevista es una técnica de recogida de información, que se basa en la interacción entre un sujeto que pregunta (entrevistador) y un sujeto que responde (entrevistado). Los estudios realizados con técnicas de entrevista se suelen considerar dentro de las investigaciones descriptivas y correlacionales, en el apartado de las metodologías descriptivo-analíticas y como variante de la investigación por encuesta.

Aunque la entrevista es una técnica que se ha desarrollado recientemente en los estudios descriptivos y en la perspectiva cualitativa, también se utiliza de manera sistemática en los estudios experimentales.

II LA ENTREVISTA (Cohen y Manion, 1990)

La entrevista es una de las variantes de los métodos de encuesta en investigación social, con entidad suficiente para concederle entidad propia. La entrevista se considera una técnica específica de investigación.

COMPONENTES:

Una entrevista requiere:

* un propósito específico de obtener información relevante para una investigación;
* una serie de cuestiones o preguntas que concretan el objetivo, y que se articulan en un cuestionario;
* una interacción oral entre sujetos, entre un investigador y uno o varios informantes, para recoger datos y
* un registro estructurado de las interacciones ocurridas.

FINES:

La entrevista puede satisfacer tres finalidades:

1º Se puede usar como medio principal para recoger información relativa a los objetivos de la información. Permite establecer lo que sabe una persona *–conocimiento e información–* lo que le gusta o disgusta a una persona *–valores y preferencias–* y lo que piensa una persona *–ideas y creencias.*

2º Se puede usar para probar hipótesis, para sugerir otras nuevas, para identificar variables y relaciones.

3º Puede usarse, junto con otros métodos, para acometer una investigación.

TIPOS:

Entrevista formal: hay un cuestionario estructurado de preguntas que se registran en un programa formalizado.

Entrevista menos formal: el entrevistador dispone de un cuestionario estructurado, pero es libre de modificar la secuencia de las preguntas, cambiar su redacción, modificarla o ampliarla.

Entrevista informal: el entrevistador tiene unos temas claves que presenta de manera dialogada, mediante una conversación.

Entrevista no dirigida: el entrevistador acepta un papel subordinado.

Son tres los criterios que se cruzan para tipificar una entrevista:

Estructurada/no estructurada. La secuencia y redacción de las preguntas se determinan por medio de un programa o se determinan sólo los temas generales para el diálogo.

Abierta/cerrada. Incluye o excluye la posibilidad de añadir nuevas cuestiones o de modificar substancialmente el enunciado de las cuestiones previstas.

Dirigida/no directiva. Según la mayor o menor libertad que se le da al informante para expresar sus ideas y sentimientos.

CONCEPCIONES DE LA ENTREVISTA

Entre los metodólogos que teorizan sobre la entrevista y los investigadores que la utilizan hay tres concepciones generales:

1. La entrevista es un medio potencial de transferencia pura de información.
2. La entrevista es una transacción, que incluye una polarización que ha de reconocerse y controlarse.
3. La entrevista es un encuentro que comparte necesariamente muchos de los rasgos de la vida diaria.

ENTREVISTA DE INVESTIGACIÓN:

Llamamos así a la entrevista estructurada, que es uno de los métodos más frecuentes para obtener información en la investigación educativa.

Se diferencian por el tipo de ítems, por el formato de las preguntas y por los modos de respuesta que se pueden obtener.

TIPOS DE ÍTEMS:

a) fijos alternativos, que permiten elegir al informante dos o más opciones de respuesta a una pregunta fija;

b) abiertos, que suministran un marco de referencia para las contestaciones de los informantes y ponen un mínimo de restricción sobre las contestaciones y su expresión;

c) ítems de escala, o conjunto de ítems orales para cada uno de los cuales el entrevistador responde indicando grados de acuerdo o desacuerdo.

TIPOS DE PREGUNTAS:

Son varias las distinciones que pueden establecerse

a) directas o indirectas;

b) versando sobre un asunto general o específico;

c) con referencia a una cuestión objetiva o a una opinión;

TIPO DE RESPUESTAS:

a) respuesta no estructurada; los datos son difíciles de codificar;

b) respuesta para cumplimentar; obliga a suministrar una respuesta;

c) respuesta tabular, estructurada según un esquema o tabla;

d) respuesta de escala, estructurada por medio de gradaciones según un número de alternativas;

e) otras distinciones: respuesta de rango; respuesta de lista de comprobación; respuesta categorizada.

PROBLEMAS:

Alguno de los principales problemas en torno al uso de la entrevista como técnica de investigación son los siguientes:

a) Falta de validez. La principal causa de invalidez es la parcialidad de la información o tendencia sistemática a cometer errores en una misma dirección, es decir, declarar por encima o por debajo del valor verdadero de un atributo. Las fuentes de parcialidad son las características del entrevistador, las características del informante y el contenido de las cuestiones.

b) Método de registro de las respuestas cuando se trata de una entrevista abierta.

c) Técnicas para analizar e interpretar los datos derivados de entrevistas no estructuradas.

d) Procedimiento. Es conveniente disponer de una guía de pasos posibles y convenientes para llevar a cabo una entrevista, es decir, hay que disponer de un procedimiento; su ausencia puede constituir un serio problema. En este sentido las recomendaciones de Woods (1993) son pertinentes e interesantes.

e) Informantes. La tradición cuantitativa ha impuesto hablar en investigación educativa de población y muestra cuando nos referimos a los sujetos que son objeto de la investigación. En la entrevista hay que hablar de *informantes;* la selección de informantes debe hacerse de acuerdo con las condiciones del estudio que se lleva a cabo y de la información que se quiere obtener. La representatividad de los informantes viene dada por el contexto y los fines de la investigación y no es una cuestión de técnica estadística (Taylor y Bodgan, 1992).

REFERENCIAS

Cohen, L. ; Manion, L. (1990) *Métodos de Investigación Educativa.* Madrid: Editorial La Muralla.

Gutiérrez, J. (1997) *Proyecto docente e Investigador para plaza de Profesor Titular de Universidad en el Área de Conocimiento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación.* Granada: Universidad de Granada.

Taylor, S.; Bogdan, R. (1992) *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Barcelona: Paidós.

Woods, P. (1993) *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa.* Barcelona: Paidós-MEC.

LAS ENTREVISTAS EN INVESTIGACIONES DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. ANÁLISIS DE ALGUNAS EXPERIENCIAS PRÓXIMAS

Carmen Azcárate

Universidad Autónoma de Barcelona

A Claude Janvier

In memoriam

INTRODUCCIÓN

En nuestras últimas jornadas de la SEIEM de Zamora, quedó pendiente un seminario, que en principio iba a iniciar yo misma, acerca de la investigación cualitativa en didáctica de las matemáticas. El enfoque que le quiero a dar a esta sesión es el de comunicar *mi experiencia* de una de las técnicas que se utilizan en investigaciones cualitativas: las entrevistas.

Mi supuesta condición de "experta" en la técnica de entrevistas (por algo debo estar aquí en este momento) se inicia con la investigación que realicé en mi tesis doctoral (53 entrevistas) y se ha prolongado durante los últimos años en que, aparte de interesarme por esta cuestión, he tenido la oportunidad de dirigir los trabajos de otros investigadores.

Para remontarme al origen, debo explicar que durante mi estancia en Londres (Chelsea College, 1985), en un curso de introducción a la investigación en didáctica de las matemáticas y las ciencias experimentales al que asistí con otros colegas de Barcelona, tuve la suerte de recibir unas clases de la profesora Joan Bliss (ver Bliss y otros, 1979 y 1983, que me siguen pareciendo de gran interés para las investigaciones cualitativas en nuestro campo) que no sólo nos introdujo en esta técnica de investigación (las entrevistas), sino que nos sometió a la difícil tarea, tanto de entrevistar como de ser entrevistada ante los demás compañeros, con los consiguientes comentarios y críticas.

Lo recuerdo como una experiencia importante en mi formación porque soy consciente de que mis ideas acerca de los métodos cualitativos de investigación sufrieron un cambio en poco tiempo: de considerarlos como medios poco fiables de pedagogos, psicólogos y otros pseudocientíficos (así lo veía yo entonces), pasé a admitirlos como buenos instrumentos para conseguir información significativa en buena parte de las investigaciones de didáctica de las matemáticas. Creo que a partir de entonces, no sólo he aceptado la existencia de las llamadas ciencias humanas, sino que considero y sostengo que nuestra actividad investigadora se enmarca en ellas.

MI EXPERIENCIA PERSONAL: EL PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Esta ocasión, a la que me presté gustosa durante la organización de estas jornadas, tiene algo de reto: se trata de volver sobre una técnica que utilicé en mi tesis (Azcárate, 1990), digamos que hace un montón de años. Y lo adivinaréis por vuestra propia experiencia, ahora muchas cosas de esa tesis no me gustan.

Sin embargo, sí me gusta el planteamiento general de la tesis y, sobre todo, la utilización de las entrevistas para recoger datos acerca del proceso de aprendizaje de tres grupos de alumnos de Segundo de BUP que estaban siguiendo un curso de introducción a las derivadas. Se puede decir que la investigación tenía un doble objetivo: estudiar, por un lado, *el proceso de aprendizaje de los alumnos* y, por otro, *sus esquemas conceptuales en relación con los conceptos de velocidad instantánea y variación instantánea de una función*. De ahí que el plan de recogida de datos tuviera una doble dimensión: *diacrónica*, que permitía estudiar la evolución de los estudiantes en el transcurso de su aprendizaje, y *sincrónica*, que permitía investigar los distintos esquemas conceptuales de los alumnos en momentos muy concretos del proceso de enseñanza. El primer aspecto se contempla en la secuenciación de algunas preguntas que se repiten de forma similar en las tres entrevistas, mientras que el segundo condiciona la forma y la profundidad de las cuestiones planteadas.

Muy brevemente: mi recogida de datos consistió en dos cuestionarios escritos pasados a todos los alumnos de las tres clases (el primero, un mes antes de iniciarse la experiencia y el segundo, un mes después de acabarse) y tres tandas de entrevistas a 6 alumnos de cada clase. La primera entrevista tuvo lugar justo antes de iniciarse las lecciones objeto de la investigación y era de requisitos previos, como complemento del primer cuestionario; la segunda se realizó en el momento previo a la formalización en clase de la derivada de una función; la tercera tuvo lugar justo al final del proceso de enseñanza, es decir que fue de post-aprendizaje y sería complementada, a su vez, por el segundo cuestionario.

MI EXPERIENCIA PERSONAL: EL DESARROLLO DE LAS ENTREVISTAS

Todas las entrevistas fueron grabadas en cintas magnetofónicas y transcritas íntegramente. Existen además unas notas que yo escribía al acabar cada entrevista y las gráficas de cada ejercicio y cada alumno, donde se pueden ver sus cálculos y los trazos o letras añadidos durante la entrevista y que son de gran ayuda para comprender muchas partes de la explicación de los alumnos o de mis propias preguntas.

Todos los ejercicios propuestos en las entrevistas (salvo uno, que descarté después) consisten en preguntas acerca de una gráficas cartesianas, preguntas que suponen muy pocos cálculos pero que permiten profundizar en aspectos conceptuales desde varios puntos de vista. Una ventaja importante de las entrevistas en preguntas referidas a conceptos es que se pueden obtener varias respuestas, desde la respuesta espontánea inicial hasta la respuesta pensada y argumentada que matiza, corrige o incluso contradice la primera. Estos tipos de respuestas, cuando el alumno casi parece discurrir consigo mismo, son de gran interés aunque aumentan la dificultad del proceso de reducción de datos y del análisis posterior.

Las entrevistas las realicé todas yo y no observé comportamientos recelosos ni extraños. En los tres institutos las entrevistas tuvieron lugar en salas de estudio pequeñas y acogedoras, de manera que el ambiente era de silencio y tranquilidad. Los alumnos de las tres clases estaban acostumbrados a un trato directo e informal por parte de su profesorado, por lo que no parecían sentirse incómodos y se olvidaban rápidamente de la presencia de la grabadora. Sí hubo un caso que me planteó algún problema: una alumna que mostraba una gran pereza en contestarme y que hacía constantes referencias a su supuesta mala salud y su falta de concentración.

Las entrevistas duraron alrededor de media hora y consistían en entregarle una hoja al alumno con el enunciado del ejercicio y una gráfica y después de su lectura se le hacía una serie de preguntas previamente preparadas. Cuando el estudiante dudaba o no parecía entender la pregunta, se le repetía en términos semejantes, intentando no alterar el significado inicial ni dar pistas diferentes a las dadas a otros alumnos. Como entrevistadora procuraba tener una actitud alentadora, sin dar a entender nada acerca de la corrección de las respuestas; tuve que hacer un gran esfuerzo por desprenderme de mi tendencia a enseñar; también fui aprendiendo a repetir la última frase que decían ellos y así salía del paso de tener que decir algo (esperan una réplica) sin comprometerme con el típico "bien", "bueno", "vale", ... que tiene un indudable matiz de asentimiento o los "¿tu crees?", "¿estás segura?" que adolecen de lo contrario.

En algún caso excepcional, en alguna entrevista no se plantearon todas las preguntas, bien porque el alumno se mostraba desinteresado o cansado y parecía forzado o inútil proseguir, bien porque se había optado por preguntas más en profundidad en alguna cuestión anterior. También hay que señalar que en el caso de algún cálculo, cuando el alumno cometía un error que parecía de distracción, se le hacía alguna indicación que no variaba el contenido del tema de investigación.

Incidencias, las hubo. Por ejemplo, debido a una interrupción, no quedaron grabadas, en un caso el principio y, en otro, el final de una de las primeras entrevistas, con lo cual sólo dispuse de las anotaciones que hice al final de la sesión y de lo escrito por esos dos alumnos en sus hojas. Además, una alumna estuvo ausente durante 10 días y no le pude hacer la segunda entrevista (de ahí que: 3 x 18 = 53 ...).

MI EXPERIENCIA PERSONAL: EL ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

En cuanto al análisis de las entrevistas debo decir que resultó muy laborioso. En el caso de mi investigación, las entrevistas habían sido el medio fundamental de recogida de información durante el proceso de aprendizaje; por tanto, tenía que dar con un método sistemático de análisis y de exposición de los datos. Se pudieron distinguir cuatro fases:

a) La *transcripción literal* de las entrevistas, con anotaciones acerca de los silencios y de las acciones del alumno o alumna, como son realizar un cálculo mental o escrito o añadir algún trazo a la gráfica que se le presentaba.

b) El *análisis de cada ejercicio propuesto* fue un proceso largo que voy a intentar ilustrar con el ejemplo que aparece en el anexo (Anexo 1, tablas 2.2.1 a 2.2.5). Consistió en confeccionar una lista de preguntas que aparecían de forma semejante en todas las entrevistas y elaborar unas tablas con fragmentos literales, con una interpretación y/o un comentario de la investigadora correspondientes a un pequeño grupo de 5 o 6 alumnos. Seguidamente, tras un proceso de familiarización con estas respuestas, las agrupé de manera que a cada pregunta le correspondieran entre 2 y 5 grupos de respuestas diferentes, que llamé modelos de respuesta, ordenadas según su complejidad y corrección. Cada modelo de respuesta tenía una denominación que puede ser una frase, una palabra o un número y es siempre una interpretación de la expresión de los alumnos. Se elaboraron entonces las tablas completas para los 18 alumnos con las respuestas codificadas de cada pregunta. Este proceso se tuvo que repetir casi siempre varias veces hasta que los modelos de respuesta encajaban bien con las respuestas de todos los alumnos entrevistados.

c) El *análisis de las respuestas referentes a un aspecto concreto* consistió en establecer una lista de explicaciones y procedimientos observados en las respuestas, relacionados con los conceptos que nos habíamos propuesto investigar (velocidad instantánea, tasas de variación, ...) y que aparecían en los distintos ejercicios de la entrevista. Estas explicaciones o procedimientos es lo que llamé *ítems observados*. A partir de las tablas de respuestas de cada ejercicio y de la lista de ítems observados, pudimos unificar los modelos de respuesta para cada ítem, y reelaborar definitivamente las tablas de respuesta de cada ejercicio (para el ejemplo anterior, ver Anexo 2, tablas 2.2.6 y 2.2.7).

d) El *análisis del seguimiento del proceso de aprendizaje* se hizo a partir de los ítems que aparecen sucesivamente y de forma casi idéntica en las tres entrevistas. Se utilizó una representación en la que se ve el modelo de respuesta de cada alumno a cuestiones que se repiten a lo largo de las 3 entrevistas, por lo que se puede seguir la trayectoria y evolución de cada alumno.

Lo vamos a ver en el ejemplo de la representación de la evolución del ítem "tipos de representación gráfica de la velocidad instantánea" (Anexo 3, tabla 3.2.4). Se puede ver que cada recuadro contiene el código de los 18 estudiantes entrevistados, correspondiendo cada fila a uno de los institutos. En vertical están los modelos de respuesta del ítem en cuestión, ordenados según su grado de corrección y en horizontal las entrevistas con los ejercicios, siguiendo un orden temporal. En cada recuadro (x,y) se encontrarán los códigos correspondientes a los alumnos que han contestado el modelo de respuesta y al ejercicio x. Esta representación del resultado del análisis facilita el estudio global de los modelos de respuesta así como de la evolución de cada uno de los alumnos, que se puede desarrollar según su recorrido y según la situación final.

MI EXPERIENCIA CON OTRAS INVESTIGACIONES

Entre las investigaciones en las que he colaborado como directora, son varias las que han utilizado la técnica de entrevistas. Voy a hacer un breve repaso de una buena parte de ellas para mostrar la diversidad de situaciones de investigación en las que dicha técnica nos ha parecido adecuada y nos ha resultado útil.

En la preparación del cuestionario escrito de su tesis de maestría, Carlos Romero (1993) realizó varias entrevistas: a varios alumnos correspondientes a la edad que le interesaba investigar (*ideas acerca del continuo en alumnos de 3° de BUP*) y a tres adultos (dos matemáticos y un ingeniero). Se puede decir que fue un estudio piloto que le ayudó, en primer lugar, a replantear el diseño del cuestionario y, en segundo lugar, a mejorar la expresión y comprensión de las preguntas. En este caso, Romero no hizo ningún análisis sistemático y exhaustivo de las entrevistas; a partir de las respuestas, simplemente se le ocurrieron alternativas que mejoraban el cuestionario inicial.

Mar Moreno (1995), en su estudio de las *concepciones de cuatro profesores de matemáticas* (concretamente ecuaciones diferenciales) *en carreras universitarias como química y biología*, realizó una entrevista grabada a cada uno de ellos después de que elaboraran un mapa conceptual y de que contestaran un cuestionario escrito. Las entrevistas duraron aproximadamente una hora y media y constaban de tres momentos claramente diferenciados (explicación de diversos aspectos del mapa conceptual, matización de las respuestas del cuestionario y opinión acerca de las nuevas tecnologías y las actividades de aprendizaje) cuyo propósito era matizar y aclarar aspectos del mapa conceptual y del cuestionario que no habían quedado lo suficientemente claros, con el fin de evitar falsas interpretaciones de los datos recogidos. Por tanto, no se realizó un análisis específico de las entrevistas, sino que éstas sirvieron de aclaración, apoyo e ilustración para el análisis de los mapas conceptuales y los cuestionarios.

En su tesis de maestría, Cecilia Calvo (1997) estudió algunas de las *dificultades que experimentan los alumnos de C.O.U. a lo largo del proceso de estudio de las integrales, especialmente en relación con el concepto de área*. Después de pasar un cuestionario escrito a todos los alumnos de dos cursos y de procesar y analizar los datos recogidos, resultó evidente la necesidad de completar la información con datos recogidos por otro medio. Se planificó, entonces, una entrevista que se aplicó a tres alumnos de cada grupo, en la cual se buscaba recoger información en dos sentidos: conseguir una interpretación más precisa de los datos recogidos en el cuestionario escrito y ahondar en algunas cuestiones que surgieron a raíz del análisis de los mismos. Se intentó que los seis alumnos elegidos para las entrevistas cubrieran los diferentes matices que se detectaron en las respuestas a los distintos ítems del cuestionario. No es éste el momento de entrar en el detalle del análisis de las entrevistas; solo comentaré tres aspectos: se hizo un primer análisis de tipo descriptivo alumno por alumno, a continuación se hizo una valoración del impacto de las entrevistas sobre el análisis del cuestionario y, finalmente, se analizaron sistemáticamente algunos ítems de especial interés.

La investigación de la tesis de Lorena Espinoza (1998) consiste en el estudio de dos profesores con el fin de determinar *las técnicas didácticas que utilizan para gestionar el proceso de estudio del tema límite de una función* en Segundo de BUP. La información se recogió fundamentalmente mediante observaciones de campo y grabaciones en vídeo de todas las sesiones de cada clase. Sin embargo, para completar los datos fueron muy importantes las dos entrevistas que realizó la investigadora, una antes de empezar el tema y otra después de terminar el proceso de estudio. Esto permitió profundizar más en aspectos como cuestiones generales acerca de la organización matemática estudiada, preparación y planificación del proceso didáctico, técnicas de gestión, ... Un elemento nuevo de la segunda entrevista fue la utilización de la técnica de "feed-back" que consiste en que el profesor entrevistado explica y justifica algunos episodios de enseñanza grabados en vídeo que se le muestran.

Dos investigaciones en curso también están utilizando la técnica de entrevistas. En el caso de Edelmira Badillo, que estudia *la enseñanza de las matemáticas (derivadas) y la física (cinemática) por parte del mismo profesor*, consiste en una entrevista inicial de planteamiento de la experiencia y de dos entrevistas, una durante y otra después del proceso de enseñanza observado directamente por la investigadora y en parte grabado en vídeo, donde predominará la técnica de "feed-back" a la que he aludido anteriormente.

La investigación de Sabrina Garbín que trata de la capacidad de los alumnos de bachillerato de *interpretar distintos lenguajes para referirse al infinito*, consta, como en el caso de Calvo, de dos partes complementarias: un cuestionario escrito que se ha pasado a dos grupos de alumnos y una entrevista personal a tres alumnos de cada grupo, cuyas características han quedado establecidas a partir de las respuestas al cuestionario y del análisis del mismo. El objetivo de una parte de estas entrevistas es ahondar en las respuestas dadas en el cuestionario.

CONCLUSIONES

Para acabar quiero destacar la diversidad de situaciones de investigación en que puede resultar útil la de recogida de datos mediante la técnica de entrevistas.

Por un lado como fuente fundamental de datos, en cuyo caso el diseño de la experiencia debe prever al máximo las fases del análisis posterior. Creo que las dificultades que me encontré yo misma fueron consecuencia de un diseño muy incompleto; al revisar ahora esta parte de la investigación, creo que falló la organización de los ejercicios y preguntas y que un estudio piloto bien planteado me hubiera orientado mejor en la previsión de la complejidad del análisis. Sin duda me hubiera ahorrado bastantes movimientos de vaivén entre datos, tablas, modelos de respuesta, ...

Por otro lado, a través de las otras investigaciones a las que me he referido, se puede ver que las entrevistas son un buen complemento de otras fuentes de datos, tanto en investigaciones acerca del aprendizaje de los alumnos, como en las que atañen a fenómenos de enseñanza. Las entrevistas permiten, en primer lugar, ahondar en el análisis de datos obtenidos con otros medios (observaciones directas o grabadas, cuestionarios escritos, ...) y, en segundo lugar, obtener otro tipo de información, más relacionada con aspectos cognitivos y, por tanto, menos previsibles.

REFERENCIAS

AZCÁRATE, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis de doctorado. Universitat Autònoma de Barcelona.

BLISS, J. y OGBORN, J. (1979). The Analysis of Qualitative Data. *European Journal of Science Education*, Vol. 1, No 4, pp. 427-440.

BLISS, J., MONK, M. y OGBORN, J. (Ed) (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research. A Guide to Uses of Systemic Networks*. Londres y Canberra: Croom Helm.

CALVO, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*. Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

ESPINOZA, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función"*. Tesis de doctorado. Universitat Autònoma de Barcelona.

MORENO, M. M. (1995). *Enseñanza de las ecuaciones diferenciales a químicos y biólogos desde la perspectiva del profesor de matemáticas. Estudio de casos*. Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

ROMERO, C. (1993). *Esquemes conceptuals del continu. Estudi d'un qüestionari pilot.* Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS
UNA APLICACIÓN EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Alfonso Ortiz Comas
Universidad de Málaga

1.- INTRODUCCIÓN

En las ciencias empíricas el objetivo de la investigación es descubrir pautas y regularidades en los fenómenos naturales que se expresan mediante leyes y principios. En matemáticas construir teoremas en contextos hipotéticos en los que se demuestra formalmente una tesis dentro de una teoría (modelo formal o axiomático). En Educación Matemática un objetivo es obtener pautas en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática

En todos los casos es necesario delimitar el campo de actuación y determinar las herramientas con las cuales se puede investigar

Un problema importante en investigación Educativa es la validación de los instrumentos de investigación. Cada instrumento tiene un cometido y un significado: problemas distintos de investigación pueden y deben a veces investigarse con instrumentos distintos, lo importante es la racionalidad y la validez interna del constructo. Debemos tener claro que la clave de una investigación es utilizar los instrumentos que posibiliten interpretar y describir una pauta de comportamiento en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática con un alto grado de fiabilidad. A veces se puede utilizar un instrumento de investigación para validar unos resultados: Si una hipótesis de investigación se confirma mediante un método ha de ser posible su confirmación con algún otro método. Los resultados obtenidos sobre un problema de investigación no pueden estar en contradicción ni llevar a ellas por el contrario deben ser complementarios y por tanto potenciar su fiabilidad.

En el caso que nos ocupa pretendemos exponer la importancia y eficacia de las técnicas cualitativas (en concreto la entrevista) para la investigación en Educación Matemática en un paradigma interpretativo y no meramente descriptivo, para ello exponemos el diseño y desarrollo de una experiencia realizada con alumnos de Educación Primaria.

En lo que sigue, en primer lugar, delimitamos de forma sucinta algunos aspectos previos para poder comprender la importancia y el alcance real de las entrevistas realizadas como son los objetivos e hipótesis y el plan de trabajo de toda la investigación para situar de forma dinámica el lugar de las entrevistas aludiendo a los diversos métodos utilizados cuyos resultados determinan la verdadera dimensión científica de las entrevistas realizadas. En segundo lugar expondremos el diseño y desarrollo de estas entrevistas con el máximo detalle posible. Nos detendremos en un punto que consideramos fundamentales en nuestra experiencia: los criterios en que nos hemos basado para seleccionar los escolares que realizaron las entrevistas. Por último exponemos algunas respuestas comentadas.

2.- OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Entendiendo por **Razonamiento inductivo numérico:**

el conjunto de procesos mentales, lógicos o aritméticos implícitos en la realización de inferencias o generalizaciones inductivas en series numéricas así como el estado mental, conceptual etc., de los conceptos y propiedades del número que se utilizan en las mismas

nos propusimos realizar un estudio que explicara y describiese el desarrollo del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria.

Para ello nos planteamos entre otros objetivos los dos siguientes:

O1: Establecer un modelo teórico evolutivo de razonamiento inductivo numérico y comprobar con escolares de Educación Primaria la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real en razonamiento inductivo.

O2: Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos inductivos propios de la aritmética escolar.

Para llevar a cabo este estudio se propuso la siguiente Hipótesis.

H: Las diferentes estrategias inductivas que permiten completar con éxito tareas de continuar series de números naturales se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe, en seis niveles diferenciados, la evolución del razonamiento inductivo numérico.

En definitiva, el objetivo general se puede resumir como:

Analizar la naturaleza y la evolución del Razonamiento Inductivo Numérico en los escolares de Educación Primaria

3.-PLAN DE TRABAJO

En el proceso de validación de la hipótesis enunciada, debemos distinguir dos etapas desde un punto de vista metodológico: una primera de construcción del modelo y una segunda de valoración empírica del mismo, tal y como se puede observar en el cuadro 1.

En la primera etapa, a partir de un primer estudio teórico, nos planteamos la consecución de una investigación sobre desarrollo en razonamiento inductivo numérico. Para este fin era necesario tener unas pautas a contrastar empíricamente, por lo que hubo que realizar un estudio exploratorio para obtener información de las habilidades y estrategias utilizadas por los niños como indicadores de dichas pautas. De acuerdo con los resultados obtenidos, se realiza un análisis didáctico (segundo estudio teórico) para obtener un marco referencial y explicativo en el que se construye y justifica el modelo de desarrollo en razonamiento inductivo numérico.

La segunda etapa se orienta hacia la evaluación empírica del modelo, mediante la construcción de una escala adaptada a dicho modelo y a la propia evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria (bondad de la escala).

PRIMERA ETAPA Construcción del modelo	**SEGUNDA ETAPA** Evaluación del modelo
Primer estudio teórico Necesidad de un modelo	**Estudio empírico** Construcción de la escala
Estudio exploratorio: Confirmación de su viabilidad	
Análisis didáctico Marco interpretativo ydesarrollo conceptual del modelo	**Estudio de casos** Confirmación de la bondad de la escala

Cuadro 1- Etapas seguidas en la construcción y validación de la hipótesis H.

4.-EVOLUCIÓN DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO NUMÉRICO NATURAL

Nos situamos en un modelo teórico local, que es un modelo de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre el razonamiento inductivo en series de números naturales que explica e integra los siguientes factores: la progresión en el descubrimiento de regularidades numéricas por parte del sujeto individual, las características de las regularidades “accesibles” a los distintos niveles de desarrollo intelectual, así como las habilidades necesarias para detectar y utilizar cada una de ellas, los tipos de relaciones que se toman en consideración y, sobre todo, la evolución de las competencias inductivas al pasar de un nivel evolutivo a otro superior.

MODELO TEORICO DE DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO NUMERICO

BLOQUES	ESTADOS	CARACTERISTICAS LOGICO-MATEMATICAS
GENERAL No inductivo	Estado 1: Topológico	Linealidad y orden topológico
	Estado 2: Etiquetaje	Asignar un nombre, objeto, símbolo , etc. a cada elemento de la serie.
PRENUMERICO	Estado 3: Infralógico-simbólico	Alternancias, ritmos, periodos, etc., con signos numéricos
	Estado 4: Simbólico-cuantitativo	Percibir el aumento y disminución de cantidades discretas (cantidades de cifras en las representaciones)
NUMERICO	Estado 5: Representacional o simbólico-ordinal	Dominio ordinal de la serie numérica básica. Contar de n en n, con n<10 .
	Estado 6: sintáctico-numeral	Contar de n en n con n>10, basando se en la serie numérica básica y en las regularidadesdel sistema de representación.
ARITMETICO	Estado 7 : Aritmético-Aditivo	Progresiones aritméticas aditivas y sustractivas
	Estado 8: Aritmético-multiplicativo	Progresiones geométricas multiplicativas y partitivas
ALGEBRAICO	Estado 9: Algebraico	Término general Generalización algebraica

Bloques cuyos estados han sido objeto de estudio empírico

Figura 2.- Bloques, estados y características lógico-matemáticas del modelo teórico local

En la figura 2 exponemos el modelo resumido y estructurado por etapas o aproximaciones según la ordenación y categorización obtenidas. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación, así como por las competencias teóricas que le corresponden desde **un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal.**

En resumen, el modelo consta de nueve estados de dominio progresivo de la inducción en series numéricas agrupados en cinco bloques diferenciados. Nuestra investigación empírica sólo se ha circunscrito a los bloques numérico y aritmético.

5. ESCALA ACUMULATIVA ASOCIADA AL MODELO

Desarrollado el modelo teórico, el siguiente paso consistió en la construcción de una prueba con **tareas de continuar series** correspondientes a los bloques numéricos y aritméticos. En la misma prueba los alumnos realizaron cálculos en relación con las tareas del bloque aritmético. La prueba, cuyo esquema se expone en la figura 3, la realizaron 400 alumnos de Educación Primaria. El objetivo fundamental de esta prueba fue la obtención de una escala acumulativa.

En el estudio que hemos realizado se comprueba que existe una tendencia acumulativa en la serie de tareas:

X1: 17, 27, 37, 47, ...
X3: 3, 5, 7, 9, ...
X5: 0, 6, 12, 18, ...
X7: 40, 32, 24, 16, ...
X9: 2, 6, 18, 54, ...
X12: 243, 81, 27, 9,....

Esta acumulatividad consiste en que el éxito en una tarea implica el éxito en las tareas anteriores a ella. (A partir de aquí al referirnos a la escala obtenida utilizaremos las siglas E.I.N.: Escala Inductiva Numérica). Hemos obtenido en total seis niveles designados por N1, N2, N3, N4, N5 y N6.

6. ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS INDIVIDUALES

6.1. METODOLOGÍA

Para alcanzar los propósitos de la investigación es necesario examinar casos individuales señalados, con un enfoque más profundo y detallado que el empleado en el estudio cuantitativo. Esto implica que los informantes deben ser elegidos entre los 400 escolares que han participado en el estudio anterior. Por otra parte, esta nueva indagación se deberá realizar mediante los procedimientos y técnicas adecuados a los propósitos específicos del estudio, que consideramos que son, entre otros, la entrevista clínica individual semiestructurada y el análisis de tareas (Cohen 1990).

Para simplificar el trabajo decidimos unificar la entrevista y el análisis de tareas en un sólo procedimiento, en el mismo sentido ya utilizado en varios estudios psicológicos sobre la inducción dentro del paradigma mediacional y, más concretamente, en el marco de la teoría de la continuidad. Tal es el caso de Bruner, Goodnov y Austin (1956); Restle (1962); Restle y Grenno (1970); Egan y Grenno (1973), etc.. En nuestro caso, vamos a proponer a cada alumno entrevistado la realización de tres actividades, dos de ellas manipulativas y con una cierta componente lúdica, que actúan como campo de observación y como soporte de la entrevista.

Cada actividad tiene una finalidad determinada para obtener un tipo concreto de información y va acompañada de unas preguntas e intervenciones mínimas del entrevistador que son comunes para todos los sujetos. El resto del desarrollo de las entrevistas, en cuyo transcurso se provoca, intencionadamente, la interacción constante entre el entrevistador y el entrevistado, dependerá de las respuestas de cada sujeto. Veamos, a continuación, algunas consideraciones generales sobre las tres tareas, la información que se pretende obtener con cada una de ellas y la justificación de las mismas desde el punto de vista del razonamiento inductivo numérico.

6.2 TAREAS

Veamos, a continuación, algunas consideraciones generales sobre la tres tareas; la información que se pretende obtener con cada una de ellas y su justificación desde la perspectiva del razonamiento inductivo numérico.

<u>Actividad 1</u>: Al alumno se le muestra una pareja de números y debe decir las semejanzas y diferencias que él cree que existen entre ellos; el procedimiento se repite con varias parejas más.

Se pretende obtener información sobre los conocimientos y competencias del alumno ante la necesidad de establecer relaciones numéricas simples. Una vez recogidas todas las relaciones que el alumno identifica, se categorizan y analizan en relación con los diferentes estados de nuestro modelo teórico, a través de los niveles de la E.I.N.

<u>Actividad 2</u>: El alumno elige un número y el investigador, sin decir nada, pone a su lado otro número que guarda con el anterior una cierta relación que sólo él conoce; el procedimiento se repite con nuevos números elegidos por el alumno, a cuyo lado vuelve a poner el investigador los números que corresponden siguiendo el mismo criterio; el proceso continua hasta que el alumno averigua el criterio o desiste en el empeño.

La información que se espera obtener con esta actividad se refiere a las estrategias y cálculos utilizados ante la necesidad de establecer patrones numéricos basados en relaciones del tipo anterior (Actividad 1), según los diferentes estados del modelo teórico y los niveles de la E.I.N. Esta información servirá para confirmar la fiabilidad de los niveles asignados a los alumnos según su rendimiento en la prueba escrita.

<u>Actividad 3</u>: Ante varias parejas de números, entre las que existen relaciones diversas, a veces iguales, el alumno debe hacer grupos de parejas, de manera que en cada grupo deben estar todas las parejas de números que guardan entre sí la misma relación.

La información se refiere aquí a la capacidad de los alumnos ante la necesidad de comparar entre sí relaciones numéricas del tipo anterior (actividad 2) e identificar relaciones semejantes y parejas de números entre los que se puede establecer la misma relación.

Estas actividades se encuentran escalonadas en relación con tres planos de significación inductiva:

a) La comparación de dos números escritos permite detectar diferencias y coincidencias entre ellos (primer plano de significación inductiva).

b) Entre varias parejas de números hay diferencias o coincidencias que se mantienen; por ejemplo: (2,4), (3,6), (11,22),... Identificar estas diferencias o coincidencias supone la realización de inferencias inductivas (segundo plano de significación inductiva).

c) Descubrir la regularidad común a varias parejas de números o clasificar parejas de números por relaciones comunes, supone identificar relaciones existentes entre relaciones simples (tercer plano de significación inductiva). Ejemplo: ante las parejas (3,4), (5,10), (3,6), (25,26), podemos emparejar (3,4) y (25,26) por la relación uno más y (5,10) con (3,6) por la relación doble-mitad.

Al ser una entrevista semiestructurada, deben especificarse en el diseño previo tanto el contenido como los procedimientos (Cohen, 1990, pág. 379). Por ello, exponemos a continuación, en sucesivos apartados, el objetivo pretendido, el material utilizado, el desarrollo de la entrevista, los aspectos a observar y la codificación utilizada en cada una de las actividades que constituyen el soporte de las entrevistas.

7. PRIMERA ACTIVIDAD

Actividad: "Al alumno se le muestra una pareja de números y debe decir semejanzas y diferencias que considera existen entre ellos; el procedimiento se repite con varias parejas más".

Con esta actividad nos situamos en el primer plano de significación. El alumno sólo tiene que hacer alusión a propiedades numéricas en el momento de establecer o identificar las relaciones.

Objetivo

El aspecto básico que se pretende explorar es el uso de la analogía numérica, es decir, el descubrimiento, por parte de los escolares, de posibles analogías entre pares de números diferentes, lo que implica que las analogías que se pueden establecer varían de unas parejas a otras. Se trata de una actividad que se orienta, principalmente, a los escolares de los primeros cursos de Educación Primaria, con la intención de ampliar los trabajos ya realizados en los cursos más avanzados.

Material

El material utilizado en esta actividad consta de diez parejas de números imitando las fichas del dominó. Las parejas y las relaciones fundamentales que se pueden establecer en cada una de ellas, son las siguientes:

[1 2] : Uno más, doble, impar-par, siguiente, mayor;
[2 7] : Cinco más, par-impar, mayor;
[3 7] : Cuatro más, impares, doble más uno, mayor;
[4 6] : Dos más, pares, doble menos dos, mayor;
[5 9] : Cuatro más, impares, doble menos uno, mayor;
[4 14] : Más 10, pares, aquí hay un 1, en los dos está el 4, una cifra-dos cifras, mayor;
[3 22] : Una cifra-dos cifras, el 2 es 1 menos que 3, 19 más, aquí hay dos cifras iguales, mayor;

[5 37] : Una cifra-dos cifras, impares, mayor;
[44 66] : Dos cifras, cifras iguales, pares, cifras pares en ambos, mayor;
[50 70] : Dos cifras, terminan en cero, veinte más, pares, mayor;

En las relaciones expuestas no se consideran las que tienen que ver con las características gráficas de los signos numéricos (parecidos y diferencias en la forma de los distintos signos). A pesar de ello, las relaciones de este tipo han sido recogidas en el trabajo, ya que una parte importante del trabajo en los primeros niveles se dedica a la numeración verbal y escrita.

Desarrollo de la entrevista

A lo largo del desarrollo de la entrevista correspondiente a esta actividad, cada alumno debe analizar, una por una, las diez parejas de números, de acuerdo con el siguiente procedimiento:

- El investigador le enseña una pareja y pregunta: *¿En que se parecen estos números?* Se insiste para que el alumno intente encontrar todos los parecidos.

- A continuación pregunta: *¿En que se diferencian?* Se le insiste para que intente encontrar todas las diferencias.

Estas son las preguntas obligadas. En el transcurso de la entrevista se pueden pedir aclaraciones o justificaciones a las respuestas dadas.

Aspectos a observar

De acuerdo con los objetivos del estudio cualitativo se consideran los aspectos siguientes:

a) Relaciones que reconocen los alumnos (lo que nos permitirá distinguir entre ellas por su complejidad, obtener información para caracterizar los niveles de la E.I.N correspondientes y analizar su variación en función de dichos niveles, con independencia de los cursos o edades de los alumnos entrevistados).

b) El grado de incidencia del nivel instructivo, según el curriculum, sobre los logros en este aspecto del razonamiento inductivo numérico (lo que nos permitirá confirmar la ausencia de concordancia o sincronía entre el desarrollo del curriculum y los niveles de la E.I.N y que dicho nivel instructivo no es un factor determinante en las competencias en estudio).

Codificación de respuestas

De acuerdo con los distintos niveles de la E.I.N. consideramos cuatro categorías de respuestas para esta primera actividad: Simbólica (S), ordinal (O), aditiva (A) y conceptual (C). En ningún caso se han empleado argumentos multiplicativos, razón por la cual no se incluye en esta actividad una categoría multiplicativa. En las tres primeras categorías vamos a diferenciar las siguientes subcategorías:

Simbólica

S1: Grafía; respuestas que hacen alusión a la figura o forma de los signos numéricos;

S2: Número de cifras;
S3: Termina en cero;
S4: Una cifra en común.
Ordinal
O1: Ordinal serial; respuestas que hacen alusión a la relación de orden desde un punto de vista serial;
O2: Ordinal cardinal; respuestas que hacen alusión a la relación de orden Mayor-Menor desde un punto de vista cardinal.
Aditiva
A1: Diferencia menor o igual a diez;
A2: Diferencia mayor que diez.

En ningún caso se han empleado argumentos multiplicativos, razón por la cual no se incluye ninguna categoría multiplicativa.

8. SEGUNDA ACTIVIDAD

Actividad: “El alumno elige un número y el investigador, sin decir nada, pone a su lado otro número que guarda con el anterior una cierta relación que sólo él conoce; el procedimiento se repite con nuevos números elegidos por el alumno, a cuyo lado vuelve a poner el investigador los números que corresponden siguiendo el mismo criterio; el proceso continua hasta que el alumno averigua el criterio o desiste en el empeño”.

Tareas

Para esta actividad se han preparado doce tareas de acuerdo con los criterios de los doce ítems de la prueba escrita del estudio empírico cuantitativo. Las tareas se proponen en el mismo orden que en la prueba escrita y, por tanto, siguen la escala inductiva numérica, correspondiendo dos tareas a cada nivel. Su distribución, en la que se indican también los números que se entregan al entrevistado para el desarrollo de la actividad, es la siguiente:

Nivel 1: a) Contar de 10 en 10 en orden ascendente (del 1 al 89)
b) Contar de 10 en 10 en orden descendente (del 11 al 99)
Nivel 2: a) Contar de dos en dos en orden ascendente (del 1 al 97)
b) Contar de dos en dos en orden descendente (del 3 al 99)
Nivel 3: a) Sumar 6 (del 1 al 93)
b) Sumar 12 (del 1 al 87)
Nivel 4: a) Restar 8 (del 9 al 99)
b) Restar 13 (del 14 al 99)
Nivel 5: a) Multiplicar por 3 (del 1 al 30)
b) Multiplicar por 4 (del 1 al 24)
Nivel 6: a) Dividir por 3 (múltiplos de 3 menores que 100)
b) Dividir por 2 (múltiplos de 2 menores que 100).

Objetivo

Con la actividad se pretende averiguar si los sujetos llegan a descubrir/ establecer los criterios o relaciones comunes a las parejas que se construyen en el transcurso de la entrevista, cuáles son los tipos de relaciones numéricas que son capaces de identificar y cómo las establecen. En cada tarea se mantiene el criterio entre las parejas utilizadas para que el entrevistado intente descubrirlo.

Material

Se han preparado dos conjuntos de 100 fichas magnéticas, de 2x2 centímetros, en las que figuran las cifras del 0 al 99; uno de los dos grupos es para el alumno y el otro para el investigador. Además, se dispone de un tablero, también magnético, dividido en dos columnas con seis celdas de 2x2 centímetros cada una; la primera columna corresponde al alumno y la segunda al investigador.

Desarrollo de la entrevista

Se realiza, en cada caso, de acuerdo con el siguiente procedimiento:

- el entrevistador pide al alumno que ponga un número en la primera celdilla de su columna;

- una vez que el alumno ha puesto el número que ha creído conveniente, el entrevistador coloca en la celda vecina el número que corresponde con el criterio serial seleccionado, sin decir nada;

- el entrevistador pide al alumno que ponga otro número en la segunda celdilla de su columna;

- una vez que el alumno ha puesto el número, el investigador le pregunta si sabe el número que va a poner o si puede adivinarlo fijándose en los números anteriores;

- si el alumno da una respuesta, se le pregunta por qué ha propuesto ese número. Si ha acertado, se le pregunta como lo ha adivinado y se pasa a otra tarea. Si no acierta, el investigador coloca el número que corresponde y le propone un nuevo ensayo.

Así se continúa hasta que el alumno acierte, o bien hasta que agote las seis oportunidades previstas. Se termina la actividad en el momento que se agoten las seis posibilidades.

Aspectos a observar

a) número de ensayos hasta obtener el criterio;

b) explicación del criterio (ajuste a la taxonomía establecida);

c) nivel alcanzado (comparación con los resultados de la prueba escrita);

d) si el alumno aplica el criterio de la tarea anterior en el primer intento de solución de una nueva tarea;

e) estrategia seguida en la elección de los números que propone;

f) criterios aplicados en los intentos fallidos;

g) suficiencia de las respuestas para justificar el nivel alcanzado;

h) si el alumno de un nivel aplica criterios de su nivel ante una tarea de nivel inferior o responde de acuerdo con este último;

i) si el alumno puede superar una tarea de nivel superior al suyo con estrategias de su nivel o modifica sus criterios;

j) si se aplica un criterio aditivo en el primer intento de resolver la primera serie multiplicativa (en los casos que corresponda).

Codificación de respuestas

Las distintas tareas de esta actividad se corresponden con las series de la prueba escrita. Tenemos, por tanto, seis categorías que incluyen, cada una de ellas, dos tareas que vamos a simbolizar según se indica a continuación:

Representacional: R1 y R2
Ordinal: O1 y O2
Aditiva: A1 y A2
Sustractiva: S1 y S2
Multiplicativa: M1 y M2
Partitiva: P1 y P2

9. TERCERA ACTIVIDAD

Actividad: "Ante varias parejas de números, entre las que existen relaciones diversas, a veces iguales, el alumno debe hacer grupos de parejas, de manera que en cada grupo deben estar todas las parejas de números que guardan entre sí la misma relación".

En las tareas anteriores el alumno debe descubrir las relaciones ocultas en una pareja de números (actividad 1) o las relaciones comunes a varias parejas de números (actividad 2). En ambos casos, todas las parejas presentan la misma relación, a diferencia de lo que ocurre en esta tercera actividad. Aquí, el alumno debe identificar/clasificar las parejas que tengan la misma relación de un total de cuatro parejas que se le presentan.

Objetivo

El objetivo es analizar si el alumno identifica dos relaciones equivalentes, es decir, si establece o no analogías entre parejas de números. Dos parejas son equivalentes si en cada una de ellas se puede establecer la misma relación: (a,b) es equivalente a (a',b') si existe una relación R tal que aRb y a'Rb'.

Material

Para cada uno de los seis niveles obtenidos en el estudio cuantitativo hemos construido cuatro parejas de números imitando las fichas del dominó. Para cada nivel las parejas han sido las siguientes:

Nivel 1:	[2 12]	[32 42]	y	[52 42] [92 82]
Nivel 2:	[3 5]	[7 9]	y	[29 27] [84 82]
Nivel 3:	[2 8]	[3 9]	y	[1 13] [41 53]
Nivel 4:	[9 1]	[38 30]	y	[72 59] [95 82]
Nivel 5:	[2 6]	[3 9]	y	[2 8] [3 12]
Nivel 6:	[15 5]	[12 4]	y	[6 3] [8 4]

Desarrollo de la entrevista

La tarea tiene una primera parte introductoria muy elemental, para asegurar que los alumnos comprenden el mecanismo de la misma. En esta primera parte se presentan al entrevistado cuatro rectángulos desiguales (dos azules y dos verdes) y se le pide que los empareje. Una vez emparejados se pregunta en qué se ha basado o por qué los ha agrupado de esa manera (debe decir por el color).

El procedimiento es el siguiente:

- Se le presenta al niño una pareja de números como las obtenidas en la actividad anterior (por ejemplo [2 12]) y nos debe decir como "van" los dos números o que relación cree que puede haber entre ellos;

- Se explica con detenimiento el procedimiento con las cuatro primeras parejas, presentando las posibilidades de emparejamiento (pueden ir así, poniendo dos en un lado y otras dos en otro, o bien así, o así, etc.). Se hace ver que los emparejamientos deben tener un motivo y que cuando junte dos parejas tendrá que decir porqué deben estar juntas. Se pregunta, a continuación, si sabe lo que tiene que hacer;

- Se explica que le vamos a presentar cuatro parejas de números y debe emparejar o juntar, de dos en dos o bien dos en un lado y dos en otro o por separado, etc., las que "van" de la misma manera, tal y como se hizo con los rectángulo de colores;

- A continuación se le dice al alumno que las empareje como él crea conveniente. Una vez agrupadas se le pregunta: *¿porqué las has colocado así?;*

- Una vez que ha respondido, se pregunta: *¿Puedes explicarlo de otra manera ¿Ves otro motivo distinto al que me has dicho? ¿Se te olvida algo?*

- Contestadas las preguntas, se pregunta si es capaz de emparejarlas de alguna otra manera.

Como se pudo comprobar en la relación de respuestas recogidas, algunos alumnos dan más de una solución y, en cada una de ellas, más de una justificación.

Aspectos a observar

Los aspectos a observar en esta actividad son los siguientes:

a) Comprobar si el alumno llega a comparar relaciones y establecer, en su caso, relaciones entre relaciones;

b) Averiguar en qué se basan para establecer las relaciones;

c) Cuáles son las relaciones básicas que establecen;

d) A partir de qué nivel son capaces de establecer cada tipo de relaciones y cuáles son las relaciones concretas que establecen o descubren.

10. INSTRUMENTOS Y ESTRATEGIAS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

Para la recogida de datos hemos utilizado un instrumento común que ha sido la grabación en vídeo. Para las actividades 1 y 2 se han confeccionado y utilizado, además, las fichas de observación o de campo.

a) Grabación en vídeo. Su finalidad es la de poder reproducir las entrevistas y recuperar aquéllos detalles que no se recogen en las fichas de campo. En concreto, además de servir como prueba para esta parte de la investigación, permite completar la información obtenida, subsanar cualquier omisión y describir el perfil inductivo de los distintos niveles.

b) Fichas de campo. Se utilizan para registrar por escrito datos concretos, controlar el desarrollo de la entrevista y prevenir posibles fallos en la grabación.

11. ALGUNAS RESPUESTAS Y COMENTARIOS

Actividad 1

En las respuestas predominan las relaciones ordinales, muchas de ellas con referencias espaciales. Veamos algunos ejemplos:

- Rocío (N4, 7, 2), al preguntarle ¿Para qué sirven el uno y el dos?, responde categóricamente "Para contar". Asimismo, al preguntarle si puedo decir "tres, dos, nueve, seis, veinte, quince.." me responde: "No, porque tiene que ir derecho" (Referencia espacial);
- Pedro, que es del mismo curso y nivel que Rocío, al preguntarle si dos y siete son distintos, responde que el dos va antes del siete. A continuación se le pregunta: ¿Cómo lo sabes? y su respuesta es: "Porque sé contar";
- Miguel (N4, 9, 3), al comparar el dos con el siete responde: "Que se diferencian en que uno es más alto y el otro más bajo"; entonces le pregunto: ¿A qué te refieres?; su respuesta es: "A que uno está más cerca de un número más alto y el otro más lejos";
- Isaac (N4, 9, 3), da una interpretación de la cardinalidad de una colección al comparar el uno y el dos: "dos números distintos. No tienen el mismo significado: una cosa, dos cosas". A continuación vuelve a la serie numérica y dice: "Que son unos números que siempre van juntos. El uno va a continuación del dos siempre". En cuanto a la cardinalidad, Isaac ha sido el único niño de este nivel que hace referencia al aspecto cardinal al dar significado a los números.
- Manuel (N4, 10, 4), al preguntarle en qué son distintos el uno y el dos, nos responde: "Son distintos porque son distintos. Después que uno va delante y otro detrás; porque tienen un orden; porque tienen que llevar un orden".

Hay respuestas que están muy ligadas a la construcción memorística de la serie numérica y al aprendizaje de la numeración escrita, según se pone de manifiesto en las respuestas siguientes:

- Sergio (N4, 9, 4), al comparar el cuatro y el seis, explica: "Al cuatro le faltan seis para llegar al diez y al seis cuatro. Lo mismo que antes (se refiere a las tareas anteriores), los dos son unidades y están del cero al diez. Si los juntamos forman el cuarenta y seis y con el cuatro aquí y el seis aquí forman el 64";
- Antonio (N5, 10, 4), al comparar el cuatro y el seis, dice: "El seis es mayor, porque el cuatro va en primer lugar que el seis. El cuatro va en el cuarto lugar y el seis va en el sexto lugar".

Los alumnos del nivel N4 no llegan a generalizar resultados aritméticos. Así, Sergio (N4, 9, 4), a la pregunta ¿cuándo dos números son iguales?, contesta sobre el ejemplo: "Son iguales si aquí esta el seis y aquí el seis".

- Con la pareja de números [3 22]

Salvador (N1, 7, 2)

"Este ya se ha pasado del veinte. El tres y el veintidós. Al tres le falta mucho, mucho para el veinte. Este ya ha pasado del veinte. Si se le pusiera delante un dos, aquí, sería el veintitrés y sería un número más que este. Ahora en vez de un patito son dos patitos. Este es el mismo dos que antes"

Rocío (N4, 7, 2)

R: Dos y veintidós
E: ¿Qué pasa ahí?, a ver...
R: El veintidós son dos, dos números iguales. En éste sólo un número
E: ¿Qué más?
R: El dos parece un pato.
E: ¿Alguna otra cosa?
R: El tres es distinto del dos. El tres y el dos tienen lo mismo en el principio. Pero el dos tiene como rayita y el tres tiene otra.

Pedro (N4, 7, 2)

E: ¿Qué números son?
P: Tres y veintidós.
E: ¿Se parecen en algo?
P: Así (Señala el redondel superior del tres)
E: ¿Son distintos?
P: El 3 es de una forma y el 22 de otra. El 3 va antes que el 22 y hay *17 números enmedio*
E: Hazlo bien.
P: Veinte, no!, diecinueve.
E: Te has equivocado en uno. ¿Qué tienes que hacer para calcular los números de enmedio?
P: Sumar.

Marta (N3, 11, 5)

M: El tres y el veintidós. El tres es un número impar y el veintidós también. ¿No?
E: Es par.
M: El veintidós es mayor que el tres, pero de tres a veintidós hay mayoría o sea que hay más números.
E: ¿Cuántos hay?
M: Diecinueve.
E: ¿Qué más?
M: Veintidós tiene un número más que tres.
E: ¿Distinto número de cifras?
M: Sí.

Ricardo (N6, 11, 5)

E: ¿Cómo son?
R: Uno es par y el otro impar. Hay dos cifras en uno y en el otro una.
E: ¿Qué más?

R: El tres es menor.

Actividad 2

El que un alumno responda correctamente por escrito a una tarea de continuar una serie, no es suficiente para afirmar que ha descubierto o utilizado el criterio correcto que lo sitúa en un nivel determinado. Así por ejemplo:

Salvador (N1, 7, 2) se encuentra en la tarea R1 con la pareja completa [31 41] y dice que el número que falta es el veintidós ante la pareja incompleta [12]. Si la prueba fuera escrita pensaríamos que ha podido aplicar, correctamente, el criterio “sumar diez” o el criterio “contar diez”. Sin embargo, al tratarse de una entrevista, la respuesta que da es "porque al treinta y uno le saltas un número y en vez del tres le pones el cuatro, cuarenta y uno", que es de un nivel inferior al supuesto, es decir, el nivel simbólico que realmente le corresponde.

Igualmente, Pedro (N4, 7, 2) responde, de forma análoga, "el cuarenta y siete. Ya sé el truco. Que si yo pongo el treinta y siete tú pones el mismo con el cuatro" ante (ante la pareja incompleta [37]). Es evidente que ha utilizado un criterio de un nivel inferior al alcanzado en la prueba escrita, lo que tampoco quiere decir que su situación sea de un nivel inferior a N4.

No todos los alumnos del nivel N4 han respondido como Pedro ante esta tarea. Así, Isaac (N4, 9, 3), ante la pareja completa [56 66] y la incompleta [34], responde "vas a poner el cuarenta y cuatro (cuenta con los dedos). Porque aquí al cincuenta y seis le has sumado diez y al treinta y cuatro le has sumado otros diez".

De todo ello deducimos que los resultados de la prueba escrita son bastante ajustados a la realidad pero ciertamente incompletos, lo que aconseja la necesidad de completar la prueba escrita del estudio cuantitativo con el estudio más detallado que venimos desarrollando.

Nivel representacional: Tareas R1 y R2

En las tareas R1 y R2 todos los niños de siete años y segundo curso han aplicado las mismas estrategias, basadas en el sistema de representación y, a lo sumo, en la acción de contar. Así, Alberto (N4, 7, 2), ante la pareja incompleta [61], responde:

> "El setenta y uno. Si tú pones el cincuenta y uno entonces el siguiente del otro número, del sesenta, es también con el uno, el sesenta y uno"

A partir de los nueve años y tercer curso las respuestas se estabilizan en sumar o restar diez aunque en algunos casos se hace explícita la acción de contar para poder realizar los cálculos:

Isaac (N4,9,3)

[84 74]

[95] I: Hombre, yo estoy sumando: 95, 94, 93, 92,91,90,89,

88,87,86. El ochenta y seis.

E: Te has equivocado

I: 84,83,82,81,80,79,78,77,76,75,74

95,94,93,92,91,90,89,88,87,86,85. El ochenta y cinco. Quitando diez. Antes estaba quitando nueve.

Como podemos observar, ante el error cometido, Isaac comprueba la regla en la primera pareja para verificarla después, contando, en la segunda pareja, lo que le lleva a responder “quitando diez”. Este hecho se vuelve a reproducir en la respuesta siguiente, en la que Manuel utiliza la acción de contar para descubrir el criterio y la suma para calcular el término que falta:

Manuel (N4, 10, 4)

[40 50]

[22] M: El 32. he visto que yo he puesto el cuarenta y tú el

cincuenta y he contado y en el veintidós he calculado mentalmente: veintidós y diez: treinta y dos.

Por último, encontramos alumnos que manifiestan una consolidación de las operaciones de sumar y restar. Tal es el caso siguiente:

Blas (N4,10,4):

[55 45]

[65] B: El cincuenta y cinco.

E: ¿Qué has hecho?

B: Restar.

E: ¿Cuanto?

B: Diez.

Nivel ordinal: Tareas O1 y O2

Al pasar del bloque representativo al bloque ordinal se modifican las estrategias en los niños pequeños, en los que predomina la acción de contar. Veamos algunos ejemplos:

Rocío (N4, 7, 2), en la tarea O1, contesta: ¿A que va de dos en dos?; igualmente, en la tarea O2, responde: "Que va de dos en dos para atrás"

Alberto (N4, 7, 2), después de varios intentos en la tarea O1, responde: "Para llegar del 91 al 93, dos".

Pedro (N4, 7, 2) continúa en el subestado representacional, como podemos observar en la entrevista de la tarea O2:

[90 88]

[50] E: ¿Qué número voy a poner?

P: Con dos cifras. Esto parece que se complica. Números grandes. El cuarenta y ..., el cuarenta, el cuarenta y ocho.

E: ¿Cómo lo sabes?

P: Porque ahí has puesto un ocho (indica las unidades de 88).

E: Pon otro número.

[10] E: ¿Qué voy a poner?

P: El ocho. Por que siempre tú estas poniendo el ocho, ¿no?

[10 8] E: Pon otro número.

[8 6] E: Ahora yo pongo el seis. ¿Cómo van ahora los

números? Pon otro número.

[24] E: ¿Qué voy a poner?

P: El catorce.

E: No. ¿Qué has puesto antes?

P: El ocho.

E: ¿Y yo?

P: El 6. Entonces el dieciséis.

E: Tú has puesto veinticuatro. ¿Yo que pongo entonces?

P: El cuatro.

E: Concéntrate y fíjate. Tú has puesto el ocho y yo el seis. ¿Qué pasa entre el ocho y el seis?

P: El veintidós. Porque le quito dos.

A partir de los nueve años se estabilizan las respuestas desde un punto de vista aditivo:

Miguel (N4,9,3)

O1: "Que aquí he puesto el setenta y cinco y tú has puesto dos números más".

O2: "Porque yo aquí he puesto setenta y cuatro y tú has puesto dos números menos".

Isaac (N4,9,3)

O1: "Este es más fácil por que a setenta le has sumado dos".

O2: "El treinta y dos. Por que al noventa le quitas dos".

Gonzalo (N4,9,3)

O1: "Sumarle dos".

O2: "Porque a setenta le quitamos dos y da 68".

Blas (N4,10,4)

O1: "Porque antes has sumado dos".

O2: "Restar. Restar dos".

Manuel (N4,10,4)

O1: "Sumándole dos. Porque he visto que yo he puesto el 40 y tú has puesto el 42. Entonces yo he puesto el 36 y como le sumas dos, es treinta y ocho".

O2: "He restado. Primero he visto aquí que he puesto setenta y tú sesenta y ocho. Si yo he puesto cuarenta y cinco tú tienes que poner cuarenta y tres".

Nivel sustractivo: Tareas S1 y S2

Alberto (N4, 7, 2):

[50 37]

[40] E: ¿Qué voy a poner?

A: El veintisiete.

[40 27] E: Muy bien. ¿Cómo lo sabes?

A: Contando diecisiete menos.

E: ¿Cómo? Diecisiete menos.

A: También está el cincuenta menos.

E: Pon otro número.

[53] E: Ahora como sería?

A: Cuarenta.

[53 40] E: Muy bien. ¿Cómo lo has hecho?

A: Me he fijado en el cincuenta y tres que se parece al cincuenta. Entonces digo: Si cincuenta el resultado es treinta y siete, tres más, que son éstos (Señalando en el 53), serían cuarenta.

E: Pon otro número.

[32] E: ¿Cuál voy a poner?

A: El diecinueve.

[32 19] E: ¿Qué has hecho?

A: He cogido un número del tres (Se refiere a coger un número de la tercera decena). Me fijo en este (En el 40 anterior) y digo uno menos (En el 32 hay una decena menos que en 40) serán veinte. Menos uno (En 53 hay tres unidades y en 32 solo dos) son diecinueve.

E: Qué es lo que estas haciendo entonces?

A: He ido contando trece menos

Actividad 3

Los esquemas que han manifestado los escolares los hemos organizado en cuatro categorías: Correspondencia representacional, Clasificación representacional, ordinal representacional y aditivo representacional. La distribución de respuestas se puede ver en la tabla 6.10.

Correspondencia representacional

Considerando cada pareja como un conjunto y estableciendo una correspondencia con un criterio representacional:

Carlos (N1,6,1)

3.1.a

[92 82]

[2 12]

"El dos con el dos"

3.1.b

[32 42]

[52 42]

"Juntos el dos con el dos"

Salvador (N1,7,2)

3.1.a

[2 12]

[32 42]

"Aquí también el dos contra el dos y este dos contra otro dos. Los de abajo tienen un número delante"

3.1.b

[92 82]

[52 42]

"Este se parece en el dos, contra el dos y el dos contra el dos. Estos tienen un número delante"

Gema (N2,6,1)

3.1.a

[32 42]

[52 42]

Señalando el cuarenta y dos de cada pareja: "Estos dos sitios tienen cuarenta y dos"

3.1.b

[2 12]

[92 82]

Cubriendo el ocho y el uno, dice: "Éstos tienen dos"

Clasificación representacional

Aplicando una correspondencia con un criterio clasificatorio representacional:

Salvador (N1,7,2)

3.2.a

[7 9]

[3 9]

"Éste tiene un número".

3.2.b

[29 27]

[84 82]

"Éste tiene dos números. No va a ir un número contra dos".

Rubén (N4,9,4)

3.2.a

[84 82]

[29 27]

"Estos tienen dos cifras".

3.2.b

[7 9]

[3 5]

"Estos tienen una cifra".

Ordinal representacional

El establecimiento de la correspondencia se basa en aspectos ordinales de la serie numérica:

Rocío (N4,7,2)

3.3.a

[3 9]

[2 8]

"El ocho y el nueve. El dos y el tres...contando...".

María (N2,6,1)

3.3.a

[3 9]

[2 8]

"El dos va delante del tres y el ocho va delante del 9".

3.4.a

[38 30]

[9 1]

"Después del treinta va el treinta y uno y después del treinta y ocho va el treinta y nueve".

Aditivo representacional.

Establecimiento de una correspondencia aditiva:

Sergio (N4, 9, 4)

3.3.b

[41 53]

[1 13]

“Le han sumado en este número cuatro (Se refiere a las decenas de 13)”.

Aquí como sólo hay un uno le han añadido un cuatro (A cero decenas)"

3.3.b

[15 5]

[12 4]

"Del cuatro al cinco le han añadido una y del dos al cinco le han añadido tres".

LA ENTREVISTA CLÍNICA Y LOS MAPAS CONCEPTUALES

Pedro Huerta
Universitat de València

INTRODUCCIÓN

En la literatura sobre este tema, el término *mapa conceptual*[1], como instrumento o herramienta, no se usa de la misma manera por todos los investigadores. Así, por ejemplo, mientras Novak (Novak y otros, 1983; Novak y Gowin, 1988) parece usar el término "mapa conceptual" como instrumento que tiene por intención mejorar la enseñanza de las ciencias experimentales, el uso que de este mismo término hacen, por ejemplo, Hasemann y Mansfield (1995) es el de instrumento o herramienta para evaluar la comprensión de los estudiantes de un tema de matemáticas, antes y después de la instrucción, y ver aquellos aspectos en los que los estudiantes centran su atención delante de una situación matemática concreta (Hasemann, 1996, comunicación personal).

Nosotros compartimos, también, la visión de los mapas conceptuales como un instrumento de evaluación a partir del cual poder analizar la manera en que los estudiantes organizan un determinado conjunto de conceptos y relaciones conceptuales entre dichos conceptos (Huerta, 1995a; Huerta, 1997).

Muy a menudo se objeta, en relación con el uso de los mapas conceptuales con este fin, lo siguiente:

1) Puede existir una dependencia entre la construcción de los mapas conceptuales y la manera en la que se pregunta a los estudiantes para obtenerlos.

2) Los mapas conceptuales podría no ser reproducibles.

3) Para la construcción de los mapas conceptuales se necesitan habilidades metacognitivas (por ejemplo, en el caso de los mapas "pobres" no podemos estar seguros si la causa es la falta de conocimientos matemáticos o su incapacidad para construir tales mapas[2]).

4) No hay criterios objetivos a partir de los cuales analizar los mapas conceptuales de los estudiantes.

Objeciones con las que casi todos estaríamos de acuerdo y que deberían tomarse seriamente e incrementar la investigación en este sentido. No obstante, algunos resultados positivos se han dado, como los que se relatan en Mansfield y Hasemann (1995) y el que se mostró en el 19º Congreso anual del PME (Huerta, 1995b). Una técnica que se ha desarrollado para una investigación más amplia puede verse en Huerta (1997), en la que los

---

[1] "Concept mapping" en terminología anglosajona.

[2] Este caso no fue el nuestro. Los estudiantes no construyeron sus mapas. Los construimos nosotros a partir de sus respuestas a un test especialmente construido con este fin.

estudiantes completaron un test a partir del cual nosotros derivamos sus MC's cognitivos[3] que sometimos a análisis con posterioridad. Uno de estos análisis se basó en la entrevista clínica y que mostraremos a continuación.

LA ENTREVISTA CLÍNICA EN ESTE CONTEXTO: OBJETIVOS Y ORGANIZACIÓN.

Usar la entrevista clínica, como parte de nuestra metodología de investigación (Huerta, 1997), no estaba previsto inicialmente en nuestro proyecto. En cambio, el desarrollo del mismo, las objeciones que mencionábamos en la introducción de este documento y la posibilidad de contar con estudiantes que voluntariamente participaran en él, creó la necesidad de incluir la entrevista en nuestro trabajo. Fundamentalmente, nuestra finalidad con esta inclusión era estudiar el efecto que tenía en los estudiantes la representación por mapas conceptuales y no veíamos otra forma de lograrlo si no realizábamos entrevistas.

OBJETIVOS.

La entrevista la usamos pues para confirmar de algún modo la validez de los mapas conceptuales que habíamos construido. En consecuencia, nuestras preguntas iban en el sentido siguiente:

- ¿Realmente los mapas representan una organización de los conceptos relativos a cuadriláteros?

- ¿Estaría de acuerdo un estudiante con su mapa conceptual?, es decir, ¿lo que reflejaba un mapa conceptual es lo que el estudiante había respondido en el test? ¿Qué modificaciones haría, si es que las haría, sobre su mapa conceptual, después de haber sido construido?

Por otra parte, a lo largo de la entrevista, aparecieron nuevos elementos de análisis que nos propusimos explorar:

- ¿Qué propiedades de los conceptos secundarios se usan y por qué?

- ¿Con qué sentido se usan dichas propiedades? Este sentido, ¿es próximo al significado matemático de esas propiedades?

- ¿Con qué sentido se usan los nexos que conectan un concepto secundario con una propiedad suya para establecer una proposición válida sobre el cuadrilátero? Ese sentido, ¿es próximo al significado matemático?

- ¿Son los mapas conceptuales un contexto idóneo para negociar significados de conceptos y proposiciones matemáticas?

---

[3] Algunas veces se hace la distinción entre mapa conceptual, como el mapa elaborado y consensuado por expertos en algún tema de matemáticas, y el mapa cognitivo, mapa conceptual representante de una organización conceptual en la mente de las personas. Como tal, el mapa cognitivo sería personal e idiosincrásico, mientras que el mapa conceptual sería uno y socialmente aceptado como el mapa de referencia. Nosotros (Huerta, 1997) no hemos hecho, finalmente, esta distinción y seguimos llamando mapa conceptual a esos mapas, aunque tengan orígenes diferentes.

Realmente, la entrevista clínica, en el contexto en el que aquí la mostramos, resultó ser un poderoso instrumento que nos proporcionó más posibilidades que las que aquí hemos relacionado.

ORGANIZACIÓN.

PRESENTACIÓN.

Las entrevistas se organizaron del siguiente modo. Al inicio de cada sesión, de una hora aproximada de duración, se mostró a cada estudiante los siete mapas construidos, uno para cada cuadrilátero, explicándoles cómo los habíamos construido a partir de sus respuestas al test (ver, por ejemplo los mapas codificados como A_{11} y L_{11} que corresponden a dos estudiantes que hemos codificado como A y L, respectivamente) y dos mapas más que requerían también una explicación de su estructura y de su construcción (ver, por ejemplo, los mapas codificados como A_{81} y L_{81}). Resaltamos que, en estos últimos, habíamos representado las relaciones entre los cuadriláteros mediante los nexos "es" y "algunas veces es" y que algunas relaciones del tipo "no es" o "nunca es" no se habían representado en el mapa ya que se daban por supuestas si en los ítems del test dos o más cuadriláteros no se habían relacionado[4].

GUIÓN, PROTOCOLO E INTERACCIONES.

Mostrados tanto los mapas como la manera en la que se habían construido, el investigador y el estudiante los analizaban de manera que, si éste lo consideraba oportuno, podía incidir en ellos para modificar conceptos, nexos, ejemplos, etc., que se habían incluido en los mapas originales o para añadirlos o eliminarlos, si este era el caso[5]. De esta manera, el mapa original se convirtió en el guión de la entrevista, siendo la función del entrevistador la de impulsor de las habilidades metacognitivas del entrevistado, de tal manera que sea éste el que reflexione sobre su conocimiento allí representado. Así, por ejemplo, uno de los aspectos que queríamos analizar era las relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios[6] que podían establecer los estudiantes. Queríamos saber si el hecho de que en las respuestas al test no apareciesen relaciones de implicación entre las propiedades de los conceptos secundarios relativos a un cuadrilátero, por ejemplo, "diagonales que se bisecan implica lados paralelos dos a dos" en los paralelogramos, era debido a que para establecerlas se requerían habilidades de razonamiento que los estudiantes no tenían o que la estructura del ítem correspondiente en el test no facilitaba este tipo de respuestas. En este sentido, interrogamos a los estudiantes y les hicimos reparar en ello. Trabajando en sus mapas, propusimos a los

---

[4] En cambio, si el estudiante manifestaba explícitamente una relación del tipo "no es" o "nunca es" en lugar de alguna de las otras, entonces esta relación sí que se representaba en el mapa.

[5] El mapa simplifica las cosas: organiza los conceptos, relacionándolos, y elimina lo superfluo o irrelevante en una proposición.

[6] Conceptos que forman parte de la estructura conceptual de cada cuadrilátero.

estudiantes que viesen la posibilidad de conectar las propiedades de los conceptos secundarios entre sí y con las demás y que si dicha posibilidad se reconocía, entonces se conectasen y propusieran un nexo que los relacionara. Si esto se diera así, el aspecto del mapa conceptual inicial sería diferente del final, lo que nos daría nuevos elementos de análisis (ver, por ejemplo, mapas A_{12} y L_{12}).

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS. UN CASO.

Lo que aquí vamos a presentar escuetamente son fragmentos de una de las entrevistas realizadas a estudiantes de la Escuela Universitaria de Magisterio de la Universitat de València. Éstos, estuvieron implicados, voluntariamente, en una investigación más amplia y que ya hemos referido suficientemente, por lo que completaron los tests correspondientes y disponíamos de sus mapas conceptuales.

El volumen de información que el investigador puede extraer de 9 mapas previos a la entrevista, y otros tantos posteriores, hace que se imponga una selección de los datos en los que se traduce y se trate de responder únicamente a los objetivos que inicialmente estaban previstos, aunque la tentación de abordar otros pueda ser muy fuerte. Por otra parte, la extensión de este documento hace que la selección aún sea mayor y que comentemos brevemente, y sin demasiada profundidad, algunos aspectos de los que hemos querido mostrar aquí. Remitimos al lector a Huerta (1997) para un análisis más detallado.

Una visión rápida de los siete primeros mapas, nos permitió evaluar hasta qué punto el estudiante del que hablamos era capaz de estructurar las propiedades de los conceptos secundarios lado, ángulo, diagonal y simetría, en relación con el cuadrilátero sobre el que se referían. Así, en general, nuestro estudiante expresa propiedades relevantes, para cada uno de los cuadriláteros, de todos y cada uno de los conceptos secundarios. La relevancia de dichas propiedades se manifiesta en los mapas correspondientes mediante el nexo "son". Pero aparecen dificultades cuando de propiedades particulares se trata y si no, fijémonos en el siguiente protocolo, extraído de la entrevista con el estudiante A, en el que se muestra cómo y con qué significado se forma una proposición sobre el concepto paralelogramo en el que está presente el nexo "a veces es".

P. Aquí tienes tus mapas.

E. ¿Tenemos que deducir?

¿La geometría es siempre deducción? Apenas iniciamos la entrevista, el estudiante A piensa que su tarea será deductiva[7].

P. (Explicando al estudiante cuál ha sido el objetivo y cómo se han construido los mapas que hemos llamado conceptuales). Estos mapas representan una manera de organización de los conceptos relativos a cuadriláteros, obtenidos a partir de tus respuestas a los ítems

[7] Hemos dejado esta introducción, que está alejada de los queremos ver, por lo significativa que es la primera reacción del estudiante de cara a situaciones que tienen que ver con la geometría y, fundamentalmente, con la palabra "deducción", que en el contexto en el que está dicha, no sin ciertos recelos y con muchas precauciones, podría significar: demostrar, razonar e incluso pensar. En cualquier caso, y no sin ciertas reticencias, nuestro estudiante hará "deducción", y mucha, con sus mapas conceptuales.

del test que resolviste hace unos días. A partir de ahora podrás incidir sobre él añadiendo o quitando lo que desees.
E. (Leyendo sus mapas) Aquí no es simétrico (refiriéndose al paralelogramo)
P. Una de las respuestas que me diste, no supe como representarla en el mapa y por eso me he esperado a este momento para representarla. Decías, en referencia al paralelogramo, que "por lo menos dos ejes", "convexo", "simétrico"
E. Es que no es simétrico, ¿no?
P. (tratando de interpretar las respuestas anteriores, construye el siguiente mapa conceptual parcial del paralelogramo, Figura I):

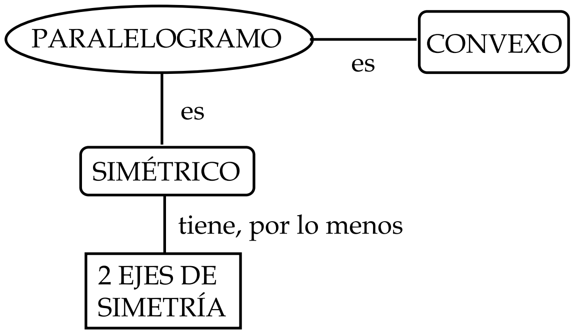


Figura I . Mapa conceptual inicial del paralelogramo del estudiante A en el que relaciona la simetría y sus propiedades con el paralelogramo.

¿Es esto lo que me querías decir en tu respuesta?
E. Sí
P. ¿Si quieres decir algo más sobre la simetría del paralelogramo?
E. Es que el paralelogramo no tiene simetría.
P. Fíjate en los ejemplos que pusiste de paralelogramo... (ver parte inferior del mapa A11).
E. ¡¿Todos estos?!
P. (Numerándolos) ¿Son todos paralelogramos?
E. (Parece que algo insegura) Bueno algunos. ¡Yo que sé! Bueno sí que son paralelogramos.
P. Estoy de acuerdo contigo, son paralelogramos.
E. Sí, sí que son paralelogramos pero... algunos sí tienen ejes de simetría y otros no. El "paralelogramo paralelogramo" no tiene ejes de simetría.
P. ¿Cuál es el "paralelogramo paralelogramo"?
A. Éste (señalando la figura 8 en mapa A11)
P. (Señalando a la figura 11 en mapa A11). ¿Éste no es "paralelogramo paralelogramo"?
E. No, pero a ese le llamamos rectángulo, o sea, es un paralelogramo pero le llamamos rectángulo.
P. ¿Cómo le llamarías a estos? (Señalando a las figuras 8 y 9 en mapa A11).
E. Un paralelogramo romboide. Éste es el nombre propio (refiriéndose al romboide). O sea, el paralelogramo también es un nombre propio de este (refiriéndose al romboide) y a este (refiriéndose al rectángulo) ya le llamaríamos rectángulo (a secas).

P. ¿Quieres decir que puede haber algún paralelogramo que no sea alguna de estas familias representada por estos ejemplos?

E. No entiendo tu pregunta.

P. Sí. Has dicho (recorriendo los diferentes ejemplos) que este es un paralelogramo que tiene un nombre propio, este es otro paralelogramo que tiene otro nombre propio, ...

E. (Al entrar en los romboides) ... Es que yo a éstos les llamo paralelogramos...

P. ¿O?

E. Romboides.

P. Así pues, todos son paralelogramos. Entonces, ¿qué querías decir de la simetría?

E. "A veces".

P. El paralelogramo ¿qué? ¿Cómo conectarías estas dos cosas (Paralelogramo y Simetría)?

E. ¿Poniendo que es simétrico?

P. ¡No!, poniendo lo que tú creas que hay que poner.

A. Que no es simétrico. O que ¿puede no ser? (dudando cada vez de lo que dice) Es que si... ¿Tengo que mirar a todos (los ejemplos)?

P. ¡Claro!

E. Pues... ¡Yo que sé! A ver (incidiendo en el mapa). Que puede ser o a veces es (simétrico)

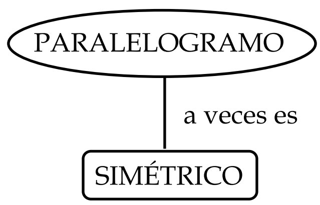


Figura II . Mapa conceptual final del paralelogramo del estudiante A en el que relaciona la simetría y sus propiedades con el paralelogramo.

En este pasaje de la entrevista, vemos cuál es la ruta de pensamiento que sigue el estudiante para relacionar dos conceptos: uno principal, paralelogramo, y otro secundario, la simetría, con la que establece una proposición válida sobre el cuadrilátero. Inicialmente, nuestro estudiante pensaba que los paralelogramos era simétricos y que tenían por lo menos dos ejes de simetría. Seguramente estaba pensando en algunos de los ejemplos de paralelogramos que había mostrado. Cuando esta cadena de proposiciones se le mostró organizada como se indica en el mapa de la Figura I, nuestro estudiante interviene diciendo que "el paralelogramo no tiene simetría". Tal vez él quería decir con ello que la propiedad de ser simétrico no es generalizable a todos los paralelogramos "... Algunos (de los ejemplos de paralelogramo) sí tienen ejes de simetría y otros no" y en concreto, su representante más genuino de la clase paralelogramo, el "paralelogramo paralelogramo", es decir, el romboide, "no tiene ejes de simetría" y es por eso que su afirmación inicial en la entrevista de que los paralelogramos no eran simétricos se apoyaba en que su representante genuino no era simétrico. "A veces" es su visión de la relación entre paralelogramo y simetría, aunque con una cierta inseguridad: "... que no es simétrico (el paralelogramo). O que puede no ser... Es que si... ¿Tengo que mirar a todos (los ejemplos)?... Pues, ¡yo que sé!. A ver... (parece como si se hiciese la luz), que puede ser o a veces es (simétrico)".

Así pues, en este caso, la elección del nexo que conecta el cuadrilátero y el concepto secundario, dando lugar a una proposición válida para el cuadrilátero, ha exigido un razonamiento que va más allá de una propiedad observada en un concepto secundario, y que es posible asociar a un cuadrilátero, a partir de unos pocos ejemplos, tal vez sin considerarlos todos, porque en cualquiera de ellos se verifica.

En un principio nuestro estudiante no había reparado en que las propiedades de los conceptos secundarios se pudieran relacionar. Tampoco lo había conseguido el ítem preparado con tal fin en el test, "es que no entendía lo que me preguntabas... Creí que se refería a la simetría y que era un lugar destinado a escribir cosas que no había dicho antes", así que le propusimos la posibilidad de establecer dichas relaciones a partir de su mapa de paralelogramo.

P. Mira el mapa (del paralelogramo, A_{11}). ¿Conectarías las propiedades de este concepto secundario (lado) con las de este otro (ángulo), con las de este otro (diagonal), de alguna manera, presidido por el cuadrilátero, de forma que tenga significado para ti y para él?

E. Puedo conectar... Haber... Los "lados son iguales dos a dos" como "los ángulos son iguales dos a dos" y...

No da la impresión de que a nuestro estudiante le resultase extraño que se pudiesen establecer relaciones entre las propiedades de los distintos conceptos secundarios. "Iguales dos a dos (en los lados) con iguales dos a dos (en los ángulos)". La manera en la que estas dos propiedades se conecten, es decir, la elección del nexo que relaciona ambas propiedades, puede darnos una idea de cómo ve el estudiante la relación entre ambas (ver mapa A_{12}).

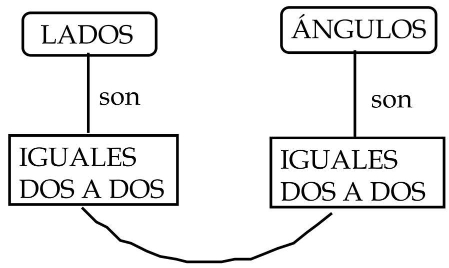


Figura III. Mapa conceptual en el que el estudiante A establece relaciones cruzadas en el mapa de paralelogramo durante la entrevista

P. ¿Qué nexo pondrías a esa conexión?
E. Bueno... No sé... ¿Qué nexo? No lo sé... (pensando). Bueno, yo lo que deduzco es que cuando tienen los lados iguales dos a dos, los ángulos también son iguales dos a dos. ¿Qué nexo pondría ahí? (se pregunta)

Resulta evidente que el estudiante está intuyendo una implicación entre ambas propiedades, lo que le cuesta es establecerla de una manera más formal: "...si los lados son iguales dos a dos, los ángulos también son iguales dos a dos" y ante la posibilidad de usar nexos equivalentes a "también", como "entonces", escoge el nexo más fuerte, "entonces", para representarlo en el mapa.

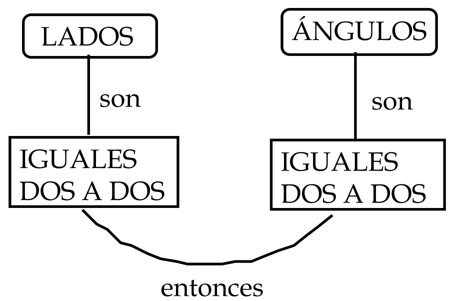


Figura IV Mapa conceptual final en el que el estudiante A establece relaciones cruzadas en el mapa de paralelogramo, incluyendo el nexo que la caracteriza, durante la entrevista

Con esta primera relación entre propiedades de distintos conceptos secundarios (Figura IV), se abre para el estudiante la posibilidad de preguntarse por propiedades de un mismo concepto secundario "... Es que estos dos (sendas propiedades de los lados) también (se relacionan). Se supone que si los lados son paralelos dos a dos, los opuestos son paralelos". El estudiante identifica una relación posible.

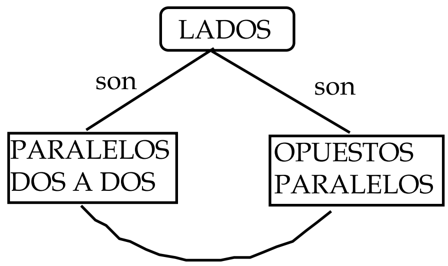


Figura V. Mapa conceptual en el que el estudiante A establece relaciones cruzadas en el mapa de paralelogramo relacionando expresiones equivalentes de una misma propiedad relevante, durante la entrevista.

Identificadas las propiedades del concepto secundario que posiblemente se relacionen, debe introducir el nexo que establece el tipo de relación que existe entre ambas propiedades, "¿Qué pongo?, ¿Lo mismo? (decide poner entonces)", tal vez influida por la relación anterior.

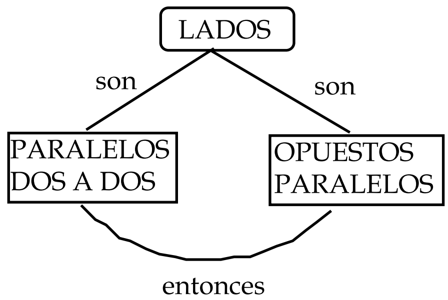


Figura VI. Mapa conceptual final en el que el estudiante A establece relaciones cruzadas en el mapa de paralelogramo relacionando expresiones equivalentes de una misma propiedad relevante, e incluyendo el nexo que la caracteriza, durante la entrevista

Dos nexos iguales (entonces) en relaciones distintas (Figuras IV y VI). Veamos con qué significados se usan ambos nexos.

P. ... Por ejemplo, has puesto que "lados paralelos dos a dos <u>entonces</u> los opuestos son paralelos". Ahora me cuestiono el significado de este <u>entonces</u>. No sé si lo que me quieres decir es que estoy usando dos expresiones para decir lo mismo.
E. Sí.
P. Entonces, no es una implicación, sino que lo que estoy diciendo es realmente lo mismo. Si digo que los "lados son iguales dos a dos", los ángulos ¿son iguales dos a dos? Lo que conecte ambas cosas, tendrá significado de implicación, porque una cosa (propiedad) es consecuencia de la otra (propiedad). Ahora bien, ¿estás seguro de que eso es una implicación?
E. (pensando) Yo creo que sí, ¿no?
P. ¿Por qué?
E. Porque si los lados son iguales dos a dos, los ángulos también son iguales dos a dos. Los ángulos dependen de los lados.

P. Ó sea, que más bien es una consecuencia una de la otra. ¿En qué sentido la anotarías? ¿Este implica este o este implica este? (refiriéndonos a las propiedades de los lados)
E. Los dos se implican mutuamente.

Así que, para este estudiante, dependiendo de la relación establecida, el nexo "entonces" podría sustituirse por "implica", ya que hay dependencia entre los conceptos secundarios, "... los ángulos dependen de los lados".

En otros casos, el nexo "entonces" podría sustituirse por "es decir", ya que la misma propiedad se están expresando por medio de dos formas equivalentes:

P. ... Revisemos esta otra. Lados paralelos dos a dos entonces opuestos paralelos.
E. Lo que tú has dicho antes, las dos dicen lo mismo.
P. Por tanto, este "entonces" y este otro "entonces" los has usado de distinta manera, ¿verdad?...

CONCLUSIÓN.

Otras situaciones y otros estudiantes podíamos haber presentado, pero, ya lo hemos dicho antes, la amplitud de este documento y lo que en él se pretende mostrar no nos permite más.

Puede decirse que, en el contexto particular en el que se ha desarrollado nuestro trabajo, la entrevista clínica o, mejor, entrevista a secas, no se ha usado como el único medio para obtener información de los estudiantes sino que se ha usado como un método complementario de otra metodología, los mapas conceptuales, que no necesariamente usa la entrevista clínica. El hecho de haberla usado nos ha proporcionado información sobre aspectos relativos al uso de los mapas conceptuales como instrumento para la evaluación, lo que, por otra parte, ha potenciado la investigación realizada con éstos.

Esencialmente, las entrevistas realizadas nos han aportado información sobre:

- El juicio de los propios estudiantes sobre un conocimiento representado en un mapa conceptual.

- La utilidad de los ítems del instrumento de evaluación usado, en relación con la representación en un mapa conceptual de la estructura conceptual que reflejan las respuestas a esos ítems.

Por otra parte, el hecho de que en toda entrevista clínica siempre esté presente un cierto proceso de enseñanza - aprendizaje,

- La conjunción mapa conceptual + entrevista clínica potencia las habilidades metacognitivas y de razonamiento de los estudiantes entrevistados.

- Por tanto, muy probablemente, el mapa conceptual que surge como consecuencia de la entrevista refleje mejor la organización mental de un determinado contenido matemático que el original.

Por ello, creemos que usar ambas metodología de investigación de manera complementaria, con las limitaciones lógicas derivadas de una metodología de investigación incipiente como la que hemos mostrado aquí, puede ser una herramienta poderosa para explorar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

REFERENCIAS.

Huerta, M. P. 1995a, Uso de los Mapas Conceptuales para explorar conceptos y relaciones: El caso de los cuadriláteros. Taller presentado en las *II Jornades d'Educación Matemàtica de la Comunitat Valenciana*, La Safor, mayo de 1995.

—— 1995b, Using Concept Maps to Analyse Students' Relationships between Quadrilaterals, en *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of the Mathematics Education*, vol. 1, pág. 242, Recife, Brasil.

—— 1997, Los niveles de van Hiele en relación con la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales, tesis doctoral no publicada, Universitat de València.

Hasemann, K.; Mansfield, H., 1995, Concept Mapping in Research on Mathematical Knowledge Development: Background, Methods, Findings and Conclusions, *Educational Studies in Mathematics* vol. 29, pág. 45-72.

Novak, J.D; Gowin, D.B. y Johansen, G. T., 1983, The Use of the Concept Mapping and Knowledge Vee Mapping with Junior High School Science Students, *Science Education*, vol. 67, núm. 5, p.p. 625-645.

Novak, J. D, y Gowing, D. B., 1988, *Aprendiendo a aprender*, [Martínez Roca: Barcelona].

ANÁLISIS DE LAS INTERACCIONES ENTRE PARES DE ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Pedro Cobo Lozano
IES Pius Font i Quer. Manresa

La investigación que presentamos (Cobo, 1998) analiza las interacciones que se producen entre pares de alumnos en la resolución de problemas. Aunque no utilizamos la entrevista para recoger datos orales, la técnica que mostramos tiene elementos comunes a ella. La comparación de ambas puede abrir perspectivas de debate en cuanto a las semejanzas y diferencias respecto a la situación de observación, a los papeles comunicativos de los interlocutores, a la predeterminación del tema del diálogo, a las formas de analizar los datos obtenidos, etc.

En las páginas siguientes hacemos una presentación general de la investigación, centrándonos, sobre todo, en la descripción de la técnica de recogida de datos orales que utilizamos, en el contexto en el que recogemos dichos datos y en el método de análisis que proponemos. En el Anexo mostramos, a modo de ejemplo, el resumen del microanálisis de uno de los episodios del proceso de resolución de un problema.

1. PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La finalidad del presente trabajo es, en líneas generales, la caracterización de las interacciones entre pares de alumnos en la resolución de problemas con un contenido matemático específico, y el análisis de la influencia de dichas interacciones en la evolución de los procesos cognitivos de los alumnos.

Hemos enfocado la investigación considerando las siguientes dimensiones: la cognitiva —analizamos la evolución de los conocimientos de los alumnos en relación con los contenidos matemáticos de los problemas que resuelven—; la interactiva —identificamos los intercambios comunicativos que se producen durante la resolución de problemas—; y la metacognitiva, de la que consideramos los aspectos relacionados con el control que los alumnos ejercen sobre el proceso de resolución y los utilizamos como elementos de análisis y como base para establecer las fronteras de las interacciones en los procesos de resolución de problemas.

En concreto, nos proponemos cuatro objetivos: 1) la caracterización de las interacciones de pares de alumnos en los procesos de resolución de problemas; 2) el establecimiento de un método de análisis de los procesos de resolución de problemas que tenga en cuenta las tres dimensiones que consideramos: interactiva, cognitiva y metacognitiva; 3) la identificación de las características de la clase de problemas que utilizamos y la naturaleza de los contenidos matemáticos que resultan relevantes en las resoluciones que hacen los alumnos; y 4) el análisis de la influencia de los procesos de resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas en la evolución del conocimiento de los alumnos.

2. METODOLOGÍA

La utilización de una metodología observacional para conseguir la mayor parte de los objetivos de esta investigación está justificada desde el momento en que lo que pretendemos es analizar los procesos cognitivos de los alumnos a través de sus comportamientos observables, en particular a través de los intercambios comunicativos que tienen lugar en los procesos de resolución de problemas por parejas. La investigación es un estudio de casos que analizamos desde una perspectiva cualitativa, dependiente de la obtención de datos escritos y orales.

Para la consecución de los objetivos que nos proponemos, diseñamos la investigación de la forma que mostramos en la Tabla 1. En ella se puede observar que los seis alumnos que participan lo hacen de la siguiente forma:

a) Resuelven individualmente una prueba elaborada para evaluar sus conocimientos iniciales sobre los contenidos matemáticos de la comparación de áreas. Sus resultados, junto con las observaciones del profesor en las clases de matemáticas, nos permiten hacernos una idea general de las características cognitivas de cada alumno.

ALUMNOS	RECOGIDA DE INFORMACIÓN	AGRUPA - CIÓN DE ALUMNOS	FINALIDAD DE LA RECOGIDA DE INFORMACIÓN	DURACIÓN DE LA OBSERVACIÓN
Seis alumnos de entre 16 y 17 años: cuatro son de 3º de BUP y dos de COU	Información general procedente del profesor de los alumnos	Individual	Características generales de los alumnos	Tres o cuatro días para cada pareja de alumnos
	Recogida de datos escritos Respuesta por escrito a una prueba inicial		Evaluación inicial de conocimientos	
	Recogida de datos orales Resolución de cuatro PCASP*: -Problema del paralelogramo -Problema del hexágono -Problema del triángulo -Problema del cuadrado	Por parejas	Análisis de los procesos de resolución desde el punto de vista cognitivo, metacognitivo e interactivo	
	Recogida de datos escritos Respuesta por escrito a una prueba final	Individual	Evaluación final de conocimientos. Evolución de conocimientos	

* PCASP: Problemas que comparan áreas de superficies planas

Tabla 1

b) Los alumnos, agrupados por parejas, resuelven en voz alta cuatro problemas, cuyos procesos son grabados y analizados en profundidad desde las perspectivas interactiva, cognitiva y metacognitiva.

c) Los mismos alumnos resuelven, otra vez individualmente, una segunda prueba para valorar si se ha producido algún tipo de evolución en sus conocimientos respecto a los que identificábamos con la prueba inicial.

En los apartados siguientes nos centramos en la descripción de la técnica de recogida de datos orales que utilizamos, en la del contexto en el que recogemos dichos datos y, sobre todo, en la explicación del modelo de análisis que proponemos.

2.1. TÉCNICA DE RECOGIDA DE DATOS ORALES. ANÁLISIS DE PROTOCOLOS

Superadas las discusiones que se produjeron en los años 70 sobre la validez de los datos orales obtenidos de la resolución de problemas, ya sea de forma simultánea al proceso de resolución o de forma retrospectiva, son muchos los autores que aplican diferentes técnicas para recoger este tipo de datos. Nos agrada especialmente la taxonomía que M. Goos i P. Galbraith (1996) hacen de ellas, según que: *a)* la verbalización sea o no simultánea a la realización de la tarea (tiempo de verbalización), *b)* el tipo de intervención del observador (observación intervencionista o no), y *c)* las instrucciones que reciben los alumnos para producir la verbalización (clasificadas como "informar" o "explicar"). Seguimos esa clasificación para justificar la selección de la técnica que utilizamos.

Decidimos analizar las actuaciones de los alumnos en la resolución de problemas observándolos directamente, es decir, recogiendo datos orales obtenidos simultáneamente a la realización de la tarea, por lo que el alumno ha de exteriorizar sus pensamientos al mismo tiempo que resuelve el problema.

La razón principal que nos ha inclinado a tomar la decisión de que la exteriorización sea simultánea al proceso de resolución —descartando de esta forma técnicas que como la del recuerdo estimulado podrían haber complementado a la anterior— es la dificultad de los alumnos de estas edades para expresar retrospectivamente —de forma oral o escrita— sus pensamientos.

La decisión, que también tomamos, sobre la no intervención del observador en el proceso de resolución tiene opiniones a favor y en contra. Mientras hay investigadores, como A. H. Schoenfeld (1985), que piensan que cualquier intervención, por pequeña que sea y mucho más si las interrupciones se producen con frecuencia, modifica el proceso de resolución, otros, como L. Puig (1996), piensan que intervenciones puntuales sobre aspectos muy concretos —para incidir, por ejemplo, en una operación mal hecha o una fórmula mal escrita— pueden ayudar a que el proceso no se pare por razones a las que no dan importancia en sus investigaciones.

La obligación —que imponemos— de hablar al mismo tiempo que se resuelve el problema y la introducción de las interacciones como objeto de estudio hacen que la observación de sólo un alumno —pensando en voz alta— sea una situación bastante anormal. El estudio de la literatura sobre las ventajas e inconvenientes de la consideración de parejas en la resolución de problemas y el hecho de empezar a introducir la influencia de las interacciones, nos ha llevado a observar la resolución por parejas, dejando para posteriores investigaciones el estudio de las interacciones en la resolución de problemas con más de dos interlocutores. En cualquier caso, la actuación por parejas compromete a cada alumno a mantener un diálogo en el que van informando sobre el devenir de su pensamiento. En este sentido, las indicaciones, previas a la observación, del investigador a los alumnos se centraron en la necesidad de que exteriorizaran lo que pensaban en cada momento.

Así pues, nuestra propuesta estaría centrada en el análisis de lo que M. L. Callejo (1994) denomina "registro de los fenómenos que han sucedido a lo largo del proceso de resolución de un problema, aunque no se haya llegado a obtener la solución" (p. 81), es decir, el análisis de lo que se denomina protocolo, entendido como la transcripción del registro —efectuado en vídeo— de los fenómenos que han ocurrido a lo largo del proceso de resolución de un problema, desarrollado por dos alumnos que actúan conjuntamente sin intervención exterior.

2.2. CONTEXTO DE RECOGIDA DE DATOS ORALES

En este apartado hacemos una referencia breve al tipo de alumnos que participan y concretamos, sobre todo, las particularidades de la situación de observación y del registro que hacemos de las observaciones.

1) El presente diseño contempla que la investigación se lleve a cabo con alumnos de entre 16 y 17 años de un centro público de Enseñanza Secundaria. Este trabajo es un estudio de casos —tres parejas de alumnos resuelven cuatro problemas cada una (datos orales)—. Los alumnos que intervienen los seleccionamos teniendo en cuenta tres condiciones: *a)* son abiertos y expresivos; *b)* los alumnos de cada pareja tienen conocimientos similares sobre los contenidos matemáticos de los problemas que comparan áreas, aunque no necesariamente de la misma naturaleza (uno puede tener una visión geométrica de la resolución de los problemas y el otro, algebraica); y *c)* en todos los casos los alumnos de cada pareja se sientan juntos en las clases de matemáticas, con la finalidad de que la confianza entre ellos facilite el diálogo.

2) Por lo que se refiere a la situación de observación, centramos nuestras observaciones en un contexto en el que dos alumnos interactúan para resolver problemas. En nuestro caso la situación de observación tiene las características siguientes: *a)* dos alumnos resuelven conjuntamente cuatro problemas que comparan áreas de superficies planas —en un tiempo de aproximadamente 25 minutos cada problema— en presencia de un observador y de una cámara de vídeo, que registra todo el proceso de resolución; *b)* todas las observaciones se hacen en un mismo lugar; y *c)* las sesiones de observación se efectúan sin ninguna intervención exterior, ni por parte del observador, ni por cualquier otra causa.

3) El registro de las observaciones se lleva a cabo con el soporte de una cinta de vídeo, un medio que nos sirve para conseguir los protocolos escritos. En cualquier caso, las notas tomadas por el observador durante los procesos de resolución nos permiten aclarar algunos puntos oscuros de dichas resoluciones y nos ayudan a obtener los protocolos escritos a partir de los audiovisuales. Además, las anotaciones hechas por los alumnos durante el proceso, que son recogidas al final de cada resolución, nos ayudan a completar los protocolos escritos.

3. ESQUEMAS DE ANÁLISIS DE LOS DATOS ORALES

El análisis de los datos orales comienza con la selección de normas para transcribir los protocolos audiovisuales, puesto que con dicha transcripción estamos interpretando la actuación de los alumnos.

Resumimos a continuación las normas que seguimos para hacer las transcripciones de los procesos de resolución: *a)* partimos el protocolo en intervenciones numeradas; *b)* introducimos signos de puntuación; *c)* resaltamos las interrupciones, los solapamientos, las pausas, etc.; *d)* describimos, entre corchetes, los fenómenos no léxicos, especialmente los gestos que acompañan a los deícticos; describimos también otros elementos interactivos si se observan, por ejemplo, los momentos en los que los alumnos escriben y trabajan por separado, si hacen referencias gestuales señalando dibujos realizados por ellos mismos o por sus compañeros, si escriben o no en el mismo folio, etc.; y *e)* completamos las transcripciones con los gráficos que los alumnos realizan durante el proceso de resolución (Figura 3, p. 9) y con otros realizados por nosotros que nos sirven de referencia (Figura 2, p. 9). En el apartado *a* del Anexo mostramos la transcripción de un episodio.

Proponemos un esquema de análisis de cada protocolo que consta de cuatro fases: identificación de los intercambios que se producen a lo largo del proceso; división del protocolo en episodios; análisis microscópico de los aspectos cognitivos, metacognitivos e interactivos en cada episodio; y análisis global del proceso. El método de análisis que proponemos no consiste en la aplicación lineal de esas cuatro fases, sino que hemos de volver sobre las fases anteriores si los análisis (o microanálisis) posteriores así lo exigieran.

3.1. IDENTIFICACIÓN DE INTERCAMBIOS

En esta fase hacemos una primera aproximación a la identificación de los intercambios que se producen en el proceso de resolución.

Previamente a esa primera aproximación, hacemos un estudio teórico de las tres unidades dialogales que utilizamos para describir la estructura jerárquica del discurso —intervención, intercambio e interacción (E. Roulet (1987) y C. Kerbrat-Orecchioni (1990))—, y de los elementos del Análisis del Discurso que consideramos, como el de la "dimensión interlocutiva" del discurso, es decir, "la mecánica de la comunicación y de los comportamientos comunicativos de cada interlocutor" (L. Nussbaum y A. Tusón (1995), p. 98, y Calsamiglia (1997)). Esto nos sirve para definir un sistema de categorías de intercambios basado en el contenido matemático de las intervenciones de los alumnos y en la forma que tienen las acciones y reacciones que componen dichos intercambios: si son aserciones, preguntas, validaciones, respuestas, etc.

En concreto, clasificamos los intercambios en función del número de intervenciones que los componen, diferenciando entre los que están formados sólo por una intervención —que nos sirven para caracterizar el tipo de diálogo que llamamos "en paralelo"—; los que se componen de dos intervenciones —cooperativos, pregunta-respuesta y validación—; los que están formados por tres intervenciones —validación-continuación, aclaratorios e interrupciones—, caracterizados por que la intervención inicial del interlocutor A tiene una continuación, no sólo por parte de B, sino también por el propio A; y aquéllos que pueden estar formados por más de tres intervenciones —de desacuerdo, cogenerados y encajados—.

Definimos a continuación algunos de los intercambios anteriores, en particular los que aparecen en el ejemplo que mostramos en el apartado *b* del Anexo. En Cobo (1998) comentamos y ponemos ejemplos de las definiciones que damos de los diferentes tipos de intercambios que identificamos.

Intercambios de tipo "cooperativo"

Los representamos de la forma que mostramos en la Figura 1a:

(a) (b) (c)

Figura 1

Se produce un intercambio "cooperativo" si la intervención de B modifica de alguna forma el contenido de la intervención de A, ya sea: a) introduciendo alguna información equivalente a la de la intervención de A; b) aportando alguna información nueva que complemente la de la intervención de A; c) introduciendo en el diálogo algún elemento nuevo.

Intercambios "de validación"

Los representamos de la misma forma que los cooperativos (Figura 1a).

Se produce un intercambio "de validación" si B se limita sólo: *a)* a validar positivamente (sí, vale, de acuerdo, etc.) el contenido de la intervención de A; *b)* a valorar positivamente (muy bien, etc.) el contenido de la intervención de A; *c)* a repetir, con las mismas u otras palabras, el contenido de la intervención de A; y, además, en la continuación del discurso por parte de A, si es que la hay, éste no hace referencia a su intervención anterior.

Intercambios del tipo "validación-continuación"

Los representamos de la forma que mostramos en la Figura 1b.

Se produce un intercambio del tipo "validación-continuación" si B se limita a validar el contenido (o simplemente a repetir una parte del mismo con la intención de confirmarlo) de la intervención de A y éste continúa el discurso haciendo referencia a su última intervención.

Intercambios del tipo "aclaratorio"

Los representamos de la forma que mostramos en la Figura 1c.

Se produce un intercambio del tipo "aclaratorio" si B se limita a pedir explicación (o bien confirmación) del contenido de la intervención de A (o de alguno de sus elementos) y A responde a dicha demanda.

3.2. PARTICIÓN DEL PROTOCOLO EN EPISODIOS

Adaptamos el sistema de categorías que A. H. Schoenfeld (1985) construye para analizar el componente del conocimiento y de la conducta relacionado con las tareas del gestor al tipo de alumnos y de problemas que consideramos en esta investigación. En la adaptación que proponemos, introducimos, entre otras, modificaciones relacionadas con la incorporación de referencias interactivas, que influyen en la calificación de los episodios que definimos.

Para partir los protocolos en episodios, buscamos los puntos de ruptura en el protocolo escrito o en el audiovisual —pausas largas, estancamientos, transiciones, intervenciones directivas, etc.—. Para calificar dichos episodios tenemos en cuenta tanto la visión general del episodio como las características de los intercambios que se producen, ya que puede ocurrir que los dos alumnos estén, en un momento determinado, en episodios diferentes, sobre todo si trabajan en paralelo.

3.3. ANÁLISIS MICROSCÓPICO DE CADA EPISODIO

A partir de este momento hacemos un microanálisis cualitativo de los diferentes episodios desde tres puntos de vista:

a) Cognitivo, en el que identificamos y analizamos, entre otros, los enfoques que aportan los alumnos, los conocimientos nombrados y utilizados por cada uno de ellos y su naturaleza —conceptos o procedimientos—, y las oportunidades de aprendizaje que se les presentan. Para facilitar el análisis cognitivo, utilizamos problemas asociados a una estructura conceptual determinada —problemas que comparan áreas de superficies planas—, de los que identificamos, previamente, los contenidos matemáticos que son relevantes para su resolución.

b) Metacognitivo, en el que describimos las características de cada uno de los episodios de acuerdo con los componentes de control que los definen. Por ejemplo, si el episodio es de verificación, interpretamos si los alumnos verifican la resolución, la solución y/o el resultado y cómo lo hacen; si es de análisis o de exploración, observamos cómo seleccionan el enfoque que implementan y cómo desarrollan la búsqueda —a partir de las condiciones del problema o del objetivo—, etc.; si es de ejecución, argumentamos si siguen el plan propuesto, suponiendo que lo haya, o si hay un plan implícito que se pueda inducir de la ejecución; si es de evaluación local, identificamos si está relacionada con la evocación de algún contenido matemático, etc.

c) Interactivo, en el que confirmamos microscópicamente la identificación de los intercambios que hemos hecho en la primera fase, y analizamos las características de la interacción en cada episodio (véase Anexo).

Analizamos cada episodio teniendo en cuenta no sólo los aspectos cognitivo, metacognitivo e interactivo por separado, sino también cómo interactúan y cómo influyen cada uno en los otros, de manera que para caracterizar, por ejemplo, una interacción consideramos los papeles comunicativos de cada alumno, las aportaciones que realizan y los elementos de gestión, si los hay. Facilitamos la visualización de la forma en que interactúan todos los componentes anteriores con la realización de gráficos que relacionan las acciones llevadas a cabo por cada alumno con los tipos de intercambios que se producen (véase Figura 4, p. 83).

3.4. VISIÓN GENERAL DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN

Afrontamos la visión general del proceso de resolución desde dos puntos de vista: uno, centrado en la dinámica interlocutiva, por el que nos hacemos una idea general de los papeles comunicativos de cada alumno; y otro, más global, que abarca el análisis de la evolución de los episodios y la integración de los aspectos cognitivo, metacognitivo e interactivo.

a) Para el análisis de los papeles comunicativos de cada alumno, clasificamos los intercambios en repetitivos y progresivos, y éstos a su vez en local y globalmente progresivos. Además, presentamos los datos del proceso ordenados en diferentes tablas. Por ejemplo, en la Tabla 2 mostramos el número total de intercambios de tres intervenciones, de la naturaleza que se indica, y, entre paréntesis, los que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución, es decir, los que, siendo progresivos en el contexto local del propio intercambio (si la segunda intervención de A, Figuras 1b y 1c, introduce alguna información nueva o equivalente respecto de la primera), el contenido de sus intervenciones no ha aparecido previamente en la resolución.

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		INTERRUPCIÓN		ACLARATORIO		TOTAL	
	PROG.	REPET	PROG	REPET	PROG	REPET.	PROG	REPET
Pere-Lluís-Pere	7(3)*	1	1(1)	0	7(3)	3	19(7)	
Lluís-Pere-Lluís	1(0)	0	0	0	3(2)	0	4(2)	
TOTAL	8(3)	1	1(1)	0	10(5)	3	23(9)	

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 2. Intercambios de tres intervenciones

La finalidad de la elaboración de este tipo de tablas es obvia si observamos que, en ellas, separamos los intercambios encabezados por cada uno de los alumnos. Eso nos permite identificar quién asume la responsabilidad de la continuación de los diferentes tipos de diálogos y si lo hacen repitiendo, o no, contenidos matemáticos citados anteriormente. El proceso de resolución será más dinámico en la medida en que esa continuación se produzca con intervenciones globalmente novedosas, y lo será menos si hay una predominancia de intercambios localmente cooperativos o progresivos que se limiten a repetir elementos de contenido que han aparecido previamente en el proceso de resolución.

Además, en el análisis que hacemos de los papeles comunicativos de los alumnos tenemos en cuenta las formas de agrupación de los diferentes intercambios, es decir, si hay sucesiones de intercambios del mismo tipo, para observar en qué momentos del proceso de resolución se mantiene la continuidad de un determinado tipo de interacción.

b) Incluimos en este subapartado de la visión general del proceso de resolución el reconocimiento de los enfoques que los alumnos identifican y el que ponen en práctica; el análisis de los puntos clave y de su repercusión en el proceso de resolución; la relación de esos puntos clave con la aportación de informaciones, con determinados tipos de interacciones y/o con acciones directivas que cambien o intenten cambiar el proceso.

La aplicación del método de análisis que acabamos de exponer nos ha permitido identificar siete modelos interactivos en los procesos de resolución de problemas por pares de alumnos: cooperativos, trabajo dirigido, situaciones de trabajo en paralelo; trabajo alternativo;

complementariedad de funciones; relanzamiento del proceso de resolución; e intercambios de desacuerdo. En el Anexo mostramos un ejemplo del modelo interactivo que hemos llamado trabajo dirigido. En el resumen del microanálisis del episodio (apartado *c* del Anexo) están las principales características que definen el citado modelo.

4. CONCLUSIONES

A modo de resumen, diremos que esta investigación se centra, principalmente, en el análisis de los fenómenos que ocurren a lo largo de los procesos de resolución de problemas, desarrollados por pares de alumnos que actúan conjuntamente sin intervención exterior. Para ello, hemos propuesto y aplicado un método de análisis de las interacciones que consta de cuatro fases: identificación de los tipos de intercambios; división y calificación de los episodios; análisis microscópico de cada episodio desde el punto de visto interactivo, cognitivo y metacognitivo; y visión general del proceso de resolución.

Para elaborar dicho método, hemos revisado los aspectos teóricos de las dimensiones cognitiva, metacognitiva e interactiva, y hemos definido una tipología de intercambios de una, dos, tres, o más de tres intervenciones. A partir de ella, identificamos, en los análisis empíricos de los procesos de resolución, diferentes modelos interactivos (cooperativos, en paralelo, trabajo dirigido, etc.).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CALLEJO DE LA VEGA, M. L. (1994): *Un club matemático para la diversidad.* Ed. Narcea, S.A. Madrid.
CALSAMIGLIA I D'ALTRES. (1997). La parla com a espectacle. Estudi d'un debat televisiu. Universitat Autònoma de Barcelona. Servei de Publicacions de la Universitat Jaume I. Universitat de València. Servei de Publicacions. Bellaterra, Castelló de la Plana, València.
COBO, P. (1998). "Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos". Tesis doctoral dirigida por el Dr. J. M. Fortuny. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències de la UAB. Inédita.
GOOS, M. GALBRAITH, P. (1996). Do it this way! Metacognitive Strategies in Collaborative Mathematical Problem Solving. Educational Studies in Mathematics 30:229-260.
KERBRAT-ORECCHIONI, C. (1990-1994). Les interactions verbales. Tomos I, II y III. Armand Colin. Paris.
NUSSBAUM, L. y TUSÓN, A. (1995). "El Cercle d'Anàlisi del Discurs i l'estudi dels debats televisius". Universitat Autònoma de Barcelona. Jornades sobre Llengua i Ensenyament. Barcelona.
PUIG, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Ed. Comares. Granada.
ROULET, E. y al.(1987). L'articulation du discours en français contemporain. Berna: P. Lang.
SCHOENFELD, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, Inc. Orlando.

ANEXO

TRANSCRIPCIÓN DE UN EPISODIO Y RESUMEN DE SU MICROANÁLISIS

Los alumnos resuelven el problema del hexágono:

Si en un hexágono regular se unen alternativamente —uno sí y otro no— tres de sus vértices se obtiene un triángulo. Buscar la relación entre el área del hexágono y la del triángulo.

a) Transcripción del episodio identificado como "Evaluación local" (intervenciones 22 a 35) del protocolo del problema del hexágono (alumnos M y N).

Figura 2 Figura 3

21. N: *... lo hemos reducido a un problema de este tipo* [representa la Fig. 3] *A, B, C y F ... ... entonces tenemos aquí un triángulo rectángulo* [lo raya sobre el trapecio], *y aquí un trapecio* [el de la Fig. 3], ...

Los alumnos M y N acaban de proponer un plan, que consiste en reducir el problema de comparar las áreas del hexágono regular ABCDEF y del triángulo BFD (Fig. 2) a la búsqueda de la relación entre el área del trapecio FCBA y la del triángulo rectángulo rayado de la Fig. 3.

22. M: *Esto es el doble de esto* [indica FC y AB sobre el trapecio, Fig. 3].
23. N: *¿Cómo?, ¿la base esta de aquí es el doble de ésta?* [indica lo mismo que M].
24. M: *Sí.*

25. N: *¿Sí?, eso no lo sabía yo.*
26. M: *Ya, si lo partimos por la mitad* [se refiere al hexágono, Fig. 2, y señala la diagonal AD de su figura], *esto* [AD] *son dos lados, si estos* [FEG, Fig. 2] *son triángulos equiláteros, el radio...* [FG], *bueno por decirlo así, el radio es un lado.*
27. N: *¿El radio?*
28. M: *Bueno, la distancia de un vértice al centro es un radio, ¿no?*
29. N: *Vale.*
30. M: *Pues aquí* [FC, Fig. 2] *son dos radios, bueno dos lados, y aquí* [AB] *es uno.*
31. N: *Sí, sí, ya te entiendo, bueno, pero eso partiendo de que... / pero, ¿quieres decir que la base esta* [FC del trapecio de la Fig. 3] *es el doble de ésta* [AB]?, *¿sí o no?, ¿seguro?*
32. M: *Sí, si son triángulos equiláteros, a la fuerza.*
33. N: *No te dice que, ¡ah!, los triángulos sí, los de dentro son equiláteros, muy bien.*

34. M: *Y esto* [FC] *son dos lados y esto* [AB] *uno.*
35. N: *¡Ostras!, sí, sí, claro, muy bien.*

En las intervenciones siguientes M y N tratan de calcular el área del trapecio.

36. M:*¿El área del trapecio?* [recordando] *base de abajo más la de arriba por la altura ¿puede ser?* /

b) Esquema gráfico de los tipos de intercambios y su relación con las acciones que se producen en el episodio

Figura 4

c) Resumen del microanálisis del episodio

1) El episodio se inicia con una intervención (22) en la que M tiene la intención de empezar la ejecución del plan propuesto e introduce, por medio de una aserción, un tema que se convierte en objeto de discusión (intervención problematizada de carácter directivo), produciendo en N una reacción inicial (intervención 23) que es simplemente una demanda de validación de la aportación efectuada por M.

2) La persistencia en la comprensión, por parte de N, de la relación entre las bases del trapecio (intervenciones 23, 25 y 31) y del “radio del hexágono” (intervención 27) hace que, en este episodio, se revisen determinados conceptos relacionados con los elementos del hexágono regular (radio de la circunferencia circunscrita y su relación con el lado del

hexágono, igualdad de los lados del hexágono, condición de equiláteros de los triángulos obtenidos al unir el centro con cada uno de los vértices del hexágono).

3) Papeles comunicativos predominantes de los interlocutores:

a) M desempeña el papel principal de responder a las preguntas de N (intervenciones 24, 26, 28 y 32).

b) Los papeles principales de N en este episodio son:

- El de realización de preguntas (generalmente demandas de aclaración y de confirmación —intervenciones 23, 25, 27 y 31—).
- El de validación de las aportaciones realizadas por M (intervenciones 29, comienzo de la 31, 33 y 35). Aunque las validaciones de las intervenciones 29 y 31 podemos considerarlas como "retroalimentativas del discurso", y no como validaciones reales, si tenemos en cuenta que N, al final de la intervención 31, vuelve a preguntar sobre la validez de la relación entre las bases del trapecio, dando a entender que todavía no tiene clara dicha relación.

4) Podemos clasificar el diálogo entre M y N como "progresivo". Para hacer tal afirmación nos basamos en que tanto M como N, cada uno en su papel, contribuyen a dicha progresión de la forma siguiente:

a) M produce intervenciones que van aportando elementos nuevos al discurso, como por ejemplo: cuando justifica (intervención 26) la relación entre las bases del trapecio, basándose en la obtención de éste a partir del hexágono y en la igualdad del radio y el lado, o cuando da una definición precisa de lo que entiende por radio (intervención 28), o cuando vuelve a recurrir a la condición de triángulos equiláteros (intervención 32) para justificar la relación entre las bases del trapecio.

b) N va realizando preguntas, no conformándose con las respuestas dadas por M, hasta que logra comprender la relación —entre las bases del trapecio— que origina el diálogo.

5) Hay evidencia de que se produce una oportunidad de aprendizaje[1] por parte de N (intervención 25: "eso no lo sabía yo") —que surge como consecuencia de la justificación de la relación entre las bases del trapecio FCBA (Figura 3)— y que está asociada a la condición de equiláteros que tienen los triángulos obtenidos al unir el centro de un hexágono regular con cada uno de sus vértices y, por tanto, a la relación de igualdad entre el lado y el radio de dicho hexágono.

6) El episodio termina cuando N (intervención 35) valida ("sí, sí, claro") y valora ("muy bien") las aportaciones y justificaciones hechas por M.

[1] Evidencia que se confirma cuando, en la prueba final, el alumno N incorpora la relación radio/lado, necesaria para resolver un problema, no habiéndolo hecho en la prueba inicial.

TEMA DE DEBATE

EL LIBRO *ELEMENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*, CINCO AÑOS DESPUÉS
DESARROLLO DEL DEBATE

INTERVENCIONES:
PONENCIA: *"ELEMENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS"*, CINCO AÑOS DESPUÉS
PONENTES: DRA. Mª LUZ CALLEJO, DR. JOSÉ CARRILLO
CONTESTACIÓN: DR. LUIS PUIG, UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

DESARROLLO DEL DEBATE

Como novedad en este segundo Simposio, se incorpora el debate en torno a una tesis doctoral realizada hace cinco años y se analiza en perspectiva desde la actualidad. El tema abordado es la tesis doctoral de Luis PUIG, recogida en el libro "Elementos de resolución de problemas".

Los ponentes Mª Luz CALLEJO y José CARRILLO hacen una detallada valoración del libro. Comienzan dando una visión general y comentan lo que el autor llama "elementos de teoría"– el modelo de enseñanza, la metodología de la investigación y los resultados– para abordar, finalmente, algunas líneas de prospectiva en resolución de problemas.

Analizan los aspectos positivos del trabajo y aquellos otros que, en su opinión, no han quedado claramente resueltos para establecer, a modo de resumen, su balance. Enumeran los avances de la investigación en la resolución de problemas durante los cinco años posteriores a este trabajo tanto en España como en otros países e indican las cuestiones pendientes. Después de mencionar diferentes investigaciones relacionadas con el marco teórico de Shoenfeld, concluyen citando algunas de las cuestiones que ya hace cinco años L. PUIG abordaba en su tesis doctoral como la delimitación de "estrategias de resolución de problemas", la relación del control con el uso de herramientas heurísticas y la exploración de creencias de los alumnos acerca de la resolución de problemas antes y después de la instrucción.

Para terminar, señalan otros aspectos, como el papel de la conciencia o de las emociones en el proceso de resolución de problemas, el análisis de las interacciones entre alumnos o de éstos con el profesor resolviendo problemas que no fueron objeto de esta investigación. No obstante, afirman que el trabajo de L. PUIG ha sido una referencia importante en la reciente tesis de P. COBO (1998) sobre procesos cognitivos e interacciones sociales.

Luis PUIG en su réplica señala cuestiones que pueden leerse de otro modo e indica la influencia de las restricciones semánticas en determinadas lecturas.

"ELEMENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS", CINCO AÑOS DESPUÉS

Ponencia basada en el libro de Luis Puig (1996) sobre su tesis doctoral (1993)

Mª Luz Callejo y José Carrillo

En esta intervención vamos a detenernos en algunos aspectos del libro de Luis Puig, "Elementos de resolución de problemas", haciendo una valoración, y al mismo tiempo vamos a tomarlo como pretexto para señalar algunas líneas de prospectiva de investigación en resolución de problemas.

Por consiguiente, dividiremos la exposición en tres partes: comenzaremos dando una visión general que puede servir de introducción, luego comentaremos más en detalle lo que el autor llama "elementos de la teoría", el modelo de enseñanza, la metodología de la investigación y los resultados, indicando por último, como hemos señalado, algunas líneas de prospectiva.

1. VISIÓN GENERAL

Para quienes estén familiarizados con los trabajos de A. H. Schoenfeld sobre la resolución de problemas, este libro les resultará fácil y agradable de leer pues se sitúa en la línea desarrollada por aquél, que es su principal fuente. El autor pone de manifiesto la validez del marco teórico y de los instrumentos de recogida y análisis de datos de Schoenfeld avanzando en cuanto a la delimitación y precisión de conceptos y terminología y a la metodología de la investigación, como señalaremos más adelante. L. Puig incorpora otro instrumento de recogida de datos, las rejillas de Kelly, para realizar un subestudio de los componentes subjetivos del proceso de resolución de problemas.

En un estilo bastante analítico, Puig hace explícita su pretensión de precisar:

a) el dominio teórico desde el que se aborda el trabajo:
- a.1) tipo de teoría con que se estudia el campo
- a.2) tipo de teoría que se pretende elaborar

b) en qué sentido se va a estudiar el campo:
- tipo de relación con otras partes de las matemáticas escolares o del sistema educativo

c) y el ámbito de observación de los procesos a estudiar.

En cuanto al dominio teórico, asume el programa de investigación de Filloy: *modelos teóricos locales*, que integran los siguientes componentes teóricos:

- modelos de competencia formal
- modelos de los procesos cognitivos
- modelos de enseñanza
- modelos de los procesos de comunicación

Sitúa claramente el estudio cuando dice:

"Nuestro trabajo...[intenta elaborar] algunos elementos de un modelo de competencia y [estudia] aspectos de la cognición derivados de una enseñanza organizada en función de esos elementos." (p. 13).

Sus objetivos son dos: elaborar elementos de un modelo teórico de la resolución de problemas en los sistemas escolares y explorar la actuación al resolver problemas de alumnos instruidos en un curso organizado en función de tal modelo, describiendo su actuación respecto a los elementos del modelo.

Pone así de relieve los focos de atención, entre los que no se hallan los procesos de comunicación y donde, como se verá, hay escasos detalles del modelo de enseñanza.

En cuanto al modo en que va a desarrollar el estudio, cita varias posibilidades o mundos de la resolución de problemas, llamando al suyo "pura resolución de problemas" (PRP). En él se estudia la resolución de problemas desde ella misma, independiente del contenido. Así, para elaborar el modelo de competencia, que asocia al estilo heurístico de resolución de problemas, parte de los trabajos de Polya y Schoenfeld y adopta el punto de vista de una semiótica de las matemáticas. Diez estudios de casos (una pareja por caso) han permitido constatar cómo aparecen o se manifiestan los elementos del modelo de competencia en la actuación de los alumnos que han sido instruidos en heurística.

La lista de los elementos que componen el modelo comprende aspectos relacionados con la *cognición* (destrezas con potencial heurístico (DH), sugerencias heurísticas (SH), herramientas heurísticas (HH), métodos de resolución con contenido heurístico (MH) y patrones plausibles (PP)), la *metacognición* (el gestor instruido (GI)) y las *creencias* (una concepción de la naturaleza de la tarea de resolver problemas según la cual ésta se realiza con fines epistémicos), primando el dominio cognitivo sobre el afectivo y el social.

La nota 5 de la página 14 es aclaratoria del resto del trabajo:

> "Lo que puede decirse de la resolución de problemas independientemente del contenido concreto es el objeto de estudio de la heurística, en el sentido que esta disciplina toma en la obra de Polya (...) de modo que nuestro trabajo puede considerarse también como un estudio sobre la heurística matemática."

Aun siendo cierto que la heurística en Polya no se ocupa del contenido, existen muchos otros elementos independientes del contenido ausentes en la obra de Polya. En definitiva, la asociación PRP-Heurística puede ser excesiva. Cabría preguntarse por el papel de los afectos y las creencias, así como los factores metacognitivos.

En cuanto al modelo de enseñanza, en el libro se describen los objetivos pretendidos y los logrados en relación con el modelo de competencia, pero no aporta datos del proceso de enseñanza/aprendizaje concreto llevado a cabo en el aula con los alumnos con los que se ha hecho la experimentación.

El diseño de la investigación se despega completamente del paradigma clásico del método experimental y responde a los denominados "experimentos de enseñanza[8]" (pp. 15-16), en los que la pertinencia prima sobre el rigor, si se entiende éste según el concepto

[8] Diseño no experimental, a lo largo de un período de instrucción prolongado, se intentan asir los procesos en el momento en que se producen, el profesor no es una variable controlada, los análisis subjetivos de datos cualitativos tienen mayor interés a menudo que los análisis cuantitativos.

tradicional de manipulación experimental de variables controladas. L. Puig califica su trabajo como "naturalista, exploratorio, teórico y empírico".

Describe el ámbito de observación como un curso de resolución de problemas perteneciente al curriculum de la Escuela del Profesorado de EGB de Valencia hasta el curso 1993-94, impartido en 2º de la especialidad de Ciencias como asignatura anual de 3 horas semanales (p. 15). En el libro no se describe las características de estos estudiantes.

Aunque asegura que los resultados del estudio influyeron en la programación del curso, no especifica dicha influencia.

El trabajo experimental presenta un diseño cuidadoso, hecho con rigor y precisión, y se expone en un lenguaje claro, conciso y preciso.

La investigación comporta estudio de casos y estudio de un grupo que ha sido instruido durante un curso escolar de acuerdo con el modelo de enseñanza que se expone en el trabajo.

El estudio de casos tiene carácter exploratorio y un doble objetivo: reelaborar el modelo de competencia y el modelo de enseñanza. Los datos se han obtenido planteando problemas a parejas de resolutores para que los resuelvan en voz alta, sin que intervenga en ningún momento el investigador. Las sesiones se graban en vídeo, se elabora un protocolo escrito y se analiza. Este estudio ocupa la mayor parte del trabajo, pues se analizan 10 protocolos (pp. 65-236).

El estudio de grupo tiene como objetivo conocer qué aprenden los alumnos tras un período de instrucción en relación con el modelo de competencia. Para ello se les proponen problemas al principio y al final de la instrucción y se les solicita que, además de dar la solución con las anotaciones del "sucio", describan de forma retrospectiva lo que han hecho para obtenerlo y los juicios sobre los elementos que intervienen en el proceso de resolución de cada problema.

En los resultados del trabajo se contemplan los elementos de la teoría, las adaptaciones realizadas de los procedimientos de obtención y análisis de datos utilizados por A. Schoenfeld y la evolución de los alumnos tras el curso de resolución de problemas, constatándose que no ha habido un incremento de la eficacia pero sí un cambio de estilo.

Finalmente, hemos de decir que en el apartado 1.5. “El estilo del trabajo” enfatiza el alejamiento de su estudio (a pesar de la coincidencia entre investigador y profesor del grupo de alumnos) de la llamada investigación-acción (nota 11, pág. 15), en la que, según sus palabras, la confusión de las funciones de investigador y profesor no puede conducir a la mejora de la actuación del profesor.

Tal afirmación nos parece exagerada, contraria a la corriente de investigación colaborativa (Feldman, 1993) derivada de la investigación-acción. No obstante, puede referirse al investigador-profesor aislado, en cuyo caso se incrementan las dificultades de vinculación de las dos funciones. Precisamente, la investigación colaborativa, con una clara delimitación de funciones, pretende paliar algunas de las dificultades de la investigación-acción original. Lo que sí podemos concluir de esta reflexión es que el objetivo de Puig era la obtención de elementos para su estudio, por encima de su mejora como profesor, la cual puede suponerse que corresponderá a otros momentos de su vida profesional.

2. DESARROLLO DEL TRABAJO

2.1. ELEMENTOS DE LA TEORÍA

Una aportación de este trabajo es, como hemos dicho, los elementos de la teoría; a lo largo del mismo hay una buena delimitación y acotación de los conceptos y términos empleados que son elementos de la teoría. Esta preocupación se hace explícita en el apartado 2.2.1 "Maneras de preguntar por problema", aunque L. Puig también señala que "lo que pretendemos aquí no es zanjar la discusión sobre lo que es verdaderamente un problema – porque en nuestra opinión tal afirmación carecería de sentido– sino plantear cómo la disciplina, el ámbito y el punto de vista son responsables de la diversidad de los significados que están en uso para 'problema' y 'resolución de problemas' ".

PROBLEMA

Nos ha resultado iluminadora la distinción de los niveles I, II y III de análisis de lo que es un "problema". Distingue, en el tono analítico que impera en el trabajo, tres niveles de análisis, según los personajes que intervienen (o según aquellos en los que se centra la atención, aunque intervengan otros):

III: problema, alumno, profesor

II: problema, alumno

I: problema

Tal distinción le sirve para organizar las definiciones de problema y la articulación de unas con otras. Pero, a nuestro parecer, falta un cuarto elemento, el contexto en el que se propone.

La descripción de la resolución de problemas de matemáticas está condicionada por dos decisiones:

a) el propósito de elaborar una teoría local, no partir de una teoría general de la resolución de problemas,

b) la pretensión de examinar la resolución de problemas en el ámbito de los sistemas educativos.

En el nivel I asume la clasificación de problemas de Polya:

- problemas de probar y
- problemas de encontrar.

En el nivel III considera que

"un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se le ha planteado, que éste desea abordar, y para la cual no ha producido sentido" (pp. 30-31).

En la definición de problema escolar de matemáticas echamos de menos la referencia explícita al contexto, dentro del ámbito escolar, en el que se propone el problema, pues sabemos que una actividad es o no un problema para el alumno al que se le ha planteado dependiendo del momento en el que se le proponga dentro, por ejemplo, de la programación escolar. Polya (1981) distinguió cuatro tipos de problemas haciendo alusión al contexto en que se proponen: a) problemas en que la regla que hay que aplicar salta a la vista porque acaba de ser presentada o estudiada en clase; b) problemas en que hay que elegir la regla que se debe aplicar y que se trabajó en clase recientemente; c) problemas en los que hay que elegir una combinación de reglas previamente estudiadas; d) problemas en que hay que investigar.

En el nivel II adopta la distinción de Butts (1980):

- ejercicios de reconocimiento,
- ejercicios algorítmicos,
- problemas de aplicación,
- problemas de búsqueda,
- situaciones problemáticas,

y aclara que en el trabajo sólo se tratarán los problemas de aplicación y los problemas de búsqueda.

Es interesante asimismo la distinción entre resolución, solución y resultado, para la cual nos podría valer el símil del desplazamiento por carretera hasta cierto lugar, tras múltiples recorridos (*resolución*) por caminos que daban vueltas o desviaban y otros que conducían directamente (*solución*) al lugar referido (*resultado*).

Como cuestión puntual, nos gustaría resaltar un comentario efectuado en la página 38: "Los problemas que estamos considerando son problemas de contenido matemático -no los juegos, pasatiempos y rompecabezas que pueblan las actividades de algunas propuestas de desarrollo curricular que dicen que ponen el énfasis en la resolución de problemas". Pensamos que los juegos, pasatiempos y rompecabezas no se pueden meter todos en el mismo saco y que los hay con un contenido matemático profundo. Por ejemplo, los que están recogidos en la clásica obra de Ball y Coxeter "Mathematical Recreations and Essays" (1984).

HERRAMIENTA HEURÍSTICA

Dentro de la heurística, liderada por Polya y Schoenfeld, L. Puig contrapone el modelo de competencia de aquél (4 fases) con el modelo de actuación de éste (que describe el proceso como conjunto de episodios –que son segmentos de conducta de la misma categoría).

Los elementos del modelo de competencia asociado al ya mencionado estilo heurístico de resolución de problemas son:

- DH: destrezas con potencial heurístico,
- SH: sugerencias heurísticas,
- HH: herramientas heurísticas,

- MH: métodos de resolución con contenido heurístico,
- PP: patrones plausibles,
- GI: gestor instruido y
- concepción de la resolución de problemas con fines epistémicos.

Una aportación interesante del trabajo es la definición de herramienta heurística y el desbroce de la diferencia entre éstas, las sugerencias heurísticas y las destrezas con potencial heurístico. En la lista de herramientas aparecen las siguientes:

- consideración de un caso (o una serie de casos)
- división del problema en partes
- reformulación
- variación parcial
- examen de posibilidades
- paso al contrarrecíproco
- introducción de una figura auxiliar
- analogía aclarada.

Como sugerencia heurística aparece "buscar un problema relacionado".

Como destrezas aparecen "hacer una tabla" y "buscar una notación adecuada".

Quizá la separación entre herramienta heurística y destreza heurística no queda suficientemente clara porque algunas denominaciones de la lista son muy genéricas, en concreto la HH "introducción de una figura auxiliar" (cf. Callejo, 1994) y la DH "buscar una notación adecuada". Buscar una notación adecuada que no sea algebraica es a veces una forma de reformular el problema o de transformarlo en otro y entonces es una HH e introducir una figura auxiliar no tiene a veces carácter de transformación del problema y es entonces una DH.

Por ejemplo, el problema siguiente se puede resolver utilizando como notación coordenadas cartesianas y se transforma así en otro problema:

> "Se tiene una caja fuerte muy pesada de base cuadrada. El único movimiento posible es hacerla girar 90º sobre cualquiera de sus esquinas. ¿Es posible colocarla justo detrás de donde estaba y mirando en la misma dirección?"

Si las esquinas se representan con coordenadas, el nuevo problema es ver si un punto de coordenadas (a,b) se puede transformar mediante giros de 90º y centros los puntos (a±1,b), (a,b±1), (a±1,b±1) en otro de coordenadas (a, b+1). Se trata pues de una HH y no de una DH.

En cuanto a "introducir una figura auxiliar" nos preguntamos: ¿qué es una figura?, ¿lo es un diagrama en árbol? Si lo es, cuando se utiliza en un problema de probabilidad para hacer una enumeración de casos no transforma el problema y se trataría pues de una DH. Este caso es bien distinto del uso de una representación geométrica con líneas auxiliares que transforma un problema geométrico en otro y entonces sería una HH.

ESPACIO DE PROBLEMAS

La noción de espacio de problemas se ha revelado muy útil para analizar cada problema, así como para representar gráficamente las formas en que se puede abordar y desarrollar un plan o comportarse un resolutor[9].

La incorporación de esta noción en el análisis de los protocolos, al tiempo que añade información al análisis propuesto por Schoenfeld, lo hace más transparente. El diagrama de flujo lineal de Schoenfeld con la sucesión de episodios se convierte así en bidimensional, mostrando las sucesivas transformaciones del problema que realiza el resolutor.

2.2. MODELO DE ENSEÑANZA

El modelo de enseñanza se presenta de forma clara pero breve (pp. 57-63). Como ya hemos señalado, se expone al nivel de "enseñanza pretendida", pero no se dice nada de la enseñanza impartida. Tampoco se dice nada del profesor concreto (sus conocimientos, sus creencias, sus destrezas; aunque sabemos que es el investigador y en este trabajo nos revela lo que piensa de la resolución de problemas), ni del modo real de trabajo de los alumnos en clase, ni de las dificultades encontradas al tratar de aplicar este modelo de enseñanza.

El modelo de enseñanza está caracterizado por el esquema etapas-estados para el alumno:

1) resolutor
2) resolutor/observador de sí mismo
3) resolutor/observador
4) resolutor/observador/investigador
5) observador/investigador/profesor

Trata de reunir así los enfoques de enseñanza de resolución de problemas enunciados por Kilpatrick (1985):

- ósmosis - memorización - imitación - cooperación - reflexión

Insiste en la necesidad de constatar el proceso de resolución y no sólo la solución (por ejemplo, para aprender por imitación). Pero sólo conocemos las etapas (no su duración ni su contenido concreto), tareas (no las dificultades ni las posibilidades que plantean, el modo de proponerlas, su articulación,...) y los problemas (no su potencial didáctico con los alumnos concretos o su grado de dificultad o los bloqueos que han encontrado los alumnos durante el proceso de instrucción).

[9] "El espacio de problemas teórico no siempre da cuenta de la actuación de los alumnos y es preciso examinar ésta para determinar cuál es el espacio de problemas de la resolución de cada protocolo en particular" (p. 71)

El trabajo pasa casi de puntillas sobre este apartado, quizá porque su propósito se centra en "explorar la actuación al resolver problemas de alumnos instruidos en un curso organizado en función de tal modelo, describiendo su actuación respecto a los elementos del modelo" (p.16). Asimismo, el tratamiento de las concepciones (que al inicio de la instrucción vienen de prácticas anteriores) se hace a través de las prácticas del curso de forma indirecta.

Nos preguntamos por los resultados de la instrucción a medio y largo plazo: ¿de qué manera está incidiendo en la práctica docente de estos estudiantes que actualmente son profesores? En concreto, ¿seleccionan actividades que tienen un potencial heurístico?, ¿presentan la matemática como una ciencia en la que el razonamiento plausible tiene un papel tan importante como el razonamiento demostrativo?, ¿ponen el énfasis en los procesos de pensamiento más que en los resultados? No es objeto de este estudio, pero podría serlo de otros.

2.3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Ya hemos señalado que esta investigación se despega del paradigma clásico del método experimental basado en un enfoque positivista. En este sentido los criterios de calidad hay que aplicarlos de forma distinta.

El estudio de la resolución de problemas en voz alta, a pesar de la problemática suscitada en torno a la validez de los datos, es decantado por el autor hacia la naturaleza de los mismos. Esto pone de relieve una forma de entender el rigor en las investigaciones cualitativas, donde prima la significatividad de la información sobre la precisión del instrumento empleado (Kilpatrick, 1995). La misma idea aparece en el apartado 5.3.2. “La obtención de los protocolos audiovisuales”: gran relajación de condiciones.

La investigación verifica los parámetros de calidad pues el método ha permitido investigar lo que realmente se pretendía y en este sentido podemos decir que la investigación es *válida*; es también una investigación *pertinente* en cuanto que aporta elementos para un modelo teórico de la resolución de problemas, que mejora instrumentos para la obtención y análisis de datos y que la aplicación del modelo de enseñanza en un caso concreto ha producido un cambio de estilo de los estudiantes más acorde con un modelo de competencia; expone con detalle las observaciones realizadas y las conclusiones alcanzadas y muestra sensibilidad para captar el significado que los alumnos dan al proceso de resolución de problemas, por ejemplo, los comentarios subjetivos de los protocolos y de los datos iniciales y finales del grupo-clase son muy jugosos y aportan una información muy valiosa sobre creencias de los alumnos en torno a la actividad matemática antes y después de la instrucción (pp. 282-290); la *objetividad* entendida como intersubjetividad en el análisis de datos se ha planteado en dos ocasiones: en la transcripción de los protocolos (p. 74) y en el examen de la lista de frases que dieron los alumnos de las descripciones de sus resoluciones y sus respuestas acerca de en qué consiste la tarea de resolver problemas (p. 242); sin embargo, no se ha aplicado al análisis de los otros datos obtenidos; el trabajo se presenta con referencias claras y en este sentido es *reproducible*; por último guarda una estrecha relación con *las matemáticas y su enseñanza* pues los problemas tienen un contenido matemático significativo y las HH y los procesos que estudia están íntimamente relacionados con el pensamiento y la actividad matemática.

ESTUDIO DE CASOS

Nos ha resultado muy interesante este trabajo exploratorio con estudio de casos tanto por su aportación metodológica, avanzando en el análisis de protocolos propuesto por Schoenfeld, como por su intencionalidad que incide en la elaboración del modelo de competencia y del modelo de enseñanza. Pero no se dice en concreto en qué ha contribuido este estudio a la reelaboración del modelo de competencia y del modelo de enseñanza.

Por otra parte, en el estudio de casos se ha prescindido del análisis de las interacciones entre los dos alumnos que resuelven conjuntamente cada problema[10].

ESTUDIO DEL GRUPO

Debido a que los alumnos no suelen mostrar habilidad describiendo el proceso de resolución, sino que en su lugar frecuentememte hablan sólo de la solución y emiten juicios de lo que es o les supone resolver problemas, el autor ha decidido observar estos juicios sobre los elementos que intervienen en el proceso de resolución de un problema.

Sólo se han considerado los datos iniciales y finales, tras un curso escolar de instrucción, pero no hay datos del proceso.

En el resumen de datos echamos en falta medidas de dispersión que pueden complementar la media del grupo, haciéndonos una idea de cómo se han distribuido los resultados.

Finalmente, hay que añadir que la técnica de rejilla se ha mostrado útil para conocer las teorías implícitas de los alumnos.

2.4. RESULTADOS

Puesto que ya hemos comentado los elementos de la teoría y la adaptación de los instrumentos para la obtención y análisis de datos que se presentan como resultado de este trabajo, sólo nos detendremos brevemente en los resultados de la instrucción.

RESULTADOS DE LA INSTRUCCIÓN

En líneas generales podríamos decir que el objetivo de la instrucción en resolución de problemas es que los alumnos resuelven más problemas y los resuelvan mejor. Como en este caso no ha habido un aumento de la eficacia, sino un cambio de estilo[11], el objetivo se ha

[10] La tesis doctoral de Pedro Cobo (1998) es una aportación precisamente en esta línea.

[11] "En nuestro caso está claro que lo que aprendieron los alumnos no se refleja en las pruebas con que lo estamos midiendo en que encuentren la solución de los problemas en mayor medida, sino en que tienen más maneras de buscar la solución de los problemas y las usan efectivamente. No se trata de un aumento de eficacia, sino de un cambio de estilo" (p. 279).

alcanzado a medias, a no ser que al considerar que la prueba final es más difícil que la inicial, podamos decir que el hecho de que el número de problemas completamente resueltos haya pasado de 35 a 38 se tome como un resultado satisfactorio.

Nos preguntamos ¿cuáles habrían sido las condiciones necesarias para que este grupo de alumnos hubiera llegado a ser más eficaz resolviendo problemas?

2.5. BALANCE FINAL

A lo largo de este apartado hemos ido señalando los aspectos positivos de este trabajo y también aquellos otros que no han quedado claramente resueltos. Aquí los retomamos a modo de resumen:

- Destacamos positivamente la delimitación y acotación de conceptos y términos empleados como elementos de la teoría: problema, elementos del modelo de competencia y espacio de problemas. Nos parece especialmente interesante la distinción, dentro de los elementos del modelo de competencia, entre herramientas heurísticas, sugerencias heurísticas y destrezas con potencial heurístico, aunque creemos que no queda suficientemente clara la diferencia entre herramientas y destrezas, quizá porque algunas denominaciones de la lista son muy genéricas, por ejemplo "introducción de una figura auxiliar".

- El modelo de enseñanza nos parece que está bien precisado al nivel de la enseñanza pretendida, pero hay una escasa consideración del proceso de enseñanza llevado a cabo y, por tanto, no hay una evaluación del mismo.

- En la investigación ha primado la significatividad sobre el rigor, reuniendo los requisitos necesarios para considerarla de calidad. La incorporación de la noción "espacio de problemas" al análisis de los protocolos propuesto por Schoenfeld ha permitido mostrar las sucesivas transformaciones del problema por parte del resolutor, lo que mejora la información sobre el proceso de resolución.

- En cuanto a los resultados destacamos los elementos que configuran el marco teórico y la mejora del estilo de los alumnos. Nos preguntamos por las condiciones necesarias que hipotéticamente habrían conducido también a una mejora de la eficacia de éstos.

3. PROSPECTIVA DE LA INVESTIGACIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cinco años después de este trabajo se ha avanzado en la resolución de problemas tanto en España como en otros países y quedan cuestiones pendientes. Se ha investigado, por ejemplo, tratando de integrar la cognición y el afecto, explorando sobre la formación y la evolución de las creencias de los alumnos y de los profesores, analizando el papel y los tipos de interacciones en el trabajo en grupo, etc., pero quedan muchas preguntas por responder y mucho camino por hacer.

A continuación vamos a señalar algunas, sin llegar al grado de concreción de las cuestiones de investigación; unas se relacionan con el marco teórico de Schoenfeld y otras tratan de aspectos que este autor no considera explícitamente; al final señalaremos las que abordó L. Puig en su libro.

3.1. INVESTIGACIONES RELACIONADAS CON EL MARCO TEÓRICO DE SCHOENFELD

A. Schoenfeld señaló en 1992 algunas líneas que entonces y ahora necesitan de más investigaciones, relacionadas con su marco teórico, y a las que vamos a referirnos tomándonos cierta libertad:

DOMINIO DE CONOCIMIENTOS

a) Encontrar adecuadas descripciones y representaciones de las estructuras cognitivas.

b) Elaborar la interacción dinámica entre recursos y otros aspectos de los comportamientos de resolución de problemas: ¿cómo interactúan los recursos con las estrategias, el control y las creencias?

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[12]

Necesitamos conocer datos acerca de la naturaleza y la cantidad de entrenamiento necesario para aprender distintos tipos de estrategias de resolución de problemas, sobre qué tipo de problemas, qué resultados en la adquisición de estrategias particulares y hasta qué punto se produce una transferencia de la adquisición de estrategias.

Nunokawa (1997) ha analizado el papel de las conjeturas y cómo se originan en el proceso de resolución de problemas, resaltando cómo éstas no se apoyan exclusivamente en los datos o resultados que se van obteniendo, sino en el conocimiento matemático del sujeto, descartando incluso en ocasiones algunos datos obtenidos.

Analizar el papel que determinadas estrategias heurísticas desempeñan en el proceso de resolución de problemas puede aportar inestimables datos para el diseño de estrategias de enseñanza dentro del campo de la resolución de problemas.

CONTROL

Quizás debiéramos hablar de metacognición, pues este concepto incluye el conocimiento de los propios procesos de pensamiento y el control y autorregulación de los mismos.

---

[12] A. Schoenfeld no hace la distinción que L. Puig hace en este trabajo y que es más afinada entre HH, SH y DH.

Se ha insistido mucho en que los estudiantes *hagan*, lo que es muy importante, pero no debe olvidarse la necesidad y la conveniencia de que también *reflexionen sobre lo que hacen*; si pretendemos mejorar la capacidad de un individuo para resolver problemas, hemos de propiciar las ocasiones en las que reflexione sobre su manera de proceder. Al mismo tiempo, a la hora de analizar el modo de resolver problemas es necesario incluir indicadores sobre el empleo de la reflexión en el proceso de resolución.

Sternberg (1980, 1982) ha estado trabajando en el desarrollo de una *subteoría componencial de la inteligencia humana*[13]. Ha identificado cinco tipos de componentes: componentes de ejecución o actuación, componentes de adquisición, componentes de retención, componentes de transferencia y metacomponentes. Las metacomponentes son procesos de control de orden superior usados en la toma de decisiones y planificaciones ejecutivas. Ha especificado asimismo seis metacomponentes: decisión sobre qué es el problema, selección de componentes de orden inferior, selección de una o más representaciones para la información, selección de una estrategia para combinar las componentes de orden inferior, decisión en relación con la rapidez y seguridad y supervisión de la solución.

Es claro que para Sternberg la metacognición es, usando una frase acuñada por Edward A. Silver (1982), la fuerza impulsora de la actividad intelectual.

Para Keiichi Shigematsu (1993) la metacognición es el profesor interior, el controlador que gestiona los recursos con criterio.

Sin menospreciar ninguno de los ingredientes que forman parte del menú de la resolución de problemas, la metacognición es, desde nuestro punto de vista, el que mejor pone de relieve el conocimiento didáctico del contenido del maestro y el que tiene más visos de prevalecer incluso después del período escolar (quizás al lado de las creencias y actitudes). Desarrollar estrategias metacognitivas es desarrollar individuos reflexivos, es avanzar en nivel de calidad en la formación intelectual.

Lester (1985), tras formular las siguientes 3 preguntas claves en el campo de la instrucción en Resolución de Problemas:

> *"1.- ¿Qué hace el individuo, correcta e incorrectamente, durante la Resolución de Problemas?*
> *2.- ¿Qué debería ser capaz de hacer el individuo?*
> *3.- ¿Cómo puede mejorarse la habilidad individual en Resolución de Problemas?"* (p. 44),

propone la consideración de los aspectos metacognitivos como elementos de mejora del proceso personal de resolución de problemas.

A pesar de ello, falta una adecuada caracterización de la metacognición y del control. Esto es, no disponemos de modelos teóricos de lo que es el control y de cómo funciona. No

[13] "Una componente es un proceso elemental de información que opera sobre representaciones internas de objetos o símbolos" (Sternberg, 1980, p. 6)

sabemos, por ejemplo, si el control es un dominio dependiente o independiente, y cuáles podrían ser los mecanismos que ligan las decisiones de control al dominio del conocimiento.

Sabemos que en algunos dominios los alumnos pueden demostrar conductas de autorregulación, por ejemplo en situaciones sociales. Nos preguntamos: ¿Cómo y cuándo los niños desarrollan tales destrezas en el dominio social? ¿Cómo y cuándo desarrollan (o no) destrezas análogas en el dominio matemático? ¿Las semejanzas son sólo aparentes o tienen algo en común de alguna forma?

COGNICIÓN Y AFECTO

(a) Unificar perspectivas que permitan una significativa integración de cognición y afecto[14].

(b) Comprender, si tal unificación no es posible, por qué no.

ENCULTURACIÓN

(a) ¿Cómo se adquieren las tendencias y perspectivas comunes entre los miembros de una subcultura particular, en concreto la subcultura de la comunidad matemática?

CREENCIAS

(a) ¿Cómo se forman y cómo pueden evolucionar las creencias del profesor?[15]

(b) ¿Cómo se forman y cómo pueden evolucionar las creencias de los alumnos?[16]

Una visión cada vez más compleja e integrada del fenómeno educativo ha conducido a la consideración, entre otros, de factores asociables a multitud de disciplinas e imposibles de subordinar a la norma de una sola. Tal es el caso de las creencias, terreno, por otro lado, propicio para la transgresión de fronteras, debido a la vasta profusión de términos para expresar conceptos similares y al hecho de la cercanía e incluso solapamiento con lo que entendemos por conocimiento.

Es interesante la discusión conducida por Pehkonen (1996) sobre la terminología empleada para nombrar las creencias y sobre la relación de éstas con el conocimiento, en la

---

[14] La tesis doctoral de I. M. Gómez Chacón (1997) es una aportación en esta línea.

[15] Las tesis de J. Carrillo (1996) y L. C. Contreras (1998) son una aportación en esta línea.

[16] El trabajo de investigación de doctorado de A. Vila (1995) y su tesis doctoral en elaboración son aportaciones en esta línea.

que una de las conclusiones de trabajo es que afectos, creencias y conocimiento son tres conjuntos de los que no se sabe cómo son sus inclusiones o intersecciones; un modelo es el de las creencias como conjunto con parte común en los otros dos, siendo éstos disjuntos.

La magnitud de la importancia de la consideración de las concepciones o las creencias de los profesores, tanto por parte de éstos como por parte de los investigadores en Educación, no se centra sólo en su necesidad, en el hecho de ser *"como espejo inconsciente donde el profesor refleja toda información"* (Jiménez et al., 1994). La explicitación de las concepciones puede significar el punto de partida para el eventual cambio de las mismas[17] y es aquí donde hemos de cifrar su magnitud, ya que dicho cambio puede propiciar posicionamientos epistemológicos completamente diferentes (Carrillo, 1996).

INSTRUCCIÓN

En relación a los procesos de enseñanza/aprendizaje F. Lester señalaba en 1994 que ésta era una de las líneas en las que se necesitaban más investigaciones y en concreto:

- el papel del profesor;

- descripciones del comportamiento del profesor, de las interacciones profesor-estudiante y estudiante-estudiante y el tipo de atmósfera en una clase;

- procesos de enseñanza/aprendizaje no sólo de individuos sino también de pequeños grupos y clases completas.

De hecho, Lester priorizaba el foco de la investigación en los grupos y las clases.

Respecto de los tres elementos destacados, Lester añade que el papel del profesor debería ser el elemento más importante de cualquier agenda de investigación en resolución de problemas[18]. Una investigación interesante a este respecto es la de Clarke (1997), que muestra el progresivo acercamiento de un profesor a una metodología basada en la resolución de problemas.

---

[17] Deberían formularse y tratar de responder preguntas sobre el cambio de concepciones, preguntas que podrían recogerse bajo la gran cuestión ¿Bajo qué condiciones se produce o se provoca el cambio en las concepciones de un profesor?, es decir, deberíamos ir obteniendo información sobre cómo debe ser el conocimiento que se pretende que los profesores adquieran y cómo debe ser la relación entre dicho conocimiento y las creencias del profesor. En este sentido, Posner, Strike, Hewson y Gertzog (1982) dicen que la información presentada debe ser plausible, inteligible y fructífera, a lo que Tillema (1994) añade que

"las creencias y orientaciones de meta son en realidad parte de la deliberación profesional" (p. 602).

[18] La tesis de L.C. Contreras (1998) aporta un instrumento de análisis de las concepciones del profesor sobre el papel de la resolución de problemas en el aula que incluye una categoría denominada "Papel del profesor".

En cuanto a las interacciones estudiante-estudiante, es preciso resaltar la investigación de Qin et al. (1995), que ponen de relieve las ventajas de la cooperación frente a la competición como espíritu entre los estudiantes a la hora de resolver problemas.

Por otro lado, Lester se queja del descenso de interés de los investigadores en la resolución de problemas. En efecto, parece que la oleada constructivista la ha apartado un poco del centro de atención; sin embargo, artículos como el de Anthony (1996) sirven para hacer caer en la cuenta de que no se trata más que de un cambio de perspectiva: el conocimiento metacognitivo actúa de enlace:

> "*Un estudio de caso de dos estudiantes detalla el contraste entre comportamientos de aprendizaje pasivo y activo. Ejemplos de sus comportamientos estratégicos de aprendizaje ilustran que tener involucrados a los estudiantes en actividades tales como discusiones, respuesta a cuestiones, y problemas no garantiza automáticamente una construcción de conocimiento exitosa. La naturaleza del conocimiento metacognitivo de los estudiantes y la calidad de sus estrategias de aprendizaje se consideran factores críticos en los resultados de aprendizaje exitosos.*" (p. 349)

Un avance en esta línea queda reflejado en Goods y Galbraith (1996), donde se analiza el papel de las estrategias metacognitivas (individuales e interactivas) en el trabajo en grupo en resolución de problemas en Secundaria.

El desarrollo y evaluación de programas y materiales de apoyo a los profesores se ha convertido en una línea de importancia en el campo de la resolución de problemas. Citaremos, de entre las múltiples investigaciones publicadas, una breve, pero útil (para los profesores), la de Strickland (1995), que muestra una forma de obtener situaciones problemáticas.

3.2. CONCIENCIA, EMOCIÓN E INTERACCIÓN SOCIAL

A los elementos descritos por A. Schoenfeld para explicar el comportamiento de resolutores reales resolviendo problemas habría que añadirle otros como la conciencia, las emociones y las interacciones sociales.

CONCIENCIA

Tenemos experiencia del papel de la incubación en la resolución de problemas y del papel que en este fenómeno juega el subconsciente.

> "*A menudo, cuando se trabaja en una cuestión difícil, el empezar el estudio no se obtiene nada en claro; luego se interrumpe la labor durante un tiempo más o menos largo, para volver a sentarse delante de la mesa de trabajo. Durante la primera media hora continúa sin encontrarse nada, y luego, de repente, la idea decisiva aparece. Podría decirse que el trabajo consciente ha sido más fructífero debido a la interrupción y que el reposo ha devuelto al espíritu su fuerza y capacidad de trabajo. Pero es más probable que este reposo se haya empleado para una labor inconsciente y que su resultado se haya revelado luego al geómetra... Sólo que esta revelación... se ha producido en un*

momento de trabajo consciente, pero independientemente de este trabajo, el cual desempeña como máximo el papel de propulsor."
Henri Poincaré. *Science et Méthode*

Nos preguntamos: *¿Cómo es el procesamiento consciente y subconsciente de información?*

EMOCIÓN

Sabemos que la experiencia emocional es importante en la resolución de problemas y en los procesos intelectuales en general.

Nos preguntamos:
¿Cómo se relaciona la emoción con la memoria y con el control del proceso? ¿Cómo canalizar las emociones para que faciliten y no bloqueen el proceso de resolución?

INTERACCIÓN SOCIAL

Según el enfoque del aprendizaje situado (Brown, Collins y Duguid, 1989)[19], el aprendizaje y la cognición son fundamentalmente situacionales:

"*La actividad en la cual el conocimiento se desarrolla y emplea (..) .no es separable de o auxiliar al aprendizaje y la cognición.*" (p. 32).

Ahora bien, según Lave y Wenger (1991), esto no sólo quiere significar una localización de pensamientos y acciones en el espacio y el tiempo, ni el hecho de que impliquen otras personas o dependan de un significado social. El enfoque del aprendizaje situado, además de la localización en espacio y tiempo de pensamientos y acciones, y de la implicación de otras personas, supone una nueva dimensión: la noción de participación periférica en comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1991). La actividad del aprendizaje situado, así concebido, se mueve

"*en dirección centrípeta, motivada por su emplazamiento en un campo de práctica madura. Está motivada por el uso creciente de la participación, y por los deseos de los principiantes de convertirse en verdaderos practicantes. Las comunidades de práctica poseen historias y ciclos de desarrollo, y se reproducen ellas mismas de tal forma que la transformación de los principiantes en miembros definitivos es una característica propia de la práctica.*" (p. 121).

---

[19] Según Reiss y Wellstein (1996), el término situado se convirtió en el término técnico para la habilidad en resolución de problemas en una situación específica, siendo Lawler (1980) uno de los primeros en describirlo con detalle. Por su parte, Greeno (1991) puso de relieve que los estudiantes pueden tener diferentes representaciones de un problema matemático dependiendo de la situación específica.

Esta noción conlleva un cambio de perspectiva: el aprendizaje no está simplemente situado en la práctica, sino que se ve como parte integral de toda actividad:

> "*Existe un contraste significativo entre una teoría del aprendizaje en la que la práctica (en un estrecho y replicativo sentido) se sumerge en los procesos de aprendizaje y otra en la que el aprendizaje es entendido como un aspecto integral de la práctica (en un histórico y generativo sentido).*" (p. 34).

Nos preguntamos:

> *¿Cuáles son los procesos cognitivos del individuo en situaciones interactivas?*

3.3. CUESTIONES ABORDADAS EN EL LIBRO "ELEMENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS"

Hace cinco años L. Puig ya abordaba en su tesis doctoral algunas de las cuestiones antes esbozadas, en concreto:

- La delimitación de "estrategias de resolución de problemas" que son de diferente naturaleza, como ya hemos señalado.

- La relación del control con el uso de herramientas heurísticas.

- La exploración de creencias de los alumnos acerca de la resolución de problemas antes y después de la instrucción, lo cual se relaciona con la enculturación o adquisición de tendencias y perspectivas comunes en el grupo de alumnos acerca del quehacer matemático.

- La aplicación de un modelo de instrucción que ha mejorado el estilo de los alumnos resolviendo problemas y ha cambiado algunas creencias de los estudiantes por otras más adecuadas que han mejorado su comportamiento.

Otros aspectos como el papel de la conciencia o de las emociones en el proceso de resolución de problemas, o el análisis de las interacciones entre alumnos o de éstos con el profesor resolviendo problemas o en el proceso de instrucción no fueron objeto de este trabajo. Eran entonces y son todavía líneas de trabajo incipientes que necesitan avanzar en el marco teórico y en metodologías de investigación apropiadas. Sin embargo, el trabajo de L. Puig ha contribuido indirectamente en el avance de alguna de ella; como muestra podemos decir que ha sido una referencia importante en la reciente tesis de P. Cobo (1998) sobre procesos cognitivos e interacciones sociales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTHONY, G. (1996). Active learning in a constructivist framework. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 349-369.

BALL, W.W.R. y COXETER, H.S.M. (1984). *Mathematical Recreations and Essays*. (30ª edición). Nueva York: Dover.

BROWN, J.S.; COLLINS, A. y DUGUID, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32-42.

BUTTS, T. (1980). Posing Problems Properly. En Krulik, S. y Reys, R.E. (Eds.) *Problem Solving in School Mathematics*. Reston (Virginia): NCTM.

CALLEJO, M.L. (1994). Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes: Une expérience d'entraînement dans un Club mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 1 - 33.
CARRILLO, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de Profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones (1997).
CLARKE, D.M. (1997). The changing role of the mathematics teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 278-308.
COBO, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales en la resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Inédita.
CONTRERAS, L.C. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral en fase de presentación. Universidad de Huelva.
FELDMAN, A. (1993). Promoting equitable collaboration between university researchers and school teachers. *Qualitative Studies in Education*, 6(4), 341-357.
GÓMEZ CHACÓN, I.M. (1997). *Procesos de aprendizaje en Matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las Matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Inédita.
GOODS, M. y GALBRAITH, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 229-260.
JIMÉNEZ, R. et Al.. (1994). El diseño curricular y la Formación del Profesor como nexos de investigación en Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Sociales y Matemáticas). *Investigación en la escuela*, 24, 71-78.
KILPATRICK, J. (1995). Staking claims. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3(4), 21-42.
LAVE, J. y WENGER, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
LESTER, F.K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. En Silver, E.A. (Ed.) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, New Jersey: LEA.
LESTER, F.K. (1994). Musings about Problem-Solving Research. *Journal for Research in Mathematics Education*. 25(6), 660-667.
MARINA, J.A. (1996). *Entrevista* realizada por Nuria Barrios, publicada en EL PAÍS el 8 de diciembre.
NUNOKAWA, K. (1997). Data Versus Conjectures in Mathematical Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(1), 1-19.
PEHKONEN, E. (1996). Some Considerations on the Beliefs-Terminology Used. En Törner, G. (1996) *Current State of Research on Mathematical Beliefs. Proceedings of the Second MAVI Workshop*. University of Duisburg.
POINCARÉ, H. (1908). *Science et Méthode*. Paris: Flammarion. [Trad. castellana: *Ciencia y método*. Madrid: Espasa Calpe. 1963]
PÓLYA, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley and Sons.
POSNER, G.J. ET AL. (1982). Accomodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education*, 66(2), 211-227.

QIN, Z.; JOHNSON, D.W. y JOHNSON, R.T. (1995). Cooperative versus competitive efforts and problem solving. *Review of Educational Research*, 65(2), 129-143.
SCHOENFELD, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics. En: D.A. GROWS (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York: Macmillan. 334-370.

SHIGEMATSU, K. (1993). Metacognition: the role of the "inner teacher". Contrast between Japan and the United States. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 113-122.

SILBAR, E.A. (1982). *Thinking about problem solving: Toward an understanding of metacognitive aspects of mathematical problem solving*. Documento no publicado. San Diego. San Diego State University, Department of Mathematical Sciences.

STERNBERG, R.J. (1980). Sketch of a componential subtheory of human intelligence. *Behavioral and Brain Sciences*, 3, 573-584. [V-154, 155]

STERNBERG, R.J. (1982). A componential approach to intellectual development. En Sternberg, R.J. (Ed.) *Advances in the psychology of human intelligence, vol. I*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

STRICKLAND, J.F.Jr. (1995). A paradigm for developing problem situations in middle grades mathematics. *Reading Improvement*, 32(2), 118-120.

TILLEMA, H.H. (1994). Training and professional expertise: bridging the gap between new information and pre-existing beliefs of teachers. *Teaching & Teacher Education*, 10(6), 601-615.

VILA, A. (1995). *Els problemes estandarditzats a la classe de matemàtiques. Una contribució a l'estudi de les seves causes i conseqüències*. Treball de Recerca del Programa de Doctorat. UAB. Inédita

RÉPLICA A : *"ELEMENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, CINCO AÑOS DESPUÉS* " DE Mª LUZ CALLEJO Y JOSÉ CARRILLO

Luis Puig
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Universitat de Valencia

0. Quiero comenzar agradeciendo el cariño con el que Mª Luz Callejo y José Carrillo han tratado mi libro *Elementos de resolución de problemas*, escrito a partir de mi tesis doctoral. Siempre cuesta para quien ha escrito algo —sobre todo si su escritura ha supuesto largo tiempo y esfuerzo— admitir que el sentido que un lector produce al leerlo se ajusta con precisión al significado que él pretendía darle o al sentido que él, primer lector, produjo inicialmente. Sin embargo, he aprendido —de Peirce, de Barthes, de Eco— que los textos no tienen un significado en ellos, producto de la intención del autor, que el lector tiene que desentrañar, sino que más bien las lecturas de un texto son tan múltiples como múltiples son las experiencias semióticas de sus lectores y el texto sólo puede señalar, gracias a la restricción semántica que establece en el juego interno de sus elementos semióticos, que algunas lecturas son aberrantes, es decir, que se desvían o apartan de lo normal o lo usual. Así que, aceptaré que los autores del comentario a mi libro escriban algunas veces que yo digo cosas que yo no diría que las dice el texto *Elementos de resolución de problemas* sin replicar que yo no quise decir eso, porque el problema no es lo que yo quise decir. Sí que me entretendré, sin embargo, en señalar que algunas cosas se pueden leer de otro modo y hasta qué punto algunas lecturas atienden las indicaciones de la restricción semántica.

1. En una tesis doctoral es prudente que lo que se defiende, sobre todo si es una teoría, se exprese como el desarrollo, la adaptación, la extensión, la precisión, la particularización de algo ya establecido en la comunidad que ha de juzgarla. El trabajo adquiere así la solidez y la grandeza de estar levantado "sobre los hombros de gigantes". Siguiendo este principio, en el capítulo 3 presenté los elementos de teoría del componente de competencia del modelo teórico local poniendo el énfasis en su continuidad con los trabajos de Polya y Schoenfeld, que es de donde efectivamente proceden esos elementos. Pero el análisis que hice de ellos y su reelaboración para integrarlos en un todo coherente los sometió a una transformación que me obliga a confesar que no quieren decir lo mismo que en Polya o Schoenfeld y que, en algunos extremos, los contradicen.

Esta transformación es particularmente radical por lo que respecta a las nociones que están tomadas de Schoenfeld. En efecto, como digo en el libro, las nociones que tomé de Schoenfeld para elaborar el componente de competencia del modelo teórico local (o, en aras de brevedad, el 'modelo de competencia'), pertenecen tal como las obtuvo y presentó Schoenfeld a lo que yo llamo el componente de actuación del modelo teórico local (o, en aras de brevedad, el 'modelo de actuación') y aparecen en sus trabajos como respuesta a la necesidad de introducir nuevas fuentes de explicación de conductas de resolutores reales que se ven como *carencias*: la primera transformación, por tanto, a la que las sometí es el cambio de naturaleza que supone pasar de elemento de un modelo de actuación que expresa una carencia de los resolutores a elemento de un modelo de competencia que expresa una pericia —esta operación la realicé en particular con las creencias, que en el modelo de competencia no se definen como “las creencias que los resolutores tienen” sino como una creencia particular que forma parte de la conducta competente del estilo heurístico de resolución de problemas (“la tarea de resolución de problemas se realiza con fines epistémicos”) y con el gestor, que en el modelo de competencia es lo que llamo el ‘gestor instruido’.

Por otro lado, Schoenfeld clasifica esas nociones —que calificó inicialmente de “componentes del conocimiento y la conducta” y posteriormente de “aspectos de la cognición”— en cuatro componentes —cuando se llamaban ‘componentes’— o cinco aspectos —cuando pasaron a llamarse ‘aspectos’—; ahora bien, mi lista de elementos no respeta esa clasificación y califica a todos los elementos de ‘heurísticos’, en la medida en que forman parte precisamente del modelo de competencia del estilo *heurístico* de resolución de problemas y no del modelo de competencia de otros estilos de resolución de problemas, de modo que tanto el gestor instruido como la creencia competente, es decir, lo que en otras teorías se califican de factores metacognitivos y creencias son aquí parte de la heurística.

Aunque al escribir la tesis y el libro mantuviera la prudencia de mostrar más la filiación de los elementos teóricos que elaboré que su oposición a las nociones establecidas, no por ello dejé de indicar con claridad en qué sentido se separaban de ellas. Ver en particular las notas 10 y 11 al capítulo 3 (pág. 43) y la crítica que hago en la página 49 al analizar el caso que aparece en el apartado 5.4.1. a la descripción que Schoenfeld hace del buen gestor. Esta crítica está fundada precisamente en observaciones como la descrita en 5.4.1. que muestra que cuando unos alumnos son “competentes” en el sentido del buen gestor de Schoenfeld —que tiene sus tareas enunciadas en los términos absolutamente vagos y generales “¿Qué estás haciendo? ¿Para qué lo estás haciendo? ¿Cómo encaja lo que estás haciendo en el conjunto de la resolución del problema?” (Schoenfeld, 1985)— esos alumnos “saben que hay que gestionar el proceso, pero no desarrollan conductas de gestión concretas adecuadas al tipo de acciones que están realizando o a las intenciones de uso de los instrumentos que están utilizando para moverse en el espacio de problemas” (págs. 89-90) con lo que se puede concluir que “un gestor que sólo sabe que tiene que gestionar, pero carece de un catálogo de tareas de gestión concretas asociadas a los instrumentos que se usan para resolver el problema está inerme” (pág. 90), es decir, el buen gestor de Schoenfeld no es competente. El “gestor instruido” que yo incorporé al modelo de competencia es un gestor que no sólo sabe que ha de controlar el proceso sino que conoce cuáles son esas tareas concretas.

2. Mª Luz Callejo y José Carrillo dicen que en mi trabajo “la pertinencia prima sobre el rigor”. Ya sé que ellos no dicen esto como una crítica sino señalando que hay que valorar como positivo el que el trabajo sea pertinente y no darle tanta importancia al rigor. A mi entender, no se trata de no darle importancia al rigor, sino de entender el rigor de otra manera, por ejemplo como lo hace Freudenthal en su artículo *Fiabilité, validité et pertinence – critères de la recherche sur l’enseignement de la mathématique*[20]. Entonces en mi trabajo no es que “la pertinencia prime sobre el rigor”, sino que el rigor que tiene está definido de otra

[20] Freudenthal (1982)

manera, que incluye la pertinencia como uno de sus criterios básicos[21]. De hecho esto mismo lo dicen Mª Luz Callejo y José Carrillo unas páginas después, citando a Kilpatrick: “Esto pone de relieve una forma de entender el rigor en las investigaciones cualitativas, donde prima la significatividad de la información sobre la precisión del instrumento empleado”.

3. Mi comentario sobre la investigación-acción, que en el libro aparece en una nota a pie de página, lo que hace es poner en guardia ante ciertas confusiones con respecto no a personas (profesor e investigador) sino funciones (función de investigador y función de profesor) que tienen, por su propia naturaleza, ritmos y objetivos a menudo distintos. Una nota a pie de página no es el lugar para explicar en detalle el asunto, sino sólo para apuntarlo. Sucede lo mismo con esta réplica, así que, como ya hacía en mi libro, remito de nuevo a dos referencias en las que se entra más a fondo en el asunto (Brousseau, 1991 y Puig 1998).

4. La distinción de los niveles I, II y III está hecha con la intención de que sea una herramienta metodológica para organizar las definiciones o teorías de problema o resolución de problemas que al hacer el barrido de la bibliografía usual en cualquier trabajo de tesis me encontré. Esto fue necesario, entre otras cosas, por la diversidad de disciplinas cuya bibliografía consulté y por el hecho fundamental de que en gran parte de la bibliografía no se trataba la resolución de problemas en el sistema escolar. Por ello, distinguí los tres niveles y los describí con la metáfora de los personajes de un reparto —problema, alumno y profesor—, que son los personajes clásicos propios del sistema escolar —la materia, los que aprenden, los que enseñan. No veo el sentido de intentar introducir el “contexto” en esta metáfora, aunque sólo sea porque no sé cómo hacer que sea un personaje. De paso subrayaré que esa descripción ya está hecha desde una teoría de nivel III, lo que es patente sin necesidad de que se mencione el tercer personaje, el profesor, en el mero hecho de que el segundo personaje se llama ‘alumno’: si la descripción de los niveles estuviera hecha desde una teoría de nivel II, se hablaría de ‘sujeto’ o ‘resolutor’. En una teoría de nivel II el profesor no pertenece al reparto, en la descripción de una teoría de nivel II hecha desde una de nivel III el profesor pertenece al reparto, pero no está en escena: ése es el sentido en que en el libro se dice que los niveles pueden recorrerse del III al I (los personajes están en el reparto, pero salen de escena —eso es lo que yo hago en el libro, ya que éste desarrolla una teoría de nivel III en la que hay partes de nivel II o I); o del I al III (los personajes se van incorporando al reparto).

5. Las apreciaciones de Mª Luz Callejo y José Carrillo sobre la cantidad de carencias del capítulo en que expongo el componente de enseñanza del modelo teórico local (en aras de la brevedad, el ‘modelo de enseñanza’) me permiten hacer una breve mención a la trastienda de la elaboración de mi tesis. Sucede que la exposición del modelo de enseñanza en el plan de escritura de la memoria de la tesis estaba previsto que fuera extensa y detallada, pero circunstancias variadas, entre otras la necesidad de acabar antes de que vencieran los plazos, hizo que no lo redactara y lo eliminara de la memoria de la tesis (lo que me obligó, dicho sea de paso, a reescribir las referencias cruzadas entre capítulos porque tuve que cambiar la numeración de los capítulos subsiguientes a éste y a otro que también eliminé). Cuando me puse a reescribir la memoria de la tesis para convertirla en libro, pensé en enmendar el asunto,

---

[21] Ver una discusión más detallada de estos asuntos en los artículos de Jeremy Kilpatrick y mío del libro *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (Puig, ed. 1998)

pero ya no tuve fuerzas para escribir un grueso montón de páginas y me limité a presentar el esquema general del 'modelo de enseñanza': así que lo que aparece en el libro como capítulo 4 no está en la memoria de la tesis, aunque sí que estaba proyectado en el plan inicial[22].

6. Una de las preguntas que Mª Luz Callejo y José Carrillo se hacen en su comentario al modelo de enseñanza —"¿presentan la matemática como una ciencia en la que el razonamiento plausible tiene un papel tan importante como el razonamiento demostrativo?"— me da pie para hace un comentario de precaución ante los vaivenes que a menudo se producen como consecuencia de excesos que hay que combatir: una cosa es explicar y defender la importancia de los razonamientos plausibles en el trabajo de los matemáticos y otra muy distinta deslizarse hacia una equiparación de ambos tipos de razonamientos. En mi libro hago una precisión en este sentido que cito y subrayo: "En el proceso de resolución de problemas *coexisten* razonamientos que responden a patrones plausibles con razonamientos que responden a patrones deductivos y, en la medida en que los patrones plausibles son a menudo formas viciadas de patrones deductivos reparadas al substituir la verdad por la creencia, esa coexistencia *no deja de producir interferencias* en la actuación de los resolutores, otra cosa distinta es que, en el modelo de competencia, pueda separarse con nitidez el *proceso de resolución* del problema —conducido a menudo por razonamientos que pueden describirse mediante patrones plausibles— de la *solución* del problema —es decir la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión, *donde sólo son admisibles razonamientos deductivos*."

7. También para mí uno de los hallazgos teóricos fundamentales de mi trabajo es la definición de herramienta heurística (HH) y la distinción de éstas con otros elementos heurísticos (destrezas con potencial heurístico, sugerencias heurísticas, métodos de resolución con contenido heurístico), que en la bibliografía anglosajona suelen nombrarse todos con la misma palabra *heuristics*. Pero ese hallazgo teórico no es fundamental por permitir hacer esas distinciones (si sólo hiciera esto no nos permitiría mucho más que avanzar en una taxonomía) sino por lo que escribí en la página 47, que cito: "Esta caracterización general de las herramientas heurísticas permite distinguir a qué vamos a llamar herramienta heurística y a qué sugerencia o destreza con mayor precisión, ahora bien lo que realmente nos parece importante no es sólo la posibilidad de hacer esas distinciones. Al definir las herramientas heurísticas como procedimientos que transforman los problemas en otros problemas, se abre la vía para analizar las distintas maneras que tienen de realizar tal transformación cada una de las herramientas heurísticas y cuáles pueden ser los efectos que pueden esperarse de su uso para la solución del problema originalmente planteado. Dicho análisis puede conducirse guiado por preguntas del estilo de las siguientes: ¿Cuál es la intención de su uso? ¿Cómo está relacionado el problema original con el problema transformado? O, la solución del problema transformado, ¿qué implica para la solución del problema original? ¿Qué se puede traer de la solución del problema transformado al problema original? ¿Cómo queda transformado el

---

[22] Aprovecho para decir que otra versión de ese capítulo apareció en la revista *Uno*, sometida por la redacción de la revista a modificaciones para hacer el texto "políticamente correcto" que me parecen tan absurdas ('resolvente' en vez de 'resolutor', por ejemplo) que no me reconozco como autor de lo allí publicado.

problema original al incorporarle lo que se traiga de la solución del transformado? Estas preguntas no pueden contestarse en general, sino que han de plantearse para cada herramienta heurística y al menos distinguiendo entre los problemas de encontrar y los problemas de probar.” La posibilidad de hacer esos análisis es lo que permite, en general, convertir la heurística en materia de enseñanza, y, en particular, determinar cuáles son las tareas del gestor instruido, elemento del modelo de competencia cuya diferencia con el gestor de Schoenfeld ya he subrayado.

8. A lo largo de mis observaciones ha aparecido a menudo la referencia a lo que, siguiendo a Filloy, llamo ‘modelo teórico local’. En el libro expongo someramente cómo esa noción permite definir el tipo de teoría que elaboré en la tesis. Pero el uso de esa idea en el trabajo de una tesis —y ése fue mi caso— es múltiple: no sólo define el tipo de teoría, sino que conlleva un esquema para la realización del trabajo de investigación[23] y es también un esquema para escribir la memoria de la investigación. Este último aspecto es patente en mi libro porque sus capítulos recorren los componentes del modelo teórico local: el 3 (y también el 2) tratan del componente de competencia, el 4 del componente de enseñanza y el 5 y el 6 del componente de actuación. Ahora bien, como los modelos teóricos locales tienen naturaleza recursiva, esto es, para hacer una investigación hay que elaborar elementos de un modelo teórico local y los resultados de la investigación se organizan en forma de elementos de un (nuevo) modelo teórico local, la escritura de la memoria de la investigación tiene que contar algo de su propia historia, lo que es farragoso y no siempre fácil. En mi caso expuse sólo elementos del modelo teórico local *resultante* de la investigación y me limité a indicar algunas modificaciones de los modelos previos en las notas a pie de página (ver, por ejemplo, las notas 19 y 20 que aparecen en la página 90, que mencionan modificaciones del modelo de enseñanza).

9. Para terminar señalaré que hay algo en mi trabajo extremadamente importante para mí, de lo que Mª Luz Callejo y José Carrillo no han dicho nada en ningún sentido. Se trata de los análisis minuciosos que presento de todos los problemas que utilicé en los instrumentos de obtención de datos. El rigor en los trabajos de corte cualitativo exige, esto sí, ese conocimiento minucioso de las tareas que usamos para obtener datos.

---

[23] La mejor exposición de este aspecto metodológico de los modelos teóricos locales está en Filloy (1999).

Así podremos correlativamente tener una descripción (mediante algún instrumento) de la actuación de los alumnos que vamos a elegir como casos[24], que sea significativa con respecto al modelo teórico local.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. 1991. ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte) [Traducción castellana de Luis Puig] *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 9, págs. 10-21.

Filloy, E. y cols. 1999. *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Freudenthal, H. 1982. Fiabilité, validité et pertinence – critères de la recherche sur l'enseignement de la mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 13, págs. 395-408.

Puig, L. ed. 1998. *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática*. una empresa docente®: Bogotá.

[24] El análisis de datos de Bencekri o, en particular, las técnicas de taxonomía numérica que yo utilicé son unos instrumentos especialmente potentes para este propósito. En el plan inicial de mi trabajo de investigación, tenía que haber habido también un estudio de casos tomados de los grupos cuya actuación global está descrita en el capítulo 6, seleccionados en virtud de la descripción proporcionada por la taxonomía. Los motivos por los que esta parte no aparece narrada ni en la memoria de la tesis ni en el libro pertenecen también a la trastienda de mi trabajo.

SEGUNDO SEMINARIO

TEMA DE DEBATE:
EL PAPEL DE LAS GRÁFICAS CARTESIANAS EN EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

DESARROLLO DEL SEGUNDO SEMINARIO
INTERVENCIONES:
PONENCIA: FUNCIONAMIENTO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES EN EL SISTEMA DIDÁCTICO.
PONENTE: DR. EDUARDO LACASTA, UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
RÉPLICA: ALGUNOS APUNTES SOBRE EL USO DE GRÁFICAS CARTESIANAS.
PONENTE: DR. TOMÁS ORTEGA, UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

DESARROLLO DEL SEGUNDO SEMINARIO

Este seminario aborda el papel de los gráficos cartesianos en el estudio de las funciones.

Eduardo Lacasta comienza su intervención afirmando que a pesar de que el gráfico cartesiano es un instrumento de enseñanza muy utilizado no es un objeto que se enseñe.

En la ponencia, pretende dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Piensan los profesores que el gráfico juega un papel heurístico y permite manipular algunos conceptos matemáticos sin que sea necesario definirlos completamente? ¿Es la elección de este instrumento un éxito?

Antes responder a estas y otras preguntas analiza la evolución de la enseñanza del cálculo desde la reforma conjuntista de los años 70 hasta la reforma educativa actual y la influencia que han podido tener en esta innovación "El lenguaje de las funciones y gráficas" del Shell Centre y los Estándares Curriculares de la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Alude, posteriormente, a algunos trabajos de Adda y Janvier para tratar el funcionamiento de las gráficas cartesianas así como al enfoque semiológico de Bertin, a la articulación de registros de Duval y al juego de marcos de Douady. A continuación, con el apoyo de encuestas realizadas a profesores y estudiantes, Lacasta estudia el funcionamiento de los gráficos cartesianos de funciones en situaciones didácticas.

Para terminar su ponencia, y como conclusión, Lacasta somete a debate una serie de consideraciones referidas a la interacción de profesores y alumnos con los gráficos.

Ortega, en su réplica, da una visión algo diferente sobre el uso de los gráficos cartesianos basada tanto en su experiencia personal como en el uso de las nuevas tecnologías. Señala cómo los gráficos cartesianos permiten ver las características globales y locales de las funciones, pero es necesaria una instrucción específica.

Las representaciones cartesianas, añade Ortega, no son sólo una especie de memoria artificial que permite registrar diferentes características de una función, sino que pueden ser también instrumentos para la investigación y para la búsqueda de soluciones a ciertos problemas, así como representaciones de conceptos. La didáctica de los gráficos y la orientación educativa pueden otorgarle otras funciones.

A continuación, señala cómo se puede lograr una aproximación visual potente usando ordenador mediante el agrandamiento del grafo de una función, un proceso que usa la misma idea fundamental del análisis no estándar. Como muestra del uso de los ordenadores se refiere a los trabajos de Cuoco y Tall que exploran el concepto de función y a la utilización por Nelsen del uso de los gráficos como prueba.

FUNCIONAMIENTO DIDÁCTICO DE LOS GRÁFICOS DE FUNCIONES

Eduardo Lacasta Zabalza
Universidad Pública de Navarra-Nafarroako Unibertsitate Publikoa

El gráfico cartesiano es un instrumento de enseñanza muy utilizado en la introducción de las principales funciones elementales y en los primeros conceptos del análisis: crecimiento, límite, continuidad, derivada, etc. Pero al mismo tiempo no es un objeto que se enseñe: no constituye un capítulo de un manual de matemáticas.

El gráfico de una función está generalmente considerado por los profesores como un instrumento bastante útil y universal para obtener rápidamente conocimientos sobre las funciones: se utilizan como ilustración y a veces incluso como el objetivo del estudio de las matemáticas.

Esta buena opinión del gráfico ¿proviene de su carácter espacial? Existe un conjunto de ideas sobre la eficacia de la imagen en la transmisión de conocimientos que se puede resumir en el refrán "una imagen vale más que mil palabras".

¿Piensan los profesores que el gráfico juega un papel heurístico y permite manipular algunos conceptos matemáticos sin que sea necesario definirlos completamente?

¿Es la elección de este instrumento un éxito? Antes de intentar contestar estas y otras preguntas relativas al funcionamiento de los gráficos, veamos someramente la evolución de la enseñanza del cálculo, con especial atención a funciones y gráficas.

Partiremos de la reforma de los años sesenta y setenta de las matemáticas, que afectó a gran número de países y entre ellos a España. Esta reforma estuvo en principio poco relacionada con la enseñanza del cálculo, pero ésta se vio afectada por una dirección formalista y conjuntista y por el predominio algebraico. Los autores de aquella reforma no pudieron prever cómo podrían los alumnos beneficiarse de un enfoque estructural, qué elementos de cultura matemática eran necesario para ello y tampoco se dieron cuenta de las restricciones que introdujo el hecho de abordar una enseñanza masiva y no solamente para las élites.

1. REACCIONES A LA REFORMA CONJUNTISTA. LA REFORMA EDUCATIVA EN ESPAÑA

Entre las críticas a la enseñanza del cálculo de los setenta podemos citar la introducción de las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas muy lejanos del estudiante, la construcción lineal de los conceptos, sin ninguna conexión con la resolución de problemas, el empleo muy precoz del lenguaje formalizado y una enseñanza muy centrada en el discurso del profesor.

Si bien es cierto que la reforma de los setenta plantea por primera vez la cuestión de la adaptación de las enseñanzas matemáticas a los descubrimientos de la epistemología genética piagetiana, estas críticas también apuntan la necesidad de buscar un equilibrio más satisfactorio entre las exigencias que impone el saber matemático y las exigencias que impone el funcionamiento cognitivo del estudiante.

A partir de 1983, se comienza a realizar en España, en diversos centros de Enseñanzas Medias y EGB, reformas experimentales. Primero se hicieron en centros coordinados por el MEC; posteriormente, se fueron incorporando otros centros bajo la supervisión de las Comunidades Autónomas con competencias en materia de Educación (Andalucía, Cataluña, etc...).

Estas reformas experimentales recogían las iniciativas de amplios sectores de profesorado, implicados en la innovación curricular y metodológica en el aula.

Los cambios producidos en estos centros, la elaboración de nuevos materiales y la introducción de nuevos métodos docentes han sido elementos dinamizadores de la última Reforma Educativa.

En 1987, se publica el Libro Blanco que recoge las propuestas ministeriales de modificación del sistema educativo.

Las enseñanzas mínimas o aspectos básicos del currículo para todo el Estado se establecieron por el MEC en 1991. En el caso de la Matemática, sobre estas disposiciones han ejercido una notable influencia distintas corrientes ya extendidas por países de Europa y EEUU. Mencionamos entre ellos los siguientes estudios:

- El informe Cockcroft, publicado en el Reino Unido, resultado de los trabajos de una Comisión de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas en las escuelas de primaria y secundaria de Inglaterra y Gales.

- El informe de Kuwait, en 1986, promovido por el ICMI aporta un amplio debate sobre la Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90. Este documento fue discutido en un Simposio celebrado en Valencia cuyas conclusiones publicó la Editorial Mestral en 1988.

Algunas de las proposiciones deducidas de estos estudios iban en la línea de modificar las relaciones entre la teoría y las aplicaciones, organizando la enseñanza alrededor de algunos problemas importantes. Asimismo se planteó una atención a la teoría limitada únicamente a lo necesario, con base en niveles de formalización accesibles a los estudiantes.

Los objetivos generales del área de matemáticas relacionados con funciones y gráficas que se plantearon entonces para la ESO pretenden desarrollar en el alumnado, entre otras, las capacidades siguientes:

- Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (.., gráfica, ..) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.

- Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

- Identificar los elementos matemáticos (..., gráficos, ...) presentes en las noticias, opiniones, publicidad etc. analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.

Los contenidos que afectan a nuestro tema de estudio vienen recogidos en las enseñanzas mínimas bajo el epígrafe "interpretación y tratamiento de la información".

El Decreto que se publicó en 1991 establece como conceptos (estructuras conceptuales) *mínimos* los siguientes: *características globales de las gráfica* s (continuidad, crecimiento, periodicidad, tendencia) y el *estudio de fenómenos y gráficos* (lineales, cuadráticos, exponenciales y periódicos).

Los procedimientos –en cierta manera se corresponden con la definición de Cockroft de estrategias generales, destrezas y hechos– que fijan las enseñanzas mínimas son: la utilización e interpretación del lenguaje gráfico haciendo uso del vocabulario y los símbolos adecuados, la utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas sencillas, la obtención de datos de forma individual y colectiva utilizando diversas fuentes y recursos y la detección de errores en la utilización del lenguaje gráfico y estadístico.

Las actitudes fijadas por el Decreto de mínimos se refieren a la valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos, a la curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos y al interés y valoración crítica del uso de los lenguajes de naturaleza matemática (gráfico, estadístico, etc.) en informaciones y argumentaciones.

Con carácter general se fija el siguiente criterio: *interpretar relaciones funcionales dadas en forma de tabla o a través de una expresión algebraica sencilla y representarlas utilizando gráficas cartesianas.*

Conocidas las enseñanzas mínimas, el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) y las Comunidades Autónomas con competencias en materia educativa han elaborado y publicado los correspondientes currícula de la ESO. Debe recordarse que estas disposiciones constituyen un primer nivel de concreción, ya que son los profesores quienes deberán elaborar las programaciones de aula para adaptar el currículo a las características de sus alumnos y a la realidad de cada centro.

El MEC y la mayor parte de las autonomías mantienen en un solo bloque la interpretación, representación y tratamiento de la información.

Ya en uno, ya en dos bloques, los contenidos de funciones y gráficas en todas las autonomías vienen agrupados de la siguiente forma:

- Conceptos: Función como relación entre magnitudes variables, formas de representación de una función: verbal, tablas, gráfico o fórmula, características globales de las gráficas, estudio de funciones elementales: lineales, proporcionalidad, cuadráticas, inversas, exponenciales y periódicas.

- Procedimientos: *Utilización de distintos lenguajes: gráfico, expresión algebraica, tablas.*

- Algoritmos y destrezas: *Construcción de gráficas a partir de una descripción verbal, una tabla o una fórmula sencilla, construcción de tablas a partir de una gráfica o una fórmula, obtención de expresión algebraica a partir de una gráfica o una tabla, en casos sencillos.*

- Estrategias generales: *Análisis de las características globales de una gráfica.*

- Actitudes de apreciación por la matemática: Reconocimiento y valoración de da la utilidad del lenguaje gráfico

Entre las conexiones con otros bloques podemos señalar: la proporcionalidad como función y como gráfica y resolución gráfica de ecuaciones. (La proporcionalidad aritmética se estudia en el bloque de números. En las diversas secciones de contenidos se hace referencia a esta conexión).

- Procedimientos: Manejo de tablas y gráficos para efectuar cálculos de proporcionalidad. Resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones con dos variables.

A pesar del carácter comprensivo de la ESO, en el último curso los alumnos podrán elegir entre dos opciones diferentes A y B.

La opción A, de carácter más utilitario que formalista, está orientada al fomento de capacidades relacionadas con la aplicación de las matemáticas. Los contenidos serán los referidos a lectura e interpretación de gráficos.

En la opción B, más formalista, deberá insistirse más en los aspectos constructivos que en los interpretativos. Además de interpretar gráficas, el alumnado será capaz de construirlas, con cierta precisión, en una gama más amplia de relaciones funcionales. Un contenido específico es la tasa de variación media.

Esta síntesis pone bien a las claras el especial hincapié en el lenguaje gráfico, en comparación con orientaciones anteriores.

2. POSIBLES REPERCUSIONES DE LA INNOVACIÓN PUESTA EN PRÁCTICA EN LA ACTUALIDAD

Los "Estándares curriculares" de la NCTM (1991) y "El lenguaje de funciones y gráficas" del SHELL CENTRE (1990) han ejercido gran influencia en el diseño curricular de la ESO, así como en los desarrollos y aplicaciones realizadas en el entorno del proceso de reforma e innovación educativa. En concreto, en la “construcción de gráficas a partir de una descripción verbal, una tabla o una fórmula sencilla”, en la “construcción de tablas a partir de una gráfica o una fórmula”, en la “obtención de expresión algebraica a partir de una gráfica o una tabla, en casos sencillos” se ve bien patente la influencia de los trabajos del SHELL CENTRE.

La propuesta innovadora del SHELL CENTRE, una realización que ha puesto en práctica las investigaciones de JANVIER, provocó en algunos profesores de matemáticas un replanteamiento global de la enseñanza de los gráficos y de las relaciones funcionales en la enseñanza secundaria.

Sin embargo, nos parece conveniente avanzar algunas reflexiones sobre las posibles repercusiones de su uso generalizado.

Si realizamos una lectura de las publicaciones de ejemplos y modelos del nuevo diseño curricular relativos a nuestro objeto de estudio, observaremos la repetición y proliferación de algunas experiencias como "mirando gradientes" u otras análogas del SHELL CENTRE. La experiencia de gradientes es sumamente instructiva pero, asimismo, compleja. Se trata de establecer una relación entre la altura y el volumen de agua de botellas de formas diversas, incluso raras. Actividad que si con recipientes de formas "regulares" ya crea problemas a los alumnos, les es sumamente difícil con botellas "irregulares". Convendría reflexionar sobre la conveniencia de una reproducción aislada de la actividad, sin estar integrada en un proceso más amplio, con actividades inicialmente más simples, que el alumno pueda controlar. Amparo MORENO (1981) realizó una experiencia que tituló "Un redondel con muchas cosas dentro, eso es un conjunto". Esta experiencia venía a mostrar cómo los diagramas de Venn, que en su origen se habían comenzado a utilizar como medio didáctico para introducir la teoría intuitiva de conjuntos se habían convertido en objeto de enseñanza (BROUSSEAU denomina a este fenómeno, por el que la forma sustituye al fondo, "deslizamiento metadidáctico"). ¿No existirá, tal vez, el riesgo de convertir los ejemplos y actividades, ciertamente interesantes, mencionados en el párrafo anterior en nuevo objeto de estudio?

Muchas de las actividades que se proponen son relaciones entre magnitudes variables. Nos preguntamos si el hecho de acudir, con excesiva frecuencia, a experiencias del mundo físico – de la vida real y, por tanto, "en condiciones no-ideales"– es una ayuda o más bien crea nuevos obstáculos. No es aventurado pensar que los problemas de comprensión del fenómeno físico en sí dificultan el establecimiento de una relación entre las magnitudes variables, intervinientes en ese fenómeno. Volveremos a tratar este punto más adelante.

A pesar del esfuerzo realizado en la movilización del profesorado y su participación en las nuevas propuestas curriculares, es justo pensar que la influencia de este movimiento es mucho mayor en los programas que en la posición real del profesorado y alumnado. Debemos contar con las resistencias del sistema educativo, con la inercia del profesorado, formado en su mayoría en el "boom" de la Matemática moderna, ante la multiplicidad de tareas que se le proponen.

En el centro de todas estas observaciones están las preguntas que plantea Michèle ARTIGUE (1995): ¿Qué aprenden en realidad los alumnos? ¿Cómo estructuran un campo de saberes que la enseñanza no estructura por ellos? ¿Qué concepción se forman de las nociones que manipulan sin recurrir a definiciones precisas? ¿Qué influencia tienen sobre estas concepciones las actividades que se realizan con calculadoras y, en particular, con las calculadoras gráficas?

En el mismo trabajo, Michèle ARTIGUE señala, basándose en trabajos estadounidenses cómo el mundo de la investigación y el de la innovación están lejos de establecer vínculos estrechos. En concreto, se ha publicado que la mayoría de los proyectos inscritos en el área de la renovación del cálculo en los Estados Unidos se han aplicado de forma independiente de los trabajos de investigación existentes.

El problema de la efectividad de las aportaciones innovadoras es el de la obtención de hechos confiables. Los proyectos innovadores por lo general se ponen en práctica gracias al entusiasmo de sus difusores. La necesidad de convencer hace que se deje a un lado la importancia de un análisis riguroso de los efectos de la innovación. Esto se ve particularmente en los casos concernientes a la tecnología informática y, en concreto en lo que a función y gráfico respecta, en el uso de las calculadoras gráficas y programas de ordenador. Se sobreestima la potencia del instrumento introducido, mientras que los problemas de su gestión se subestiman. Para ARTIGUE, *"Se cae entonces en el peligro de un discurso ingenuo, donde se toma con frecuencia como análisis cognitivo y didáctico el hecho de que esas herramientas se constituyan en un buen catalizador para forzar la evolución de las prácticas pedagógicas de los profesores y para comprometerlas con un enfoque más constructivista del aprendizaje".*

3. ALGUNOS ENFOQUES DISTINTOS PARA TRATAR EL FUNCIONAMIENTO DEL GRÁFICO CARTESIANO DE FUNCIONES

¿Qué resulta de la abundante actividad de investigación e innovación? ¿Sobre cuántos problemas se ha avanzado en realidad? ¿Cuáles son las preguntas que permanecen abiertas? Es difícil hacer una síntesis por múltiples razones:

Las investigaciones se han desarrollado con enfoques que difieren por el peso distinto que se le ha otorgado a las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica, y también por los marcos teóricos que las sustentan. Ello supone una *riqueza* en el conjunto de las aportaciones, pero también un serio *problema de comunicación* entre quienes profundizan en líneas de investigación distintas, que hacen difícil su comprensión por las grandes diferencias de planteamiento teórico, que tiene complejas razones de índole científica, pero también cultural.

La problemática que se plantea en torno al lenguaje gráfico en general se puede englobar en el problema general de la representación, que desde el inicio de la didáctica de las matemáticas se ha enfocado con ayuda de la lingüística en el estudio de significantes y significados, de las metáforas, los problemas que generan la homonimia y sinonimia, estudiados por Josette ADDA (1987), etc.

En didáctica de las matemáticas ha habido abundantes trabajos sobre la visualización en el cálculo, siendo especialmente importantes los que podemos englobar en el "pensamiento matemático avanzado". En nuestro país, AZCÁRATE y DEULOFEU (1990) expresaban la confianza en la potencia del lenguaje gráfico, que era una posición dominante en la época, de esta manera: "Los dos lenguajes de mayor abstracción y por tanto más difíciles de interpretar, la gráfica y la fórmula algebraica, permiten obtener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cuantitativa como cualitativa... La diferencia entre ambos lenguajes es evidente : la gráfica permite 'ver' las características globales de la función también determinables a partir de la ecuación, pero mucho más difíciles de interpretar...".

Claude JANVIER (1983) expresaba esta confianza, diciendo que los gráficos podían servir de "soportes intuitivos" de una utilización eficaz de conceptos matemáticos. En 1981, en su intervención en las JAEM, proponía un método de enseñanza de funciones a través de los gráficos que juzgaba claramente exitoso. Pero en trabajos más recientes, se ha puesto de manifiesto que la utilización del lenguaje gráfico lleva consigo también ciertas dificultades. Por ejemplo, el mismo JANVIER (1993), encuentra dificultades específicas en la interpretación de los gráficos de funciones con variable temporal –las "crónicas"–, que analiza en términos de obstáculo epistemológico.

UN ENFOQUE SEMIOLÓGICO

Varios autores de didáctica de las matemáticas se han ayudado de la semiología. En el enfoque semiológico de BERTIN (1973), la representación gráfica es un lenguaje visual, consistente en un sistema de signos monosémico y se puede definir como la parte racional del mundo de las imágenes.

Un sistema es monosémico cuando el conocimiento de la significación de cada signo precede a la observación de los signos ensamblados. Un gráfico no se concibe más que si se ha precisado la significación única de cada signo.

¿Cuál es la diferencia entre lo gráfico y lo simbólico? En el gráfico, la palabra precede siempre al signo, mientras que en lo simbólico el signo el signo precede a la palabra o tiende a hacerlo; el signo se vuelve símbolo para los que son capaces de hacer la analogía pertinente. Ahora bien, lo simbólico tiende a la monosemia del signo y se concibe por la naturaleza esencialmente polisémica de la forma y el color, que cada uno puede interpretar a su modo, hasta que emerge el simbolismo o si no, hasta que se adquiere la costumbre de una convención. Lo simbólico se debe a las leyes de la imagen figurativa.

Esta precisión sobre las diferentes leyes de la representación gráfica y simbólica ayudan a entender lo que GLAESER plantea en “Matemáticas para el alumno-profesor”: mostrando la fotografía de un cadáver disecado y un esquema del aparato digestivo, tal como lo muestran los libros de texto concluye que “lo abstracto es más simple que lo concreto”. Se podrían hacer muchas matizaciones a esta afirmación tan general, pero en lo que al gráfico cartesiano de las funciones respecta, el código de la representación es esencial en matemáticas, pero no suele figurar de manera explícita en la enseñanza, porque se considera como evidente (ADDA 1987).

UN ENFOQUE COGNITIVO: LA ARTICULACIÓN DE REGISTROS DE RAYMOND DUVAL

Las gráficas son representaciones semióticas, como también lo son las figuras geométricas, la escritura algebraica o la lengua. Esto quiere decir que el representante visible (en el caso de las gráficas que nos ocupan, líneas trazadas en el plano cartesiano) tiene leyes de organización que le son propias y que le permiten representar otra cosa (funciones u otros objetos matemáticos). La forma de las representaciones es el representante (el trazo) y el fondo es el contenido, lo representado (en este caso, la función). La forma cambia según el sistema semiótico utilizado, lo que origina lo que DUVAL llama distintos *registros de representación* para un mismo objeto, a los que corresponden distintas tipos de tratamiento cognitivo. En nuestro caso, una misma función puede tener como registros distintos el dibujo de su gráfica, su fórmula algebraica, una tabla numérica, una descripción textual.

DUVAL hace hincapié en la importancia de la forma frente al contenido, que no sería para él un mero soporte para las representaciones mentales (un “soporte intuitivo”, en palabras de Claude JANVIER), puesto que la forma comanda el tipo de tratamiento que se puede efectuar. Pero, a pesar del interés especial de las representaciones gráficas, que permiten tratamientos más “intuitivos”, no basta con “ver” para distinguir entre forma y contenido. La importancia de la forma de las representaciones y de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva matemática sólo se puede observar en el *paso de un* *registro de representación a otro.* Esta afirmación viene sostener el acierto de Claude JANVIER al proponer las "traducciones" y valida también en cierto modo el "juego de marcos" ("Jeux de cadres") de Régine DOUADY.

Pero tanto en los trabajos de JANVIER como en los de DUVAL, aparecen importantes matizaciones que nos hacen cuestionar algunas aportaciones de la innovación plasmadas en materiales curriculares la validez de la profusión de actividades de cambio de registros de representación y de actividades matemáticas basadas en actividades reales o problemas de física, biología, etc.

Advierte DUVAL que la forma de una gráfica cartesiana no tiene carácter analógico con las variaciones de los fenómenos que representa o describe, lo que es especialmente evidente en el caso de fenómenos físicos, biológicos o económicos. Asimismo señala que un aprendizaje de las representaciones gráficas efectuado en la perspectiva de una coordinación de registros, sobrepasa el mero dominio de las representaciones gráficas y está condicionado por la comprensión del proceso matemático. Esta comprensión exige no solamente que no se confunda un objeto y su representación, sino también que se pueda cambiar fácilmente de registro de representación.

En lo que a la lectura global de los gráficos de funciones respecta y en particular en los casos en los que aparecen diversas magnitudes (tiempo, espacio, velocidad, etc.) que diversos autores señalan como especialmente importante frente a la lectura punto a punto, más comúnmente realizada por estudiantes de distintos niveles, en DUVAL (1993) se señala que el aprendizaje de la interpretación local no se puede hacer al margen de un estudio puramente matemático. Cuando el gráfico representa magnitudes heterogéneas, además del proceso de lectura global, existe el de interpretación de las magnitudes presentes.

4. FUNCIONAMIENTO DIDÁCTICO DEL GRÁFICO CARTESIANO DE FUNCIONES

Vamos a estudiar el funcionamiento didáctico de los gráficos cartesianos de funciones. ¿A qué nos referimos? Al funcionamiento de estos gráficos en situaciones didácticas; es decir, en situaciones constituidas por un conjunto de relaciones, específicas del saber (en este caso la función), y de condicionamientos recíprocos que ligan enseñante y enseñado.

Por contraposición al funcionamiento didáctico, la teoría de situaciones establece que el funcionamiento a-didáctico supone que el alumno puede hacer frente, con la ayuda de lo que ha aprendido, a problemas en los que la intención de enseñar un saber está oculta; es decir, que el alumno tiene la posibilidad de interpretar como nuevas situaciones sus relaciones con el saber, con quien enseña y con el medio, y de darles respuestas apropiadas.

No nos referiremos pues a la utilización a-didáctica del gráfico, en la que el alumno actúa de manera autónoma, sin intervención del profesor, frente a los problemas en los que entra en juego el gráfico cartesiano de funciones, ni a los diferentes usos que profesor y alumno pueden hacer del gráfico.

Un elemento crucial que aporta este enfoque teórico de la teoría de situaciones es pues tener en cuenta los comportamientos de alumnos y profesores *específicos del saber en cuestión.*

De acuerdo con el planteamiento que acabamos de exponer, vamos a estudiar el funcionamiento didáctico de los gráficos apoyándonos en encuestas planteadas a profesores y alumnos.

5. PROPIEDADES DIDÁCTICAS Y PRESENTACIÓN ESCOLAR DE LOS GRÁFICOS

Los procesos de enseñanza y aprendizaje se bloquean fatalmente; es decir, que llega un momento en el que el profesor espera que los alumnos sepan algo y éstos no responden. Todo lo que permita salir de este bloqueo o evitarlo es ventajoso. ¿Es el gráfico un elemento privilegiado para salir del bloqueo? Examinemos el papel del gráfico directamente en la relación didáctica y las condiciones de esa relación.

SABERES Y CONOCIMIENTOS COMUNES COMO BASE

La relación didáctica crea la necesidad de postular una base de saberes y conocimientos comunes. Para enseñar es necesario que haya un ambiente en el que el repertorio del alumno y del profesor se suponga que es el mismo. Si no hay un acuerdo en este sentido entre profesor y alumnos, no puede haber relación didáctica. Este repertorio común puede estar constituido por: a) saberes antiguos, b) conocimientos espontáneos (la lengua, conocimientos espaciales) y c) una historia común anterior, que permite evocar elementos conocidos.

Los profesores necesitan este campo común con el alumno, para disminuir la diferencia que hay entre ellos. Necesitan incluso afirmar que no hay diferencias y que la lectura directa de las funciones facilita esta convención. O sea, que si se estudian las propiedades de las funciones a través del gráfico, el alumno las “verá”, mientras que si hay que explicar esas propiedades matemáticamente, los alumnos y el profesor se sitúan en campos distintos y no están en igualdad de condiciones. En este supuesto, no se puede negar la evidencia ni se la puede ignorar. El hecho de tener un repertorio común permite exigir a los alumnos la posesión de algo que se supone que se ha construido directamente a partir de ese repertorio.

En su relación con los alumnos, el profesor puede utilizar principalmente tres recursos:

a) La lengua. Las palabras utilizadas pueden llegar a ser complicadas, pero la lengua es común y el profesor de matemáticas no se plantea su uso como el objeto de una construcción específica.

b) La razón.

c) La evidencia; y, en nuestro caso, la evidencia es la imagen, lo que se ve: “vemos que la función es creciente…”.

Cuando un alumno al que se le muestra la imagen sobre la que tiene que encontrar lo que parece evidente, dice “pues yo no lo veo”, la respuesta del profesor es que no está poniendo interés. Lo que se ha enseñado, lo que se ha mostrado, no se puede ignorar; así pues, el profesor exige un saber que considera común, como si fuese una construcción directa, como si se diese el aprendizaje instantáneo, por el sentido (“insight”): “como lo ves, ya sabes qué es el crecimiento de una función”.

Cuanto más amplio e incluso universal es este campo de saber común, más posibilidades existen de intervención y de corrección, lo que es una ventaja para el profesor.

EL EFECTO DE LA MULTIPLICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES

El que existan varias representaciones de los objetos matemáticos brinda la posibilidad del juego de marcos, que puede ayudar al profesor. Cuanto más numerosas son las representaciones diferentes, más oportunidades tiene el profesor de tratamiento y explicación del objeto y de efectuar un *cambio de marco,* en expresión de Régine DOUADY, o una *traducción* para Claude JANVIER, apoyándonos en el *cambio de registro* de Raymond DUVAL, incluso aunque el alumno no se lo espere. De esta manera, al profesor no le molesta trabajar en varios marcos, aunque a veces sean muy conocidos por el alumno, porque tiene la impresión de que está trabajando el *sentido* y que aumenta las opciones que tiene el alumno para poder expresarse.

Así pues, dispooniendo de varios marcos, el profesor tiene la impresión de que su capacidad de explicación aumenta, de que acumula razones para que el alumno sepa y de que se puede dirigir a los alumnos con más soltura; por consiguiente, tiene una sensación de seguridad. El hecho de saber si el alumno participa o no de esos nuevos campos de representación es otra cuestión. Cuando se produce un bloqueo y el alumno no entiende y sigue sin entender en una nueva representación, e incluso el cambio de representación no ayuda más al alumno, el profesor continúa teniendo esa sensación de seguridad.

La preocupación por ofrecer al alumno representaciones distintas puede incluso provocar intervenciones desafortunadas en manuales escolares. El hecho de situar un vehículo en un diagrama espacio-tiempo hace pensar en éste como un desplazamiento físico. Es muy probable que un alumno de 11 años no pueda distinguir los distintos códigos propuestos y no podrá separar las dos representaciones.

Las presentaciones icónicas refuerzan la ilusión del perfil topográfico explicada por KERSLAKE (1977), según la cual, alumnos de 13, 14 y 15 años interpretan una gráfica espacio-tiempo que consta de tramos rectos crecientes y decrecientes enlazados, como una trayectoria o un perfil topográfico: “Es un móvil que sube una cuesta, luego baja y luego vuelve a subir”. J. ADDA (1987) cita una encuesta hecha por el Instituto Nacional de Investigaciones y Documentación Pedagógica de Francia, en la que muchos futuros maestros interpretaban un diagrama velocidad-tiempo de una manera similar.

EL EFECTO DEL ALEJAMIENTO DE LAS REPRESENTACIONES CON RELACIÓN AL OBJETO REPRESENTADO

Las representaciones alternativas pueden ser reformulaciones, explicaciones, modelos… La taxonomía imaginada por BLOOM (1972) da clasificaciones en relación con los objetivos de la educación.

El gráfico es un modelo rico y muy alejado del objeto matemático al que representa (la función): la manera gráfica y la algebraica de resolver un problema suponen tratamientos de la información muy distintos. Este alejamiento tiene algunas virtudes; el contrato didáctico es distinto para ambos tratamientos desde distintos puntos de vista y los conocimientos y los saberes tratados son distintos en ambos casos.

Cuanto más diferentes son los marcos que utilizamos, mayor es lo que podríamos llamar la superficie significante, mayor es el campo semántico y tanto mejor es subjetivamente la situación para el profesor, porque piensa que tiene más posibilidades de fijar la comprensión del alumno y el saber común de base. Así pues, el gráfico facilita la decisión didáctica aislada en un momento dado.

DISTINTAS FORMAS DE PRESENTACIÓN ESCOLAR DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

LA PRESENTACIÓN “OSTENSIVA"

Desde que Harrison RATSIMBA-RAJOHN (1977) presentó por primera vez el concepto de “ostensión”, varias investigaciones en didácticas de las matemáticas han mostrado que existe una práctica de enseñanza que responde a las características de la “presentación ostensiva”. Daremos la definición general y externa a la didáctica de las matemáticas que proporciona Umberto ECO: “La ostensión tiene lugar cuando un objeto o un acontecimiento dado, producto la naturaleza o de la acción humana (intencionalmente o no), es seleccionada por un individuo y designar la clase de objetos a la que pertenece”.

La práctica ostensiva se lleva a cabo en la enseñanza bajo la hipótesis de que la información es captada por el alumno (sin acciones ni interacciones). Las principales características de esta presentación son:

a) El objeto se pone simplemente en presencia del alumno o ni siquiera se muestra realmente: es evocado solamente.

b) El objeto presentado es un elemento de una clase de equivalencia en lugar de ser la propia clase. La clase podría obtenerse, ya sea olvidando algunos caracteres específicos, ya sea relacionándolos, dando contraejemplos o ejemplos alternativos. El contrato didáctico de la práctica ostensiva supone que los medios al alcance del alumno deben bastar para determinar el objeto matemático (es decir, la clase), a través de la noción efectivamente presentada.

LA PRESENTACIÓN EXTENSIVA

Consistiría en dar la colección de los objetos que corresponde a la definición que se pretende enseñar. Únicamente es válida con clases finitas y es una presentación exhaustiva de todos los objetos que corresponden a la definición.

LA PRESENTACIÓN INTENSIVA, CON LA AYUDA DE UNA DEFINICIÓN MATEMÁTICA

Consiste en definir el objeto, no a través de los que es, de su esencia, sino a través de la estructura a la que pertenece.

DISTINTAS ILUSIONES EN LA PRÁCTICA DOCENTE

LA ILUSIÓN "OSTENSIVA"

Consiste en pensar que *basta con mostrar,* con enseñar y, si el alumno no responde a las exigencias del profesor, si se produce un bloqueo, es que el alumno no ha cumplido con su trabajo en la actividad didáctica. La idea subyacente es es la de que se aprende "porque se ve", en un acto breve, "insight", a través del sentido.

La presentación ostensiva puede darse sin intervención de imágenes, pero cuanto más se utilizan éstas, más fuerte es la tendencia del profesor a pensar que la ostensión funciona convenientemente.

LA ILUSIÓN EMPIRISTA

La idea subyacente es: "no se aprende siempre a la primera", o bien "se reconocen los conceptos enseñándolos varias veces", es decir, a través de ostensiones repetidas. Se piensa en esta ilusión que la verdad está en los objetos y se establece después a lo largo del discurso del profesor. En esta ilusión la formulación no es forzosamente necesaria, puede rechazarse e incluso considerarse como un obstáculo al conocimiento correcto.

LA ILUSIÓN FORMALISTA

La definición es la única manera de saber, el verdadero lugar de encuentro entre profesor y alumno. El acompañamiento "ostensivo" no es más que un conocimiento libre aportado por el alumno y aceptable sólo en tanto que elemento utilizable heurísticamente.

En el caso que nos ocupa, para la posición formalista, el gráfico pertenecería a la actividad heurística del alumno, mientras que la definición pertenecería a la actividad propiamente matemática.

6. ALGUNAS HIPÓTESIS EN EL SISTEMA DIDÁCTICO

Para analizar la relación de los profesores con los procedimientos ostensivos y la de los alumnos respecto a la utilización del gráfico, con los elementos teóricos que acabamos de esbozar, vamos a suponer en general que profesores y alumnos han comenzado a participar de una especie de ideología de la imagen, de lo icónico, por la que los unos tienen la impresión de que enseñan más eficientemente, puesto que en el gráfico se "ven" los conceptos matemáticos y los otros piensan que lo que está planteado gráficamente es más fácilmente resoluble: "con gráficos me aclaro mejor". Esta ideología de lo icónico de los profesores estaría más influenciada por las ilusiones ostensiva y empirista, en detrimento de la ilusión formalista.

Plantearemos esta idea general en forma de hipótesis, que vamos a pretender contrastar.

Hipótesis 1*: Profesores y alumnos piensan que se pueden adquirir conocimientos suficientes a través de la imagen, sin la presencia del saber.*

Hipótesis 2*: Los profesores utilizan los gráficos con la impresión de que van a borrar las diferencias entre profesor y alumno, puesto que una de las virtudes de la imagen es que puede ser leída, interpretada directamente por cualquiera.*

Esta hipótesis tiene en cuenta el gráfico como sentido de las matemáticas. Lo que el profesor dice sobre las funciones se comprueba sobre el gráfico, en el que reside la verdad, el conocimiento, el sentido común. Los profesores necesitan un medio común de construcción para exigir a los alumnos que resuelvan los problemas naturalmente, espontáneamente. De esta manera, si el alumno no lo hace, es que no sabe razonar, que no ve el problema, etc. luego no se puede hacer nada. Así pues, conocer el gráfico es conocer la verdad. El saber sería otra manera de pensar lo que se ve. Esto conduce a pensar que *lo que se ve equivale a lo que se sabe,* luego el saber gráfico podría sustituir al saber matemático.

Hipótesis 3*: Para los profesores, mostrar un gráfico –la ostensión gráfica– es equivalente a una definición o a una demostración.*

Hipótesis 4*: La ideología de lo icónico lleva a los estudiantes a tomar decisiones incorrectas en la resolución de problemas.*

7. LA OPINIÓN DE LOS PROFESORES: ALGUNOS RESULTADOS

Entre las diferentes técnicas utilizables para contrastar estas hipótesis (observación, entrevistas…), hemos elegido el cuestionario planteado a una muestra de profesores de secundaria. A través de las declaraciones de éstos, se ha pretendido encontrar respuestas a la pregunta: ¿Qué piensan los profesores sobre el papel que juegan los gráficos en el aprendizaje de los alumnos? Además nos hemos planteado el acuerdo o desacuerdo en cada caso con esta otra pregunta: ¿Son concordantes las declaraciones?

A lo largo del cuestionario, que no vamos a transcribir en su integridad, se preguntó la opinión de los profesores sobre las características y las virtudes que se atribuyen a los gráficos; es decir, sobre el gráfico como elemento que facilita la comprensión de los alumnos, que mejora sus resultados, como herramienta útil, como herramienta simple, transparente, etc.

Nos hemos limitado a una muestra de 23 profesores de instituto (con alumnos de 15 a 18 años). La mayoría de estos profesores son licenciados en matemáticas.

LA MUESTRA

La muestra elegida no es seguramente un conjunto representativo de la opinión de los profesores; por ello, el objetivo planteado en el cuestionario no es el de inferir cuál es la opinión general de los profesores. Sin embargo, la elección de las preguntas y el análisis de los resultados del cuestionario deben bastar para poner en evidencia los hechos notables y las tendencias observadas.

LA METODOLOGÍA ESTADÍSTICA

La *metodología* del tratamiento estadístico está impuesta por la necesidad de responder a las hipótesis a través de los comportamientos puestos de manifiesto mediante el cuestionario.

En vista del tamaño de la muestra y del formato variado de las preguntas, hemos aplicado un abanico de técnicas estadísticas, con un sitio especialmente importante destinado a los métodos no paramétricos y al análisis implicativo de R. GRAS (1996). Los métodos no paramétricos permiten un control satisfactorio de la certidumbre de los resultados, sin adoptar hipótesis demasiado exigentes y demasiado alejadas de la realidad sobre el modo de distribución de las variables que entran en juego.

La definición de un conjunto de variables ligadas a las opiniones de los profesores permite la construcciónd de una matriz “observaciones x variables”, en la que las observaciones o individuos son los 23 profesores de la muestra. El tamaño de la muestra impone también la no utilización de análisis factorial, por lo que extraeremos solamente algunos resultados puntuales, obtenidos a través del análisis jerárquico e implicativo.

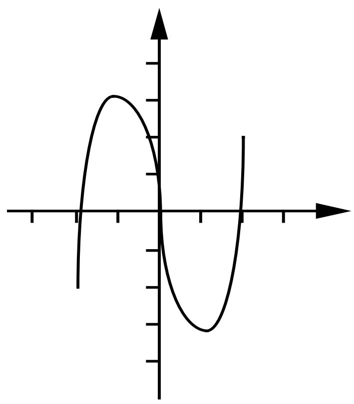
TRANSPARENCIA DEL LENGUAJE GRÁFICO

Se les propuso a los profesores de la muestra la siguiente cuestión:

He aquí cuatro maneras de dar una misma función en 3º de BUP (17 años):

A. Una tabla de los valores de f(x) para los valores de x : …-3, -2,5, -2; -1,5; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3…

B. La gráfica de la función:



C. La tabla de variación de la función:

x	$-\infty$		-2		$-2/\sqrt{3}$		0		$2/\sqrt{3}$		+2		$+\infty$
f(x)			0				0				0		
Crecimiento			↗				↘				↗		
Concavidad			∩								∪		

D. La fórmula de la función: $f(x) = x^3 - 4x$

En los cuatro casos, se les pide a los alumnos calcular los máximos y mínimos, los intervalos en los que la función es positiva o negativa y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ordene las cuatro maneras de dar la función, según el orden decreciente de riesgo de diferencias entre las interpretaciones del profesor y del alumno (primero, la manera para la que más riesgo de diferencias de interpretación hay, etc.)

La aplicación del test W de KENDALL a las respuestas deja claro que el ordenamiento dado por los profesores no se debe al azar y que existe una concepción homogénea sobre el orden dado a las cuatro presentaciones. El orden cociente es: 1ª Fórmula (D), 2ª Tabla de valores (A), 3ª Tabla de variación (C), 4ª Gráfica (B).

Tal como proponíamos en la hipótesis H2, cuanto más marcado es el carácter icónico de una presentación, menor riesgo de diferencias entre las interpretaciones de profesor y alumno, según el pnto de vista de los profesores. No podemos decir que la hipótesis 2 se vea absolutamente validada, pero cuando menos, se ve apoyada por este resultado, que era el esperado por nosotros.

INFLUENCIA DE LA PRESENTACIÓN OSTENSIVA

En la misma línea de la cuestión anterior, quisimos averiguar la posición de los profesores respecto al interés didáctico de diferentes presentaciones de una misma noción: el límite finito de una función en un punto.

Ordene las cuatro maneras siguientes de describir el límite finito de una función en un punto, según su interés didáctico o su facilidad de explicación y de comprensión (1ª para la más interesante, etc.)

A. Se trata de una definición breve y rigurosa, sin ningún gráfico, tomada del *Calculus* de SPIVAK.

B. Es una definición que utiliza el gráfico, aunque de manera menos explícita y exhaustiva que la alternativa D, tomada de *Matemáticas. Bachillerato 2,* de DE GUZMÁN M. y otros.

C. Esta presentación no va acompañada de gráfica y no define la noción de límite; el alumno puede solamente leer que “el concepto de ‘límite’ de una función cuando x tiende hacia a” está relacionado con la pregunta “¿cuál es el valor hacia el que tienden los valores f(x) cuando la variable independiente se aproxima a “a”?. Se utiliza una tabla de valores numéricos y el manual en el que figura está dirigido a los alumnos de Matemáticas II de COU

(18 años). El manual debe seguir las disposiciones oficiales que exigen una presentación "intuitiva" del límite. (*Matemáticas. COU. Opciones C y D,* SANTOS D.)

D. Esta presentación utiliza el gráfico con una correspondencia exhaustiva de los elementos de la definición (ε, δ…). Está tomada de un manual de tipo Calculus, utilizado en primeros cursos de universidad. (*Cálculo y Geometría analítica,* LARSON R. E.).

RESPUESTA ESPERADA

De acuerdo con nuestra suposición de que los profesores piensan que el gráfico facilita la obtención de conocimientos matemáticos. Así pues, los profesores deberían atribuir el máximo de interés didáctico a la presentación D, que emplea exhaustivamente el gráfico, seguido de la presentación D. Las otras dos presentaciones podrían atraer la decisión de los profesores según distintos criterios y no teníamos una idea precisa de su orden de preferencia.

RESULTADO

El test W prueba que el ordenamiento dado por los profesores no se debe al azar. Existe una concepción homogénea sobre el orden según el interés didáctico, pero no es el previsto, sino el siguiente: 1ª Presentación "intuitiva" mediante una tabla de valores, sin definición (C), 2ª: Gráfico exhaustivo con texto explicativo (D), 3ª Gráfico simple (B) y 4ª: Definición sin límite ni gráfico (A).

El resultado obtenido podría explicarse porque a los profesores les parece más didáctico primero la cantidad de información y segundo, los gráficos contenidos en el texto. Es decir, cuantos más valores, más explicaciones y más informaciones diversas hay, más didáctico les parece el texto.

Hay que resaltar que en la presentación "C" no se dice qué es el límite de la función. Sólo hay cálculos hechos sobre un ejemplo concreto, en el que la función no existe para $x = a$. Se cumple una de las características de la presentación ostensiva, que hemos expuesto: el objeto presentado es un elemento de una clase en lugar de ser la propia clase.

Este resultado contraria la hipótesis H1: "Profesores y alumnos piensan que se pueden adquirir conocimientos suficientes a través de la imagen, sin la presencia del saber.". No es la imagen lo que provoca este resultado, sino el carácter *ostensivo* de una explicación que, al menos en este caso, es más decisiva que el carácter gráfico o icónico de la presentación.

OTROS RESULTADOS

En la matriz "observaciones x variables" a la que que ya hemos hecho referencia, recoge como variables "elegir el máximo interés didáctico del gráfico exhaustiva (opción D) para explicar la noción de límite" y, entre las respuestas a una pregunta abierta, "necesidad del gráfico para la enseñanza de funciones" y la expresión de la superioridad del lenguaje gráfico, a través de frases como "una imagen vale más que mil palabras", "sin gráficos nos alejamos de la realidad", etc. El análisis implicativo pone de manifiesto que la primera variable implica la segunda y la tercera. Este resultado apoyaría la hipótesis H2 ("Los profesores utilizan los gráficos con la impresión de que van a borrar las diferencias entre profesor y alumno, puesto que una de las virtudes de la imagen es que puede ser leída, interpretada directamente por cualquiera”). Pero hay que tener en cuenta que la mayor parte de los profesores no ostentan la primera variable. Ello nos hace pensar que hay en la muestra profesores más bien “grafistas” y profesores más bien “ostensivos”.

8. LA OPINIÓN DE LOS ALUMNOS: ALGUNOS RESULTADOS

Sin entrar en el detalle de las experiencias realizadas, vamos a tomar en cuenta algunos resultados puntuales obtenidos en las respuestas de alumnos de diferentes niveles de secundaria (8º de EGB, BUP, alumnos de Matemáticas I y de Matemáticas II de COU).

UTILIZACIÓN DEL GRÁFICO Y PROPORCIONALIDAD

Propusimos a una muestra de 89 alumnos de 7º de EGB (13 años) un cuestionario sobre proporcionalidad, en el que se planteaba básicamente el mismo problema matemático (dados cuatro pares de valores, determinar si las magnitudes respectivas eran o no proporcionales) con cuatro presentaciones distintas: texto, tabla de números, información sobre un gráfico. Los mismo alumnos respondieron una encuesta sobre sus preferencias en relación a las modalidades de presentación.

A través de un análisis en componentes principales, se puso de manifiesto que *los alumnos que declaran que el gráfico facilita la comprensión de los problemas no muestran una tendencia a utilizarlo como herramienta efectiva o como medio de control de la proporcionalidad.*

El análisis implicativo muestra que *la preferencia por las presentaciones en forma de tabla o de texto implica el éxito en los problemas así planteados, pero la preferencia por el gráfico no implica el éxito en los problemas planteados gráficamente ni el empleo efectivo del gráfico para resolver los problemas.*

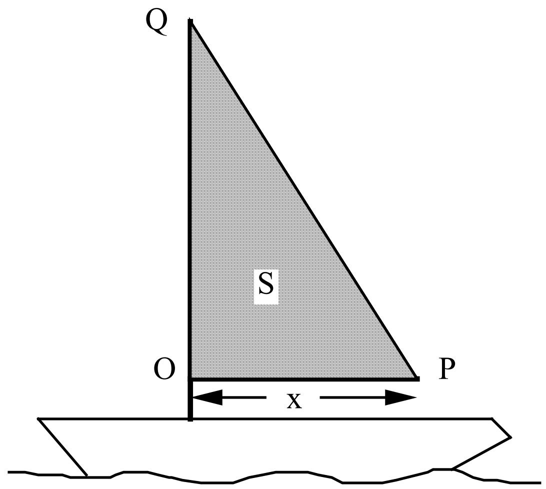
Estos resultados vienen a apoyar la hipótesis H4 *(“La ideología de lo icónico lleva a los estudiantes a tomar decisiones incorrectas en la resolución de problemas”)*

ICONO, GRÁFICO Y FUNCIÓN

Propusimos otro cuestionario en el que en términos generales se planteaba la previsión y comunicación de resultados mediante el gráfico a una muestra compuesta de 33 alumnos de 2º de BUP (16 años) y 19 alumnos de Matemáticas II de COU (18 años). Pudimos constatar que *los alumnos de Matemáticas II elegían erróneamente las cuestiones que exigían interpretar diagramas espacio-tiempo como las más fáciles.* Decimos erróneamente, porque los resultados de estos alumnos eran deficientes en este tipo de cuestión.

He aquí una de las cuestiones planteadas en este último cuestionario:

Se quiere construir la vela de un barquito, en el que la longitud del mástil es OQ = 4 m. El área de la vela, que es el área S del triángulo POQ varía según la distancia OP de la base del mástil al extremo de la botavara (el palo horizontal).



Haz un gráfico que represente la variación del área S de la vela, según x. Representa en los ejes cartesianos la longitud de la botavara (*en metros) sobre el eje OX y el área S de la vela (en metros cuadrados), sobre el eje OY.*

Los alumnos de Matemáticas II declaran mayoritariamente que “los gráficos son fáciles de interpretar” y, al mismo tiempo, algunos de ellos sitúan el icono del problema directamente en el plano cartesiano, en lugar de abstraer la fórmula de la función pedida y representarla.

Este resultado incita a que nos cuestionemos la orientación de esta asignatura, supuestamente adecuada al desarrollo ulterior de los futuros sociólogos, economistas, etc.

9. CONSIDERACIONES PARA UN DEBATE

Los gráficos cartesianos han jugado un papel fundamental en el estudio escolar de las funciones y continuarán haciéndolo. Gozarán todavía durante mucho tiempo de un prejuicio favorable, como marco y como soporte intuitivo, porque acompañan las representaciones más operativas de los matemáticos. Han de continuar siendo irremplazables, aunque su utilización ha de cambiar sin duda, como la de todas las nociones que la tecnología informática puede usar o simular.

Sin embargo, sobre todo en los niveles de bachiller, es posible que la buena opinion que los profesores tienen de los gráficos sea la causa de algunos fracasos, por la confianza que provoca en procedimientos dudosos.

¿Qué razones objetivas podríamos avanzar para matizar la importancia de los gráficos en la enseñanza? A lo largo de nuestro análisis hemos visto cómo:

- Los profesores prefieren las condiciones (gráficas o no) que mejor permiten lo que se podría llamar un "contrato didáctico de ostensión". De esta manera, el sitio atribuído por los profesores al gráfico está basado en una falsa transparencia del mismo, aunque su importancia y necesidad son innegables.

- Los estudiantes de COU que cursan Matemáticas II, en cuyo programa se prima el tratamiento gráfico, aprecian especialmente el gráfico como instrumento de conocimiento intuitivo y de aprendizaje; para ellos, la representación gráfica de las funciones sería una alternativa al conocimiento propiamente matemático. Pero al mismo tiempo, estos mismos alumnos eligen erróneamente las preguntas que contienen gráficos como las más fáciles. Ello nos previene de un posible efecto negativo de la profusión de ejercicios basados en la interpretación y construcción de gráficos, que consistiría en que los alumnos pudieran llegar a pensar que lo importante, en vez de resolver los problemas, es la utilización abundante del lenguaje gráfico, pasando éste de ser un instrumento a ser el objetivo del aprendizaje. Este efecto ha sido denominado en la obra de BROUSSEAU como "deslizamiento metadidáctico".

REFERENCIAS

ADDA J. (1987): *Elementos de didáctica de las matemáticas,* Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN (CINVESTAV). México.

ARTIGUE, M.: La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En GÓMEZ, P. (ed) *Ingeniería didáctica en educación matemática,*. Bogotá, 1995.

AZCARATE C. y DEULOFEU J. (1990), *Funciones y gráficas.* Síntesis. Madrid.

BERTIN J. (1973), *Sémiologie graphique. Les diagrammes - les résaux, les cartes,* Mouton, Paris.

BLOOM B. S. y col. (1972), *Taxonomía de los objetivos de la educación. La clasificación de las metas educacionales,* "El Ateneo", Buenos Aires.

DUVAL R. (1993) 'Graphiques et équations, l'articulation de deux registres', "Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation" *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle. 1-3,* CERSE, Université de Caen. pp. 57-72.

GRAS R. (1996): *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données. Applications à la didactique.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

JANVIER C (1982), Les représentations graphiques, *Primeras jornadas sobre Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas,* Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona (pp 7-20).

JANVIER C. (1983): 'Répresentation et compréhension. Un exemple : le concept de fonction' *Bulletin AMQ (association mathématique du Québec),* Octobre 1983 (pp. 22-28).

JANVIER C. (1993) Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques, "Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation" *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle. 1-3,* CERSE, Université de Caen (pp. 17-37).

LACASTA ZABALZA E. (1995): *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles,* LADIST, Université Bordeaux I.

LACASTA E. y PASCUAL J. R. (1998): *LAS FUNCIONES EN LOS GRÁFICOS CARTESIANOS,* Educación matemática en secundaria. Editorial Síntesis. Madrid.

MORENO, A., ECHEITA, G., MARTIN, E., BARRIO, C. del: "'Un redondel con muchas cosas dentro', eso es un conjunto". *Revista Infancia y aprendizaje,* nº 30, pp. 69-79. 1981.

NCTM. (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática,* S.A.E.M. Thales, Sevilla.

RATSIMBA-RAJOHN H. (1977): *Étude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques,* Mémoire de DEA, IREM de Bordeaux.

SHELL CENTRE (1990): *El lenguaje de funciones y gráficas.* Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de publicaciones. Servicio Editorial Universidad del País Vasco, Bilbao.

ALGUNOS APUNTES SOBRE EL USO DE GRÁFICAS CARTESIANAS

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid

RESUMEN

Lo que sigue tiene dos partes bien diferenciadas: una primera que presenta unas notas elaboradas *in situ* sobre la exposición de E. Lacasta y otra más elaborada, que más que una réplica pretende dar una visión algo diferente sobre el uso de las gráficas cartesianas. La reflexión personal y el concurso de las nuevas tecnologías marcan el enfoque que aquí se describe.

0. ALGUNAS NOTAS

Parece lógico pensar que una adecuada utilización de los gráficos produce un impacto en la actitud de los alumnos por la matemática, apreciando su lenguaje gráfico sobre todo en propuestas innovadoras que ya son las referenciadas en los trabajos del Shell Center, aunque éstas fueron pioneras y su valor es incuestionable. Estos gráficos cartesianos ya han pasado a la literatura y, en cierto modo, han dejado su interés a representaciones de evolución con impacto social, por ejemplo: puntuaciones de baloncesto, control del balón en futbol, velocidades en carreras ciclistas, etcétera. Es evidente que los gráficos cartesianos permiten ver las características globales de las funciones y también, ¿por qué no las locales?, pero en ambos casos, sobre todo en el segundo, es necesaria una instrucción específica.

FIGURA 0

Asumiendo la idea de que la variedad de representaciones de un concepto supone mayor profundización en su significado, cuando se conocen varias representaciones cartesianas de un saber, éste será más profundo. Así por ejemplo las gráficas cartesianas sobre el concepto de límite que muestra la figura 0 complementan la que usan habitualmente los manuales para ilustrar el concepto de límite. La primera de ellas, atendiendo al proceso, da respuesta a cómo debe ser la función y la segunda tiene en cuenta el cálculo como aproximación.

En otro orden de cosas y, teniendo presente investigaciones realizadas en la Universidad de Valladolid, parece que las cuestiones sobre gráficos como iconos no son las más difíciles para los alumnos, aunque una clasificación sin establecer previamente índices de dificultad puede resultar engañosa. La representación cartesiana puede y debe ser un medio de reflexión para los alumno, marcando el punto de partida de un proceso y no la culminación del mismo. Así lo entienden los coordinadores de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de la Universidad de Valladolid, que en Pruebas de Acceso a la Universidad permiten el uso de calculadoras gráficas.

1. ORIGEN, FUNCIONES Y CURRÍCULO

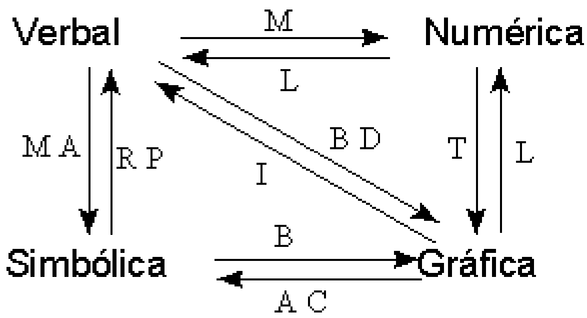
Considerando que las funciones pueden ser representadas verbalmente, es claro que el principio de Arquímedes (278-212 a.C.), *"El empuje es el peso del volumen que desaloja"*, determina una función, cuya forma algebraica es E=P(v).

Por otra parte, Apolonio de Perga (S. III - S. II a C.) ya había considerado sistemas de coordenadas, pero Nicolas de Oresme (1325-1382) representó ¿por primera vez? una cantidad variable en un sistema cartesiano y sugirió funciones trascendentes.

Utilizando términos propios de la matemática, una representación gráfica es una función de un conjunto de significantes en un conjunto de significados.

Además de construir una especie de memoria artificial que permite registrar en particular diferentes características de una función, las representaciones cartesianas también puede ser instrumentos para la investigación y para la búsqueda de soluciones a ciertos problemas, así como representaciones de conceptos y constituir verdaderas demostraciones. La didáctica de los gráficos y la orientación educativa pueden otorgar otras funciones.

Mi experiencia como coordinador de las PAU de Valladolid me indica que una creencia arraigada entre buena parte del Profesorado de Secundaria es que las funciones no se puede expresar sólo en modo gráfico y, por tanto, "necesitan su fórmula" y, sin duda, los problemas proceden de la traducción del simbolismo algebraico al simbolismo gráfico, más que del carácter *polisémico* de la escritura simbólica.



En los currículos actuales de los países europeos y en el propio currículo español se insiste en la importancia de las traducciones entre los cuatro modos de representación.

El alumno es capaz de traducir a condiciones y conceptos algebraicos los "rasgos gráficos globales", actividad contemplada en el currículo español, que en el BOE 152 de 26/6/91 en el Real Decreto 16442 de Enseñanzas Mínimas de ESO, en los criterios de evaluación del bloque 4, en el punto 4, señala:

"Este criterio supone el manejo de representaciones gráficas, tanto para obtener información a partir de ellas como para expresar relaciones de distinto tipo. La información obtenida a través de las gráficas ha de ser tanto global (aspectos generales de la gráfica, crecimiento etc.), como local (obtención de pares de valores relacionados, etc.).

2. LA INSTRUCCIÓN

E. Lacasta (1998) cita como R. Duval distingue los registros de representación de un mismo objeto matemático y su tratamiento cognitivo diferente.

E. Castro y E. Castro (1997), al hablar de pensamiento visual, dicen que es posible educar a los niños y adolescentes para que su capacidad visualizadora se desarrolle y citan como Zimmermann (1991) considera que se puede adquirir habilidad visualizadora. Asimismo y en la misma obra, estos autores señalan como una de las conclusiones de las investigaciones de Kaput, Goldin, Duval, Glaesenfelg y Vergnaud es que "el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos". Así pues, parece lógico pensar que las concepciones gráficas tienen bastante que ver con la visualización y, según Castro E. y Castro E. (1997, pág 104) no parece que los estudiantes puedan inventar o interpretar por sí mismos las representaciones convencionales, sino que han de ser instruidos y educados en su uso y comprensión. Así, el uso que se hace para resolver un problema de intersección de gráficas de funciones es, en general, distinto del que se hace para resolver un problema de extrapolación y, como manifiesta la experiencia que se muestra a continuación, la instrucción juega un papel fundamental. A 18 profesores de Educación Secundaria, que no habían sido instruidos, se les preguntó si ellos creían que las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica, recíprocas una de otra, de base *a>1* se cortan. La respuesta fue unánime: NO.

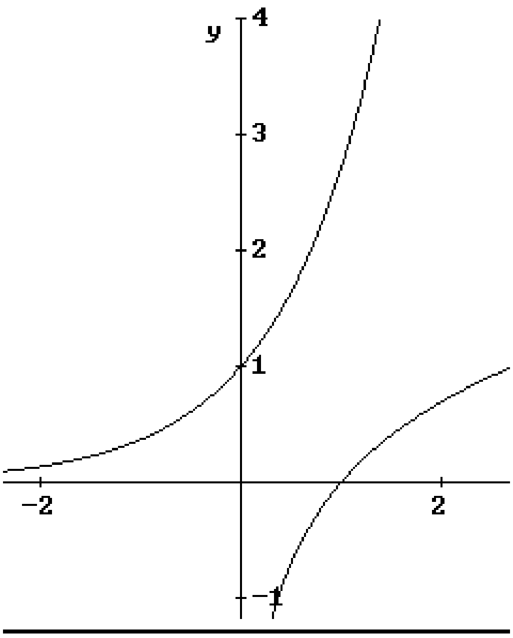


FIGURA 2

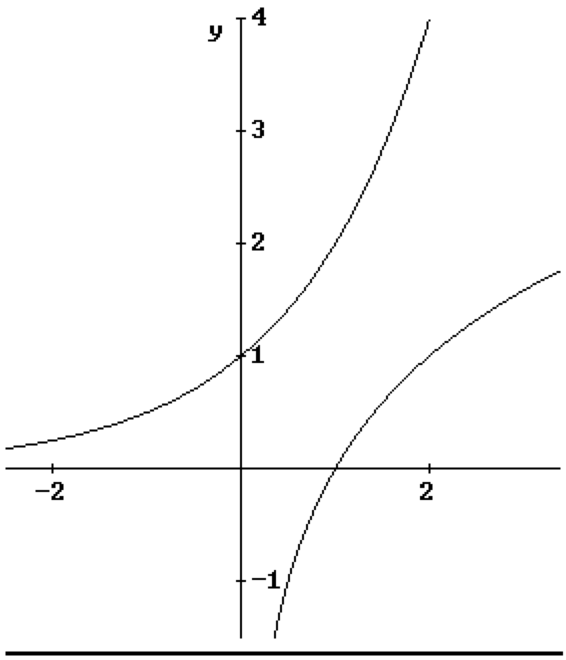


FIGURA 3

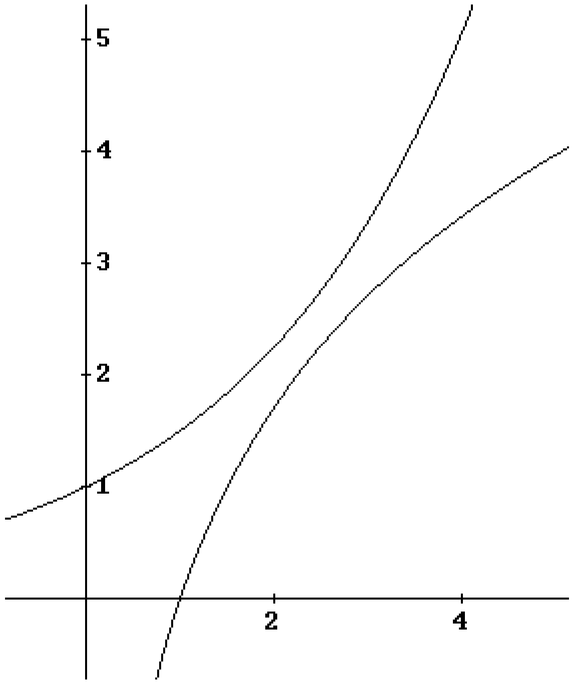


FIGURA 4

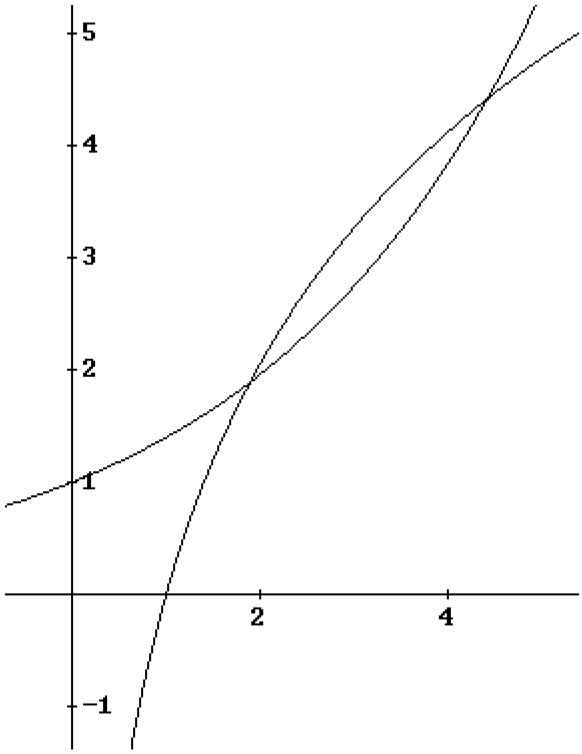


FIGURA 5

Tras mostrar las figuras 2, 3, 4 y 5 la respuesta y su convencimiento fueron unánimes: SI.

El uso que se hace de los gráficos para resolver un problema de intersección de gráficas de funciones no es ni parecido al uso de los mismos para resolver un problema de extrapolación.

Así pues, parece que con una instrucción adecuada los gráficos proporciona *per se* las condiciones necesarias para la adquisición de nuevos conocimientos.

En la investigación que venimos desarrollando en la Universidad de Valladolid desde hace unos años sobre la didáctica del concepto de límite, después de trabajar los diferentes lenguajes, hemos encontrado que el gráfico es la vía más eficaz de transmisión de saberes.

3. EL GRÁFICO COMO ÁBACO

Depende de la precisión del gráfico. Si éste es poco preciso -el procedimiento de construcción es manual- puede ser una fuente de errores, figura 6, mientras que si se dibuja con medios informáticos el resultado es muy diferente, figura 7.

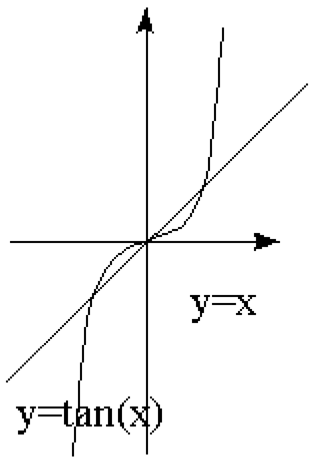


FIGURA 6

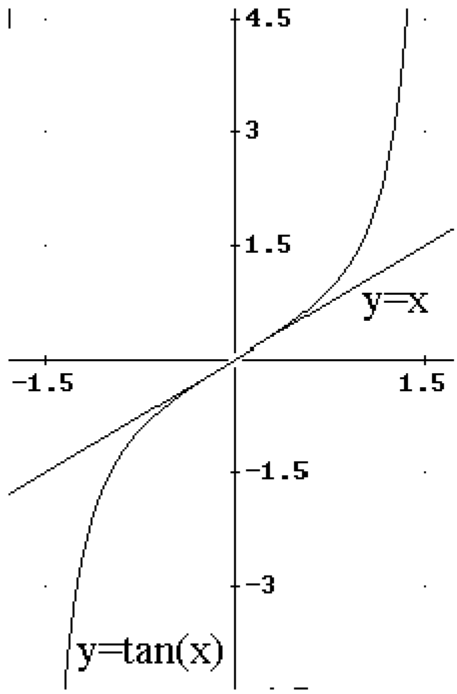


FIGURA 7

Una construcción manual puede ser más un esquema que una representación de una función y los alumnos suelen conceder más credibilidad a estos que a las deducciones Schoenfeld (1988).

La precisión que actualmente se consigue a través del uso de los recursos gráficos de la alta resolución es algo que se debe tener en consideración (Tall 1997). El gráfico de la figura 8 muestra con absoluta claridad, entre otras cosas, que las funciones y=tan(x), - p/2<x< p/2 e y=x sólo se cortan en el origen.

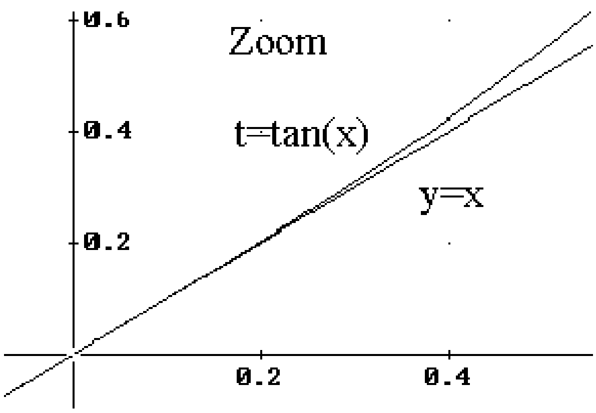


FIGURA 8

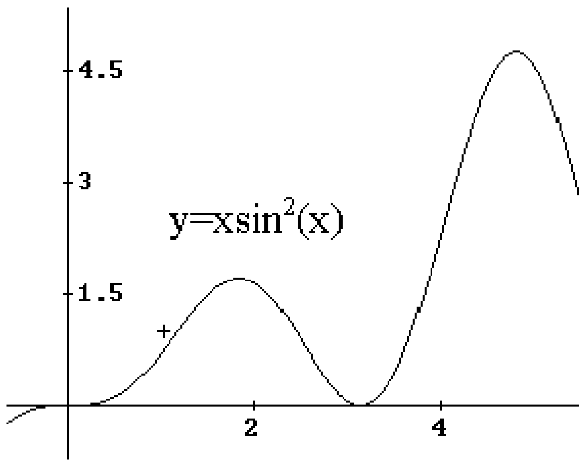


FIGURA 9

La lectura "directa" no siempre es fácil y tiene bastante que ver con la instrucción recibida. Por ejemplo, en una experiencia ante Profesores y Licenciados en Matemáticas, Valladolid (1992-1993), se les pidió que obtuvieran las abscisas de la función representada en la figura 9. Estos profesores nunca habían sido instruidos en medir y utilizar las escalas de los ejes coordenados y la respuesta dada por buen número de ellos fue sorprendente. Ellos creían que las abscisas eran p/2 y 3p/2 y no atribuyeron ningún efecto al factor *x*.

La orientación de los gráficos cartesianos es otra variante que con cierta frecuencia hace que los alumnos hagan interpretaciones erróneas. Un estudio de 4 casos con alumnos brillantes de 15, 17, 18 y 19 años sobre el gráfico de la diferencial, Valladolid (1997-1998). Disponiendo ellos del segmento diferencial en una curva convexa se les pidió que hicieran lo propio en una curva como la de la figura 10. Uno señalo AE, otro BF, un tercero CD y AE y el restante sólo CD. Los tres que cometieron su error lo justificaron porque, según ellos, *no puede estar la curva en el medio, y, por simetría, el segmento tiene que estar al otro lado*. En las entrevistas desvelaron que los tres achacaron su error al cambio de orientación de la curva y dijeron: “Ahora está hacia abajo y nos despista”.

4. GRÁFICOS INTERACTIVOS. EL ORDENADOR

Se puede concebir al gráfico como un objeto susceptible de ser transformado mediante traslaciones, $f(x)+c$ y $f(x-c)$, reflexiones, $-f(x)$, y estiramientos, $f(x)$, (Confrey, 1992), tomado de Tall (1997) y es evidente que el uso de software aclara los problemas de interpretación de estos significados que causan grandes dificultades a los alumnos (Dreyfus y Eisember, 1987, tomado de Tall 1997).

Se puede lograr una aproximación visual potente usando ordenador mediante el agrandamiento del grafo de una función. Este proceso usa la misma idea fundamental del análisis no estándar de que *el grafo de una función diferenciable en un agrandamiento infinito es una recta*. En versión computacional cuando el grafo se agranda se ve menos curvado, parece una recta y, entonces, el gradiente de la curva se representa por la pendiente de la línea de la pantalla.

Tales aproximaciones están sujetas a las limitaciones gráficas del ordenador, notando que sólo se puede ver una aproximación al concepto mental. Sin embargo, también conviene notar que la alta resolución gráfica ha supuesto un salto cualitativo importante en esta aproximación. Según Tall (1997), esta característica hace que el concepto de límite implícito en el *zoom* de software adecuado es un procedimiento mejor que el explícito de la definición formal.

El entorno juega un papel fundamental. El ordenador permite explorar el concepto de función y, por tanto, los rasgos globales y según Cuoco (1994), tomado de Tall (1997), los estudiantes que dibujan los gráficos de funciones usando papel y lápiz los ven como una forma geométrica mientras que los que utilizaron programas de LOGO (de forma continuada) alcanzaron significativas destrezas de interpretación.

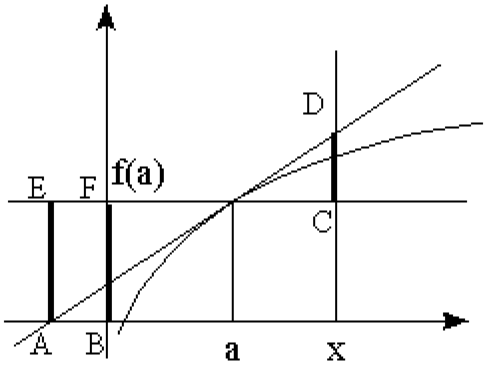


FIGURA 10

El proceso de almacenar información resulta más estático que otra cosa y no parece que sea el más natural. En el proceso de construcción de la matemática lo primero que se concibe es la idea, ésta se representa, después se estudia explorando y conjeturando, y, finalmente, resulta la formulación simbólica. Así, la idea de recta tangente está implícita en la propia curva, ya que el grafo de una función diferenciable es suave y en un agrandamiento infinito es una recta (figura 8). Se puede dar una versión computacional de esta idea usando el *zoom*, ya que cuando el grafo se agranda se ve menos curvado, parece una recta y, entonces, el gradiente de la curva se representa por la pendiente de la línea de la pantalla.

Según Tall (1997) el concepto de límite implícito en el *zoom* es un procedimiento mejor que el explícito de la definición formal. La gráfica 8, que recoge el *zoom* de la recta tangente a la gráfica de la función y=tan(x) en x=0, muestra el resultado de este proceso.

El uso adecuado de las gráficas es la clave de que estas aporten luz sobre muchos conceptos, que hasta hace poco tiempo era impensable. Según Tall (1993), Schneider (1993) informa, que al intentar calcular las sumas de Riemmann bajo la curva $y=x^3$, algunos alumnos creían que el área de los rectángulos no se podía sumar, ya que se reducen segmentos y su área es cero.

Sierpinska (1984; 1987) describe los obstáculos conceptuales implícitos en los procesos de límite, entre ellos, que el límite es inalcanzable.

Según D. Tall (1997) los alumnos pueden aprender a discutir estos conceptos mediante magnificaciones y lo ejemplifica con el Teorema Fundamental del Cálculo aplicando la idea de que todo grafo continuo "se hace plano" mediante estiramientos horizontales. David Tall representa en un rectángulo de tamaño fijo una zona de la grafo manteniendo constante la escala del eje de ordenadas y haciendo estiramientos en el eje de abscisas (h 0), con DERIVE es una simpleza, y los alumnos ven que las áreas no son nulas. La figura 12 muestra el estiramiento de una zona de la gráfica representada en la figura 11, la zona está incluida en el rectángulo.

{Área} over h = {A(x+h)-A(x)} over h f(x)

FIGURA 11

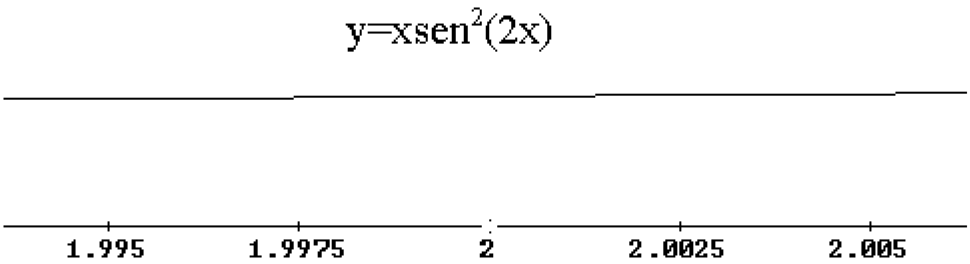


FIGURA 12

Estas representaciones no eliminan todos los problemas de comprensión y nuevamente surgen obstáculos cognitivos ligados al concepto de límite.

5. LOS GRÁFICOS COMO PRUEBAS

Teniendo en cuenta los fines de la demostración descritos por A. Bell (1972) -verificación, iluminación y sistematización- y el posterior desarrollo debido a M. de Villiers (1994), -verificación/convicción, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación- la pregunta de si ciertas representaciones gráficas se pueden considerar demostraciones sigue abierta. R. B. Nelsen (1993), tras exponer un resumen de 144 publicaciones de “pruebas sin palabras”, deja abierta esta pregunta. Él ha inspirado la siguiente “demostración”.

Enunciado: Dado un producto de dos números positivos, la suma de estos es mínima cuando ambos son iguales

Prueba: está implícita en la figura 13.

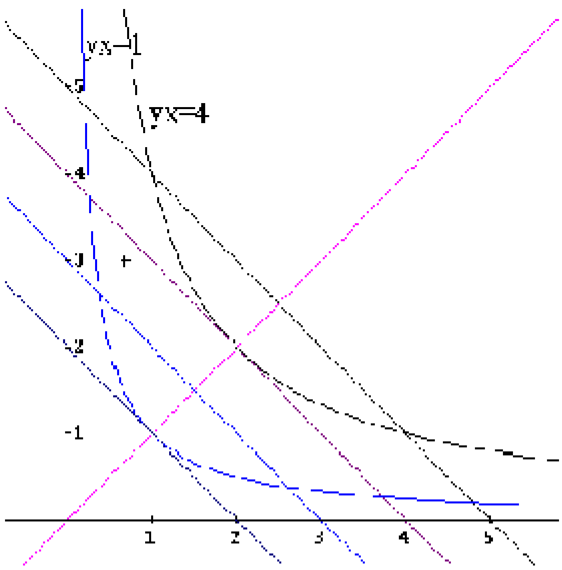


FIGURA 13

6. GRÁFICOS CONCEPTUALES

Lo mismo que las funciones pueden ser expresadas en un lenguaje gráfico, mediante su grafo cartesiano, los conceptos del análisis pueden expresarse en este lenguaje mediante el correspondiente gráfico cartesiano como un lenguaje de representación.

Es fácil imaginarse los gráficos cartesianos que expresen los conceptos de aproximación, límite, continuidad, derivabilidad, diferencial, tangente, asíntota, crecimiento, extremos, convexidad, t. de Bolzano, t. de Weierstrass, t. de Darboux, t. de singularidad, t. del valor medio, teorema fundamental del cálculo, ...

¿Es un lenguaje universal? ¿Que problemas surgirían al interpretar el lenguaje simbólico y viceversa? ¿Constituirían por sí solos una herramienta de transmisión de saberes? ¿Qué papel jugarían en la adquisición del conocimiento? ... Sólo son preguntas, pero quizás conviniera hacer alguna reflexión sobre ellas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1987): L'Évolution Récente de l'Enseignement des Mathematiques en France: Entre Principes et Réalité. *Actas de las VIII^{as} JAEM.* Salamanca

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990): *Funciones y Gráficas.* Síntesis, Madrid.

Azcárate, C., Casadevall, M. y Casellas, E. (1996): *Cálculo diferencial e integral.* Síntesis, Madrid.

Boyer, C. (1986) Historia de las Matemáticas.Alianza. Madrid

Castro E. Y Castro, E. (1997): Representaciones y modelización. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Horsori. Barcelona.

Cornu, B. (1983) : *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Grenoble: L´Université scientifique et Medical de Grenoble.

Duval, R. (1993): Graphics et équations, l'articulatios de deux registres, "Les representations graphics dans l'enseignement et la formation". *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle.* 1-3. Université de Caen, pp. 57-72. Caen.

Guzmán, M. (1996): *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Janvier, C. (1982): Les representations graphiques. *Actas de las Primeras Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Institut de Ciènces de l'Educació. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona.

Janvier, C. (1982): Les graphiques cartesians: des traductions aux chtoniques. "Les representations graphics dans l'enseignement et la formation". *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle.* 1-3. Université de Caen, pp. 17-37. Caen.

Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998): *Las Funciones en los Gráficos Cartesianos.* Síntesis. Madrid.

Lacasta, E. (1990): L'Interpétation des graphes des fontions par les élèves du secondaire. Mémoire de DEA. Universidad de Burdeos I. Burdeos.

N.C.T.M. (1991): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. S.A.E.M. Thales. Sevilla.

Rico, L. (1998): *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Sístesis. Madrid.

Shell Centre (1990): El Lenguaje de Funciones y Gráficas. M.E.C. -Centro de Publicaciones- y Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco. Bilbao.

Sierpinska, A (1985) Obstacles epistémologiques relatifs a la notión de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques.* Vol. 6, pp. 5-67.

Sierpinska, A. (1992): Theoretical perspectives for development of the function concept. In G. Harel & E. Dubinski (eds.) *The concept of functión: spects of Epistemology and Pedagogy,* MAA Notes 25, pp. 23-58. Whasington DC: MAA.

Tall, D. (1997): Funtions and Calculus. *International Handbook of Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London.

Villiers, M. de (1990): "The role and function of proof in mathematics". *Pythagoras, 24, 17-24.*

TERCER SEMINARIO

TEMA DE DEBATE:
LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA ASOCIACIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE ANÁLISIS DE DATOS: REFLEXIONES SOBRE EL PAPEL DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA
DESARROLLO DEL SEGUNDO SEMINARIO
INTERVENCIONES:
PONENCIA: LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA ASOCIACIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE ANÁLISIS DE DATOS: REFLEXIONES SOBRE EL PAPEL DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA.
PONENTE: DRS. CARMEN BATANERO Y JUAN DÍAZ GODINO, UNIVERSIDAD DE GRANADA, DR. ANTONIO ESTEPA, UNIVERSIDAD DE JAÉN.
PRIMERA RÉPLICA: LA ENSEÑANZA CON ORDENADOR Y ERRORES DE APRENDIZAJE. EL CASO DE LA ESTADÍSTICA.
PONENTE: DRA. CONCEPCIÓN F. ABRAIRA, UNIVERSIDAD DE LEÓN.
SEGUNDA RÉPLICA: RÉPLICA a: "LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA ASOCIACIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE ANÁLISIS DE DATOS: REFLEXIONES SOBRE EL PAPEL DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA"
PONENTE: DR. ANDRÉS NORTES, UNIVERSIDAD DE MURCIA

ANEXO

DESARROLLO DEL TERCER SEMINARIO

En este trabajo los ponentes describen los resultados de un proyecto de investigación dirigido al estudio de las concepciones iniciales que tienen los alumnos sobre la asociación estadística (AS) y su evolución después de diversos experimentos de enseñanza usando ordenadores. Estos resultados los utilizan como base para la reflexión sobre el papel del ordenador como recurso didáctico y como instrumento en la resolución de problemas.

La investigación se ha basado en el marco teórico sobre el significado y comprensión de los objetos matemáticos en sus dimensiones personal e institucional descrito por Batanero y Godino en diversas publicaciones. Su principal supuesto epistemológico es que los objetos matemáticos emergen de la actividad del sujeto en la resolución de problemas. Según este modelo, la comprensión de un concepto matemático implicará la apropiación de los diferentes elementos (extensionales, instrumentales e intensionales) que componen el significado institucional del concepto.

Analizan tanto las concepciones iniciales como el significado personal para los estudiantes del concepto de asociación estadística. A partir de ellas se describen concepciones erróneas sobre asociación estadística que denominan: concepción determinista, concepción unidimensional, concepción local y concepción causal.

A continuación, la investigación se orienta a valorar el impacto que una experiencia de aprendizaje usando ordenadores tiene en dichas concepciones iniciales. En los experimentos consideran entornos informáticos de aprendizaje.

Como reflexión final, a partir de los resultados de su experiencia responden a algunos de los “mitos” en relación con las nuevas tecnologías señalados por Hawkins: ¿Es suficiente introducir un ordenador en la clase de estadística, para realizar una innovación en nuestros métodos de enseñanza?. ¿Facilitan los ordenadores la comprensión de los conceptos estadísticos?. ¿Podremos guiarnos por los resultados de la investigación para progresar en el uso de los ordenadores en la enseñanza?

Abraira en su réplica “la enseñanza con ordenador y errores de aprendizaje: el caso de la Estadística, hace una descripción de los problemas que le surgieron al leer el texto desde sus propios conocimientos y experiencia.

Aborda los “mitos” a los que se refiere Hawkins y se refiere a su experiencia. A este respecto afirma que en este momento tiene un proyecto titulado: Análisis de la formación de maestros en propuesta curricular derivada. Espera que de ahí pueda salir alguna conclusión válida para responder a las preguntas.

Nortes inicia su intervención coincidiendo en las respuestas dadas por los ponentes a los “mitos” de Hawkins. Considera que el ordenador es una herramienta muy útil a la hora de efectuar los cálculos y las representaciones gráficas si se sabe qué hay que calcular y cuál es su significado.

Tras abordar otras cuestiones, introduce algunos puntos para el debate como por ejemplo, ¿Los resultados obtenidos en la muestra (estudio de la asociación), se pueden extender a la población (estudio de la estadística)? Y llegados a este punto ¿con qué nivel de significación?, ¿con qué margen de error?

Para terminar coincide con los ponentes en que "evaluar este tipo de experimentos es muy laborioso por la cantidad de datos generados (... y) es difícil transferir los resultados de la evaluación usando métodos tradicionales", por lo que aprovechando su presencia les solicita que completen algunos de los aspectos comentados.

Por último, debido a las dificultades que presentaba ampliar el tiempo de debate, se acordó con la coordinadora, María Victoria Sánchez, que se redactase una breve respuesta a algunas de las preguntas que se plantearon en la réplica, para su divulgación posterior. Debido a esto, y por petición expresa de la coordinadora, esta respuesta ha sido incluída como anexo a continuación de las réplicas.

LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA ASOCIACIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE ANÁLISIS DE DATOS: REFLEXIONES SOBRE EL PAPEL DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

Carmen Batanero, Juan D. Godino, Universidad de Granada
Antonio Estepa, Universidad de Jaén

Durante los cursos 1992 a 1998 hemos trabajado en un proyecto de investigación dirigido al estudio de las concepciones iniciales que tienen los alumnos sobre la asociación estadística y su evolución después de diversos experimentos de enseñanza usando ordenadores. En este trabajo, describimos brevemente los resultados de este proyecto, y los utilizamos como base para la reflexión sobre el papel del ordenador como recurso didáctico y como instrumento en la resolución de problemas, extendiendo las conclusiones presentadas en Batanero y cols. (1998)

MARCO TEÓRICO

Nuestras investigaciones se han basado en el marco teórico sobre el significado y comprensión de los objetos matemáticos, en sus dimensiones personal e institucional, que se describe en Godino (1996) y Godino y Batanero (1994, 1998). El principal supuesto epistemológico subyacente es que los objetos matemáticos emergen de la actividad del sujeto en la resolución de problemas, mediatizados por los instrumentos semióticos disponibles que dependen de los institucionales en que tiene lugar dicha actividad. El significado de los objetos matemáticos se concibe como el sistema de prácticas vinculado a campos específicos de problemas, considerándose en este sistema tres tipos de elementos diferentes:

(1) Elementos *extensionales* del significado: Los diferentes problemas y situaciones prototípicas donde se usa el objeto, es decir, el campo de problema del que el objeto matemático emerge.

(2) Elementos *instrumentales/relacionales* del significado: Las diferentes herramientas semióticas disponibles para estudiar, resolver y/o representar los problemas y objetos matemáticos involucrados.

(3) Elementos *intensionales* del significado: Las diferentes propiedades características y relaciones de los objetos matemáticos con otras entidades: las definiciones, proposiciones, descripciones procedimentales, etc.

Según este modelo, la comprensión de un concepto matemático implicará la apropiación de los diferentes elementos que componen el significado institucional del concepto y, en consecuencia, tiene una naturaleza sistémica.

Al iniciar la búsqueda de bibliografía previa no encontramos trabajos dentro del ámbito de la Educación Matemática, por lo que nos basamos principalmente en las investigaciones sobre asociación en psicología, que comienzan con el trabajo pionero de Inhelder & Piaget (1955).

También se han tenido en cuenta las investigaciones de Crocker, 1981; Beyth - Maron, 1982, Chapman y Chapman (1969) y Jennigs, Amabile y Ross (1982).

UN ESTUDIO DE CONCEPCIONES INICIALES SOBRE LA ASOCIACIÓN

SIGNIFICADO EXTENSIONAL DE LA ASOCIACIÓN

Un caso particular del campo de problemas del que emerge la asociación estadística es realizar un juicio de asociación en una tabla de contingencia 2x2, como la que se muestra en el ítem 1. Para resolver este problema es preciso realizar operaciones y establecer relaciones con las diferentes frecuencias que aparecen o pueden calcularse en la tabla.

Ítem 1: En un centro médico se han observado a 250 personas para observar si el hábito de fumar tiene alguna relación con los trastornos bronquiales, obteniendo los siguientes resultados:

	Fuma	No fuma	Total
Padece trastornos bronquiales	90	60	150
No padece trastornos bronquiales	60	40	100
Total	150	100	250

Usando la información contenida en la tabla se podría pensar que , para esta muestra, ¿los trastornos bronquiales dependen de fumar? Razone la respuesta

Otro problema diferente es valorar la correlación existente entre dos variables cuantitativas (ítem 3), para lo cual podemos calcular la covarianza, el coeficiente de correlación o analizar la bondad del ajuste de una recta de regresión al diagrama de dispersión. Un tercer tipo de problema consiste en tratar de averiguar si una variable numérica tiene la misma distribución en dos muestras diferentes (ítem 2), que se puede resolver comparando la diferencia entre las medias o medianas, o bien, la representación gráfica o tabular de ambas distribuciones. Estos problemas y actividades son imprescindibles para construir progresivamente el concepto de asociación estadística y forman parte del significado matemático institucional del concepto dentro de un curso universitario introductorio al análisis de datos. Con más precisión, los tres tipos de problemas describen los elementos prototípicos extensionales del significado de la asociación en dicha institución.

Ítem 2: Al medir la presión sanguínea antes y después de haber efectuado un tratamiento médico a un grupo de 10 personas se obtuvieron los siguientes valores:

	presión sanguínea en cada mujer									
Mujer	Sra.A	Sra.B	Sra.C	Sra.D	Sra.E	Sra.F	Sra.G	Sra.H	Sra.I	Sra.J
Antes del tratamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del tratamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Usando la información contenida en esta tabla, ¿Piensa que la presión sanguínea en esta muestra depende del momento de que se tome antes o después del tratamiento? Razone la respuesta.

Ítem 3: En un estudio sociológico, se han recogido datos relativos a la tasa de natalidad y el consumo diario de proteínas animales en diferentes paises representándolos en el gráfico de la figura 1 ¿Cree que la relación entre el consumo diario de proteínas animales y la tasa de natalidad en los diferentes paises es directa, inversa o no existe relación entre estas variables? Razone su respuesta.

SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA ASOCIACIÓN

Nuestro proyecto de investigación comenzó con el estudio del significado personal que los estudiantes daban al concepto de asociación antes de haber estudiado el tema. Después de algunas revisiones con muestras piloto, pusimos a punto un cuestionario con ítems semejantes a los presentados anteriormente, que propusimos a 213 alumnos de COU, antes de recibir enseñanza sobre la asociación. Se controlaron las siguientes variables de la tarea: Signo e intensidad de la asociación, relación entre las creencias previas de los alumnos sobre el contexto del problema y el tipo de asociación presentada.

En cada ítem analizamos el tipo de asociación percibido por los estudiantes (asociación directa, inversa o independencia). Además clasificamos las estrategias de resolución estudiada por los alumnos desde un punto de vista matemático. Esto nos permitió identificar estrategias intuitivas correctas que sugieren concepciones correctas o parcialmente correctas sobre la asociación estadística (Estepa et al., 1994; Batanero et al., 1996; Estepa, & Batanero, 1996; Estepa, &Sánchez Cobo, 1996). Algunos ejemplos se exponen a continuación:

(1) Utilizar la tendencia constante, creciente o decreciente de los puntos en los diagramas de dispersión para justificar el tipo de asociación (nula, positiva o negativa): *"Porque cuando el consumo diario de proteínas aumenta la tasa de natalidad disminuye"* (Ítem 3) Como en caso de independencia, no habrá variación conjunta, estos estudiantes muestran una concepción correcta de asociación.

(2) Utilizar las medias o los totales para comparar la distribución de una variable en dos muestras diferentes *"Porque la suma de todos los valores de la presión de la sangre antes del tratamiento es menor que la suma de valores de la presión de la sangre después del tratamiento"* (ítem 2). Aquí los estudiantes usan implícitamente la idea correcta de que una diferencia en los totales implica asociación entre las variables.

(3) Comparar la frecuencia de casos a favor y en contra de la asociación en cada valor de la variable independiente o la razón de estas frecuencias en tablas de contingencia 2xr: *"No depende, porque 3/2 de los fumadores tienen trastornos bronquiales, y hay la misma proporción en los no fumadores"* (ítem 1). Esto indica una concepción correcta, ya que la razón de posibilidades se puede utilizar para evaluar la asociación en una tabla de contingencia 2xr.

Otras estrategias de los estudiantes para resolver estos problemas eran inadecuadas, y les proporcionaban juicios incorrectos de asociación. A partir de ellas hemos descrito las siguientes concepciones erróneas sobre la asociación estadística:

(1) Concepción <u>determinista</u> de la asociación: Algunos estudiantes no admiten más de un valor de la variable independiente para cada valor de la variable dependiente. Cuando esto no ocurre, consideran que no hay dependencia entre las variables. En otras palabras, la relación entre las variables debe ser una función desde el punto de vista matemático. Por ejemplo: *"El tratamiento no tiene mucha influencia, ya que a algunas mujeres les aumenta la presión sanguínea, mientras que a otras les disminuye"* (Ítem 3).

(2) Concepción <u>unidireccional</u> de la asociación: Si se percibe la independencia solamente cuando es positiva (asociación directa), considerando la asociación inversa como independencia. El siguiente ejemplo ilustra un caso de asociación inversa interpretada como independencia y dificultades en el razonamiento proporcional. *"Personalmente creo que no hay dependencia porque si tú miras la tabla hay mayor proporción de personas con trastornos bronquiales entre los fumadores"* (ítem 1). Este tipo de concepción fue también encontrado posteriormente por Morris (1997).

(3) Concepción local de la asociación: Utilizar solamente parte de los datos proporcionados por el problema para emitir el juicio de asociación. Si la parte de datos utilizados confirma un tipo de asociación, adoptan este tipo de asociación en sus respuestas. *"Existe dependencia entre fumar y padecer trastornos bronquiales porque si observamos la tabla hay más fumadores con trastornos bronquiales que no fumadores 90>60"* (ítem 1).

(4) Concepción causal de la asociación: Algunos estudiantes solamente consideran la existencia de asociación entre variables si se puede atribuir una relación causal entre ellas. Este tipo de concepción particularmente se encontró en un problema en el que se pedía que dos jueces puntuaran a un conjunto de individuos: *"Porque un juez no puede influir en el otro. Cada uno tiene sus preferencias no puede haber mucha relación entre las puntuaciones otorgadas por cada uno".*

INFLUENCIA DE LOS ENTORNOS INFORMÁTICOS EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA ASOCIACIÓN

Después de llevar a cabo el estudio sobre concepciones iniciales de los estudiantes sobre la asociación, nuestra investigación se orientó a valorar el impacto que una experiencia de aprendizaje usando ordenadores tiene en dichas concepciones iniciales. El uso de ordenadores en la enseñanza de la Estadística está recibiendo atención creciente tanto por parte de los profesores como de los investigadores como se puede constatar en Shaughnessy et al., (1996) y en la IASE Round Table Conference sobre el impacto de las nuevas tecnologías en la enseñanza-aprendizaje de la Estadística.

Es un hecho evidente la influencia que los ordenadores han tenido en el desarrollo de la Estadística como disciplina y en facilitar el acceso a la estadística a un número y diversidad cada vez mayor de usuarios, aumentando las demandas de formación básica en estadística. Los ordenadores han aumentado, por un lado, el número de contenidos estadísticos a enseñar, incluyendo el uso adecuado del software, sin el cual es hoy día impensable la realización del análisis de datos en cualquier campo de aplicación. También ha habido un cambio en los contenidos , prestándose mayor importancia a los aspectos interpretativos y conceptuales y menor a los procedimentales y algoritmos de cálculo.

La tecnología ofrece, además poderosos recursos didácticos tales como la simulación, y las representaciones gráficas, que unidos a la velocidad de cálculo y posibilidades de manipulación y exploración por parte de los estudiantes les puede ayudar a ampliar el significado de los conceptos estadísticos. El objetivo de nuestra investigación era valorar este impacto en el caso específico de la asociación estadística.

PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA

Biehler clasifica el software estadístico según sus funciones educativas. Los *micromundos* posibilitan la realización de experimentos interactivos, mediante simulaciones y visualizaciones exploratorias, que ayudan a los estudiantes a conceptualizar la estadística. Las *herramientas* permiten a los estudiantes practicar la estadística del mismo modo que lo hacen los estadísticos profesionales. En el caso particular del análisis exploratorio de datos, estas herramientas deberían facultar a los estudiantes para hacer un trabajo interactivo, exploratorio y abierto, utilizando software flexible, fácil de usar y aprender.

En nuestros dos experimentos hemos considerado *entornos informáticos de aprendizaje*, es decir, entornos instruccionales integrados que permiten al profesor y a los estudiantes trabajar con herramientas, micromundos y conjuntos de datos relativos a ciertos problemas de aplicación, así como con una selección de conceptos y procedimientos estadísticos.

El contenido de los dos cursos incluyó los conceptos básicos sobre poblaciones y muestras, organización de datos, tipos de variables estadísticas y distribuciones de frecuencias, gráficas, parámetros y estadísticos, posición central, dispersión, estadísticos de orden, asimetría, curtosis, variables estadísticas bidimensionales: tablas de contingencia, covarianza, correlación y regresión lineal. En el segundo experimento se introdujeron también los conceptos de muestreo, distribución en el muestreo, intervalos de confianza, test de hipótesis de las medias para una y dos muestras y test Chi-cuadrado.

La planificación de la enseñanza incluyó la delimitación de los objetivos de aprendizaje, organización de una secuencia instruccional de contenidos, y la selección de conjuntos de datos apropiados para contextualizar el conocimiento estadístico. Adoptamos una "perspectiva multivariante", aunque únicamente se enseñaran, a nivel formal, técnicas univariadas o bivariadas. Por lo tanto, los estudiantes exploraron ficheros de datos utilizando un paquete de software interactivo de ordenador. Se llevaron a cabo 21 sesiones en el primer experimento y 40 en el segundo. En siete de las sesiones del primer experimento y en 20 del segundo los estudiantes trabajaron en el laboratorio de estadística, resolviendo problemas, cuyas soluciones requerían el análisis de diferentes conjuntos de datos proporcionados por el profesor o recogidos por los propios alumnos. En la confección de los problemas de las sesiones prácticas se tuvieron en cuenta las variables de tarea relativas a la resolución de problemas estadísticos que se exponen en Godino y col. (1991). En el resto de las sesiones, se hacía una introducción de los conceptos estadísticos y se resolvían problemas relacionados con ellos.

PRIMER EXPERIMENTO: IDENTIFICACIÓN DE CONCEPCIONES RESISTENTES Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE APRENDIZAJE.

La muestra de este experimento estaba integrada por diecinueve estudiantes de 20 años matriculados en un primer curso universitario de análisis exploratorio de datos y estadística descriptiva. Los estudiantes trabajaban con el paquete estadístico PRODEST, que había sido desarrollado por el equipo de investigación algunos años antes. Aunque este software es limitado, si se compara con paquetes estadísticos más modernos, incluye todas las herramientas necesarias para desarrollar un curso de estadística descriptiva a nivel universitario.

Para evaluar los cambios en las concepciones de los estudiantes, éstos cumplimentaron dos versiones equivalentes de un cuestionario como pre-test y post-test. Encontramos una mejora general en las estrategias que utilizaban, así como la persistencia después del proceso de enseñanza, en algunos estudiantes, de las concepciones erróneas unidireccional y causal sobre la asociación estadística. Todos estos resultados se han descrito con detalle en Batanero et al., (1997).

Adicionalmente se observó, durante las sesiones de laboratorio, a una pareja de estudiantes para poder describir y estudiar su proceso de aprendizaje. Un miembro del equipo de investigación observaba a la pareja de estudiantes mientras trabajaban en la resolución de los problemas, recogiendo las respuestas escritas a los distintos problemas y registrando los debates de los alumnos en cintas de cassette, así como las intervenciones del profesor en el trabajo de esta pareja de alumnos. También se grabó en disco las interacciones de los alumnos con el ordenador y la pareja de estudiantes fue entrevistada al comienzo y al final del experimento y su interacción con el ordenador quedó también registrada en un fichero que fue posteriormente impreso para disponer de una traza de sus estrategias en la resolución de los problemas.

Cuando estudiamos con detalle todas las observaciones anteriores encontramos algunas dificultades, que se repetían con regularidad, relacionadas con la asociación. Algunas de ellas se superaban, bien por los propios alumnos, bien con la ayuda del profesor, al final del proceso de enseñanza, si bien algunas volvían a aparecer de vez en cuando. Otras veces la dificultad no se superaba, a pesar del debate entre los alumnos o las intervenciones del profesor. Ocasionalmente, el profesor no apreciaba la confusión de los estudiantes.

ELEMENTOS INTENSIONALES DEL SIGNIFICADO DE LA ASOCIACIÓN

A continuación describimos el proceso de aprendizaje de estos alumnos , destacando algunos elementos intensionales clave del significado matemático de la asociación (Godino & Batanero, 1998) y el proceso de comprensión por parte de los estudiantes de estos elementos de significado a lo largo del tiempo de aprendizaje.

1. La comparación de dos o más muestras, con objeto de estudiar la posible relación entre dos variables, debe efectuarse en términos de frecuencias relativas. En la primera sesión los alumnos comienzan comparando frecuencias absolutas de la distribución de una variable en dos muestras. Este error es advertido por el profesor al final de la clase, pero se presenta de nuevo en las sesiones 2, 3 y 5. A partir de ahí los estudiantes parecen haberlo superado.

2. La posible existencia o no de diferencias en la distribución de una variable entre dos o más muestras se deduce a partir de la comparación de toda la distribución de la variable en cada una de las muestras y no de una parte de la misma. Los estudiantes, sin embargo, comienzan con la comparación de valores aislados, al estudiar las dos muestras. Por ejemplo, en la primera sesión, los estudiantes solamente comparan los valores de máxima y mínima frecuencia en ambas muestras; aunque estas diferencias apuntan a la existencia de posible asociación, este modo de proceder es insuficiente para cuantificar la intensidad de la misma. Esta dificultad vuelve a aparecer en las sesiones 2, 3 y 5, desapareciendo en las sesiones posteriores.

3. A partir de una misma frecuencia absoluta pueden deducirse dos frecuencias relativas condicionales diferentes, según la variable que se emplee como condición. El papel de condición y condicionado en la frecuencia relativa condicional no es intercambiable. Numerosos autores como Falk (1986) señalan la dificultad de interpretación de una probabilidad condicional porque los alumnos no diferencian a veces el papel jugado por la condición y el condicionado, con lo que pueden confundir P(A|B) con P(B|A) o no llegar a discriminarlas. Muchos alumnos, en este estudio, mostraron confusiones similares a esta en el estudio de las concepciones previas, que siguieron manifestándose durante el proceso de instrucción y que ha seguido manifestándose al finalizar la instrucción. Apareció en la sesión 5 y se superó con la ayuda del profesor. No apareció en el resto de las sesiones.

4. Dos variables son independientes si la distribución condicional de una de ellas no cambia cuando se varían los valores de la otra variable. Hasta llegar a la sesión 5, los estudiantes no descubren que una condición para la independencia es la invarianza de las distribuciones relativas condicionales, cuando varía el valor de la variable condicionante.

5. En la determinación de la asociación entre dos variables, éstas juegan un papel simétrico. Por el contrario, en el estudio de la regresión, las variables desempeñan un papel asimétrico. Hay dos rectas de regresión diferentes, según cual de las dos variables actúe como variable independiente. El hecho de que en la correlación no se distinga entre la variable explicativa y la variable explicada, mientras que en la regresión esta diferencia sea esencial (Moore, 1995) provocó gran confusión entre los estudiantes. Cuando necesitaron seleccionar la variable explicativa para calcular la línea de regresión en las sesiones 5, 6 y 7, no supieron qué variable elegir. Por ejemplo, para calcular la línea de regresión del peso sobre la altura, los estudiantes se desconcertaron por el hecho de que existía mutua dependencia entre las dos variables, debatieron largamente sin llegar a una solución aceptable para ellos. El profesor no se dio cuenta del problema y finalmente los estudiantes calcularon la línea de regresión eligiendo la variable explicativa al azar. Al final del período de enseñanza estos estudiantes aun no habían descubierto que se pueden calcular dos líneas de regresión diferentes.

6. Una correlación positiva indica dependencia directa entre las variables. Aunque en la sesión 6, los alumnos pudieron interpretar la magnitud del coeficiente de correlación, no discutieron el tipo de asociación (directa o inversa). Al final de la sesión aunque llegan a indicar que "al aumentar una variable la otra aumenta" no identifican este hecho con la idea de relación directa entre las variables. Nunca llegan a emplear la idea de "relación o dependencia directa".

7. Una correlación negativa indica dependencia inversa entre las variables. En la sesión 6, los alumnos se sorprenden al encontrar por primera vez un coeficiente de correlación negativo, hasta el punto de preguntar al profesor si ello es posible. Asimismo, aparece la duda en la comparación de dos coeficientes de correlación negativos, ya que, en este caso, un número menor corresponde a mayor intensidad en la asociación. Así, el conocimiento adquirido sobre el orden de los números negativos dificulta ahora la comprensión del signo negativo del coeficiente de correlación; se convierte en obstáculo epistemológico para dicha comprensión. Consideramos que ello se debe al fenómeno de inversión en la relación de orden (González y cols., 1990). En realidad, aunque ayudados a veces por el profesor han observado que el signo negativo del coeficiente de correlación se corresponde con una pendiente negativa en la recta de regresión y que al crecer los valores de x disminuyen los de y, en el resto de la sesión, no llegan a utilizar el término "dependencia inversa". No llegan a diferenciar los dos tipos de asociación al término del aprendizaje.

8. El valor absoluto del coeficiente de correlación es indicativo de la intensidad de la asociación. Aunque en las primeras actividades los alumnos asocian un alto valor del coeficiente con una dependencia fuerte, hasta la sesión 6 no identifican, en principio, la idea de "intensidad de asociación" con el coeficiente.

SEGUNDO EXPERIMENTO: AMPLIACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTRUMENTALES/REPRESENTACIONALES

Treinta y seis estudiantes participaron en el segundo experimento, trabajando con algunos procedimientos del paquete estadístico *Statgraphics*, que incluye nuevos procedimientos instrumentales/representacionales y un entorno más dinámico y versátil para estudiar la asociación. Podemos clasificar las herramientas disponibles por su nivel de reducción de datos, su carácter numérico o gráfico y su enfoque analítico (descriptivo o inferencial). Cada una de las herramientas proporcionan diferentes resúmenes de los datos y, en consecuencia, diferentes significados de la asociación.

1. Resúmenes numéricos en el nivel descriptivo: Tablas de contingencia (v.g. ítem 1) y sus diferentes tipos de frecuencias. Tablas de frecuencias unidimensionales de distribuciones condicionales y sus estadísticos, correlación y coeficiente de determinación y parámetros de la línea de regresión.

2. Resúmenes numéricos en el nivel inferencial: Intervalos de confianza para las medias o la diferencia de medias. Test de hipótesis para las medias o medianas. Test Chi-cuadrado de asociación entre dos variables.

3. Representaciones gráficas de distribuciones condicianales unidimensionales: Gráfico del tronco, gráfico de barras, gráfico de la caja, gráfico de sectores, histogramas, curva empírica de distribución, funciones de densidad.

4. Gráficos bidimensionales: Histogramas tridimensionales, gráfico de mosaicos y diagrama de dispersión tridimensional.

En Statgraphics, además de la posibilidad de seleccionar gráficos y variables, se pueden tener diversas representaciones gráficas y tabulares simultáneamente en 1 pantalla, y manipular ciertas características de los gráficos como anchura, formato, escala, etc. El fichero Statfolio nos permite elaborar informes de investigación con resultados parciales que se incluyen en el texto al mismo tiempo que el análisis se está llevando a cabo.

Por otro lado, el hecho mismo de realizar los cálculos con ayuda del ordenador, introduce cambios en los elementos intensionales de significado que el alumno debe usar en la resolución de problemas, como veremos en la resolución que hace M. Luisa, del siguiente problema, durante una de las prácticas.

Problema: En el fichero MFF20 (referido a datos sobre capacidad lectora de niños de 6 años), ¿Cuál es el número máximo de errores en comprensión para el 90 por ciento de alumnos?.

Respuesta escrita de M. Luisa: "He usado la opción STATS del menú principal del programa y luego he elegido DESCRIPTIVE METHODS y PERCENTILES. Puse el nombre de la variable en la ventana de entrada de datos, escribiendo: MFF20. errorpalab. Después puse 90 en el cuadro de porcentaje y obtuve 5. El número máximo de errores para el 90 por ciento de los niños es 5".

Tras esta concisa respuesta, podemos seguir el procedimiento de la estudiante, que resolvió correctamente el problema, eligiendo el método estadístico adecuado (cálculo de percentiles). Vemos que la alumna no necesita conocer el algoritmo de cálculo de percentiles, en el cual debemos diferenciar entre datos agrupados y no agrupados y entre número par e impar de datos. El algoritmo se ha "encapsulado", transformándose en una herramienta disponible (una opción del programa), un operador que se aplica a un vector de datos (la variable errorpalab) y asigna a cada rango (en este caso 90) un valor numérico de la variable.

Se añaden los siguientes pasos que no existen en un algoritmo tradicional:

1. Escoger STATS en el menú general, lo que supone diferenciar entre procedimientos estadísticos y procedimientos gráficos o de gestión de ficheros.

2. Elegir DESCRIPTIVE METHODS, dentro del menú STATS, reflexionando que necesitamos un método descriptivo de análisis de datos.

3. Escoger PERCENTILES, dentro de ONE VARIABLE NUMERICA que supone otros dos niveles de menús de opciones y requiere la identificación del tipo de variable (numérica), número de variables (una) y el procedimiento a usar (percentiles) dentro de los métodos descriptivos.

4. Identificar la variable MFF20-errorpalab dentro del fichero y asignarla en la ventana de entrada de datos. Requiere un conocimiento de la forma de operar el programa y la interpretación de la estructura del fichero de datos, así como relacionar lo anterior con el enunciado del problema.

5. Identificar el rango (90), es decir el valor necesario de los parámetros para ejecutar correctamente el procedimiento.

6. Interpretar los resultados.

Con un algoritmo tradicional se requieren llevar a cabo una serie de operaciones. Suponiendo que operamos con los datos brutos, esto es, sin realizar agrupaciones previas de los mismos. Estos pasos serían los siguientes:

1. Calcular el número n de datos.

2. Calcular el 90 por ciento de N, Z=90xN/100. El valor de Z indica el lugar de la observación que contiene el valor del percentil, en la serie ordenada de datos. Es necesario calcular una proporción y recordar el significado del rango del percentil, como lugar que indica un porcentaje del número de datos.

3. Ordenar los datos por valores crecientes de la variable. Esto implica recordar que los percentiles son estadísticos de orden que indica la posición relativa de los valores de los datos y no el orden en que los datos fueron recogidos.

4. Localizar el elemento que ocupa el valor Z y hallar el valor de la variable que corresponde al elemento Z. Supone recordar que el percentil es el valor de la variable del dato que ocupa una posición dada y no la posición en sí misma. Si Z no corresponde exactamente

a un elemento, por haber una indeterminación, encontrar los dos elementos anterior u posterior a Z y calcular su media aritmética. Implica comprender el caso de indeterminación y el significado de una desigualdad.

Todos estos pasos sirven para reforzar las propiedades intensionales del concepto de percentil, propiedades que son irrelevantes si se usa el algoritmo informático. Como vemos, el significado de los percentiles se ve notablemente afectado por los nuevos útiles disponibles.

SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA ASOCIACIÓN DESPUÉS DE LA ENSEÑANZA

La diversidad de los conocimientos estadísticos previos de los estudiantes en el segundo experimento era amplia, porque se trataba de un curso de libre configuración y los estudiantes inscritos pertenecían a diferentes Facultades: Educación, Psicología, Económicas, Caminos ... Durante el curso realizamos algunas evaluaciones mediante tareas de papel y lápiz y proyectos individuales realizados por los alumnos. Al final del curso se llevó a cabo un examen utilizando un nuevo conjunto de datos para valorar el significado final que los estudiantes tenían de la asociación estadística. Cada estudiante trabajó en solitario en un ordenador y sus soluciones se registraron en un disco, utilizando los ficheros *"Statfolios"*, que incluyen los cálculos y gráficos realizados, junto con los comentarios y soluciones. El examen consistió en el análisis de un nuevo conjunto de datos relativo a las puntuaciones de 48 alumnos de una asignatura de Educación Física sobre el que se les planteaba a los alumnos algunos problemas:

Problema 1. Razone si en este conjunto de datos practicar deporte depende del sexo.
Problema 2. ¿Existe relación entre practicar deporte y número de pulsaciones después de 30 flexiones?
Problema 3. El profesor quiere valorar la eficacia de sus clases de Educación Física. ¿Cree que ha habido mejora en el tiempo empleado en recorrer 30 metros en diciembre con relación a diciembre?
Problema 4. ¿Cree que el número de pulsaciones después de 30 flexiones depende del número de pulsaciones en reposo?

La diferencia principal entre los problemas es el tipo de variables implicadas: Dos variables cualitativas (problema 1), dos variables cuantitativas (problema 4) y una variable de cada tipo (problemas 2 y 3). Otra variable importante es la intensidad de la asociación: independencia (problema 4), dependencia débil (problema 2), asociación moderada (muy significativo el valor de la t en el problema 3), (significativo valor de la Chi-cuadrado en el problema 1).

Los estudiantes deben identificar estas diferencias (discriminar entre diferentes elementos extensionales de significado), seleccionando entre las diferentes herramientas disponibles (elementos instrumentales/representacionales del significado) las que son más adecuadas para resolver el problema: Tablas de contingencia, test Chi-cuadrado, gráfico de mosaicos o comparación de gráficos de barras en el problema 1, comparación de histogramas, curva empírica de distribución, funciones de densidad, gráfico de la caja o diferentes estadísticos, intervalos de confianza o contrastes de hipótesis en los problemas 2 y 3 y estudiar el coeficiente de correlación, la nube de puntos o los parámetros de la recta de regresión en el problema 4. Finalmente los elementos intensionales del significado se utilizarían para interpretar las "salidas" de los diferentes programas y para realizar un juicio exacto de asociación.

A partir de los ficheros *statfolio* categorizamos las soluciones y procedimientos de los estudiantes. La mayor parte de los estudiantes dan un juicio de asociación correcto, aunque con frecuencia obtienen soluciones correctas utilizando procedimientos inadecuados al tipo de problema, no relacionando correctamente los elementos de significado extensionales (problemas) e instrumentales (útiles para resolverlos).

Además, entre las herramientas adaptadas a los problemas, los estudiantes no siempre seleccionan las que un estadístico profesional elegiría para realizar el análisis pedido. En consecuencia, las soluciones de los estudiantes no siempre coinciden con las soluciones "tipo". Por ejemplo, la mejor solución para el problema 1 sería utilizar el test Chi-cuadrado para analizar la diferencia de proporciones de varones y hembras que practica deporte, que da un valor significativo. Siete estudiantes, por el contrario, calculan en su lugar el coeficiente de correlación, que proporciona un valor de 0.28, que es muy pequeño, y en consecuencia, interpretan que no hay relación entre las variables. Otro ejemplo es el problema 3, donde un estudiante intenta visualizar la relación utilizando un diagrama de dispersión que no proporciona una solución al problema.

Esta selección de un procedimiento correcto pero no óptimo indica la falta de flexibilidad para cambiar de una a otra representación de la asociación. Por ejemplo, los estudiantes S11, S23, S26, S35, S36 resuelven tres problemas utilizando el coeficiente de correlación; el estudiante S12 resuelve tres problemas comparando gráficos de barras; el estudiante S10 resuelve los cuatro problemas comparando representaciones gráficas de distribuciones marginales y el estudiante S27 resuelve todos los problemas comparando tablas de contingencia de frecuencias dobles. Otro ejemplo es no tomar como variable explicativa la que permite una más simple interpretación del análisis, ya que tres estudiantes llegan a una conclusión no adecuada cuando calculan frecuencias relativas condicionales de la variable *practicar deporte* con la variable *número de pulsaciones*, que proporciona una mala visualización de la relación.

Otros estudiantes interpretan incorrectamente los resultados de un procedimiento correctamente seleccionado y su análisis muestran una falta de comprensión de elementos intensionales del significado de la asociación. Las principales dificultades fueron las siguientes:

a) Confundir la frecuencia relativa condicional con la frecuencia doble (9 estudiantes) o con las frecuencias marginales 94 estudiantes) en las tablas de contingencia;

b) Usar solamente una distribución marginal (1 estudiante en el problema 1) o comparar las distribuciones marginales de las dos variables en estudio (1 estudiante en el problema 4);

c) Comparar el coeficiente de correlación de las variables en estudio con una variable diferente, debido a la falta de comprensión de los parámetros a utilizar como entrada en los programas (1 estudiante en el problema 4);

d)Usar sus propias teorías previas en lugar de los datos que tienen que utilizar(problema 4);

e) Interpretar la asociación de manera determinista (1 estudiante en el problema 3);

f) Utilizar el coeficiente de correlación en la misma variable en dos muestras relacionadas, con el objeto de estudiar la diferencia en esas dos muestras (1 estudiante en el problema 3) o el coeficiente de determinación (1 estudiante en el problema 3);

g) Comparar frecuencias absolutas en gráficos de barras, en lugar de utilizar frecuencias relativas (1 estudiante en el problema 2).

En general, observamos que los estudiantes prefieren resúmenes numéricos a los gráficos, especialmente en los problemas 1 a 3. Esto es debido al hecho de que cada gráfico disponible requiere su propia interpretación, que no siempre los estudiantes dominan. Además, los estudiantes han preferido resúmenes numéricos porque la idea de distribución es difícil para ellos, como se muestra en la confusión entre los diferentes tipos de frecuencias. Finalmente, señalamos el escaso uso de procedimientos inferenciales, posiblemente la comprensión de estos conceptos requiere un mayor periodo de enseñanza, antes de que los estudiantes decidan utilizarlos en la resolución de problemas.

ANÁLISIS DETALLADO DEL CASO DE JUAN

Además de la prueba final que hemos analizado, disponemos para cada alumnos de una prueba de evaluación inicial de ideas elementales de estocástica, el registro de las soluciones de las 8 relaciones de ejercicios realizadas, 2 pruebas escritas, y un proyecto personal de análisis de datos que realizaron 7 de los alumnos voluntariamente. Partiendo de esta información, en esta sección analizamos los conocimientos adquiridos por un estudiante (Juan) de los que realizaron el proyecto, así como su capacidad final de análisis de datos y los factores que han condicionado su aprendizaje.

Juan es un estudiante de primer curso de Psicopedagogía (4º año de estudios universitarios), que había estudiado antes la mayor parte de los contenidos estadísticos del curso, aunque no había manejado ordenadores ni software estadístico. Ha mostrado gran interés por la asignatura.

1) Capacidad de planteamiento de problemas

Fueron escasas las actividades en las que los estudiantes debían formular sus propias cuestiones sobre los ficheros de datos y no han recibido una atención suficiente durante el curso. En el caso de Juan podemos valorar esta dimensión a partir del proyecto personal de análisis de datos realizado sobre un tema elegido por él mismo: *"Hábitos de estudio de alumnos universitarios y su relación con la valoración que hacen de las calificaciones de sus profesores"*. Juan ha mostrado importantes dificultades en articular su problema en el proyecto y en formular cuestiones específicas en términos de las variables que incorporó en el cuestionario. Manifestó un planteamiento confuso del problema a investigar, deficiente identificación de las variables y pobreza en el tratamiento y discusión de los resultados. Formula preguntas de carácter escolar y rutinario, como las siguientes: *"¿Cuántos alumnos tienen una nota media superior a 6?¿Cuál es el percentil 25 del total?*

Debemos tener en cuenta que el proyecto fue realizado de modo muy personal, sin el concurso del profesor, a excepción de alguna consulta en la preparación del cuestionario. La recogida de datos y la realización del informe se hizo al final del curso, en periodo de exámenes finales. El análisis de los datos se realizó en horas extraordinarias, en las que el aula de informática estaba atendida por un becario, haciendo uso del horario de tutorías para las consultas al profesor. Estas circunstancias, unido a la propia dificultad de cualquier proyecto real de análisis de datos, son variables explicativas de las importantes carencias observadas en el comportamiento de Juan en este aspecto.

2) Grado de dominio del recurso informático y de los instrumentos estadísticos

Juan ha alcanzado un grado alto de dominio del software utilizado y de las opciones específicas estudiadas, interesándose incluso por el manejo de procesadores de textos en horas de entrada libre al aula de informática. Hemos apreciado dificultades de comprensión de las representaciones estadísticas, gráficas y tabulares. Así, respecto del gráfico de la caja da la siguiente explicación en uno de los ejercicios propuestos:

"El gráfico de la caja es un diseño pensado para informarnos de los siguientes estadísticos:

La media, que nos da la línea central que atraviesa el gráfico; la mediana que se representa por la línea perpendicular central que cruza la media; el rango máximo o mínimo viene definido por los salientes (bigotes) que salen del rectángulo; el recorrido intercuartílico que va desde el cuartil superior al cuartil inferior, es lo que se vería como un rectángulo delimitado pro los bordes del rectángulo donde se expresan los cuartiles".

Hay aspectos del gráfico de la caja que sí han sido comprendidos: *"En este gráfico se puede ver la simetría de la muestra si nos fijamos en el interior del rectángulo de la caja. Si el espacio entre la mediana y uno de los cuartiles es mayor que la distancia de la mediana al otro cuartil se puede decir que existe una asimetría".* Hay que hacer notar, sin embargo, la imprecisión de atribuir tal asimetría a la muestra, y no a la distribución de frecuencias de la variable estadística correspondiente.

3) Aspectos intensionales (conceptos y sus propiedades)

Entre las respuestas a cuestiones planteadas en las relaciones de ejercicios hemos encontrado dificultades como las siguientes:

- No reconoce que una distribución de frecuencias debe venir dada por el conjunto de valores y sus respectivas frecuencias. Así, por ejemplo al interpretar una tabla de contingencia explica: *"Las distribuciones marginales de la variable sexo son: 33.3 y 67.7. Las distribuciones condicionales de 'deporte' según 'sexo=chico' son: 20.0, 45.0 y 35.0".* Vemos que da las frecuencias absolutas, prescindiendo de informar de los valores de la variable correspondiente.
- Respecto a la idea de asociación hemos detectado una concepción local de la misma, ya que basa un juicio de asociación en la frecuencia de una única casilla en las tablas de contingencia.

4) Elementos procesuales y afectivos

El proyecto personal realizado por Juan sugiere la existencia de limitaciones importantes de la capacidad de expresión verbal y gráfica, explicación y validación alcanzadas, componentes para las cuales no ha sido posible organizar situaciones didácticas específicas. Por el contrario, como hemos indicado mostró un gran interés y motivación, alcanzando un alto grado de dominio del software.

REFLEXIONES FINALES

En la apertura de la Conferencia organizada por el IASE en Granada sobre las nuevas tecnologías Hawkins (1997) realiza una reflexión sobre las expectativas creadas por los ordenadores, respecto a su papel como instrumento didáctico en la enseñanza y aprendizaje, comparando los resultados obtenidos con dichas expectativas. Los resultados de nuestros experimentos pueden servir para centrara la discusión sobre algunos de los "mitos" resaltados por Hawkins:

¿Facilita el ordenador la enseñanza de la estadística?

Hay una gran diferencia entre las posibilidades teóricas de la tecnología como recurso didáctico y las posibilidades en un planteamiento concreto. Con frecuencia el software o el hardware puede ser inapropiado para los estudiantes. En nuestra experiencia, una barrera importante la pone el idioma, añadido a la lentitud de operación de los ordenadores en el aula de informática. El nulo o escaso conocimiento previo de los alumnos sobre el uso básico del ordenador hizo necesario dedicar parte del tiempo al aprendizaje del manejo básico del sistema operativo, y otros contenidos no estadísticos.

Otra dificultad se debe al hecho de que el software no se adapta a las necesidades docentes. Faltan posibilidades que el profesor necesitaría, por ejemplo, el uso de intervalos de diferente amplitud en los histogramas, y sobran muchos otros procedimientos no necesarios en un curso particular. La estructura de los menús del software no siempre es la más adecuada, porque algunas opciones de uso creciente se encuentran "escondidas" en un menú de tercer o cuarto nivel.

¿Es suficiente introducir un ordenador en la clase de estadística, para realizar una innovación en nuestros métodos de enseñanza?

Los ordenadores reducen sustancialmente el tiempo que antes se dedicaba al aprendizaje de los algoritmos de cálculo de los estadísticos y, a primera vista, podría pensarse que este tiempo puede dedicarse a actividades interpretativas y a profundizar en el estudio conceptual. Por otro lado, se añaden nuevos contenidos, tales como nuevas representaciones gráficas, la organización y estructuración de los datos y el uso del software estadístico.

Nuestra experiencia muestra que esto es claramente insuficiente para que la enseñanza sea realmente innovadora y que tampoco podemos olvidar por completo las fórmulas y las actividades tradicionales con "papel y lápiz". Es necesario un gran trabajo previo de diseño de las situaciones didácticas, incluyendo los ficheros de datos adecuados, y la evaluación de las concepciones previas de los alumnos. Todo el proceso de integración de los problemas, conceptos teóricos, discusiones colectivas, trabajo individual y colectivo plantea un gran número de problemas didácticos, pendientes aún de investigación.

¿Facilitan los ordenadores la comprensión de los conceptos estadísticos?

Hemos mostrado claramente las dificultades de los alumnos, para el caso concreto de la asociación estadística, debido a que los estudiantes necesitan captar y relacionar tres tipos diferentes de elementos, para dominar y utilizar el concepto en la resolución de problemas:

(1) Elementos intensionales del significado: tales como la diferencia entre dependencia funcional y estadística, relación entre correlación y regresión, las diferentes frecuencias relativas que se pueden extraer de una tabla de contingencia, el papel de las variables dependiente e independiente, parámetros en la ecuación de regresión e interpretación del coeficiente de correlación.

(2) Elementos instrumentales/representacionales del significado; El uso de diferentes herramientas para tratar o representar el concepto, como los gráficos de mosaico, diagramas de dispersión, tablas de doble entrada o series paralelas de gráficos de la caja, diagramas acumulativos o gráficos de barras.

(3) Elementos extensionales de significado: Las diversas situaciones-problema cuya solución necesita el estudio de la asociación, de las cuales hemos descrito una muestra en este trabajo.

La dificultad que supone la comprensión de todos estos elementos se muestra particularmente cuando se compara el significado de la asociación presentado en los experimentos de enseñanza (significado institucional en la institución particular de un curso introductorio de análisis exploratorio de datos) y el significado personal que los estudiantes finalmente han adquirido, donde solamente han adquirido parte del significado pretendido, y algunas de las concepciones incorrectas sobre la asociación permanecen.

¿Mejoran los ordenadores el uso que se hace de la estadística?

El análisis de datos es una actividad de alta cualificación aún a un nivel exploratorio, requiriendo una gran variedad de conocimientos sobre los problemas y conceptos fundamentalmente relacionados con los procedimientos estadísticos, gráficos, numéricos, descriptivos e inferenciales (Batanero y Truran, en prensa). Esto requiere la capacidad de seleccionar los mejores instrumentos para analizar y representar datos, flexibilidad en los cambios de los procedimientos de selección, adecuada interpretación de los resultados (elementos intensionales) y la habilidad para relacionarlos con los problemas (elementos extensionales). Aun en el caso de que nuestros estudiantes obtengan soluciones correctas a los problemas, podemos observar sus dificultades en cada paso de los procesos descritos.

Como se desprende de los dos experimentos, enseñar a un grupo de estudiantes con conocimientos y actitudes muy diversos esta actividad tan compleja, más allá de la rutina o tareas elementales no es una tarea sencilla y ciertamente requiere mayor tiempo del que se dedica a un curso introductorio de estadística. Los conocimientos didácticos por parte de los profesores tampoco son garantía suficiente para el aprendizaje.

El problema se acentúa porque el software estadístico es hoy día de acceso generalizado, incluso para los usuarios sin conocimientos estadísticos sólidos, quienes creen que el hecho de ser capaces de manejar un programa y realizar un gráfico u otro análisis elegido muchas veces, simplemente porque "está de moda", ya les capacita para el análisis de sus datos. Los ordenadores no pueden pensar, y por tanto, no son capaces de distinguir cuándo un método de análisis es o no adecuado a un problema particular. Incluso cuando el método fuese adecuado, la interpretación de los resultados no viene proporcionada por los ordenadores.

¿Podremos guiarnos por los resultados de la investigación para progresar en el uso de los ordenadores en la enseñanza?

Este es, quizás el punto más crítico, puesto que la investigación sobre la enseñanza de la estadística es aún muy incipiente y se concentra preferentemente en el estudio de las concepciones de los alumnos sobre conceptos elementales. No hay apenas investigación sobre las concepciones de los alumnos respecto a conceptos estadísticos avanzados, probablemente porque este tipo de conceptos ni se han incluido en el currículo de secundaria hasta muy recientemente. Más escasos son todavía los estudios de experimentos de enseñanza con o sin ordenadores.

Por otro lado, evaluar este tipo de experimentos es muy laborioso por la cantidad de datos generados y la ausencia de modelos previos para el análisis e integración de los mismos. La misma evaluación del trabajo de los alumnos con el ordenador plantea problemas de investigación específicos, porque es difícil transferir los resultados de la investigación sobre evaluación usando métodos tradicionales. Además la variedad de parámetros a tener en cuenta en el análisis de un experimento hace que estos sean difícilmente reproducibles en otros contextos, con otro software u otro tipo de alumnos. Todo ello muestra la necesidad de proseguir la investigación y reforzar las conexiones de ésta con la práctica docente.

Agradecimientos: Esta investigación se ha llevado a cabo dentro del proyecto PB96-1411 (Dirección General de Enseñanza Superior, M.E.C. Madrid)

REFERENCIAS

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. y Green, D. R. (1996): Intuitive estrategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for research in Mathematics Education*, 27(2), 151-169.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. (1997): Evolution of student's understanding of statistical association in a computer based teaching environment. In J. B. Garfield, & G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics* (pp. 191-205). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Batanero, C. y Godino, J. D. (1998): Understanding graphical and numerical representations of statistical association in a computer environment. *Proceedings of the V International Conference on Statistical Education*. Singapore

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998): Building the meaning of association through data analysis activities. Research Forum. *22 conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Stellembosch, Sudáfrica.

Batanero, C. y Truran, J. (en prensa). Some insights from research on advanced stochastics thinking. *International Statistical Review*.

Beyth-Marom, R. (1982): Perception of correlation re-examined. *Memory and Cognition*, 10(6), 511-519.

Bielher, R. (1994). Software tools and mathematics Education: the case of statistics. En C. Keitel and R. Ruthnen (Eds.) *Learning for computers:mathematics education & technology* (pp. 68-100). Berlin: Springer Verlag.

Bielher, R. (1997). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review* , 65(2), 167-190.

Chapman, L. J. & Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology*, 74, 271-280.
Crocker, J. (1981). Judgement of covariation by social perceivers. *Psychological Bulletin*, 90 (2), 272-292.
Estepa, A. y Batanero, C.(1996). Judgements of correlation in scatter plots. Student's intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima journal of Mathematics Education*, 4, 21-41.
Estepa, A. y Sánchez-Cobo, F. (1996). Association Judgements in the comparison of two samples. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.) *Proceeding of the 20th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 337-344). Universidad de Valencia.
Estepa, A., Green, D. R., Batanero, C. y Godino, J. D. (1994): Judgements of association in contingency tables. An empirical study of student's strategies and preconceptions. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International. Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp 312-319). Universidad de Lisboa.
Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insigths and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the second conference on teaching statistics* (pp. 292-297). Voorburg: International Statistical Institute.
J. B. Garfield& G. Burrill (1997) (Eds.*), Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics*. Voorburg, The Nederlands: International Statistical Institute.
Godino, J. D., Batanero, C. y Estepa, A. (1991). Task variables in Statistical Problem Solving Using Computer. In J. P. Ponte, J. F. Matos, & D. Fernandes (Eds.). *Problem Solving and New Technologies. Research in Contexts and Practice*. Berlin: Springer Verlag.
Godino, J. D. y Batanero, C., (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
Godino, J. D. y Batanero, C., (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En J. Kilpatrick y A, Sierpinska (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp.177-195). Dordrecht : Kluwer A. P.
González, J. L. y otros (1990). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.
Hawkins, A. (1997). Mytth-Conceptions. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: Presses Universitaires de France.
Jennins, D. L., Amabile, M. T. y Ross, L. (1982). Informal covariation assesment: Data based versus theory-based judgements. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.*). Judgement under uncertainly: Heuristics and biases* (pp. 211-230). New York. Cambridge University Press.
Moore, D. S. (1995). *The basic practice of statistics*. New York: Freeman.
Morris, E. (1997). An investigation of student's conceptions and procedural skills in statistical topic correlation. Centre for Information Technology in Education. The open University. Cite Report Nº 230.
Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. Bishopet al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (v.1, pp. 205-237). Dordrecht: Kluwer, A. P.

LA ENSEÑANZA CON ORDENADOR Y ERRORES DE APRENDIZAJE: EL CASO DE LA ESTADÍSTICA

Concepción F. Abraira Fernández

Universidad de León

Ante la necesidad de hacer la «réplica» al trabajo La construcción del significado de la asociación (AS) mediante actividades de análisis de datos: reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística, aprendizaje de estadística, la primera pregunta que me planteé fue ¿qué es una réplica? Según el Diccionario de la Lengua Española "replicar es instar, o argüir contra la respuesta o argumento". Luego, tomando como modelo el trabajo de Lesh[25] y siguiendo la estructura del Primer Simposio de la SEIEM, se entiende que yo debo presentar una reacción o crítica al trabajo citado. Pues bien, en torno a la construcción del significado de la AS, yo no tengo nada nuevo que decir que no pueda encontrarse en las referencias citadas por los autores. Por eso, haré, simplemente, una descripción de los problemas que me surgieron al leer el texto y un análisis de las conclusiones desde mis propios conocimientos y experiencia y de discusiones mantenidas con otros profesores, tanto ajenos al tema como con experiencia en el uso de ordenador.

En primer lugar, y en cuanto al epígrafe marco teórico, en el que se alude al significado y comprensión de los objetos matemáticos, se me plantean las siguientes cuestiones: estamos tratando de comprender el papel del ordenador en el tratamiento de errores de aprendizaje de estadística. Entonces me pregunto ¿es un objeto matemático nuestro objeto de comprensión? De no ser así ¿qué papel tiene este marco teórico? ¿sólo para hablar de la construcción del significado de AS? Y en este caso ¿en dónde encuadramos el estudio sobre el papel del ordenador en la enseñanza? Se habla del ordenador como "instrumento en la resolución de problemas" ¿Se entiende que es un elemento "instrumental/relacional" del significado? No lo parece, entonces ¿qué tipo de elemento es? ¿Qué relación tiene con la elaboración del significado de asociación? Tal vez por no estar familiarizada con la teoría no consigo ver los «elementos del sistema» sustancialmente distintos de los clásicos «campos de problemas», «símbolos», «representaciones», «conceptos», «procedimientos» o «relaciones». Creo que la terminología dificulta la comprensión. Y, por otro lado, ¿qué entienden los autores por «error»?

---

[25] Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad «real» de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 15 (3),* 377-391.

Centrándome ya en el tema de debate, creo que el trabajo, como ya su título indica, no se ajusta del todo a la intención del seminario. Es cierto que estudia un caso sobre el aprendizaje de la estadística en el que se habla de ordenador y de errores, pero, realmente, su núcleo es la construcción del significado de AS, y no el tratamiento de las concepciones «erróneas» detectadas en el estudio previo y la posible influencia del uso del ordenador en su evolución. En concreto, se me plantean las siguientes cuestiones:

El objetivo de la investigación, según se recoge en el texto, es valorar el impacto de la tecnología en la ampliación del significado de los conceptos, específicamente, de la AS estadística. Se desprende, entonces que el trabajo presentado va más allá de los errores: ampliar significados es mucho más que tratar errores. Y aquí se me plantea ¿ampliar a partir de qué? ¿de las concepciones iniciales detectadas? ¿qué se entiende por «concepto»? ¿es lo mismo que «objeto matemático»?

Por otra parte, tal como los autores indican, un entorno informático está caracterizado por algo más que por la presencia de un ordenador. Y la tecnología es más que tecnología informática. Entonces, para evaluar las conclusiones creo que sería necesario concretar ¿qué tecnología? ¿Para qué? Suponiendo que nos centremos en la informática ¿qué software? ¿En qué contexto?

iii) Se quiere estudiar el papel del ordenador, pero éste es solo un elemento del programa de enseñanza que constituye la experiencia, sin quedar claro cuál es su papel en el proceso. Entonces ¿cómo sabemos que el efecto que se produce en cuanto a la construcción del significado de AS no es consecuencia de otros elementos, tales como las características de los alumnos, la actuación del profesor, el material explicado, cómo fue explicado, cómo se enseñó el uso del ordenador, etc., aspectos que no están indicados en el texto? El paquete estadístico PRODEST parece caracterizar el entorno informático correspondiente al primer experimento. Mi consideración es ¿no merecería la pena ser descrito? ¿Es un micromundo? ¿Una herramienta? ¿Por qué ese y no otro?

A propósito de micromundos y herramientas, en el texto se cita una clasificación del software estadístico propuesta por Biehler. Los *micromundos* ayudan a los estudiantes a conceptualizar la estadística, mientras que las *herramientas* les permiten practicar la estadística del mismo modo que lo hacen los estadísticos profesionales. Los autores dicen, “en el caso particular del análisis exploratorio de datos, estas herramientas deberían facultar a los estudiantes para hacer un trabajo interactivo, exploratorio y abierto, utilizando software flexible, fácil de usar y aprender”. ¿Significa esto que las herramientas deberían ser micromundos? Entendemos que la clasificación no permite entender esa frase. ¿O debe interpretarse que las herramientas adecuadas al entorno informático propuesto por los autores deben formar parte de micromundos?

iv) Para el estudio de “la influencia de los entornos informáticos en la enseñanza/aprendizaje de la AS”, los autores plantean un diseño que aparenta ser experimental. Y aquí yo muestro varias reservas: la primera de ellas es una cuestión epistemológica: ¿hasta dónde un experimento puede plantearse teniendo las aulas por todo laboratorio? ¿Cómo se pueden controlar las múltiples variables de proceso? La segunda es que en ningún momento se vuelve a hablar de enseñanza. El trabajo se centra en lo que los estudiantes aprenden o no aprenden, pero no hay ninguna mención a la influencia del/sobre el profesor, que es el autor y actor de la enseñanza, del que por cierto tampoco se cuestiona la validez de sus prácticas.

Ahora bien, aun suponiendo que se trate de un diseño experimental, lo que parece claro ya que a lo largo del texto varias veces se habla de experimento, el informe que se deriva es difícil de evaluar, ya que dicho diseño no tiene una descripción sistemática. En concreto, me pregunto ¿se entiende que la variable independiente son los “entornos informáticos” y la dependiente la “enseñanza/aprendizaje de la asociación” ¿o bien la variable independiente es la experiencia de aprendizaje usando ordenadores? ¿O no se trata de un experimento en sentido estricto? Luego ¿cómo se analiza la influencia de los entornos informáticos? Para mi plantea una gran confusión el hecho de que en un lugar se hable de alumnos de COU y en otra de alumnos de un primer curso universitario; hay sesiones de laboratorio pero también hay otras (7 de 21 y 20 de 40, según el experimento) ¿debemos suponer que en el aula se trabaja la teoría “convencional” y en el laboratorio los alumnos deben descubrir los «elementos intensionales»? ¿Existe grupo de control? Se habla de dos intervenciones distintas, pero ¿qué papel juega cada una?

v) Del tipo de alumnos que constituyen la muestra me parece deducir que la estadística para ellos tenía un carácter eminentemente instrumental. En relación con esto puedo hacer referencia a experiencias propias y ajenas que ponen de manifiesto que el rendimiento en cursos de estadística depende, fundamentalmente, de lo que los estudiantes sepan de la materia a la que van a aplicarla, de lo “próximos” que les resulten los datos con los que van a trabajar. Sabemos que el interés por los datos, su verosimilitud o realidad, influye en el interés, por un lado en la resolución del problema y en la visión de éste como algo más que un mero ejercicio rutinario, y por otro, en la interpretación de los datos y del resultado.

vi) En relación con el proceso de aprendizaje de los alumnos hay unos puntos que quiero comentar y que tienen que ver con la idea antes expresada de la no adecuación del diseño utilizado. En el texto se dice “encontramos una mejora general en las estrategias que utilizaban...”. Me pregunto ¿cuál se supone que es la causa de la mejora? ¿el uso del PRODEST?, ¿del ordenador?, ¿la intervención del profesor? De hecho, se indica que hay diversas dificultades casi todas ellas superadas con la ayuda del profesor. ¿Cuál ha sido entonces la influencia del ordenador? ¿Ha cambiado algo con su presencia?

En resumen, el trabajo presentado, desde mi punto de vista, no analiza realmente lo que se pretendía estudiar, o, al menos, no queda reflejado en el texto. Se trata de una descripción de una experiencia en la que el ordenador era una variable de proceso, por eso no se puede afirmar que sea causa del efecto estudiado. Además, no se aborda el tema concreto de errores.

También me surge cierta confusión epistemológica. No veo claro bajo que paradigma se está trabajando e interpretando los datos. Creo que los paradigmas deben reconciliarse, y que ninguno debe excluir a ningún otro, pero aquí, no sé qué se deduce del uso simultáneo de ambos.

Por último, y en relación con las reflexiones finales de los autores, poco tengo que decir como “replicante”. El acuerdo es general, pero tomadas como reflexiones, no como conclusiones válidas para el objeto de estudio. Me parece que la mayor parte de ellas no tienen mucha relación con los objetivos planteados, ni una conexión clara con el tratamiento de errores. Veamos cada una de ellas:

¿Facilita el ordenador la enseñanza de la estadística? En mi experiencia personal, a veces sí y a veces no, depende de cómo se use, con quién, para qué.

¿Es suficiente introducir un ordenador en la clase de estadística, para realizar una innovación en nuestros métodos de enseñanza? Creo que todos estamos de acuerdo en que la respuesta es no, por eso considero la pregunta como innecesaria.

¿Facilitan los ordenadores la comprensión de los conceptos estadísticos? En la respuesta que dan los autores no se cita el ordenador, luego creo que, o la pregunta no está contestada, o una vez más surge mi incomprensión del papel del marco teórico en relación con los ordenadores en la enseñanza. No es claro que los cambios producidos en los estudiantes sean fruto del uso del ordenador.

¿Mejoran los ordenadores el uso que se hace de la estadística? Aunque no veo la relación entre esta pregunta y los objetivos del trabajo, estoy de acuerdo con lo que dicen los autores, pero aquí mi duda es si este trabajo aporta conocimiento científico sobre el tema. El ordenador para "hacer" estadística, no es diferente de un lápiz y papel o de una calculadora, a no ser en que facilita enormemente el trabajo. Por eso creo que la pregunta debería reformularse en ¿qué actividades con ordenador mejoran el uso de la estadística?

¿Podremos guiarnos por los resultados de la investigación para progresar en el uso de los ordenadores en la enseñanza? La pregunta me sorprende porque ¿cómo no podríamos guiarnos por los resultados de investigación? Es cierto que hay muy poca investigación, y que se necesita más, pero el hecho de que haya poca, sea dificil y limitada, no nos da derecho a desconfiar de los resultados como guía de nuestra enseñanza.

Bien, ¿y después de la crítica, obviamente con ánimo constructivo, cuál es mi aportación en positivo? Lo único que puedo ofrecer es mi experiencia, y que en relación con el tema del Seminario, puedo resumirla en: el papel del ordenador en la enseñanza es el de cualquier otro recurso didáctico: es bueno o malo según para qué y cómo se use. Se necesita mucha investigación para conocer cuál es su papel óptimo en situaciones concretas, porque aunque hay abundantes resultados fruto de investigaciones bajo el paradigma conductista, son escasas las realizadas con planteamientos constructivistas de la enseñanza y del aprendizaje. Yo en este momento tengo un proyecto titulado*: Análisis de la formación de maestros en nuevas tecnologías para la educación matemática: propuesta curricular derivada*. Espero que de ahí pueda salir alguna conclusión válida para responder a las preguntas que nos hacemos y cuya respuesta ni siquiera sé si intuimos.

REFERENCIAS

Abraira, C. y cols. (1997). La formación de maestros en tecnología para la educación matemática: el caso de la Universidad de León. En Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas, *Actas 8as JAEM,* Salamanca: Autor, pp. 167-170.
Campbell, D. y Stanley, J. (1982). *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*. Amorrortu Editores. Buenos Aires.
Cook, T.D. y Reichardt, CH.S. (1986*). Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Morata. Madrid.
Kaput, J.J. (1992). Technology and Matematics Education. En D.A. Grouws (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. MacMillan. Nueva York, pp. 515-556.
Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad "real " de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias,* 15 (3), 377-391.

RÉPLICA A:"LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA ASOCIACIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE ANÁLISIS DE DATOS: REFLEXIONES SOBRE EL PAPEL DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA"

Andrés Nortes Checa
Universidad de Murcia

Cuatro preguntas se hacen los autores en sus reflexiones finales:

-¿Facilita el ordenador la enseñanza de la estadística?

-¿Es suficiente introducir un ordenador en clase de estadística para realizar una innovación en nuestros métodos de enseñanza?

-¿Facilitan los ordenadores la comprensión de los conceptos estadísticos?

-¿Mejoran los ordenadores el uso que se hace de la estadística?

Sus respuestas, tras realizar la importante investigación, van a coincidir con la de cualquier docente dedicado a la enseñanza de la estadística y que aplica en el tratamiento de los datos algún paquete estadístico, porque entre otras muchas cosas, nos sirve para evitarnos el trabajo de realizar cálculos estadísticos, y realizar múltiples representaciones gráficas, facilitando su enseñanza.

También estaremos de acuerdo que introduciendo un ordenador en clase nos puede servir para resolver estos algoritmos, pero indudablemente se deben de conocer previamente los conceptos que después, de forma inmediata, nos hará los cálculos el ordenador. Es pues una herramienta muy útil a la hora de efectuar los cálculos y las representaciones gráficas, pero hemos de saber qué estamos calculando y cuál es su significado. Por tanto no es suficiente con introducir un ordenador en el aula.

A la tercera pregunta, pienso que con los ordenadores se ponen de manifiesto los conocimientos estadísticos que se ha adquirido. Al poder representar y calcular de forma inmediata los algoritmos, hace que las aplicaciones de distintos casos ayuden a una mejor comprensión de los conceptos estadísticos y a detectar errores.

Los ordenadores pueden mejorar el uso que se hace de la estadística, pero también empeorarlo. Pensemos que el alumno debe de seleccionar los instrumentos que considere oportunos para trabajar los datos y sacar conclusiones. Se parte de un fichero que contiene numerosos casos correspondientes a varias variables (cuantitativas o cualitativas) y es el alumno con sus conocimientos de estadística quien ha de elegir los algoritmos que le permitan dar los resultados de su investigación. Debe, por tanto, conocer la herramienta a aplicar a la hora de comparar dos variables, bien utilizando tablas de contingencia, representaciones gráficas, correlaciones, etc., porque si nos situamos en el caso inicial de la investigación de la asociación estadística, cuando al alumno se le presenta el ítem 1, el 2 o el 3, debe de conocer los conceptos de correlación y de regresión y enmarcar el ítem 1 como caso que no puede resolverse por los procedimientos anteriores y entonces el profesor explicar teóricamente el significado de tablas de contingencia comparando las variables para ver si son independientes o no por un procedimiento más simple que la aplicación de la chi cuadrado.

En cuanto a las estrategias de resolución aplicadas por los alumnos: "Utilizar la tendencia constante, creciente o decreciente de puntos en los diagramas de dispersión para justificar el tipo de asociación; utilizar las medias o los totales para comparar la distribución de una variable de dos muestras distintas; comparar las frecuencias de casos a favor y en contra de la asociación en cada valor de la variable independiente o razón de estas frecuencias en tablas de contingencia 2xr" se pueden llevar también a cabo con los procediemtos clásicos de enseñanza.

En cuanto a los errores cometidos de "concepción determinista (relación entre las variables debe ser una función en sentido matemático), concepción unidireccional (concebir la dependencia solo cuando es positiva, considerando la asociación inversa como independencia), la concepción local (utilizar parte de los datos proporcionados) y concepción causal (solo considerar existencia de asociación entre variables si se puede atribuir una relación causal entre ellas)" es fruto de no haber comprendido el concepto utilizado y no aplicarlo correctamente.

En cuanto al proceso de comprensión por parte de los alumnos, íntimamente relacionado con los errores encontrados: El primero de "comparación de muestras en términos de frecuencias relativas y el segundo de comparación de toda la distribución de la variable en cada una de las muestras y no de una parte de la misma", son aspectos fundamentales en cualquier comparación. El papel de "condición y condicionado en la frecuencia relativa condicional" es fácilmente comprensible una vez que se ha estudiado la probabilidad condicionada y su relación con las tablas de contingencia. El cuarto y quinto punto, son a mi juicio fundamentales en ese proceso de independencia, sin embargo en caso de dependencia posiblemente sea más difícil de discriminar. Lo que sí me parece importante es la matización de que en la determinación de la asociación entre dos variables éstas juegan un papel simétrico, mientras que en el estudio de la regresión las variables desempeñan un papel asimétrico al haber dos rectas de regresión diferentes.

Las tres últimas referidas a la "correlación positiva, negativa y en valor absoluto", pueden ser fácilmente interpretadas y comprendidas utilizando la nube de puntos y la noción intuitiva de covarianza, así como la pendiente de la recta de regresión, bien de y sobre x o bien de x sobre y.

En cuanto al segundo experimento coincido con los autores del trabajo que "introduce un entorno más dinámico y versátil para estudiar la asociación". Sin embargo, previamente el alumno debe de conocer los conceptos estadísticos para poder aplicarlos, bien sea manualmente con lápiz y papel, o con el ordenador. Debe de saber lo que son intervalos de confianza, test de hipótesis, chi cuadrado, ..., si bien en su aspecto conceptual y aplicación práctica, no siendo necesario desembarcar con todas las demostraciones y casuística particulares porque el alumno no lo necesita, pero sí que tenga bien claro cada concepto, cuándo se puede aplicar y qué consecuencias se obtienen. El caso de M. Luisa, que aportan los autores, es un ejemplo de lo que decimos, debe conocer el significado del percentil 90 para poder utilizar el comando oportuno para su cálculo.

Si a un alumno que recibe un curso de Estadística utilizando el procedimiento clásico se le evalúa con una serie de problemas como los que citan los autores y se le habilita de herramientas -paquete estadístico conocido-, a buen seguro que obtendría resultados parecidos. Lo que no podrá ocurrir es que se le entregue al alumno una serie de casos con varias variables, tanto cuantitativas como cualitativas y tenga que resolverlos con ayuda de la calculadora y las tablas, utilizando los procedimientos clásicos, porque en el cálculo de la chi cuadrado o de la correlación o de la regresión, se le irá la mayor parte del tiempo, quedando para otra ocasión por falta de tiempo la posible aplicación de varias herramientas a un mismo problema para elegir la más adecuada.

Coincido con los autores en que “con el análisis exploratorio de datos se va más allá del aprendizaje de la estadística”, pues va a saber utilizar las herramientas estadísticas en el tratamiento de datos. Como necesita conocer los conceptos estadísticos para luego aplicarlos y saber interpretar los resultados, el tiempo que se requiere es bastante mayor y además conocimientos de software estadístico, por lo que creo que en un trabajo de tipo experimental de laboratorio es el procedimiento idóneo, pero en un trabajo de una asignatura con unos contenidos establecidos que deben ser finalmente evaluados, habría que cambiar totalmente las estructuras actuales para poder ser llevados a cabo con éxito.

Como conclusión decir que el trabajo llevado a cabo por los autores a lo largo de 1992-98 y del que aquí nos presentan una pequeña muestra, nos permite saber algo de lo que ha ocurrido en su investigación, pero no nos permite conocer el papel que ha tenido el ordenador en la construcción del significado de la asociación estadística, ya que un estudio paralelo llevado a cabo con otro grupo de control nos habría permitido establecer comparaciones tanto a la hora de la evaluación como a lo largo de su enseñanza-aprendizaje.

Es difícil resumir en tan solo unas páginas todo el proceso que han seguido los autores, pero quizás se debería haber acotado el campo de investigación y haberlo hecho más exhaustivo para haber conocido paso a paso el desarrollo de la investigación, el papel del profesor en todo el desarrollo, el proceso de enseñanza-aprendizaje, los errores cometidos, si había conocimientos previos o el alumno mediante ensayo-error iba deduciendo lo correcto o incorrecto, si al alumno tras una serie de fallos se le mostraba la aplicación correcta, etc.

Como puntos que pueden ser tratados en este debate, además de lo comentado anteriormente, son:

-Los autores dicen “nuestra investigación se orientó a valorar el impacto que una experiencia de aprendizaje usando ordenadores tiene en dichas concepciones iniciales sobre la asociación” (pág. 4) y más adelante lo vuelven a matizar “El objetivo de nuestra investigación era valorar este impacto (de la tecnología) en el caso específico de la asociación estadística” y sin embargo en sus conclusiones finales no se menciona la asociación sino que se hacen unas reflexiones finales encabezadas por las cuatro preguntas iniciales de esta réplica

-En lugar del relato de la actuación de M. Luisa para la resolución de un problema me parece que hubiera servido de mayor aclaración el haber presentado uno relacionado con la asociación estadística ya que es el tema central del trabajo

-Los autores del trabajo consideran la “construcción del significado de la asociación estadística”, cuando en realidad las reflexiones finales las extienden a “reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística”. ¿Los resultados obtenidos en la muestra (estudio de la asociación), se pueden extender a la población (estudio de la estadística)?. Y llegados a este punto ¿con qué nivel de significación?, ¿con qué margen de error?

Como dicen los autores al finalizar “evaluar este tipo de experimentos es muy laborioso por la cantidad de datos generados (... y) es difícil transferir los resultados de la evaluación usando métodos tradicionales”, por lo que deberemos de aprovechar esta ocasión para que nos completen algunos de los aspectos comentados anteriormente.

ANEXO

RESPUESTA DE LOS AUTORES DEL TRABAJO, *"LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA ASOCIACIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE ANÁLISIS DE DATOS: REFLEXIONES SOBRE LE PAPEL DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA"* A LAS CRÍTICAS Y COMENTARIOS REALIZADOS POR C. ABRAIRA Y A. NORTES.

Los autores agradecen a los profesores Abraira y Nortes Checa el interés mostrado por el tema, así como las nuevas ideas aportadas para continuar el trabajo sobre la asociación estadística. Desafortunadamente, el tiempo disponible en el Seminario no fue suficiente para contestar las numerosas preguntas realizadas en la réplica a nuestra ponencia. En lo que sigue tratamos de dar una respuesta resumida a estas preguntas, que pueden clasificarse en diversos tipos:

A) PREGUNTAS SOBRE EL OBJETIVO DEL SEMINARIO.

Nuestra intención era iniciar un debate sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística. Para ello hemos presentado el resumen de una investigación propia centrada en un concepto particular y, a partir de algunos de sus resultados hemos planteado las preguntas iniciales sobre las que basar el debate posterior. Queríamos mostrar cómo, a pesar de los conocimientos didácticos de los profesores, de la disponibilidad de potentes instrumentos de cálculo y representación gráfica, y de la planificación cuidadosa de la enseñanza, no todos los alumnos alcanzan los conocimientos pretendidos.

B) PREGUNTAS RELATIVAS AL MARCO TEÓRICO UTILIZADO EN LA INVESTIGACIÓN PRESENTADA COMO EJEMPLO EN LA PONENCIA.

El marco teórico sobre los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos ha sido desarrollado paralelamente al trabajo de investigación sobre la asociación estadística, por lo que su uso no ha sido el mismo en todas las fases de la investigación, aunque desde luego ha servido para analizar e interpretar los resultados y para estructurar el informe de investigación que se presenta.

Nuestra teoría de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teoremas, y en general cualquier objeto que interviene en la actividad matemática) constituye un modelo epistemológico propio, dentro de una aproximación semiótico-antropológica a la investigación en Didáctica de las Matemáticas, que está recibiendo un cierto respaldo como se pone de manifiesto en las publicaciones que se referencian en el trabajo.

Aunque otros autores usen términos que, en principio, puedan parecer similares, no lo son para nosotros, que hemos preferido usar una teoría que es, en cierto modo integradora de diversas posiciones cognitivas y didácticas. El significado está íntimamente unido a la idea de comprensión y ésta a la de aprendizaje, el cual esperamos que se produzca cuando organizamos secuencias didácticas específicas para la enseñanza de un cierto concepto, como la asociación. Un punto importante es la diferencia entre el significado institucional de un objeto matemático, por ejemplo, el que se pretende que los alumnos adquieran en una institución de enseñanza y el significado personal adquirido por cada alumno.

En relación a la investigación presentada el marco teórico ha servido, en primer lugar para analizar el concepto de asociación (los problemas de donde surge; los instrumentos que permiten representar u operar con el concepto; las propiedades y relaciones con otros conceptos), es decir los elementos extensionales, intensionales y representacionales de la asociación. Este análisis es la base para la construcción de los instrumentos de evaluación, la organización de los "experimentos" de enseñanza y la interpretación final de los resultados obtenidos.

C) PREGUNTAS RELACIONADAS CON LA METODOLOGÍA UTILIZADA EN DICHA INVESTIGACIÓN Y LAS POSIBILIDADES DE EXTENSIÓN DE SUS CONCLUSIONES A OTRAS MUESTRAS DE ALUMNOS.

Puesto que la investigación se ha desarrollado en un período dilatado de tiempo, y ha tenido varias fases, se han empleado diferentes metodologías. El objetivo ha sido diferente en cada una de ellas, incluyendo el estudio de concepciones iniciales, el diseño de una enseñanza basada en el uso de ordenadores y la evaluación del aprendizaje de los alumnos. El ordenador es un elemento importante del estudio pero no se puede aislar de los programas, ficheros de datos, problemas y actividades hechas en la clase.

En todo caso, creemos que nuestro trabajo no puede clasificarse como una investigación experimental en el sentido estricto del término, porque no hemos realizado manipulación perfectamente controlada de variables independientes.

En realidad se han combinado estudios cualitativos y cuantitativos, así como estudios de casos. Los datos se han tomado de cuestionarios, entrevistas, fichas de prácticas, proyectos de los alumnos; observación de alumnos y transcripción del registro de interacción con el ordenador, así como sus discusiones mientras trabajan. Para el estudio inicial de concepciones se han tomado muestras intencionales, mientras que en los experimentos de enseñanza los alumnos participantes son los que se han matriculado en una ciertas asignaturas. Por supuesto esto implica que hemos de ser muy cuidadosos antes de intentar generalizar nuestros resultados. Esto es propio y característico del enfoque interpretativo /cualitativo de investigación en el campo de las ciencias humanas y sociales.

Es también difícil comparar con un grupo que haya recibido enseñanza "tradicional", porque el disponer de ordenador ha implicado un cambio bastante grande en el tipo de problemas propuesto, los instrumentos disponibles para resolverlos y la gestión de la clase. En algunas de las fases se han usado comparaciones de tipo pretest- postest sobre la misma muestra de alumnos; también se han comparado sobre los mismos alumnos la resolución de problemas con y sin ordenador. Finalmente, otra investigación complementaria en curso permite comparar el aprendizaje con el de otras muestras de alumnos que han seguido un método expositivo tradicional.

Al realizar estas comparaciones hemos encontrado dificultades que se mantienen en todos los grupos, como la confusión entre correlación y causalidad y la confusión entre variable independiente (explicativa) y dependiente (explicada). Cuando la enseñanza se ha basado en el uso de ordenador hemos encontrado una mayor variedad de estrategias en la resolución de los problemas, aunque algunas de ellas han sido inadecuadas.

GRUPOS DE TRABAJO

CONCLUSIONES PRESENTADAS POR LOS COORDINADORES DE LAS SESIONES DE CADA UNO DE LOS GRUPOS DE TRABAJO

La moderadora Mª Victoria Sánchez informa que los coordinadores de cada grupo van a hacer un balance de su actividad en la Sociedad y, a continuación, se estudiará la posible creación de nuevos grupos de trabajo.

1. INFORME DE LA ACTIVIDAD REALIZADA POR LOS GRUPOS DE TRABAJO DURANTE EL CURSO 1997-1998

GEOMETRÍA

COORDINADOR: ANGEL GUTIÉRREZ

Este grupo ha tenido una actividad reducida, aunque no nula. El siguiente dato puede proporcionar una explicación: solamente ha habido dos personas en común entre la reunión del año pasado en Zamora y la de este año; esa diversidad de asistentes hace que las cosas sean más difíciles durante el año porque no hay una continuidad que es más fácil de llevar en otros grupos.

En todo caso, en la reunión de ayer se ha estado analizando la situación del grupo durante el año pasado y se ha hecho alguna crítica, constructiva evidentemente, de los resultados alcanzados a partir de las conclusiones a las que se llegó en Zamora.

La sesión de ayer se dedicó a una puesta en común con la presentación de los temas de interés o los temas actuales de trabajo de cada uno y, curiosamente, se ha visto que hay algunos temas de trabajo en los que hay coincidencia entre varios de los asistentes a la reunión. Ya se puede mirar con un poco de optimismo el futuro desde la perspectiva de la colaboración entre miembros del grupo, colaboración en el sentido de trabajo conjunto, que es uno de los objetivos que se plantea la SEIEM al crear los grupos de trabajo.

En otro plano un poco más general, no de colaboración directa sino de cooperación entre los miembros del grupo, se ha puesto más énfasis en la preparación de tareas para el próximo año. Por una parte, a lo largo de este curso pasado, se ha iniciado el trabajo de la puesta en común de material bibliográfico, de referencias etc. El coordinador del grupo ha recibido listas de referencias de todo tipo, artículos, tesis doctorales, libros, etc. para ir formando una base de datos bibliográficos especializada en los temas de geometría que pudiera servir como soporte para consultas, con la idea de ir perfeccionándola. La base actual está organizada por tipos de trabajos, libros, artículos, software, tesis doctorales. De cara al futuro, se pretende que esa base de datos sea más efectiva, organizando las referencias por contenidos temáticos más finos e intentando que además de una simple referencia haya algunas líneas de resumen que indique al lector por qué ese trabajo es interesante.

Puesto que una de las posibilidades que ofrece un grupo de trabajo es la de intercambiar información sobre los trabajos en curso o finalizados, y para conocer las memorias de los trabajos de investigación o materiales de enseñanza realizadas por los miembros del grupo a publicar por los cauces ordinarios de tipo comercial, se va a intentar explorar como una de las vías que los miembros del grupo envien al resto copias de los materiales que vayan produciendo, bien en versión definitiva, si es el caso, o bien borradores con el compromiso de comentar y debatir. Se ha estado discutiendo un poco, los pros y los contras que puede tener este tipo de actividad.

En tercer lugar, el grupo se ha comprometido a intentar la realización de una reunión a lo largo del próximo curso antes del próximo congreso y a explorar también la posibilidad de intercambio, de discusión electrónica, como una alternativa a la imposibilidad de una reunión real.

En resumen, este grupo se va desarrollando, el año pasado en Zamora se reunieron 5 compañeros, este año han sido 9; hay más personas que están interesadas en el grupo pero que por motivos diversos no han podido asistir. Aunque los comienzos están siendo lentos y complicados, se puede seguir avanzando y lograr que el grupo de Geometría funcione con una actividad más o menos continua durante el año.

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

COORDINADOR: ANTONIO ESTEPA

Informa Carmen Batanero puesto que el coordinador del grupo, Antonio Estepa, no ha podido venir por enfermedad.

Este grupo es también un poco atípico en el sentido de que hay un número importante de personas, todas en Granada y Jaén. En Granada ahora mismo están 8 personas involucradas, contando con los de Melilla, y 2 en Jaén. Como sólo han asistido dos personas del grupo, les ha parecido más apropiado preparar las conclusiones y el estudio de lo que se ha hecho este año por correo electrónico, ver quién más está incluido en este grupo y luego enviarlo al coordinador.

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO

COORDINADOR: BERNARDO GÓMEZ

El Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico tuvo una reunión con 15 asistentes. En primer lugar se excusó la no asistencia de Bernardo Gómez por problemas de salud, por ello el informe corrió a cargo de Luis Rico.

En esta reunión, la 5ª que tiene el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico, no se volvió a hacer una presentación de los trabajos de investigación de cada uno porque la mayoría conoce cuáles son sus trabajos e intereses. No obstante, se echó en falta la aportación de un documento básico por lo que se ha planteado la confección de una página web que pueda ser fácilmente consultada, de manera que cualquier persona que quiera integrarse al grupo tenga al menos unas referencias mínimas de cuáles son las prioridades y los intereses del grupo de investigación.

Se resumió el encuentro que tuvo el grupo en Valencia los días 7 y 8 de Mayo, cuya glosa salió en el Boletín nº 4, con un balance del pasado, una evaluación del presente y una dirección de futuro, que se manifestó en el encuentro de Valencia, consistente en la intención de que los trabajos de investigación no sean proyectos aislados, personales, sino que formen parte de un proyecto común. En esa perspectiva, se ha planteado la conveniencia de conformar un proyecto nacional de investigación centrado sobre Cognición Numérica y Algebraica de manera que se integren los resultados de estudios ya realizados y puedan servir de enganche o punto de partida a futuros proyectos de investigación.

Hecho este balance, vistas las referencias que ya existen y cómo, a partir de esas referencias o de esos trabajos realizados, podría generarse más información, se ha programado la próxima reunión del grupo de trabajo; ha coincidido con la elección del nuevo coordinador del grupo Alfonso Ortiz y así la próxima reunión del grupo de trabajo será en la Universidad de Málaga, a finales de Enero o principios de Febrero. Alfonso Ortiz ha quedado encargado de elaborar un guión de trabajo de manera que los miembros del grupo lleguen a la próxima reunión con documentos leídos o con decisiones avanzadas que permitan trabajar en este proyecto común que es difícil de desarrollar. No se pretende partir necesariamente de cero, este proyecto podría ser presentado a algunas de las convocatorias nacionales (DGICYT, CIDE).

Una vez concluido este balance de actuaciones y de perspectivas de futuro, algunos de los asistentes, en concreto María Ortiz de la Universidad de Valladolid, planteó un trabajo que ya tiene en curso y que podría servir como ensayo de esa colaboración entre investigadores de distintas universidades. Es un proyecto sobre Cálculo Mental en Formación de Profesores de Primaria y alumnos de Primaria. Ella ha quedado encargada de tomar la iniciativa de hacer una propuesta a algunos de los investigadores del grupo que trabajan en esa línea y ofrecer un diseño de investigación de manera que pudiese ser evaluado, criticado y puesto en práctica para el año 99 como referencia.

CONOCIMIENTO Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR

COORDINADOR: SALVADOR LLINARES

En la reunión de Zamora se acordó utilizar una parte del tiempo en la discusión de trabajos concretos y la otra parte dedicarla a proponer perspectivas de futuro. Desde ese punto de vista se planteó la posibilidad de realizar la discusión de algún documento o alguna investigación que estuviera en curso; este año, se han encargado los compañeros de la Universidad de Extremadura, en Badajoz. Lorenzo Blanco y Manolo Barrantes contaron en qué momento están y qué trabajo están haciendo; el título de la investigación era *"Análisis de las concepciones, creencias y perspectivas de los estudiantes para profesor de primaria sobre la enseñanza de la geometría"* y a partir de ese informe de progreso de la investigación se pudieron discutir asuntos que, transversalmente, han estado saliendo en muchas de las otras sesiones de este Simposio: la naturaleza de los datos, la necesidad de triangulización, la necesidad de fijar las nociones teóricas que se manejan, cómo se hacen operativas, pero aplicándolas, en concreto, a una investigación que se estaba intentando encauzar en ese momento.

La otra parte se dedicó a articular la memoria escrita del grupo, es decir, recoger currícula y publicaciones de tal manera que pudieran ser referente para quienes pudieran incorporarse en un futuro al grupo. Se vio la posibilidad de elaborar un documento oficial en el que estuvieran reflejadas las publicaciones del grupo y una segunda versión, más informal, en la que podría aparecer cualquier documento, publicado o no, con la intención de provocar debates, discusiones e intercambios de ideas.

La propuesta de trabajo es que viendo la utilidad de discutir trabajos concretos en estas sesiones se va a seguir en esa dirección; asimismo, se va a intentar una reunión intermedia entre los dos simposios. A juicio del grupo, fue muy positivo el hecho de que las discusiones surgieran a partir del análisis de una investigación o de un informe de progreso de una investigación, puesto que cuando realmente se ven las limitaciones es cuando un investigador intenta hacer operativa una noción teórica; en ese tipo de discusiones se pueden ver los avances que se van logrando. El grupo no es numeroso, eran 12 personas en la reunión, y posiblemente llegará un momento en que no haya mucho material para poder trabajar pero la idea es intentar, en la medida de lo posible desde el punto de vista de la infraestructura, mantener esa idea de discutir en el grupo trabajos en progreso que permitan ir adelantando en esta línea.

La moderadora informa que, como no hay ningún asistente de los otros grupos, les será comunicado a sus coordinadores lo que ha sucedido. Estos grupos recogen temas que merecen una especial atención, como la Historia de la Matemática y la Educación Infantil, pero lo cierto es que no han tenido respuesta hasta este momento.

2. CREACIÓN DE NUEVOS GRUPOS

A continuación, Mª Victoria Sánchez anima a aquellas personas que se crean capaces de crear un nuevo grupo a que lo hagan porque lo considera positivo para la sociedad y abre un turno de propuestas en la sala.

El profesor Juan Díaz Godino informa que en esta jornada, un grupo de personas ha estudiado proponer a la asamblea la constitución de un nuevo grupo de trabajo dentro de la SEIEM. Recuerda que desde el año 91 ha estado funcionando en España un Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas que ha celebrado periódicamente reuniones, discusiones, etc. Este grupo de personas son los que estarían interesados en solicitar autorización para constituir un nuevo grupo, abierto como cualquier otro grupo de la sociedad. Básicamente lo que se propone es profundizar, reflexionar sobre la naturaleza de las matemáticas desde diferentes perspectivas y, también, sobre la naturaleza de la didáctica de las matemáticas.

Josep Gascón amplía algunos puntos. El nombre exacto del grupo puede estar en discusión, pero lo más importante serían los objetivos. El tipo de trabajo se propone es el de intentar confluir algunas investigaciones ya realizadas y utilizarlas en cierta forma para poner a prueba los límites, el alcance de diferentes enfoques en didáctica de las matemáticas, tomando la didáctica como una ciencia científico-experimental; el aspecto teórico sería pues estudiar la posibilidad de integrar o por lo menos coordinar nociones de enfoques distintos, no de todos los enfoques que existen sino de algunos enfoques que aparecen próximos y en principio, hipotéticamente compatibles. Los enfoques a trabajar serían la teoría de situaciones, el enfoque antropológico, el enfoque de campos conceptuales y un tipo de enfoque de tipo semiótico que, en cierta forma, podría servir como enlace entre algunos de estos aspectos. Es un objetivo muy a largo plazo; no se pretende hacer en pocos años una integración que todavía puede estar lejana ni tampoco se excluye la introducción de otros enfoques de tipo cognitivo.

Interviene Luis Rico y señala el crecimiento de la Sociedad en estos años; desde Marzo del 96, primera reunión en Madrid, a Septiembre del 98 han transcurrido 2 años y medio y se ha duplicado, casi triplicado el número de socios. Obviamente, los grupos actuales responden fundamentalmente a los intereses de las personas que asistieron a la primera reunión en Madrid. Al ampliarse la sociedad, surgen nuevos intereses, o incluso algunos que en aquel momentos parecían prioritarios, irán desapareciendo o unificándose, etc.

Valora como un éxito de esta sociedad que grupos que actuaban un poco a espaldas unos de otros, vayan integrándose en un espacio común y en este sentido cree que es un motivo de satisfacción esta propuesta. Puesto que los estatutos de la sociedad no dicen nada sobre constitución de grupos, es práctica habitual que cuando un número suficiente de personas manifiesten su deseo trabajar o hacer converger sus intereses en una línea, para que eso tenga que ser respetado por todos los demás y por tanto no tiene sentido una autorización formal, sino simplemente comunicar quién va a ser el coordinador, qué dirección, etc. y una descripción de las ideas que expresadas por Juan Díaz Godino y Josep Gascon. A continuación, lee el siguiente texto del Boletín nº 0 que aclara el origen de los grupos actuales:

“La primera actuación de la sociedad fue iniciar el debate sobre campos de investigación prioritarios en educación matemática, para facilitar la constitución de grupos de trabajo entre sus afiliados. Con este fin, cada uno de los asistentes en aquella reunión, fue presentando brevemente sus líneas e intereses preferentes así como su experiencia previa como investigador. Varios tipos de descripciones surgieron en esta presentación ; por un lado, los trabajos se podían organizar atendiendo a las disciplinas matemáticas de sus contenidos ; por otro, también se podían organizar según criterios disciplinares (psicología, historia, epistemología, ciencias cognitivas, sociología, teorías curriculares, etapas del sistema educativo, formación del profesorado, metodología de investigación, etc.) todo ello con diferentes grados de explicitación y detalle.

Aun partiendo de la de que ambas organizaciones eran adecuadas, y en cierto modo complementarias, los asistentes optaron prioritariamente por hacer una primera elección reducida a campos que permitieran organizar las relaciones internas entre los asociados de una manera eficaz y servir de referencia para la organización de encuentros ; para ello optaron por una combinación de los dos criterios antes descritos, en el entendimiento de que los grupos constituidos son abiertos y no implican una clasificación rígida de los asociados en la investigación en Educación Matemática. Tampoco estos grupos agotan los intereses prioritarios de los investigadores, supone solo una forma práctica de comenzar a trabajar que se irá desarrollando y estructurando posteriormente."

Cree que este espíritu es importante mantenerlo, puesto que con esa idea se crearon los cinco grupos más el grupo común de Metodología en el que estaba la mayoría. Por ello considera que hay que entender esta propuesta en el sentido más abierto posible, que el grupo fije sus objetivos de manera que no suponga una patrimonialización excesiva de algún tópico, pero entendiendo que es un grupo abierto.

Finalmente solicita que cada vez que un grupo de investigación vaya a tener una reunión informe al resto de la sociedad para que aquellas personas que, aún no estando vinculadas directamente al grupo por múltiples razones, deseen asistir a la reunión, puedan hacerlo.

La moderadora cierra el debate y sugiere que tal vez, en el futuro, podría intentarse una reestructuración de la forma de trabajar en las jornadas. Si se crean grupos en los que aparezcan aspectos que cubran intereses más generales, las sesiones de trabajo de grupo se podrán dividir en dos tandas, de tal manera que una podría ser por tópicos y otra por temas más generales con el fin de facilitar incluso que se pueda asistir al debate de otro grupo. Hasta ahora no se procedía de este modo porque los grupos estaban bien establecidos. No obstante, puede ser también una sugerencia para tenerla en cuenta en futuras jornadas.

RELACIÓN DE PARTICIPANTES DEL 2º SIMPOSIO DE LA SEIEM

APELLIDOS Y NOMBRE	UNIVERSIDAD	GRUPO TRABAJO
Abraira Fdez., Concepción F.	León	CDPP
Arrieta Illarramendi, Modesto	País Vasco	AG
Azcárate Giménez, Carmen	A. Barcelona	DAM
Barrantes López, Manuel	Extremadura	CDPP
Batanero Bernabeu, Carmen	Granada	DEPC
Bedoya Moreno, Evelio	Granada	PNA
Blanco Nieto, Lorenzo J.	Extremadura	CDPP
Blázquez Martín, Sonsoles	Valladolid	DAM
Bolea Catalán, Pilar	Zaragoza	DEPC
Callejo De La Vega, Mª Luz	IEPS	CDPP
Camacho Machín, Matías	La Laguna	DAM
Carrillo Yánez, José	Huelva	CDPP
Castro Martínez, Encarnación	Granada	PNA
Castro Martínez, Enrique	Granada	PNA
Climent Rodríguez, Nuria	Huelva	CDPP
Cobo Lozano, Pedro	A. Barcelona	AG
Contreras González, Luis C.	Huelva	CDPP
Coriat Benarroch, Moisés	Granada	PNA
Chamorro Plaza, Carmen	Complutense	DEPC
Díaz Godino, Juan	Granada	DEPC
Escolano Vizcarra, Rafael	Zaragoza	PNA
Etxebarria Arraeta, Jon	País Vasco	EI
Etxeberria Martorell, Javier	P. de Navarra	PNA
Fernández García, Francisco	Granada	PNA
Fiol Mora, Mª Luisa	A. Barcelona	AG
Gairín Sallán, Jose Mª	Zaragoza	PNA
García Blanco, Mª Mercedes	Sevilla	CDPP
Gascón Pérez, Josep	A. Barcelona	DEPC
Gómez Alfonso, Bernardo	Valencia	PNA
Gómez Chacón, Inés Mª	IEPS	CDPP
González Astudillo, Mª Teresa	Salamanca	DAM

RELACIÓN DE PARTICIPANTES DEL 2º SIMPOSIO DE LA SEIEM

APELLIDOS Y NOMBRE	UNIVERSIDAD	GRUPO TRABAJO
González Marí, José Luis	Málaga	PNA
Guillén Soler, Gregoria	Valencia	AG
Gutiérrez Pereda, Guadalupe	País Vasco	CDPP
Gutiérrez Rodríguez, Angel	Valencia	AG
Huerta Palau, M. Pedro	Valencia	EI
Ibañes Jalón, Marcelino	I. Vega del Prado	AG
Jaime Pastor, Adela	Valencia	AG
Lacasta Zabalza, Eduardo	P. de Navarra	DAM
López Esteban, Mª Carmen	Salamanca	DAM
Luengo González, Ricardo	Extremadura	PNA
Luengo González, Ricardo	Extremadura	PNA
Llinares Císcar, Salvador	Sevilla	CDPP
Molina Ortín, Carmen	Zaragoza	AG
Moreno Moreno, Mª Mar	Lleida	DAM
Murillo Ramón, Jesús	La Rioja	AG
Nortes Checa, Andrés	Murcia	DEPC
Núñez Espallargas, José Mª	Barcelona	HEM
Ortega Del Rincón, Tomás	Valladolid	DAM
Ortiz Comas, Alfonso	Málaga	PNA
Ortiz Vallejo, María	Valladolid	PNA
Pardo Ruiz, Elisa	País Vasco	PNA
Pascual Bonis, José Ramón	P. de Navarra	PNA
Pinilla Fdez.-castañón, Mª Carmen	I. 7 Colinas	CDPP
Puig Espinosa, Luis	Valencia	PNA
Rico Romero, Luis	Granada	PNA
Rosich Sala, Nuria	Barcelona	AG
Ruiz López, Francisco	Granada	PNA
Sánchez García, Mª Victoria	Sevilla	CDPP
Sarmiento Escalona, Antonio	La Coruña	DAM
Segovia Álex, Isidoro	Granada	PNA
Servat Susane, Jordi	Barcelona	______

Grupos de Trabajo:

DAM: Didáctica del Análisis Matemático

AG: Aprendizaje de la Geometría

DEPC: Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria

PNA: Pensamiento Numérico y Algebraico

CDPP: Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor

EI: Educación Infantil

HEM: Historia de la Educación Matemática

RELACIÓN DE PARTICIPANTES DEL 2º SIMPOSIO DE LA SEIEM

APELLIDOS Y NOMBRE	UNIVERSIDAD	GRUPO TRABAJO
Sierra Delgado, Tomás A.	Complutense	DEPC
Sierra Vázquez, Modesto	Salamanca	DAM
Socas Robayna, Martín M.	La Laguna	DAM
Sordo Juanena, José Mª	Complutense	______
Turégano Moratalla, Pilar	Albacete	DAM
Villar Sanjurjo, Susana	E.U. Fomento	PNA

ÍNDICE