CONCEPTO DE LÍMITE FUNCIONAL: APRENDIZAJE Y MEMORIA

Sonsoles Blázquez*
Stella Nora Gatica**
Tomás Ortega*
*Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid. Valladolid (España)
**Universidad Nacional de San Luis (Argentina)

RESUMEN

El presente artículo forma parte de un proyecto de investigación sobre el concepto de límite funcional en el que se viene trabajando desde hace varios años. En este caso, se contrasta si la noción de límite ligada a la definición métrica perdura en la memoria de los alumnos más que la definición como aproximación óptima dada por Blázquez y Ortega en 2002. Se trata de un estudio empírico realizado con alumnos de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Luis (Argentina), que en cursos anteriores habían estudiado ambas conceptualizaciones.

ABSTRACT

This paper is a part of a research project on the concept of functional limit in which we have been working for a few years. We here contrast whether the notion of limit linked to metrical definition is kept in the pupils' minds better than the definition as a best (optimal) approximation offered by Blázquez and Ortega in 2002. We refer to an empirical study carried out with students of San Luis National University of Engineering (Argentina), who had studied both concepts in previous years.

1. Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación mucho más amplio sobre el concepto de límite, y se viene desarrollando desde hace unos cuantos años en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid. En los últimos 25 años este concepto ha sido objeto de numerosas investigaciones con orientaciones muy diferentes, y buena parte de ellas nos permitieron fundamentar nuestro proyecto. Entre los trabajos que tratan las concepciones del concepto destacan los siguientes: Tall, D. y Vinner, S. (1981) describen las imágenes conceptuales de los alumnos; Cornu, B. (1983) señala las concepciones y los obstáculos; Tall, D. y Schwarzenberger, R. (1978) estudian los conflictos que se producen en el aprendizaje del concepto de límite; Sánchez, C. (1997) hace un estudio basado en la génesis histórica del concepto; Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1998) describen las concepciones límite desde un punto de vista histórico. De las investigaciones que se centran en errores y dificultades destaca nuevamente Cornu (1983), que partiendo de los obstáculos epistemológicos construye una secuecia didáctica; en Sierpinska, A. (1985), se describe un estudio similar al de Cornu; Sierpinska A. (1987) trata de desarrollar el concepto a partir de situaciones didácticas que favorezcan la superación de los obstáculos detectados en el trabajo anterior y, en Sierpinska (1990), se describe su teoría de los actos de comprensión; Artigue, M. *et al.* (1995) explicitan una serie de dificultades asociadas a la conceptualización y a la formalización del concepto; Cornu (1991) resalta la transmisión didáctica de los obstáculos epistemológicos; Sánchez, C. (1997) vuelve a retomar el análisis de los obstáculos epistemológicos y didácticos. El tratamiento de los manuales también ha sido analizado por varios autores, entre ellos, Sánchez, C. (1997), que analiza manuales universitarios y no universitarios, y Espinoza (1998), que analiza manuales desde la perspectiva de los momentos didácticos. También se han investigado los procesos de enseñanza del concepto, destacando los siguientes trabajos: Robinet, J. (1983), que se sitúa en el marco de la ingeniería didáctica; Cornu, W. (1993), que destaca las actividades en un contexto de resolución de problemas; Berthelot R. y Berthelot C. (1983), que proponen la creación de una situación fundamental; Delgado, C. (1995) describe la evolución de los esquemas de los alumnos universitarios en la adquisición de este concepto; Blázquez, S. y Ortega, T. (1997 y 1999) describen la importancia de las sucesiones como instrumento de aproximación didáctica al concepto de límite funcional; Blázquez, S. y Ortega, T. (1999 y 2000) presentan un planteamiento didáctico para la docencia del concepto de límite en la educación secundaria. Ya en este siglo, Blázquez, S. y Ortega, T. (2001a y 2001b) realizan un estudio sobre sistemas de representación en la enserñanza del límite y analizan las rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato; estos mismos autores en 2002 publican una nueva definición de límite funcional con la que venían trabajando años atrás; Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., Benegas, J. (2006) realizan un estudio comparativo de la definición métrica y la dada por ellos para establecer cuál de las dos es más sencilla y más apropiada para la docencia-aprendizaje del concepto.

2. Delimitación del problema

Ninguna de estas investigaciones se centra en analizar si este concepto perdura en la memoria de los estudiantes o, por el contrario, se olvida total o parcialmente con cierta rapidez. Nuestra experiencia parece indicarnos que el concepto de límite basado en la definición métrica se olvida con suma facilidad y que el olvido es total, y, como docentes, nos preguntamos si vale la pena desarrollar un concepto que se olvida tan pronto o intentar dar otro enfoque menos formalista, que no se olvide con tanta facilidad y, que si no conserva el rigor absoluto, que al menos perdure el carácter instrumental necesario para afrontar con éxito los estudios de matemáticas que se basan en este concepto, y que tienen que realizar estos alumnos. Éste es el núcleo del problema que constituye el objetivo de esta investigación: averiguar la permanencia temporal de las conceptualizaciones de límite funcional en la memoria de los alumnos. Más concretatamente se trata de dar respuesta al siguiente problema:

Hipótesis de trabajo: **De las posibles conceptualizaciones de límite funcional, las ingenuas son más perdurables en la memoria de los alumnos que las rigurosas y, de éstas, la métrica es más difícil de recordar que la conceptualización como aproximación óptima.**

3. Conceptualización como aproximación óptima

Con el fin de facilitar la confrontación entre la definición métrica de límite funcional, que figura en todos los manuales de Análisis Matemático, y la definición como aproximación óptima dada por Blázquez y Ortega (2002), a continuación se reproduce esta última.

El punto de partida está en las ideas básicas de aproximación y de tendencia que se pueden esbozar numéricamente como sigue: 1, 1.1, 1.11, 1.111, ... es una sucesión de números reales que se aproxima a 100, pero es evidente que no tiende a 100. Sin embargo, la misma sucesión se aproxima a 10/9 y tiende a 10/9. La diferencia estriba en que, en el primer caso, fijada una aproximación de 100, 2 por ejemplo, ésta no es mejorada por los términos de la sucesión; sin embargo, en el segundo caso, fijada una aproximación arbitraria de 10/9, distinta de 10/9, es posible encontrar un término de la sucesión, tal que a partir de él todos los que le siguen están más próximos a 10/9 que la aproximación fijada.

Esta reflexión permite a los autores citados definir los límites secuencial y funcional evitando tanto el formalismo, pero no el rigor, como el subjetivismo de Cauchy y el impersonalismo de Heine (se dice) estos últimos aún presentes en manuales actuales, descritos por Blázquez, Gatica y Ortega (2009). Las definiciones de límite secuencial y límite funcional que que proponen Blázquez y Ortega son éstas:

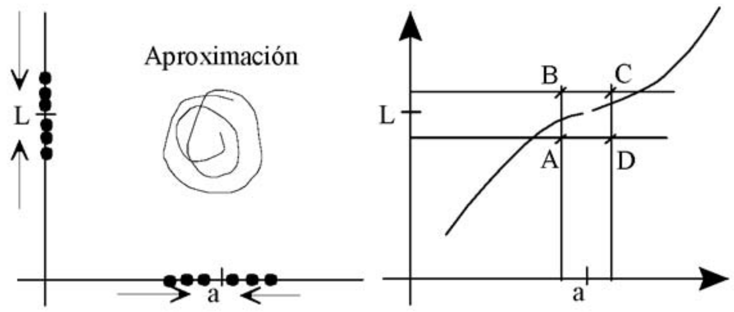
> L es el límite de una sucesión si para cualquier aproximación K de L, $K \neq L$, existe un término de la sucesión tal que todos los que siguen a éste están más próximos a L que K.
>
> El límite de la función f en $x=a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K \neq L$, existe una aproximación H de a, $H \neq a$, tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de a que H están más próximas a L que K.

Esto equivale a decir que:

> El límite de la función f en $x=a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K \neq L$, existe un entorno reducido de a, tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a L que K.

Utilizando la significación de tendencias establecida antes: El límite de la función f en $x=a$ es L si cuando x tiende a a, sus imágenes $f(x)$ tienden a L.

Esto se refleja de forma directa en el gráfico de la izquierda, mientras que el gráfico de la derecha representa a las dos primeras acepciones: cualquier aproximación a L (distinta de L) determina una banda horizontal que contiene a L y cualquier aproximación a a (distinta de a) define otra banda vertical que contiene a a y recíprocamente. Por tanto, fijada una banda horizontal que contiene a L, existe una banda vertical que contiene a a tal, que la gráfica de la función tiene que atravesar el rectángulo *ADCB*



exclusivamente por los segmentos *AB* y *CD*. Es evidente que está representación no está ligada al grafo de la función y que éste se puede dibujar después o no.

5. Marcos teórico y metodológico

Como ya se ha indicado antes, este trabajo forma parte de una investigación mucho más amplia en la que se han tenido en cuenta los marcos teóricos descritos por los autores citados en la introducción, especialmente el referido como actos de comprensión de Sirpinska. Sin embargo, el análisis de esta investigación requiere un marco teórico diferente, marco que es proporcionado por el binomio que forman aprendizaje y memoria, del que se hace un breve apunte a continuación y que, sin duda, es una aproximación de los procesos mentales que se producen en los alumnos.

Aprendizaje y memoria

Aunque en las referencias a la memoria, generalmente, se considera un único sistema, mediante el cual se produce el almacenamiento y la recuperación de la información, en la actualidad se considera que coexisten varios sistemas de memoria que varían en función de la percepción (visual, auditiva) y de la duración de almacenamiento (que puede oscilar desde fracciones de segundo hasta toda la vida) y cuya capacidad es flexible a todo este almacenamiento. Si se refiere a acontecimientos personales se habla de la memoria episódica y si registra una información sobre datos generales no vividos se habla de la memoria semántica.

Por otra parte, resulta evidente que el aprendizaje tiene que ver con el registro y almacenamiento de la información, y que el uso de esta información sólo es posible si se accede a la misma de forma apropiada y en el momento requerido, pero no es menos evidente que los procesos de enseñanza-aprendizaje juegan un papel crucial. El esquema que se ha seguido en la instrucción de los alumnos coincide con las cuatro pautas de aprendizaje que según Baddeley (2003) influyen en su memorización:

- Presentación del contenido.
- Práctica.
- Relación de la nueva información con la que ya se sabe.
- Activación de alguna forma de consolidación.

Por otra parte, este mismo autor, también indica que la memorización aumenta con el tiempo dedicado al aprendizaje, que la motivación tiene una importancia considerable en la memoria prospectiva (acordarse de lo que uno tiene que hacer en el momento preciso), que la intención de aprender ayuda a procesar la información con interés, y que el aprendizaje mejora con intervalos de descanso entre ensayos, afirmando que "... *un ítem se aprenderá y recordará mejor si sus presentaciones sucesivas son separadas de forma relativamente larga, aun cuando el intervalo entre las presentaciones se rellene con otros ítems" (pág. 134).*

Ya se ha indicado que, en nuestro caso, los procesos de enseñanza y aprendizaje se han desarrollado siguiendo las cuatro pautas de Baddeley, pero además se ha intentado motivar a los alumnos y se ha presentado la información en sucesivos períodos lectivos, combinando actividades teóricas y prácticas. Por otra parte, conviene indicar que de las dos conceptualizaciones que son objeto de este estudio, la que se basa en el concepto de aproximación óptima utiliza una terminología más próxima a la cultura de los alumnos y, por tanto, pensamos que ésta produce unos aprendizajes más significativos.

De la multitud de sistemas de memoria que en la actualidad se consideran que coexisten, M.F. Calleja (2005), cada uno con una función específica, nos interesan particularmente la memoria semántica y la memoria de trabajo. La primera, según A. Winfgfield y D.L. Byrnes (1988, pág. 166) es la que *organiza los segmentos de información y la manera en que las relaciones semánticas podrían estar representadas en un sistema de este tipo* y, por tanto, en nuestro caso se basa en la significación de los conceptos y en las relaciones que el alumno establece entre ellos. Un apunte más práctico es el que hace Baddeley (2003, pág. 124) al indicar *que esta memoria* contiene el tipo de información que constituye el grueso de lo que aprenden los estudiantes. Esta información no es la que aprenden los alumnos para hacer un examen, ya que las teorías de red semántica sobre organización de la memoria asumen que los conceptos son almacenados en la memoria a largo plazo, dentro de redes de asociación significativa, organizadas de manera jerárquica, y los conceptos, que son parte de la misma red, comparten algún grado de vinculación.

La memoria de trabajo se concibe como sistema para atender y manipular la información temporalmente de una amplia serie de etapas cognitivas esenciales como el aprendizaje, el razonamiento y la comprensión, y es la que permite manipular, calcular, generar estrategias de solución. Esta memoria es la que posibilita realizar las tareas que se proponen a los alumnos en matemáticas y, aunque se produzca el olvido (que es una característica de memoria semántica y que es necesaria debido a la limitación física de nuestro cerebro) junto con la memoria semántica, la memoria de trabajo es la que permite realizar pruebas como la que se analiza aquí sobre aprendizajes lejanos, y cuyo análisis va a indicar el grado de aprendizaje significativo alcanzado por los alumnos en relación con cada una de las conceptualizaciones.

Por otra parte, en la investigación que se viene desarrollando se utiliza un marco metodológico cualitativo, la Investigación-Acción, inspirado en las obras de S. Kemmis y R. Mactagart (1988), D. Hopkins (1989), J. Elliot (1990) y G. Pérez (1994), y el trabajo que aquí se describe aflora en él tras un ciclo exploratorio y dos ciclos de Investigación-Acción.

La experimentación

Con el propósito de poder constatar la hipótesis formulada, en el mes de Agosto de 2005, a los 35 alumnos que en ese momento cursaban la asignatura Probabilidad y Estadística (segundo año de la carrera, segundo cuatrimestre) se les pidió que respondieran a una cuestión sobre límite funcional. Se seleccionó este grupo de alumnos teniendo en cuenta que la mayor parte de ellos habían aprendido (estudiado) este concepto un año y medio atrás (primer cuatrimestre curso lectivo 2004), pero también, dentro del grupo, se encontraban estudiantes que cursaron la asignatura en el primer cuatrimestre de 2001, otros en el primer cuatrimestre de 2002, y otros en el primer cuatrimestre de 2003. Todos estos alumnos habían aprobado la asignatura, Análisis Matemático I, donde se desarrolla el concepto de límite funcional. La profesora investigadora fue quien se encargó de impartir el concepto de límite de una función en los años anteriores en el primer curso de carrera de los alumnos de Ingeniería, y también esta profesora es responsable de la asignatura Probabilidad y Estadística del segundo año de los mismos Alumnos. Durante una de las clases, en esta última materia, solicitó a los alumnos que respondieran a la siguiente pregunta.

- Escribe la definición de límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0.

Los alumnos debían escribir la respuesta utilizando la definición métrica y la definición como aproximación óptima y, como ya se ha indicado, el objetivo de la cuestión consistía en averiguar si los alumnos recordaban tales definiciones y, de las dos modalidades en las que fueron instruidos, determinar cuál era la que ocupaba un lugar preferente en sus evocaciones.

Los alumnos se sintieron sorprendidos, por lo que en un primer momento manifestaron su desconcierto, y muchos pensaron que se trataba de un concepto fundamental que debían recordar y que influiría en el desarrollo de la nueva asignatura. La profesora, entonces, les explicó que la respuesta no se tendría en cuenta en esta asignatura, que se les hacía esa pregunta con el propósito de continuar una investigación que ella venía realizando sobre la conceptualización de límite. Muy brevemente les hizo recordar que cuando se desarrolló el tema de límites funcionales, les habían enseñado distintas definiciones del concepto, y que debían escribir aquellas que recordaran y comprendieran mejor.

Se considera que los alumnos respondieron a la cuestión planteada con interés, ya que mientras que estuvieron elaborando la respuesta, alrededor de quince minutos, mantuvieron un silencio absoluto y, tratando de evocar las definiciones, hicieron esquemas en borrador antes de hacer la redacción final.

Análisis de las respuestas

De los 35 alumnos que respondieron a esta cuestión, 1 de ellos había cursado Análisis Matemático I durante el primer cuatrimestre del año 2001, 3 alumnos lo habían hecho durante el primer cuatrimestre del año 2002, 13 en el primer cuatrimestre 2003 y los restantes, 18 alumnos, durante el primer cuatrimestre del año 2004.

Por otra parte, para el análisis de las respuestas, también se tuvieron en cuenta los registros de representación (Duval, 1998), en los que los estudiantes se expresaron para explicar este concepto, y el tiempo transcurido desde que tuvo lugar la docencia de estos conceptos en la Facultad.

A pesar de que Duval establece que para la comprensión integradora de un concepto es necesario que el alumno sea capaz de realizar conversiones entre registros, en esta parte de nuestra investigación no consideraremos este aspecto del aprendizaje como una cuestión principal, ya que el mismo ha sido analizado en Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., Benegas, J. (2006) y nuestra atención principalmente se centrará en lo que los alumnos recuerdan, qué conceptualización tuvo mayor peso o cuál perduró más en la memoria de los alumnos.

Como ya se ha indicado, el interés de nuestra investigación se centra en dilucidar las preferencias de los alumnos entre las definiciones métrica y como aproximación óptima, y aunque hay alumnos que responden de forma ingenua y, en consecuencia son difíciles de clasificar, diremos que el alumno utiliza una conceptualización u otra si la terminología que emplea está más próxima a la que en su día describió el profesor en cada uno de los casos. La puntuación alcanzada en cada caso va a determinar lo niveles de evocación de cada uno.

Se confeccionó una tabla con las respuestas de los alumnos y en ella, además del año en el que cursaron sus estudios, se plasmaron los siguientes aspectos: tipo de conceptualización, el registro verbal y los registros gráfico y algebraico en relación con la definición que utilizaron.

Dentro de cada una de estas definiciones se consideraron dos subcolumnas con la separación de registros en las que pueden ser explicadas (registros verbal y gráfico para aproximación óptima y registros algebraico y gráfico para la conceptualización métrica). Cada alumno fue calificado en una escala que va desde el 0 al 10.

La pregunta fue formulada para que la contestaran por escrito los 35 alumnos presentes en el aula; todos siguieron las instrucciones de la profesora y escribieron la respuesta, excepto dos de ellos que la dejaron en blanco, alegando que no recordaban el concepto y, aunque estas alegaciones habría que considerarlas como indicadores de las dificultades de evocación del concepto, no figuran en la tabla, ya que no van a influir en la predilección de ninguna de las concepciones.

Lo primero que llama la atención es la cantidad de alumnos que tratan de responder utilizando la definición basada en la aproximación óptima exclusivamente y, sobre todo, que ningún alumno responde exclusivamete en los términos de la conceptualización métrica. Para ser más precisos, se construye la siguiente tabla que explicita los resultados de los registros asociados a ambas definiciones.

Tabla de resultados

33 alumnos	**Aproximación óptima (AO)**			**Métrica (M)**			**AO y M**
Registros	**Verbal**	**Gráfico**	**Única**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Única**	**Ambas**
Nº de respuestas	32	21	25	3	7	0	8

Como se aprecia en la tabla de resultados, en la conceptualización óptima se ha prescindido del registro algebraido y en la métrica del registro verbal. Esto es debido a que éstas son las representaciones que se utilizan de forma más natural en cada conceptualización: en el primer caso por tratar de evitar el formalismo y en el segundo caso para expresar éste.

Curiosamente, ningún alumno que responde utilizando la conceptualización métrica, ocho en total, lo hace exclusivamente y todos ellos utilizan una representación verbal respondiendo a la conceptualización como aproximación óptima. Además, de los tres alumnos que dan una formulación algebraica, sólo dos hacen una conversión al registro gráfico. La figura 1 reproduce la respuesta de este alumno, el nº 2, que es incorrecta, y en ella se observan mezcla de las dos conceptualizaciones, el intercambio de los papeles de ε y δ, la mezcla de notaciones *(ε, δ, Δx)*, la no consideración de entorno reducido, la ausencia de los símbolos de existencia e implicación, la ausencia de relación entre el símbolo δ del texto simbólico y el Δx utilizado en la representación gráfica del entorno del punto x_0.

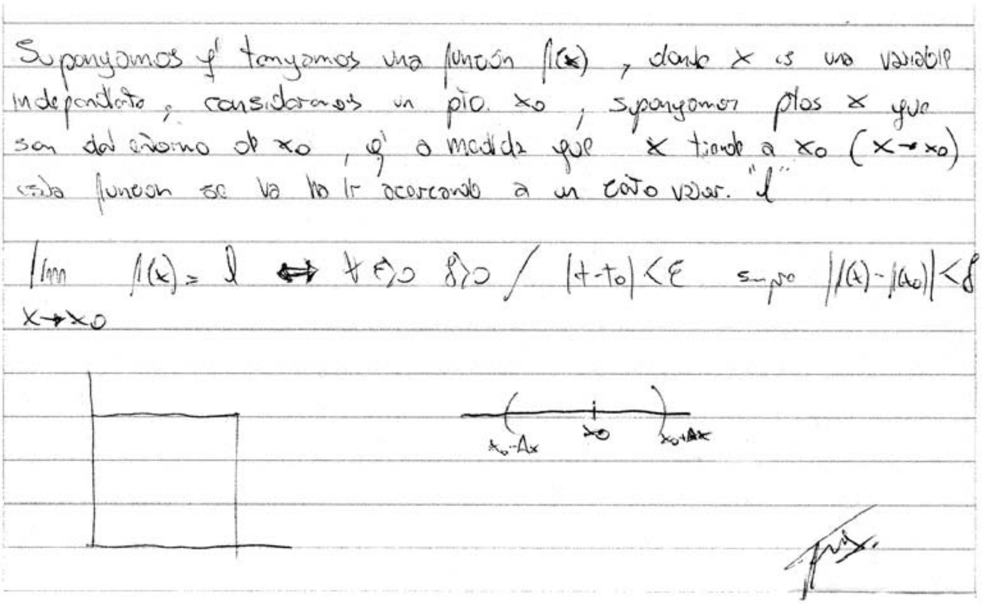


Figura 1. Respuesta del alumno n.º 2

De las 7 representaciones gráficas que hacen los alumnos en concordancia con una terminología métrica, sólo tres lo hacen exclusivamente, mientras que los cuatro restantes también utilizan representaciones en correspondencia con la conceptualización como aproximación óptima. Por lo general, estos alumnos fijan entornos del punto y del límite, pero en el texto que escriben hacen referencias a aproximaciones. A continuación, en la figura 2 se muestra una respuesta de estos alumnos como ejemplo, concretamente la del número 8:

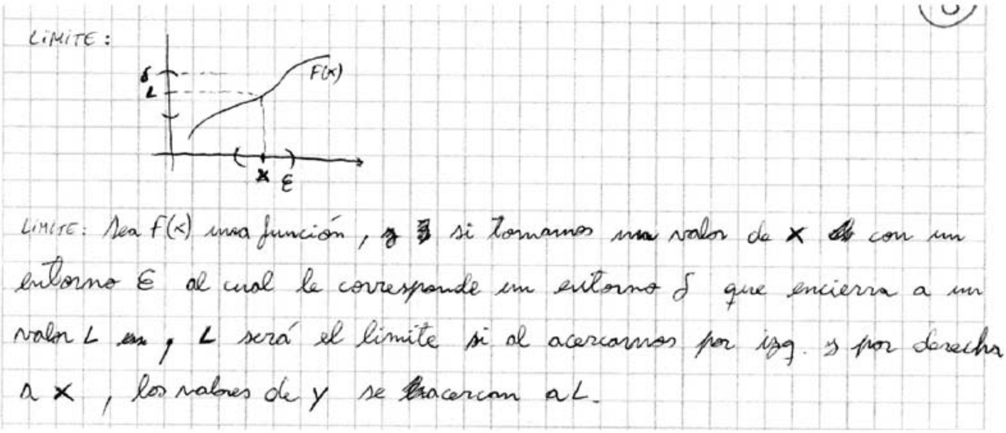


Figura 2. Respuesta del alumno n.º 8

Como resulta obvio, la respuesta de este alumno es incorrecta, pero conviene hacer una revisión de los errores que contiene: es muy subjetiva (tomamos, acercarnos); la redacción es muy imprecisa; parece que mezcla las dos conceptualizaciones, ya que se refiere tanto a ε y δ, como a aproximaciones; confunde los papeles de ε y δ; no escribe el simbolismo propio de las desigualdades; no considera entorno reducido del punto; identifica el punto con la variable independiente. Además de la imprecisión y de los errores que comete, no pasa de una conceptalización ingenua, tanto como métrica como aproximación óptima.

Aunque buena parte de las respuestas son incorrectas, sin embargo, es interesante valorar la puntuación alcanzada por los alumnos que responden utilizando ambas definiciones. Utilizando una escala decimal, con la definición de límite como aproximación óptima las respuestas suman 110 puntos, mientras que con la definición métrica sólo llegan a 38 y las respectivas medias aritméticas son 3'33 y 5´43. A la vista de estas puntuaciones, podríamos estar tentados de considerar que estas medidas de centralización son el reflejo de la realidad y, por tanto, concluir que la conceptualización métrica es la que mejor recuerdan los alumnos. Sin embargo, el análisis cualitativo de las respuestas nos indica que esa percepción es engañosa y que está muy alejada de la realidad, ya que los alumnos responden lo que saben, y entendemos que muchos de los que obtienen puntuaciones bastante bajas con la primera conceptualización con la segunda obtendrían cero puntos. Sí que es significativa la diferencia entre las puntuaciones medias de los alumnos que responden a las dos conceptualizaciones, 5´86 para la conceptualización como aproximación óptima frente a 5'43 para la conceptualización métrica.

La figura 3 reproduce la respuesta del alumno número 13 y es un ejemplo de esta situación. Interpretando conjuntamente el texto que ha escrito y la gráfica, dentro de la incorrección, parece que intenta plasmar la conceptualización como aproximación óptima, aunque se queda en algo totalmente ingenuo, y gráficamente podría haber querido señalar un indicio de la conceptualización métrica en las bandas horizontal y vertical que dibuja, pero no se puede hacer ninguna valoración positiva desde la perspectiva métrica.

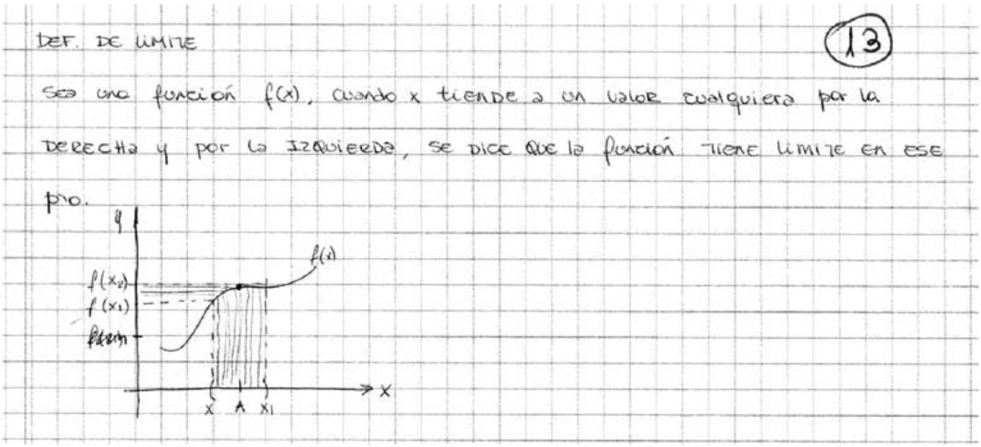


Figura 3. Respuesta del alumno n.º 13

En relación con el período transcurrido desde que realizaron estos estudios, las puntuaciones medias de las respuestas de los alumnos fueron las siguientes: año 2001, media 1,00; año 2002, media 1,33; año 2003, media 2,08; año 2004, media 4,33. Estos datos hacen referencia a la memoria a largo plazo, y se observa un olvido progresivo de las definiciones, de tal manera que con el paso de un par de años el olvido, en la mayor parte de los alumnos, es casi total; de hecho, en el período 2001-2003 la moda es 1.

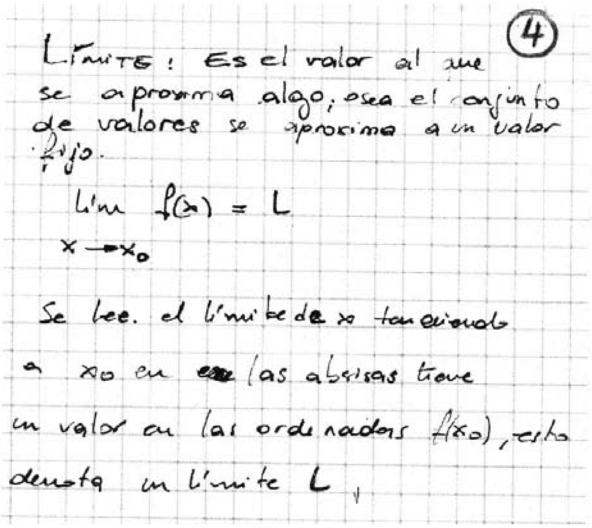
Por otra parte, la teoría de la representación semiótica de Duval (1998) asegura que para que se produzca una comprensión integradora de un concepto es necesario que el alumno sea capaz de expresar el concepto al menos en dos registros diferentes. Utilizando las propias palabras de Duval (1998, 15)

> *En los sujetos una representación puede funcionar verdaderamente como una representación, es decir, darle acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso, …, y que puedan convertir "espontáneamente" de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo.*

En nuestro caso, aunque interviene la memoria a largo plazo, que tiene otras características diferentes que la memoria a corto plazo y que la memoria semántica, las respuestas de los alumnos corroboran la aseveración de Duval, ya que los alumnos que responden utilizando tres registros (gráfico, métrico y como aproximación óptima) obtienen puntuaciones mucho más altas que el resto aún cuando todos estos alumnos estudiaron los conceptos el último año. La puntuación media global de las dos conceptualizaciones que alcanzan estos alumnos es de 5,64 puntos, que es muy superior a la media del resto, que sólo alcanza 2,15 puntos, sin tener en cuenta que en el registro métrico no ha habido respuestas puntuables.

Como reflexión general se puede afirmar que casi todos los alumnos que utilizan la definición métrica cometen errores en sus respuestas, se expresan con notable imprecisión y sólo dos utilizan el simbolismo del valor absoluto. Ningún alumno considera que el entorno del punto sea reducido y aproximadamente la mitad de ellos intercambian los papeles de ε y δ.

En cuanto a las respuestas desde la perspectiva de la aproximación óptima, el error más frecuente es considerar aproximaciones básicas, no tendencias, como la del alumno número 4, que se reproduce en la figura 4. Este alumno considera aproximaciones ingenuas de los valores de la función y, sólo como lectura del simbolismo de límite, hace referencia a tendencias de la variable independiente. Además, indica que el límite es el valor de la función en el punto. En consecuencia, este alumno y muchos otros se quedan en una definición ingenua.



4

Límite: Es el valor al que se aproxima algo, osea el conjunto de valores se aproxima a un valor fijo.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Se lee. el límite de x tendiendo a x_0 en las abscisas tiene un valor en las ordenadas $f(x_0)$, esto denota un límite L.

Figura 4. Respuesta del alumno n.º 4

Hay otros alumnos que en el texto sólo hacen referencia a aproximaciones (tendencia) de la variable independiente, y aunque en la gráfica parece que tienen en cuenta valores de la función, lo cierto es que no lo expresan verbalmente. La figura 5, que muestra la respuesta del alumno 16, es un ejemplo de este caso.

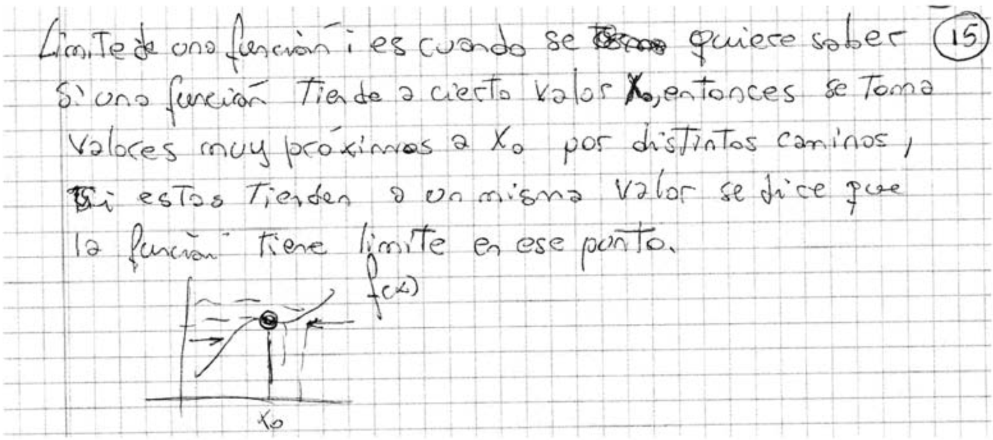


Figura 5. Respuesta del alumno n.º 15

Al igual que con las representaciones métricas, son muy pocos los alumnos que representan de forma gráfica que el entorno del punto debe ser reducido, incluso hay nueve alumnos que consideran que en el punto donde se considera la definición de límite la función alcanza un máximo, como por ejemplo el alumno 23, cuya respuesta se presenta en la figura 6.

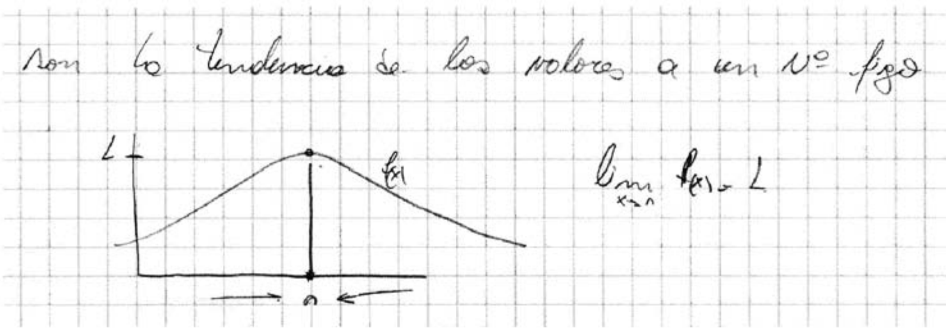
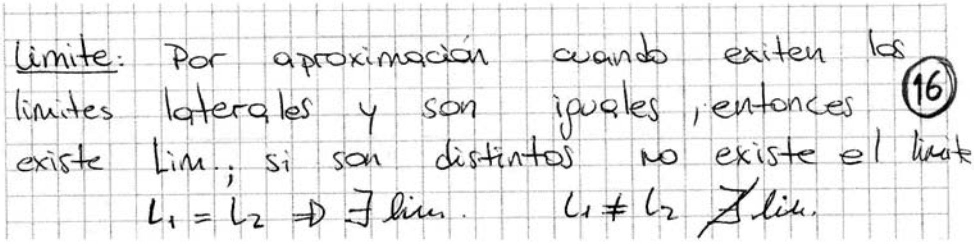


Figura 6. Respuesta del alumno n.º 23

Finalmente, unos pocos alumnos, implícita o explícitamente, consideran como definición de límite el teorema de caracterización. La figura 7 representa la respuesta del alumno 16, que responde a estas características.


Limite: Por aproximación cuando exiten los limites laterales y son iguales, entonces existe Lim.; si son distintos no existe el limit 16

$L_1 = L_2 \Rightarrow \exists$ lim. $L_1 \neq L_2$ $\nexists$ lim.

Figura 7. Respuesta del alumno n.º 16

Conclusiones

Lo primero que llama la atención es la cantidad de respuestas tan diversas que emiten los alumnos y las dificultades que tienen para escribir la definición de límite funcional, y, en muchos casos en una definición ingenua.

La mayoría de los alumnos que respondieron a la cuestión utilizaron la definición basada en la aproximación óptima exclusivamente, mientras que los alumnos que responden con la definición métrica también lo hacen utilizando la definición como aproximación óptima.

En general, comenten muchos errores con ambas definiciones, pero hay una diferencia esencial entre una y otra: los errores que cometen los alumnos son menores cuando utilizan la definición como aproximación óptima, posiblemente porque ésta última tiene una representación verbal directa, mientras que la definición métrica precisa de un registro simbólico. Por otra parte, son más correctas las respuestas que se basan en la definición como aproximación óptima, lo que pone de manifiesto que esta definición se almacena en la memoria de trabajo mejor que la definición métrica y, por esta razón, aquella es evocada con mayor facilidad y, por tanto, a la larga aporta una mayor formación.

Desde otra perspectiva, teniendo en cuenta la teoría de Duval, los alumnos que responden utilizando tres registros obtienen puntuaciones más altas, lo que corrobora su hipótesis sobre la comprensión integradora de un concepto.

En suma, se verifica totalmente la hipótesis de trabajo, siendo la definición ingenua la que mejor recuerdan los alumnos, mientras que de las definiciones rigurosas la métrica es menos perdurable en la memoria que la definición basada en el concepto de aproximación óptima.

Bibliografía

Baddeley A. (2003). *Memoria Humana: Teoría y Practica.* Ed. McGraw-Hill/Interamericana de España. Madrid.

Berthelot, R. y Berthelot, C. (1983). *Études en Didactique des Mathématiques. Quelques apports de la théorie des situations á l'etude de l'introduction de la notion de limite en classe première A.* Bordeaux: Université de Bourdeaux I.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1997). Las sucesiones como instrumento de aproximación didáctica a los conceptos de función y límite funcional. *Actas de las VIII JAEM*. Salamanca: 277-281.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1999). Didáctica del Análisis en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Concepto de límite. En, T. Ortega (ed.): *Temas controvertidos en Educación Maatemática.* Valladolid: SAE de la Universidad de Valladolid, 121-154.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. pp. 331-354. ISBN: 970-625-246-0. México.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enserñanza del límite. Vol 4. Nº3, 219-236. *RELIME.* ISSN: 1665-2436. México DF.

Blázquez., S. y Ortega, T. (2001). Rupturas en la comprensión del conecpto de límite en alumnos de bachillerato. *AULA, Vol. 10, pp. 117-133.* ISSN: 0214-3401. Salamanca.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO. REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. Vol. 30, pp. 67-82.* Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Diversas conceptualizaciones de límite funcional. Análisis comparativo. *ÉPSILON*, n.º 68, vol 24(3), pp. 7-29.

Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *RELIME.* ISSN: 1665-2436. México DF. (en prensa)

Calleja, M.F. (2005). Mapas conceptuales: Escuelas y Procesos Psicológicos. Maxtor. Valladolid.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (ed.): *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, 153-166.

Delgado, C. (1995). *Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales de alumnos universitarios en su proceso de aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad.* Tesina del Dpto. de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Cinvestav, México: Hitt, F. (Ed): Departamento de Matemática Educativa.

Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en educación.* Morata. Madrid.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de función. Del pensamiento del profesor a la gestión de los* momentos *del estudio.* Tesis doctoral. Dpto. de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Hopkins, D. (1989). *Investigación en el aula*. PPU, Barcelona.

Kemmis, S. y Mctaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Laertes. Barcelona.

Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes.* La Muralla, Madrid.

Robinet, J. (1983). Un experience d´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 4.3, 223-292.

Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendiaje de la noción de límite de una función*. Tesis doctoral. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada.

Sierra, M, González, Mª T. y López, Mª C. (1998). Límite funcional y continuidad: desarrollo histórico y concepciones de los alumnos. *Actas del V Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*. Toro: SCLPM (en prensa).

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 6.1, 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Math,* vol 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol 10.3, 24-36.

Tall, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, vol 82, 44-49.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math,* vol 12, 151-169.

Wingfield A. y Byrnes D. (1988). *Psicología y Memoria Humana.* Ed. Trillas. México.