EMPLEO DIDÁCTICO DE JUEGOS QUE SE MATEMATIZAN MEDIANTE GRAFOS. UNA EXPERIENCIA

Jorge Martín Morales
José María Muñoz Escolano
Antonio M. Oller Marcén
Universidad de Zaragoza

RESUMEN: En este trabajo se presenta una actividad orientada a que los alumnos, de diversos niveles educativos, (desde Enseñanza Secundaria hasta Universidad) sean capaces de percibir y reproducir procesos de matematización. En concreto, algunos juegos educativos matemáticos se modelizan utilizando aspectos esenciales de la teoría de grafos que sirven para resolver distintas cuestiones surgidas al hilo de un análisis de dichos juegos.

ABSTRACT: In this paper we suggest an activity that allow students of different educational levels (from secondary school to higher education) to comprehend and apply modelling processes. Specifically, some educational mathematical games are modelled using basic notions of graph theory in order to solve several questions related to the analysis of such games.

PALABRAS CLAVE: Educación Matemática, Matematización, Modelización, Juegos matemáticos, Grafo.

KEYWORDS: Mathematical Education, Mathematization, Mathematical modelling, Mathematical games, Graph.

1. Introducción, contexto y objetivos

Los orígenes del material que aquí presentamos son diversos. Parte del mismo surge de diversas sesiones realizadas, con alumnos de secundaria, en el Taller de Talento Matemático de la Universidad de Zaragoza[1], mientras que otra parte fue diseñada en un principio para la implementación con alumnos de la Licenciatura de Matemáticas en las Universidades de Sevilla y Zaragoza. Ambas propuestas se sintetizaron en una actividad conjunta dentro del curso "Matemáticas, Arte y Entrete-

1. www.unizar.es/ttm.

nimiento" de la XXIII edición de la Universidad de Verano de Teruel. Esta tarea desembocó, finalmente, en una invitación a impartir una charla, sobre el tema, en el Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas organizado por el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja[2].

La motivación principal de este artículo es presentar actividades que ilustren ante el alumno procesos de matematización. La importancia de estos procesos, como comentaremos más adelante, queda clara a la luz del peso específico que se les asigna en el estudio PISA/OCDE así como por su presencia en los currículos oficiales. Sin embargo, esta importancia no siempre viene reflejada en el diseño de actividades específicas para el aula ni en la práctica educativa diaria. En este trabajo presentamos dos actividades que, creemos, ilustran de manera especialmente clara los procesos de matematización; especialmente lo que Rico (2003) denomina matematización horizontal y que es la parte del proceso que menos atención suele recibir en el quehacer diario.

Otra motivación importante de este trabajo es el convencimiento de que los grafos son una herramienta matemática que, por sus potencialidades, merece la pena mostrar a nuestros alumnos pese a no estar reflejada en los currículos oficiales. Este convencimiento no es sólo nuestro, un breve repaso a la bibliografía presentada (la cual es sólo una selección) sirve para confirmarlo. Sin embargo, encontramos que la aproximación a la teoría de grafos suele ser siempre la misma: a través del problema de los Puentes de Königsberg si quiere hablarse de los ciclos y caminos eulerianos o a través del coloreado de mapas si es que se quiere hablar de grafos coloreables. En este artículo proponemos acercarnos a la teoría de grafos y, en particular, a los Teoremas de Euler y a la coloreabilidad por un camino diferente; en concreto mediante el empleo de dos juegos bien conocidos: el dominó y el sudoku.

La elección de estos juegos viene motivada no sólo por su cercanía al alumno, sino también porque permiten un proceso de matematización paradigmático a la vez que sencillo. Esta sencillez permitirá hacer explícito este proceso ante el alumno, facilitando así la reflexión y aumentando la posibilidad de que el alumno reproduzca procesos similares en situaciones diferentes.

Los objetivos concretos que se persiguen con la experiencia presentada son los siguientes:

– Mostrar la importancia y utilidad de los procesos de matematización.
– Lograr que los alumnos matematicen diversos aspectos del dominó y de los sudokus.
– Conseguir que los alumnos traduzcan y transfieran resultados del juego a su modelo matemático y viceversa.
– Conseguir que los alumnos traduzcan y transfieran resultados del modelo matemático a ámbitos aparentemente distintos del original.

2. Agradecemos especialmente a José Manuel Gutiérrez y a Juan Luis Varona por su invitación y, en general, a todo el Departamento de Matemáticas y Computación por su excelente acogida.

– Introducir el concepto de grafo.
– Mostrar las potencialidades de los grafos como herramienta para modelizar situaciones.
– Presentar resultados básicos de la teoría de grafos como los Teoremas de Euler o el coloreado de grafos.

El trabajo está organizado del siguiente modo: tras esta introducción, en la segunda sección, se presenta el marco teórico bajo el que se ha diseñado e implementado la experiencia presentada en el artículo. Se reflexiona brevemente sobre los procesos de matematización, sobre los modelos de aprendizaje y sobre la utilidad del juego en el aula. La tercera sección está dedicada a describir la implementación de la experiencia que presentamos y, finalmente, en la cuarta sección se presentan algunas conclusiones generales.

2. Marco teórico

En los siguientes subapartados se presentan y argumentan las ideas principales que justifican la implementación de la actividad, así como se comenta brevemente el importante papel de éstas desde el punto de vista de la Educación Matemática.

2.1. Procesos de matematización: objetivo educativo

En el marco matemático sobre el que se asienta el conocido estudio PISA/OCDE, se destaca que aprender a ***matematizar*** debe de ser un objetivo básico para todos los estudiantes y que la actividad matemática se concreta en la actividad de matematización vía la resolución de problemas. Rico (2003) sostiene que este proceso de hacer Matemáticas, conocido como *matematización*, implica tres fases secuenciadas: la ***matematización horizontal***, la ***matematización vertical*** y los ***procesos de validación y reflexión***. En el mismo artículo también se presentan las características principales de estas fases que sintetizamos a continuación.

En primer lugar, la matematización horizontal es el proceso mediante el cual los estudiantes traducen un problema desde el mundo real a un problema del mundo matemático. Para ello, es necesario poner en práctica algunas de las siguientes actividades:

– Identificar las Matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
– Representar el problema de un modo diferente.
– Comprender la relación entre los lenguajes natural y simbólico y formal.
– Encontrar regularidades y patrones.
– Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
– Traducir el problema a un modelo matemático.
– Utilizar herramientas y recursos adecuados.

En segundo lugar, el concepto de matematización vertical conlleva la gestión competente y adecuada por parte de los estudiantes, de los conceptos y destrezas matemáticas para poder resolver el problema del mundo matemático dentro de ese ámbito abstracto. Se incluyen en este proceso las actividades de:

– Utilizar diferentes representaciones.
– Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
– Refinar y ajustar los modelos matemáticos.
– Argumentar, generalizar…

En último lugar, el estudiante debe interpretar críticamente los resultados obtenidos como resultados del problema del mundo real y validar el proceso completo.

De esta forma, se presenta en esta descripción un modelo a pequeña escala del trabajo matemático que podría ser esquematizado de manera gráfica de la siguiente forma (figura 1):

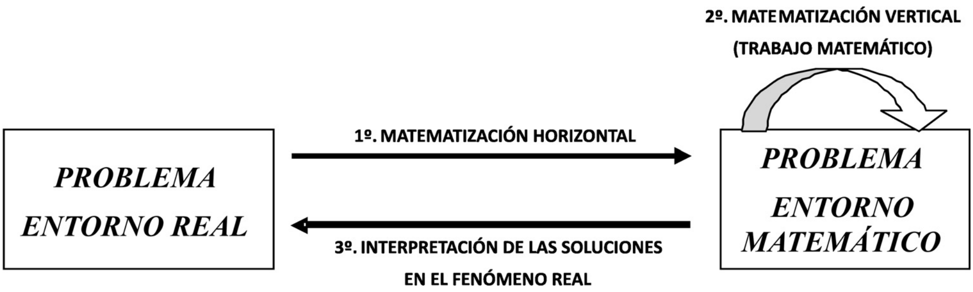

Figura 1.

Un objetivo de la Enseñanza de las Matemáticas, en cualquier nivel educativo, es que los alumnos sean conscientes de estas fases de los procesos de matematización y que sean competentes para llevar a cabo cada una de las fases anteriormente citadas.

Muchos de los esfuerzos y del tiempo de docencia tradicional, en la Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria (e incluso, Universitaria), están dedicados a la enseñanza y aprendizaje de contenidos y destrezas matemáticos que permitan a los alumnos alcanzar exitosamente las actividades de matematización vertical. Sin embargo, las tareas y actividades que desarrollan la llamada matematización horizontal no suelen estar tan presentes en el quehacer diario del aula.

Por tanto, es adecuado implementar actividades que ejemplifiquen este ir y venir del mundo real al matemático y trabajar en el aula con contenidos matemáticos que favorezcan los procesos de matematización. Este es el principal propósito de las actividades que planteamos en el artículo, poniendo especial énfasis en que los alumnos sean conscientes de los procesos de matematización horizontal que llevan a cabo en las mismas.

2.2. Una herramienta para matematizar: la teoría de grafos

Uno de los contenidos matemáticos que permiten la matematización de situaciones de forma eficiente, intuitiva y sencilla es la teoría de grafos. En Coriat y otros (1989), uno de los primeros libros de Educación Matemática en España sobre grafos y su impacto en los currículos escolares y de muy recomendable lectura tanto para los profesionales de la Enseñanza como para los futuros docentes, se destaca que "la utilización y el estudio de los grafos es uno de los posibles instrumentos, aproximaciones o estrategias para conseguir (…) que los alumnos aprendan a pensar, a resolver problemas, a afrontar situaciones nuevas, a acceder a la información y a tratarla de forma adecuada" y que, al margen de su valor formativo intrínseco, "los grafos constituyen una buena herramienta para conceptualizar situaciones, extraer pautas y, de forma mucho más evidente, para llegar a entender esquemas y transferirlos a situaciones nuevas".

También Minoux y Bartnik (1986), destacan que la modelización de situaciones, la resolución de problemas, la representación de conocimientos son algunas de las actividades matemáticas en las que el uso de los grafos es muy adecuado. Además, parte de estas actividades no son exclusivas del Área de Matemáticas, por lo que la teoría de grafos posee múltiples aplicaciones en muy diferentes contextos fuera de los contenidos "propios" de las Matemáticas. Pueden aplicarse, entre otros, en sociología (Kindt, 1993), en problemas lingüísticos (Coriat, 2004), en problemas de índole geográfica (Espinel, 1994), e incluso en el diseño de algoritmos informáticos (Sipser, 1996).

Por lo tanto, a pesar que la teoría de grafos no es uno de los contenidos mínimos que figuran de forma específica en el actual currículo de Matemáticas, su introducción en el aula es realmente apropiada puesto que permite a los estudiantes alcanzar muchas de las competencias básicas y los objetivos generales del Área de Matemáticas contenidos en el mismo y así como relacionar las Matemáticas con otros campos de conocimiento.

Como ya hemos indicado anteriormente, al margen de presentar una importante herramienta para modelar situaciones y reflexionar sobre los procesos de matematización de situaciones problemáticas; los contenidos matemáticos específicos sobre la teoría de grafos que se trabajan en este artículo son:

Grafos y sus componentes (vértices y aristas)

Con respecto a la definición de ***grafo***, hemos optado por prescindir de todo formalismo e introducirlo meramente como un conjunto de puntos (los vértices) que pueden estar unidos por segmentos (las aristas). En este sentido el ejemplo concreto de un grafo (figura 2) da al alumno una idea bastante clara de a qué nos referimos.

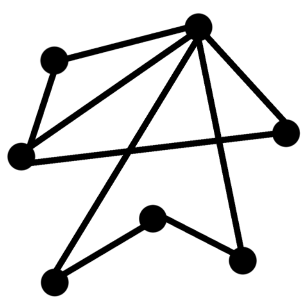

Figura 2.

Ciclos y caminos eulerianos. Teoremas de Euler de caracterización de grafos

Los siguientes resultados de Euler surgieron a partir del problema de los puentes de Königsberg y suelen considerarse como uno de los orígenes de la Topología y por supuesto de la teoría de grafos:

- Un grafo posee un ***ciclo euleriano***; es decir, puede recorrerse pasando por cada arista una única vez empezando y terminando por un mismo vértice si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen valencia[3] par.
- Un grafo posee un ***camino euleriano***; es decir, puede recorrerse pasando por cada arista una única vez pero empezando y terminando en vértices distintos si y sólo si es conexo y todos los vértices salvo dos tienen valencia par. En este caso los vértices de valencia impar dan el inicio y final del camino.

Coloreabilidad de un grafo

Junto con la caracterización de la existencia o no de ciclos y caminos eulerianos, éste es uno de los problemas más conocidos en teoría de grafos.

Se dice que un grafo es ***n-coloreable*** si pueden pintarse sus vértices con *n* colores diferentes de manera que dados 2 vértices del grafo unidos por una arista puedan ser pintados de colores diferentes, y *n* sea el número más pequeño posible que cumpla esa condición.

Uno de los resultados más celebrados (y controvertidos) de finales del siglo pasado es el llamado *Teorema de los cuatro colores*. Appel y Hakel demuestran en 1976 que todo grafo plano[4] es a lo sumo 4-coloreable.

Muchos de los grafos que surgen en nuestra actividad de coloreado no son planos, por lo que éste último resultado no es parte del núcleo central de contenidos de la actividad, aunque sí la definición de coloreabilidad de un grafo y cómo se puede comprobar si un grafo es coloreable o no. De todos modos, al final de la actividad se indica cómo se puede incluir el Teorema de los cuatro colores de manera natural como actividad de ampliación.

2.3. Acerca de modelos de aprendizaje

Las orientaciones metodológicas de los currículos educativos y planes de estudio tanto de la Educación Obligatoria (Infantil, Primaria y Secundaria) e incluso en muchos casos, de la Enseñanza Universitaria adoptan el constructivismo como la teoría del aprendizaje. Por ello se propone que las actividades de enseñanza-aprendizaje estén formuladas sobre contextos concretos de modo que adquieran más importancia los significados que las representaciones simbólicas.

---

3. La valencia de un vértice se define como el número de aristas que concurren en él.
4. Se dice que un grafo es *plano* (o *planar*) cuando puede ser dibujado sin que ninguna arista se interseque con otra.

En este sentido, autores como Gairín (1999, pp. 15) y Escolano (2007, pp. 14) utilizan el término *modelo de aprendizaje* para designar un entorno físico sobre el que el alumno pueda actuar y reflexionar para que, mediante esta interacción, avance en la construcción del conocimiento cuyo aprendizaje se promueve. La enseñanza parte de la consideración de fenómenos de la vida real para que los alumnos puedan extraer así los conceptos matemáticos.

Esto es, para la introducción de conceptos y destrezas matemáticas en el aula, el profesional de la enseñanza debe implementar un modelo de aprendizaje concreto sobre el que los alumnos puedan trabajar, construir, extraer significados y justificar las técnicas de esos nuevos conceptos con la ayuda del profesor o de otros alumnos. Así el educador en Matemáticas, que parte de un concepto a enseñar, realiza en cierta forma el "camino contrario" al que recorrería el matemático en su estudio en los procesos de matematización.

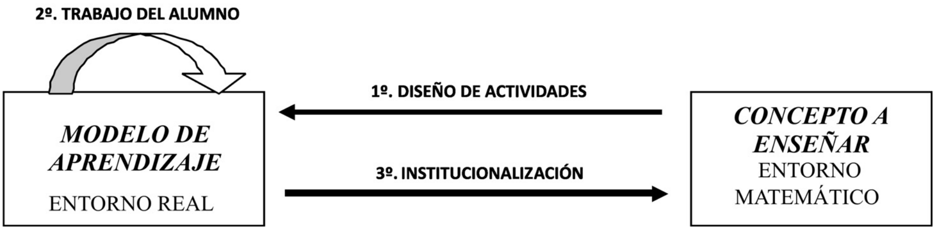

Figura 3.

El empleo escolar de modelos de aprendizaje es muy adecuado para la construcción de conocimiento matemático, puesto que: (Gairín, 1999)

- Permite la aprehensión sensorial de hechos y relaciones matemáticas mediante la manipulación de objetos físicos o la simulación de acciones;
- facilita la construcción o interpretación de los sistemas de representación que comunican los resultados producidos al actuar sobre los objetos;
- facilita la comprensión de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación empleados;
- sirve como apoyo y contraste de la certeza o falsedad de las relaciones simbólicas que se establecen a través de los sistemas de representación;
- facilitan la resolución de situaciones problemáticas cuando éstas se formulan en términos de los objetos del modelo.

Una rápida revisión de textos escolares nos indica que actualmente los modelos de aprendizaje para la teoría de grafos, o bien son inexistentes, puesto que los grafos no están incluidos en los currículos vigentes de contenidos mínimos de Educación Secundaria (ni siquiera aparece en la asignatura llamada Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, a pesar de la sencillez del "aparato" matemático previo que necesitan y de las múltiples aplicaciones que tiene a las Ciencias Sociales); o bien están enfocados desde un punto de vista abstracto y formalista, en el caso de la Enseñanza Universitaria (West, 2000); o bien están basados en situaciones de recorrido de caminos (Musser y otros, 2006) y más concretamente en la situación de los puentes de Königsberg (Alfonso y otros, 2004).

En este artículo se muestra cómo introducir en el aula los contenidos anteriormente citados, implementando actividades sobre un modelo de aprendizaje consistente en juegos matemáticos ampliamente conocidos por los alumnos. En la sección posterior analizamos los beneficios didácticos del empleo de los juegos matemáticos en el aula, así como se presentan los juegos en los cuales se basa nuestra propuesta.

2.4. Los juegos matemáticos en el aula

Diversos autores han trabajado e investigado a lo largo de estos años sobre el papel del juego en Educación Matemática y la importancia de la introducción de los mismos en el aula como un valioso recurso educativo (al margen de los autores citados en esta sección caben destacar otros como, Balbuena y otros (2000); Delofeu (2001); Grupo Alquerque (2004); Guzmán (1984)…, aunque esta lista no es ni mucho menos exhaustiva). Desde un punto de vista antropológico, Bishop (1991) sostiene que, a pesar de que las ideas matemáticas no son universales puesto que están vinculadas a la cultura de la sociedad donde son generadas, sí que existen unas actividades matemáticas que son universales a todo tipo de grupos culturales y que producen (o de las que surgen) las distintas ideas o conocimientos matemáticos. Estas actividades son: contar, localizar, medir, dibujar, jugar y explicar. Por este motivo el juego tiene un papel principal "etnomatemáticamente" hablando; y que no se ve reflejado de la misma manera en los currículos (sobre todo en niveles superiores a Enseñanza Primaria) que el resto de las actividades matemáticas universales antes citadas.

2.4.1. *Definición de juego matemático*

Es muy difícil definir concretamente el concepto de *juego matemático*. En este artículo, entendemos juego matemático en un sentido muy amplio: "Podemos decir que los "juegos matemáticos" (…) son Matemáticas cargadas de una fuerte componente lúdica; pero poco aclaramos así, porque las ideas de "juego", "recreación" y "lúdico" son aproximadamente sinónimas" (Gardner, 1983: 1). Así un puzzle o un rompecabezas serán considerados juegos matemáticos, tanto como los tradicionales juegos de estrategia (las damas, el ajedrez…) o como los que conlleven alguna componente de azar (los dados, los juegos de cartas…), siempre y cuando, se realicen durante su práctica reflexiones en las que se pongan de manifiesto conocimientos matemáticos.

2.4.2. *Niveles e importancia del empleo de juegos matemáticos en el aula*

Los juegos matemáticos son un buen recurso educativo en todos los niveles educativos; tanto para Educación Infantil (Belmonte, 2005), Educación Primaria (Edo, 1998), (Fernández y Rodríguez, 1989), como para Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (Corbalán, 1994) e incluso para niveles de Educación Universitaria o de divulgación matemática como Benjamín y Quinn (2007), Berlekamp y otros (1982) o la célebre columna *Mathematical Games* de Martin Gardner en la revista Scientific American.

Señalamos que la introducción de los juegos matemáticos (y en general, los juegos) en el aula es beneficiosa por los siguientes motivos:

– *El juego como agente motivador*. Sin duda, la adecuada y bien medida implementación de juegos en el aula "rompe", en cierto modo, con el discurso o la clase "estándar" y, por la componente lúdica que del juego se deduce es acogido con agrado por los alumnos que no lo identifican con las Matemáticas tradicionales.

– *El juego como agente socializador*. La utilización de juegos bipersonales o la de juegos solitarios, propuestos en gran grupo, permite que surja de manera espontánea una interacción entre iguales; esto es, una interacción alumno-alumno o profesor-alumno en igualdad de condiciones y en doble dirección; evitando la dinámica unidireccional de la clase tradicional que va del profesor que da información al alumno que la recibe.

– *El juego como agente integrador*. Leemos en Bishop (1998) que "los juegos existen en todas partes (…) y cuando alguien enseña en una situación multicultural necesita conocer juegos que sean universalmente conocidos y practicados (…). Por eso (los juegos) pueden constituir un punto de contacto entre niños de grupos culturales y lingüísticos distintos que quizás no tengan otro punto de contacto". Uno de los grandes retos de la Enseñanza (no solamente matemática) de este principio de siglo es aprovechar los beneficios didácticos y asimilar de forma positiva la multiculturalidad que se ha hecho patente en las aulas de nuestro país. En ese sentido, los juegos sirven de agente integrador. Oller y Muñoz (2006) destacan las ventajas del uso de los juegos matemáticos que pertenecen a la cultura del entorno del alumno frente al uso de los juegos creados de manera específica para el Aula de Matemáticas:
  - El alumno suele haber tenido experiencias previas fuera del aula, con lo cual parte con un bagaje previo de ensayos, razonamientos y estrategias que pueden serle útiles a la hora de detectar regularidades y posibles generalizaciones.
  - Para el alumno encierran un factor motivador extra pues, además de las competencias matemáticas que se trabajan en el juego, le permite adquirir también unas competencias sociales que puede percibir como útiles fuera del aula.

2.4.3. *Clasificación de juegos matemáticos*

Para terminar este apartado acerca de juegos matemáticos en el aula, nos centraremos en las distintas clasificaciones que existen de los mismos. Los juegos se pueden clasificar según temática (juegos numéricos, geométricos…), según el número de jugadores que participan (solitarios, bipersonales…), según los materiales que se utilizan (juegos de mesa, de cartas, de dados…). A pesar de las anteriores clasificaciones, quizás la más empleada por los investigadores en este tópico sea la siguiente:

– *Juegos de conocimiento*. Son aquellos cuyos contenidos son algunos de los tópicos clásicos de las Matemáticas, presentes en los currículos oficiales, y cuya principal finalidad es introducir y trabajar con estos contenidos específicos. Un ejemplo claro sería el juego de la escoba para trabajar contenidos acerca de la suma y resta de números naturales. Posiblemente que estos juegos son los más empleados por los docentes ya que no suponen romper con los contenidos clásicos de Matemáticas. Cabe destacar que el factor azar sirve en estos juegos como una medida de atención a la diversidad puesto que cuanto más grado de azar tenga el juego, aumenta la posibilidad de que cualquier alumno de la clase resulte ganador, sin depender en exclusiva de las habilidades del mismo.
– *Juegos de estrategia*. Siguiendo a Gairín (2001), diremos que los juegos de estrategia son aquellos juegos que tienen la calificación popular de "juegos de pensar" porque su práctica demanda de los participantes, la utilización de técnicas heurísticas similares a las que se emplean para la resolución de problemas. Ejemplos muy sofisticados de juegos de estrategia son el ajedrez o el go, mientras que juegos de estrategia más elementales que los anteriores son las damas o el tres en raya. De hecho, "un juego es un problema en tanto en cuanto se desconoce la solución del mismo, se desconoce la estrategia ganadora o la forma de alcanzar el objetivo. Sin embargo, los juegos tienen un lenguaje propio y un esquema estándar que los convierte en problemas de características diferenciadas" (ibídem, 2001: 66). Ese esquema estándar de los juegos de estrategia viene caracterizado por tres elementos diferenciados en su enunciado de forma que siempre existen:
    • Unas condiciones iniciales acerca de los materiales que intervienen (el tablero, las fichas, las cartas…) y del número de jugadores que participan,
    • unas reglas acerca de cómo hay que actuar sobre el juego, y
    • un objetivo final que será o vencer al propio juego (en el caso de los juegos solitarios), o vencer al oponente (en el caso de los juegos bipersonales).

La analogía entre las distintas formas de encontrar la estrategia ganadora (o la estrategia que permita no perder nunca) en juegos de estrategia y las técnicas heurísticas de resolución de problemas pueden ser consultadas, entre otros, en los textos de Gómez Chacón (1992) o en Corbalán (1994, 1999). Profundizando en estas ideas, en Gairín (2001, 2002) y Gairín y Muñoz (2006) se muestra como desde los juegos de estrategia no solamente se alcanza la instrucción en técnicas de resolución de problemas, sino que el alumno también realiza tareas fundamentales en el trabajo matemático como son la recopilación de evidencias, la formulación de hipótesis y la elaboración de argumentos que apoyen las hipótesis formuladas que puede llegar a realizar; estructurando estas tareas en tres niveles de trabajo distintos: ***resolver casos particulares***, ***generalizar*** y ***demostrar***.

Por último, apuntar que la clasificación de juegos de conocimiento frente a juegos de estrategia no es realmente una "clasificación" sino más bien una "graduación", puesto que existen juegos que podrían ser asignados a ambas categorías. Ya que, por un lado, en la mayoría de los juegos de conocimiento, siempre existen algunas estrategias que mejoran la posibilidad de alcanzar el objetivo final y por otro lado, debido a la definición de juegos de conocimiento en muchos casos hay que evaluar si el propósito del juego es trabajar en el aula los contenidos que en él aparecen o no. Así, por ejemplo, el cinquillo en un aula de Infantil o Primaria sería clasificado como un juego de conocimiento (puesto que se trabajan los procesos de clasificación y el anterior y posterior de un número), mientras que a otros niveles superiores sería considerado un juego mixto, por cuanto los contenidos de clasificar y la ordenación de los números naturales se dan por superados. De hecho, en Edo y otros (2007) se plantean modificaciones que flexibilizan la clasificación anterior, distinguiendo tres categorías distintas dependiendo del grado de importancia que tenga el azar o el grado de libertad de los movimientos de los jugadores en el transcurso de una partida: los juegos de azar puro, los juegos con estrategia favorecedora y los juegos de estrategia.

2.4.4. *Los juegos implementados en nuestra propuesta*

Los juegos matemáticos escogidos para ejercer de modelo de aprendizaje de los contenidos matemáticos y ejemplificar los procesos de matematización comentados anteriormente son el dominó y el sudoku. Ambos juegos son ampliamente conocidos por los alumnos y pertenecen a su entorno próximo, por lo que recogen muchas de las ventajas indicadas en la SECCIÓN 2.4.2. Respecto a su clasificación, hemos de indicar que la primera actividad que se plantea es una adaptación del juego de dominó usual (juego para varios jugadores que puede ser considerado tanto de estrategia como de conocimiento) que, en este caso, se clasifica claramente como juego solitario de estrategia (aunque abierto a realizar las tareas en trabajo cooperativo en grupo). En la segunda parte, el sudoku será clasificado indudablemente como juego solitario de estrategia.

Finalmente, cabe mencionar que nuestra atención en este artículo no se centrará en analizar los procedimientos propios del pensamiento lógico-matemático que se llevan a cabo cuando se practican estos juegos (por ejemplo: emparejamiento, seriación, clasificación en el caso del dominó; y pensamiento deductivo, análisis sistemático de posibilidades, razonamientos por reducción al absurdo en el caso del sudoku), sino en la posibilidad de matematizar mediante la Teoría de grafos algunos problemas que aparecen al jugar con éstos.

3. Implementación de la actividad

En esta sección se presenta esquemáticamente la actividad de aula implementada, dividida en dos partes claramente diferenciadas. Los aspectos que relacionan ambas partes son el papel central que juegan los procesos de matematización horizontal y modelado de situaciones; el empleo de los juegos como recurso didáctico que genera un entorno motivador para el alumno y la presencia de conceptos elementales de Teoría de grafos que aparecen de forma natural en ambas matematizaciones. También cabe indicar que existen diferencias entre ambas partes de la actividad respecto a las tareas que realizan los alumnos y que hace que ambas partes sean, en cierta forma, complementarias. En la primera parte de la actividad, los alumnos trabajan en el problema del dominó y obtienen resultados dentro del mismo. Posteriormente, estos resultados son empleados para elaborar y dotar de sentido a los existentes dentro del ámbito de los grafos y son aplicados en otros contextos. Mientras que en la segunda parte, el trabajo de los alumnos con el sudoku permite la formulación de ciertas cuestiones que no es posible resolver dentro del mismo juego. Éstas son resueltas mediante la matematización del juego a la Teoría de grafos, en un primer término, y la resolución de ecuaciones no lineales, en un segundo paso.

3.1. El dominó y los grafos eulerianos

La parte de actividad de aula basada en el juego del dominó está dirigida a alumnos de 3º de ESO o niveles superiores. Ésta introduce de manera sencilla el concepto de grafo ante los estudiantes y, además, se consigue que conjeturen resultados similares a los anteriores dentro del contexto del juego y que los traduzcan al lenguaje de grafos; consiguiendo así que perciban como naturales e intuitivos los teoremas de Euler. Esta percepción facilitará la posterior aplicación de dichos resultados cuando otros problemas de otros contextos similares sean matematizados con los grafos. Una descripción mucho más detallada de la actividad de aula se encuentra en Oller y Muñoz (2006).

A continuación se enuncia el juego y se comentan algunas de las tareas realizadas que obedecen al esquema expuesto en la Sección 2.4 acerca de juegos de estrategia.

3.1.1. *Resolver el juego*

EL DOMINÓ (SEMI)PERFECTO

Condiciones iniciales: Juego unipersonal (aunque las tareas se pueden resolver como trabajo colaborativo en grupos de tres personas). Se dispone del conjunto de todas las fichas de dominó, 28 fichas en total.

Reglas: Las fichas se colocan una tras otra siguiendo las reglas del dominó tradicional. Se juega de forma lineal, sin bifurcaciones.

Un (doble) objetivo final:

1. Realizar una ***partida perfecta***; esto es, colocar todas las fichas de las condiciones iniciales siguiendo las reglas del dominó de forma que la cifra con la que se comienza y la cifra con la que se termina coincidan.
2. Realizar una ***partida semiperfecta***; esto es, colocar todas las fichas de las condiciones iniciales siguiendo las reglas del dominó de forma que la cifra con la que se comienza y la cifra con la que se termina no coincidan.

3.1.2. *Resolver casos particulares*

Los alumnos practican con este juego y discuten acerca de la posibilidad o no de alcanzar los objetivos así como la unicidad o no de las posibles soluciones y de los diferentes sistemas de representación de las mismas. A continuación se proponen distintas modificaciones del mismo en los cuales únicamente se varía el conjunto de fichas de las condiciones iniciales: todas fichas menos las dobles, todas excepto las que contienen la cifra 6,...

3.1.3. *Generalización*

Estas primeras experiencias resolviendo casos particulares dentro del ámbito del juego llevan, de manera igualmente natural, a plantearse la generalización acerca de las condiciones iniciales mediante dos preguntas en torno a las cuales se fundamenta la actividad:

1. *¿Qué condiciones cumple un conjunto de fichas de dominó para jugar una partida perfecta?*
2. *¿Qué condiciones cumple un conjunto de fichas de dominó para jugar una partida semiperfecta?*

En principio, los alumnos analizan los casos ya estudiados, resuelven otros casos particulares con otros conjuntos de fichas y conjeturan posibles soluciones. En todas las oportunidades en que se ha implementado esta la propuesta, siempre han aparecido de manera espontánea las siguientes conjeturas elaboradas por los estudiantes cuando se han puesto en común:

– Dado un conjunto de fichas de dominó, si cada cifra aparece una cantidad par de veces y además las cifras están “conectadas”[5], entonces es posible jugar una partida perfecta con esas fichas.
– Dado un conjunto de fichas de dominó, si todas las cifras salvo dos aparecen una cantidad par de veces y además las cifras están “conectadas”, entonces es posible jugar una partida semiperfecta con esas fichas empezando y terminando, además, con aquellas cifras que aparecían una cantidad impar de veces.

La condición de conexión de cifras es sin duda la que más tarda en aparecer y en algunos casos ha sido necesario proponer otro caso particular de algún conjunto de fichas que satisfaga la condición de paridad pero no la de conexión.

3.1.4. *Matematización del juego y justificación de los resultados*

Nótese que la demostración formal y directa de las conjeturas de los alumnos manipulando las fichas no es sencilla para alumnos de Secundaria y Bachillerato, aunque sí que sería accesible para niveles educativos superiores (es posible, por ejemplo, empleando razonamientos inductivos). De todas maneras, se detecta por parte del alumnado que ni la demostración de estas afirmaciones, ni el resultado

5. Expresamos de este modo la idea, propuesta por los alumnos, de que para cualesquiera dos cifras que aparezcan en nuestro conjunto de fichas de dominó, siempre se pueda construir una cadena de fichas que empiece en una de ellas y termine en la otra. Obsérvese la relación de este concepto con la conectividad del grafo asociado a las fichas.

recíproco son aspectos que susciten gran controversia. Por esta razón, la demostración de los resultados no es uno de los objetivos de esta actividad. Sin embargo, mediante la matematización del juego por parte de los alumnos surgen de manera natural los resultados de Euler, logrando justificar así las conjeturas obtenidas. De esta manera, los alumnos llegan a formular estos resultados con sus propias palabras y argumentos. De este modo, al presentar los resultados originales de Euler los perciben como algo más cercano, menos ajeno y adquieren un mayor significado para ellos, ya que no son sino una traducción directa de los suyos utilizando el "diccionario" que han elaborado.

Mostramos brevemente cómo a partir de un conjunto de fichas de dominó se obtiene un grafo:

- Por cada cifra distinta que aparezca en nuestro conjunto de fichas de dominó, se dibuja un vértice del grafo y se numera con esa misma cifra.
- Por cada ficha de dominó, se dibuja una arista que une los vértices correspondientes a las cifras de la ficha elegida[6].

También es posible realizar el proceso inverso de una manera sencilla, módulo pequeñas modificaciones (ver Oller y Muñoz, 2006). Si tenemos un grafo, se obtiene un conjunto de fichas de dominó sin más que numerar los vértices del grafo y tomar por cada arista del mismo la ficha cuyas cifras son los números correspondientes a los vértices que une dicha arista. Se muestra así que, esencialmente, es lo mismo tener grafos que conjuntos de fichas de dominó.

A continuación se implementan distintas tareas de obtención de grafos mediante conjunto de fichas y viceversa como en la figura 4:

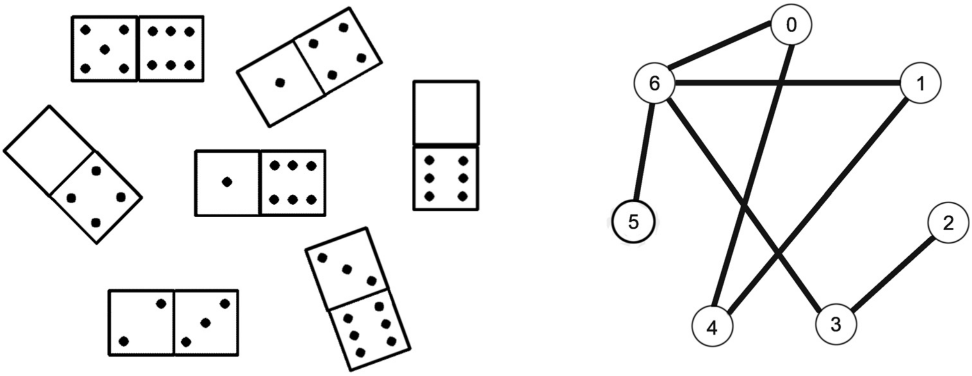

Figura 4.

6. Una ficha doble puede ser representada en un grafo como un *lazo* o *bucle* en el vértice correspondiente. Cuando se calcula la valencia de un vértice, los lazos se computan como dos aristas.

El reflejo de los conceptos de partida perfecta, y semiperfecta dentro del ámbito de los grafos es también una traducción muy sencilla y natural que los estudiantes deducen con relativa facilidad. Si nos situamos sobre la cifra con la que comienza la partida y se recorren las aristas del grafo en el orden marcado por la sucesión de fichas de una partida perfecta observamos que sobre el grafo se realiza un ciclo euleriano; esto es, un recorrido que pasa por cada arista una única vez para terminar en el mismo vértice en el que iniciamos el camino (figura 5). De la misma forma, en la figura 6 aparece una partida semiperfecta con su grafo correspondiente. Así, del mismo modo que el caso anterior, se observa como la sucesión de fichas de la partida semiperfecta se traduce en un camino euleriano.

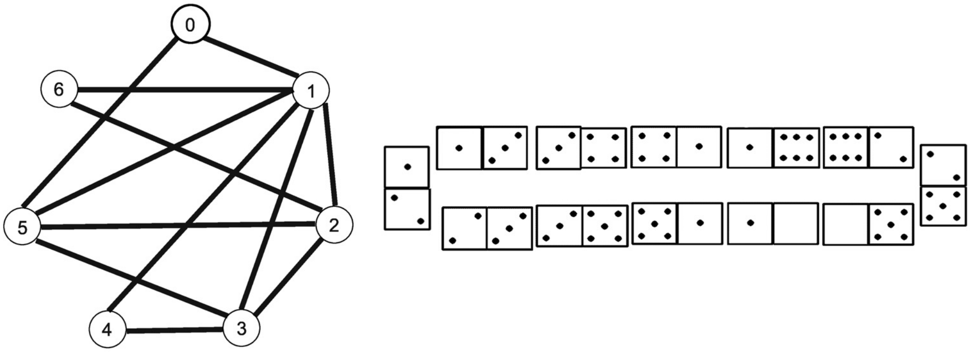

Figura 5.

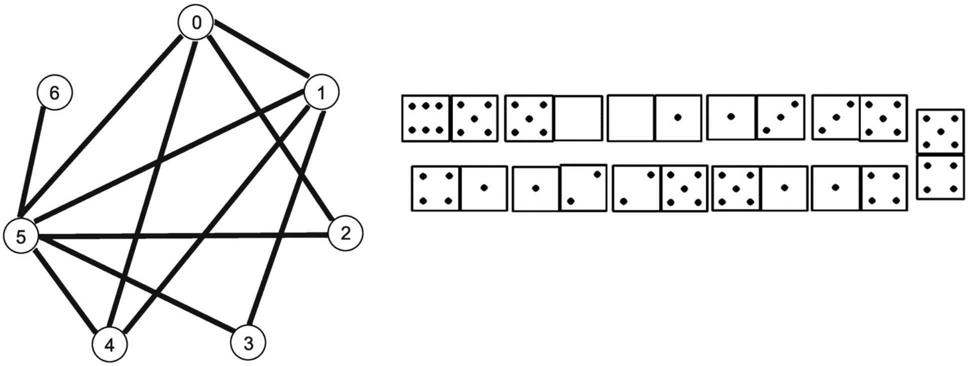

Figura 6.

Finalmente, indicar que el proceso inverso de pasar de ciclos y caminos eulerianos de un grafo a partidas perfectas y semiperfectas también sucede de manera análoga.

Por todo lo anterior, los estudiantes elaboran un diccionario (tabla 1) que les permitirá traducir problemas, enunciados y razonamientos del ámbito del dominó al de los grafos y viceversa:

Tabla 1.

TEORÍA DE GRAFOS	DOMINÓ
Grafo	Conjunto de fichas de dominó
Vértice	Cifra de una ficha
Arista	Ficha de dominó
Ciclo euleriano	Partida perfecta
Camino euleriano	Partida semiperfecta
Grafo conexo	Cifras conectadas

De esta manera, al traducir los resultados de Euler del lenguaje de los grafos al modelo de fichas de dominó aparecen justificadas las conjeturas que han elaborado en clase y viceversa, como se esquematiza en figura 7.

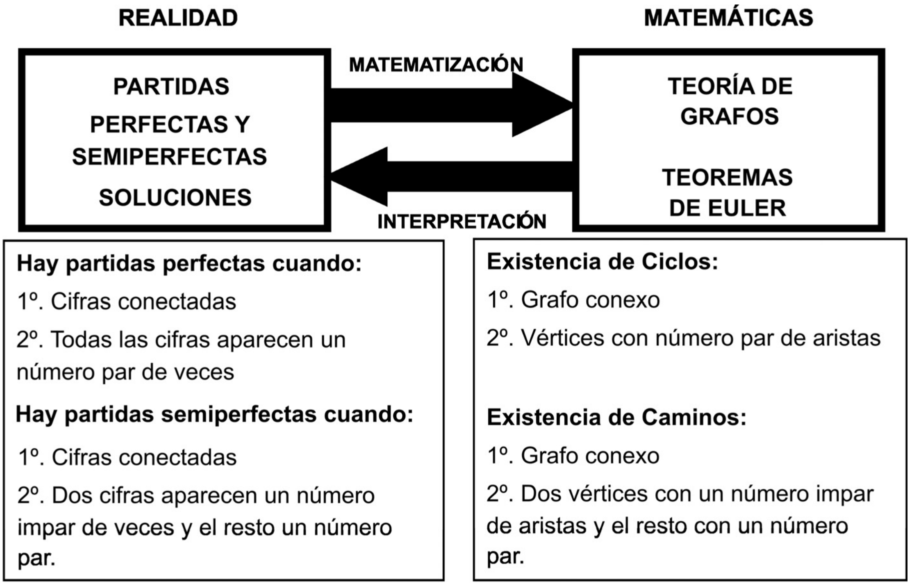

Figura 7.

3.1.5. *Aplicación de los resultados de Euler a otros problemas reales*

Una vez que los alumnos disponen y aceptan como propios los resultados de Euler pueden atacar el problema original de los puentes de Königsberg (o mejor una adaptación del mismo a un entorno más próximo del alumno como puede ser la propia ciudad en la que resida[7]). En este caso existe una matematización horizontal muy directa ya que también es sencillo elaborar el diccionario (tabla 2).

Tabla 2.

TEORÍA DE GRAFOS	PUENTES KÖNIGSBERG
Grafo	Mapa ciudad Konigsberg
Vértice	Parte de la ciudad separadas por los ríos
Arista	Puente que unen regiones de la ciudad
Ciclo euleriano	Paseo por todos los puentes una sola vez y llegando al sitio de partida
Camino euleriano	Paseo por todos los puentes una sola vez, pero sin llegar al sitio de partida
Grafo conexo	Siempre se puede ir desde una región de la ciudad a otra

Incluso es interesante construir el conjunto de fichas de dominó correspondiente al grafo de la situación y comprobar fehacientemente que con dichas fichas no pueden jugarse partidas perfectas ni semiperfectas.

Las ventajas del empleo como modelo de aprendizaje de los grafos del juego de dominó frente a la situación de los puentes puede ser consultado en Oller y Muñoz (2006). Finalmente, señalar que existen multitud de problemas y situaciones reales que se pueden modelizar y que se resuelven aplicando los Teoremas de Euler, pueden encontrarse algunos en Coriat y otros (1989), Alfonso y otros (2004), Oller y Muñoz (2006) o en cualquier libro de Matemáticas recreativas donde aparezcan los grafos como contenido matemático.

3.2. El sudoku y la coloreabilidad de un grafo

Aquí se presenta una actividad de aula dirigida a alumnos de 4º de ESO, Bachillerato y Enseñanza Superior basada en el juego del sudoku. Dependiendo del nivel en cuestión, permite introducir de manera natural el problema del coloreado de un grafo, la necesidad de trabajar con grafos no planarios, conocer situaciones problemáticas que se modelizan de manera sencilla con sistemas de ecuaciones no lineales, y finalmente plantear algún método para resolverlos como por ejemplo las bases de Gröbner.

Los sudokus son, seguramente, uno de los pasatiempos más de moda en la actualidad. Normalmente los que podemos encontrar en periódicos, revistas y demás consisten en cuadrículas de 9 x 9 de modo que se nos pide rellenar cada casilla con las cifras del 1 al 9 de modo que éstas no se repitan ni en una fila, ni en una columna, ni en cada una de las regiones 3 x 3 que aparecen resaltadas (figura 8).

7. En nuestro caso, la ciudad de Zaragoza tiene 12 puentes sobre el río Ebro en el que desembocan otros dos afluentes que, a su vez, también poseen puentes.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Figura 8.

Este rompecabezas fue ideado por un arquitecto estadounidense Howard Garns y fue publicado por primera vez en Nueva York bajo el nombre de "Number Place" a finales de los setenta. En 1984 se popularizó en Japón con el nombre actual y se dio a conocer en el ámbito internacional cuando apareció en la revista "The London Times" en 2004. Es muy probable que el sudoku se crease a partir de los trabajos de Euler que utilizó los cuadrados Latinos[8] para realizar cálculos de probabilidades. A su vez los cuadrados Latinos tienen su origen en los cuadrados mágicos, que consisten en rellenar una cuadrícula con números enteros de manera que sumen lo mismo en cada fila y columna.

La rápida popularización del sudoku ha originado que el concepto de sudoku se haya ampliado. Han aparecido otras modalidades de sudokus mucho más complicados como los llamados *sudoku-samurai* o *killer-sudoku* para resolutores expertos. También existen variaciones del sudoku con menos casillas y con regiones de tamaño más pequeño que los tradicionales, que se pueden encontrar en distintos pasatiempos enfocados al público infantil en diversos textos de matemática recreativa y juegos informáticos para niños. En esta ocasión, sus fines son claramente didácticos y su propósito es plantear tareas más sencillas de resolver, pero en las que los niños tengan que poner en juego razonamientos lógicos análogos a los utilizados en la resolución de sudokus más complejos.

Así pues, queremos plantear una definición más amplia, para que todas estas generalizaciones queden también identificadas como sudokus. Diremos que:

> *Un sudoku es una cuadrícula dividida en regiones de manera que hemos de rellenar las casillas con cifras distintas de modo que en cada fila, columna y región no se repita ninguna cifra.*

---

8. Un *cuadrado latino* es una matriz de *n x n* elementos, en la que cada casilla está ocupada por uno de los *n* símbolos de tal modo que cada uno de ellos aparece exactamente una vez en cada columna y en cada fila.

De este modo se puede cambiar la forma, el tamaño y la distribución de las distintas regiones que constituyen el sudoku. Un ejemplo podría ser el mostrado en la siguiente imagen. En la figura 9 las regiones ya no son cuadradas y hemos reducido el tamaño.

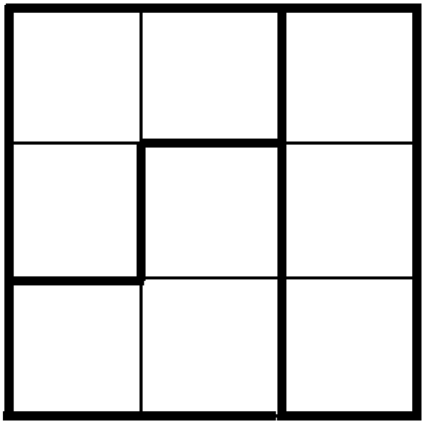

Figura 9.

Igual que con el dominó, se comentan las tareas siguiendo el esquema presentado en la Sección 2.4.

3.2.1. *Resolver el juego*

EL SUDOKU GENERALIZADO

Condiciones iniciales: Juego unipersonal (aunque las tareas se pueden realizar en grupos de dos o tres personas). Se dispone de un tablero o cuadrícula dividida en regiones parcialmente rellena.

Reglas: Los números se colocan de manera que no se repitan en una misma fila, columna y región.

Objetivo final: Completar el tablero en su totalidad.

3.2.2. *Resolver casos particulares*

Los alumnos trabajan este juego y discuten acerca de la posibilidad de completar el tablero, así como de la existencia y unicidad de posibles soluciones. Se proponen variaciones del juego donde únicamente se cambia las condiciones iniciales: tamaño del tablero, regiones, número y distribución de los datos iniciales. Entre ellos aparecen sudokus con solución única, con muchas soluciones y también sin solución.

3.2.3. *Generalización*

Estas primeras tareas llevan de manera natural que los alumnos planteen algunas preguntas en torno a la cual se fundamenta la actividad. Entre algunas podemos citar las siguientes:

1. *¿Qué estrategias hay que seguir para resolver un sudoku?*
2. *¿Existe siempre solución?; y en caso afirmativo, ¿cuántas soluciones tiene?*
3. *¿Influye el número de datos iniciales en la dificultad?, ¿y la distribución de los datos?*
4. *¿Existe algún método automático para resolver cualquier sudoku independiente de los datos iniciales?*
5. *Dado un tablero inicial vacío, ¿cuántos sudokus hay? ¿Cuántos son esencialmente distintos?*

Las tres primeras preguntas surgen generalmente en los alumnos de la ESO y Bachillerato, mientras que las últimas dos preguntas son propuestas por alumnos de niveles superiores. También es posible que en algunos casos se plantee una cuestión a la inversa: ¿existe algún método para crear un sudoku con solución única?, ¿cuál es el mínimo número de datos necesarios para que esto ocurra?

Algunas de estas preguntas obtienen una respuesta, por parte de los alumnos, como la descripción de los procesos lógicos empleados para rellenar casillas mientras que otras, obtienen una respuesta parcial como valorar la importancia del número de los datos iniciales y de la distribución de los mismos a la hora de indicar la dificultad de un sudoku, la posibilidad de realizarlo y la existencia de múltiples soluciones. El cálculo de las distintas soluciones de un sudoku ya rellenado, permutando las cifras, es una tarea de combinatoria apropiada para alumnos de Bachillerato. También se indican que otras de las preguntas realizadas no tienen solución y son cuestiones abiertas en la que diversos matemáticos, están investigando actualmente, como en el mínimo número de datos necesarios para que un sudoku tenga solución única.

3.2.4. *Matematización del juego y justificación de los resultados*

El siguiente proceso de matematización del sudoku mediante grafos y sistemas de ecuaciones permite resolver y demostrar muchas de las preguntas planteadas anteriormente. La modelización del mismo tiene tres partes diferenciadas de distintos niveles de dificultad conceptual: modelización de resolución de sudokus a coloreabilidad de grafos, modelización de grafos a sistemas de ecuaciones polinómicas y resolución mediante ordenador de sistemas de ecuaciones polinómicas vía bases de Gröbner. La primera fase está dirigida íntegramente a alumnos de ESO y Bachillerato, mientras que la segunda se puede implementar con alumnos de último curso de Bachillerato y Enseñanza Superior. La tercera fase se ha llevado a cabo con alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, aunque también cabe indicar que la manipulación del software para resolver sudokus es también accesible para niveles anteriores sin una justificación de su funcionamiento.

a) Sudoku y coloreabilidad de grafos

Se explica brevemente cómo construir un grafo a partir de un sudoku:

– Se dibuja un vértice por cada una de las casillas que forman el sudoku.

– Se unen dos vértices mediante una arista siempre y cuando las casillas que representan estén en la misma fila, columna o región.

Adjudicando a cada cifra un color distinto, es muy sencillo llegar a la conclusión de que resolver un sudoku con *n* cifras es equivalente a colorear un grafo con *n* colores. Para reflejar estos procesos de matematización horizontal, los alumnos elaboran otro diccionario como el indicado en la tabla 3.

Tabla 3.

SUDOKU	TEORÍA DE GRAFOS
Sudoku	Grafo
Casilla de un sudoku	Vértice
Relación entre dos casillas de una misma fila, columna o región	Arista
Cifra en una casilla	Color de un vértice
Rellenar sudokus	Colorear grafos

Es interesante mencionar que los grafos que se obtienen de los sudokus de esta manera, no son grafos necesariamente planos, ya que empleando el Teorema de los cuatro colores, esto sería equivalente a afirmar que todo sudoku se puede resolver con 4 cifras. Se hace notar que los grafos de sudokus tradicionales 9 x 9 son muy complicados de dibujar ya que poseen 81 vértices y 810 aristas[9]. Los alumnos en esta parte de la actividad obtienen los grafos de los sudokus más elementales, como el de la figura 9, ya que tienen una representación mucho más simple (ver figura 10).

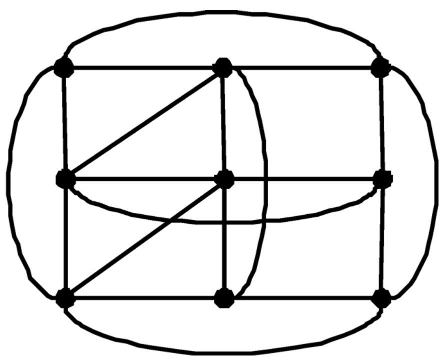

Figura 10.

9. A pesar de esto, se han encontrado estructuras geométricas en 3 dimensiones muy estéticas para representar el grafo de un sudoku 4 x 4 de 16 vértices y 56 aristas (mucho más sencillo que el tradicional) en Martín, J., Muñoz, J. M., Oller, A. (2007): Del dominó al sudoku. Juegos y Matemáticas. En Miana, P. y Romero, N. (Eds.). *Matemáticas, arte y entretenimiento* [CD]. Zaragoza: IUMA.

Al contrario que en el dominó, la relación entre sudoku y grafo no es biyectiva. Convertir un grafo cualquiera en un sudoku es complicado, cuando no imposible si no ampliamos aún más nuestra definición de sudoku.

b) Sudoku, grafos y sistemas de ecuaciones polinómicas

Ya hemos visto que la resolución de sudokus es equivalente al problema de colorear un grafo. Existen distintos métodos matemáticos que permiten primero decidir la coroleabilidad de un grafo y después indicar cómo se ha de colorear los vértices. Estos procedimientos requieren herramientas matemáticas mucho más complejas como la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales en varias variables. Esta parte de la actividad está dirigida a alumnos de Bachillerato y de Enseñanza Superior. En primer lugar, indicar que somos conscientes que la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales no es un contenido esencial de los currículos oficiales de Bachillerato, pero consideramos beneficioso que nuestros alumnos aprecien que existen problemas y situaciones comunes en el mundo real que se pueden modelizar y resolver mediante otro tipo de sistemas distintos a los sistemas de ecuaciones lineales, construyendo un ejemplo sencillo de una situación que se matematiza mediante un sistema de ecuaciones polinómicas de forma natural. Por otro lado, a los alumnos que cursan la Licenciatura de Matemáticas se les muestra un problema concreto y real en que tiene una aplicación directa aquello que se ha estudiado de una manera formal y abstracta.

Aquí discutimos solamente como traducir un sudoku, o más generalmente el problema del coloreado de un grafo, a un sistema de ecuaciones polinómicas. Las ideas más importantes de la construcción que presentamos a continuación se encuentra en la tesis de Bayer (1982) y en un libro introductorio de Adams y Loustaunau (1994), ver también Gago y otros (2006) y Martín (2006) para otras aportaciones relacionadas.

Aunque lo que se expone en lo que sigue es generalizable a cualquier grafo independientemente de lo complicado que sea, lo hacemos con un ejemplo concreto por simplificar la construcción. Supongamos que queremos colorear el grafo figura 10 del sudoku de la figura 9 con tres cifras/colores (1 = verde; 2 = rojo; 3 = azul) y traduciremos el problema de coloreado a un problema algebraico.

1º. Asignamos una variable x_1, x_2, ... x_9 a cada vértice. De esta forma, el coloreado del grafo es dar una solución de la forma $x_1=3$, $x_2=1$, … (esto es, el primer vértice tiene asignado el color azul, el segundo el color verde y así sucesivamente).

2º. El vértice x_1 debe tener asignado uno de los tres colores/cifras. Esto se traduce algebraicamente mediante la ecuación polinómica:

$$(x_1 - 1)(x_1 - 2)(x_1 - 3) = 0$$

Lo mismo para el resto de las variables (vértices):

$$(x_2 - 1)(x_2 - 2)(x_2 - 3) = 0$$

…

$$(x_9 - 1)(x_9 - 2)(x_9 - 3) = 0$$

3º. Ahora nos centramos en las aristas. El primer vértice está unido por el segundo vértice por una arista y por tanto, deben tener distinto color, así que $x_1 - x_2 \neq 0$. Basándonos en las anteriores ecuaciones tenemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= (x_1-1)(x_1-2)(x_1-3)-(x_2-1)(x_2-2)(x_2-3) = \\
&= \underbrace{(x_1-x_2)}_{\neq 0}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-6x_1-6x_2+11) \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2+x_1x_2+x_2^2-6x_1-6x_2+11=0
\end{aligned}
$$

Por tanto, la última ecuación quiere decir exactamente que el primer vértice y el segundo son adyacentes. Análogamente se procede con el resto de pares de vértices unidos por una arista. Así aparecen tantas ecuaciones análogas a la anterior como aristas haya en el grafo. En este caso las aristas que hay que considerar son 20:

(1,2), (1,3), (1,4), (1,7), (2,3), (2,4), (2,5), (2,8), (3,6), (3,9),
(4,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7), (5,8), (6,9), (7,8), (7,9), (8,9).

Por lo que las 20 ecuaciones que aparecen son de la forma:

$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 6x_2 + 11 = 0$
$x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 - 6x_1 - 6x_3 + 11 = 0$
…
$x_8^2 + x_8x_9 + x_9^2 - 6x_8 - 6x_9 + 11 = 0$

4º. Finalmente cabe indicar que si existe algún dato inicial; esto es, alguna casilla del sudoku rellena, se introduce una ecuación adicional por cada dato asignado. Por ejemplo en la figura 11, tendríamos que añadir las ecuaciones adicionales x_4= 2 y x_9=1.

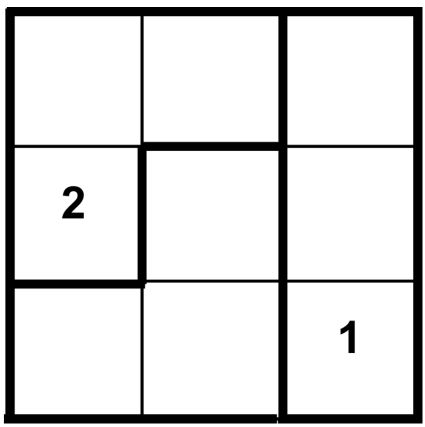

Figura 11.

En conclusión, para nuestro primer ejemplo, el sudoku figura 10, se obtiene un sistema de 29 (= 9 + 20) ecuaciones con 9 incógnitas. Aquí el estudiante también puede ampliar el diccionario de la tabla 4, para esta situación:

Tabla 4.

SUDOKU	TEORÍA DE GRAFOS	ECUACIONES
Sudoku	Grafo	Sistema de ecuaciones
Casilla de un sudoku	Vértice	Variable x_i
Poner una cifra en una casilla	Colorear un vértice	$(x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3) = 0$
Relación entre dos casillas de una misma fila, columna o región	Arista	$x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 - 6x_i - 6x_j + 11 = 0$
Datos iniciales	Vértices coloreados	$x_i = n$
Rellenar sudokus	Colorear grafos	Resolver el sistema

Este sistema se puede resolver mediante diversos métodos. Aquí proponemos las bases de Gröbner, una herramienta matemática que nos permite manipular las ecuaciones algebraicas de manera simbólica.

c) Bases de Gröebner e implementación en PolyBoRi/Sage

Las bases de Gröbner tienen numerosas aplicaciones en Geometría Algebraica y Álgebra Conmutativa y no Conmutativa. Este concepto se presenta usualmente en la Universidad de una manera muy abstracta. La no observación de aplicaciones prácticas en contextos concretos del contenido teórico que se estudia provoca frecuentemente en nuestros alumnos una pérdida de motivación por el estudio de importantes herramientas matemáticas como ésta que, hasta cierto punto, podría considerarse elemental. Las bases de Gröbner están muy relacionadas con el tratamiento de sistemas de ecuaciones polinómicas. De hecho puede considerarse el análogo del método de Gauss para convertir un sistema de ecuaciones lineales en un sistema equivalente triangular (superior).

Hemos implementado en ***PolyBoRi*** un paquete (o módulo) que resuelve el problema del coloreado de un grafo y en particular sudokus, usando bases de Gröbner. De muy reciente creación (Brickenstein y Dreyer, 2007), el programa PolyBoRi (*polynomials over boolean rings*) está optimizado para el cálculo de bases de Gröbner. Sin embargo, este programa en su versión original, es de difícil manejo y su interfaz o entorno gráfico se reduce esencialmente a una línea de comandos similar a MS-DOS. Por ello, hemos modificado el interfaz del mismo para que funcione bajo ***Sage***, programa de software libre y gratuito multiplataforma que también incluye a PolyBoRi. Sage es de fácil manejo y su página web[10] está documentada sufi-

10. http://www.sagemath.org/

cientemente para facilitar el uso de esta plataforma. Es importante señalar que el área de trabajo de Sage es a través de cualquier navegador, permitiendo familiarizarse rápidamente con el entorno, al mismo tiempo que no requiere la instalación de programas extras como javascript, acroread o similares.

La implementación creada se encuentra en Internet en el siguiente enlace:

http://personal.us.es/raufalgan/LS/Sage/sudoku/sudoku.zip

Nos permite:

– Comprobar si un grafo dado es o no coloreable; esto es la resolubilidad de un sudoku dados unos datos iniciales.
– Obtener una coloración del grafo; esto es, obtener una solución del sudoku.
– Comprobar si esta coloración es única; esto es, si el sudoku tiene una única solución posible.
– En el caso de que no fuera única, cuantificar cuantas coloraciones/soluciones distintas y esencialmente distintas son posibles.

Para terminar esta sección nos gustaría señalar que aunque el método propuesto no es el más rápido, ya que existen técnicas más específicas para tratar el problema del coloreado de un grafo, sí que es un método práctico que además permite conocer todas las soluciones del problema. En cualquier caso nuestra intención no era otra que alcanzar los objetivos planteados al principio del artículo, creando un entorno ameno con fines meramente didácticos.

3.2.5. *Aplicación de la coloreabilidad a otros problemas reales*

Tal y como decíamos en la Sección 3.1.5, una vez que ya tenemos una teoría matemática planteada, ésta puede aparecer para modelizar otro tipo de situaciones en el ámbito real. En este caso, la coloreabilidad de grafos también satisface esa propiedad. Surge por primera vez como modelización matemática de las situaciones de coloreado de mapas, esto es, cómo pintar un país en un mapa mudo con un color distinto a cada uno de los países que hacen frontera con él y empleando el número mínimo de colores. Es sencillo también confeccionar otro diccionario (tabla 5) como el siguiente:

Tabla 5.

MAPAS	TEORÍA DE GRAFOS
Mapa	Grafo plano
País	Vértice
Relación entre dos países fronterizos	Arista
Color de un país en el mapa	Color de un vértice
Colorear el mapa	Colorear el grafo

En la tabla se indica que todos grafos producidos por mapas son planos, por lo que en este caso sí se puede aplicar el Teorema de los cuatro colores antes mencionado. Problemas de elaboración óptima de horarios también son otra familia de ejemplos que pueden ser traducidos y resueltos mediante el coloreado de grafos. En (Coriat y otros, 1989) encontramos más actividades para sacar partido a estos resultados.

4. Conclusiones

En esta última sección presentamos algunas conclusiones generales obtenidas tras la implementación de las actividades propuestas, así como algunas ideas sobre trabajo futuro en la misma línea que las presentadas.

En primer lugar, aunque no se han recogido encuestas para evaluar el grado de consecución de los objetivos mencionados en la introducción, debe señalarse que la impresión general que hemos obtenido es muy positiva. Los estudiantes de todos los niveles alcanzan los objetivos propuestos y, si bien las tareas deben ser mucho más dirigidas en el caso de 3º de ESO, los estudiantes de niveles superiores (4º de ESO y Bachillerato) conjeturan los resultados que buscamos de forma mucho más rápida y espontánea de lo que a priori se pensó al diseñar la actividad.

Por otra parte el empleo de juegos aumenta mucho el factor motivador de la actividad facilitando la introducción y asimilación de los conceptos sensiblemente mejor que con el modo habitual (puentes de Königsberg y coloreado de mapas). Creemos que esta es una aportación importante de nuestro trabajo. En particular el uso del dominó, pese a la relativamente poco natural modelización inicial, ayuda mucho a los alumnos a visualizar la potencialidad de los grafos como herramienta para matematizar y a aplicarlos en situaciones diferentes. Los sudokus, por su popularidad, ayudan especialmente a captar la atención de la audiencia y entre alumnos de Bachillerato y Universidad suscita preguntas profundas sobre cuestiones abiertas, el Teorema de los Cuatro Colores y su demostración, etc.

Finalmente, queremos mostrar algunas líneas de trabajo que pueden ayudar a mejorar y ampliar el trabajo realizado. Por un lado, sería interesante buscar actividades, basadas en estos juegos, que permitieran relacionar conceptos como la coloreabilidad y la existencia de ciclos y caminos eulerianos[11]. Por otro lado, para cualquiera familiarizado, siquiera superficialmente, con la teoría de grafos resultará notoria la ausencia del otro tipo de caminos importantes que pueden definirse un grafo: los caminos y ciclos hamiltonianos[12]. Este concepto está relacionado con el llamado problema del viajante y es, en cierto modo, dual del de camino y ciclo euleriano. Sería muy interesante encontrar un juego sencillo y popular (en el sentido en que lo son el dominó y los sudokus) que permitiera ampliar las actividades para cubrir este contenido importante de la teoría de grafos.

11. Por ejemplo (Coriat y otros, 1989 pág. 200), se puede demostrar que para grafos conexos es equivalente el ser euleriano con el hecho de que el mapa de las caras del grafo sea 2 coloreable.

12. Un camino (resp. ciclo) hamiltoniano es un camino (resp. ciclo) que pasa por cada vértice exactamente una vez.

Referencias bibliográficas

ADAMS, W. W., LOUSTAUNAU, P. (1994): *An introduction to Gröbner bases*, volumen 3 de Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society.

ALFONSO, M., BUENO, M., DE ELÍAS, M., DIÁNEZ, M. y NÚÑEZ, J. (2004): Siete puentes, un camino: Köningsberg. *SUMA,* 45. 69-78.

BALBUENA, L., CUTILLAS, L. y COBA, D. de la (2000): *Palillos, aceitunas y refrescos matemáticos*. Barcelona: Rubes.

BAYER, D. (1982): *The division algorithm and the Hilbert scheme*. Ph. D. Thesis. Harvard University.

BELMONTE, J. M. (2005): El juego en la Educación Infantil. En: Chamorro, M.C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil*. Madrid: Pearson Prentice Hall. 383-407.

BENJAMIN, A., QUINN, J. (edts.) (2007): *Games, gambling and magic*. Math horizons. Washington: Mathematical Association of America.

BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J. H., GUY, R. K. (1982): *Winning ways: for your mathematical plays. vol. 1, 2, 3 y 4*. London: Academic press.

BISHOP, A. J. (1991): *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht (Holanda): Kluwer.

BISHOP, A. J. (1998): El papel de los juegos en educación matemática. *Revista UNO,* 18, 9-19.

BRICKENSTEIN, M., DREYER, A. (2007): PolyBoRi: A Gröbner Basis Framework for Boolean Polynomials. *Berichte des Fraunhofer ITWM*, 122.

CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Madrid: Síntesis (Colección Educación Matemática en Secundaria).

CORBALÁN, F. (1999): Juegos y estrategias de pensamiento, en: *Aspectos didácticos de Matemáticas 7, Educación Abierta,* 141, 73-108.

CORIAT, M. (2004): Algunos usos escolares de los grafos en la escuela. *UNO*, 36, 8-21.

CORIAT, M., SANCHO, J. M., GONZALVO, P. y MARÍN, A. (1989): *Nudos y nexos: redes en la escuela*, Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje, Madrid: Síntesis.

DELOFEU, J. (2003): *Gimnasia mental*. Barcelona: Martínez Roca.

EDO, M. (1998): Juegos y Matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de Primaria. *UNO,* 18, 21-37

EDO, M., DELOFEU, J., BADILLO, E. (2007): Juego y Matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela, en: *Actas de las XIII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Granada: FESPM y SAEM-THALES.

ESCOLANO, R. (2007): *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelo de medida y cociente*. Tesis doctoral. Prensas Universitarias de Zaragoza.

ESPINEL, M. C. (1994): El lenguaje de los grafos en los problemas de redes de comunicación, *SUMA*, 18, 32-38.

FERNÁNDEZ, J., RODRÍGUEZ, M. I. (1989): *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*. Madrid: Síntesis (Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).

GAGO, J., HARTILLO, I., MARTÍN, J., UCHA, J. M. (2006): Sudokus and Gröbner bases: not only a divertimento. *Lecture Notes in Computer Science*, vol 4194, 155-165.

GAIRÍN, J. M. (1999): *Sistemas de representación de números racionales positivos*. Tesis doctoral. Prensas Universitarias de Zaragoza.

GAIRÍN, J. M. (2001): Hacer Matemáticas: el juego como recurso, en: *Aspectos didácticos de Matemáticas 8, Educación abierta,* 153, 55-116.

GAIRÍN, J. M. (2002): Aprender a demostrar: los juegos de estrategia, en: *Actas de las X Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (vol 1). 171-188.

GAIRÍN, J. M., MUÑOZ, J. M. (2006): Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático, *SUMA*, 51, 15-29.

GARDNER, M. (1956-1981): *Mathematical games,* Scientific American.

GARDNER, M. (1983): *Circo matemático*. Madrid: Alianza.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. (1992): *Los juegos de estrategia en el Currículum de Matemáticas*. Madrid: Narcea (Colección Apuntes IEPS, 55).

GRUPO ALQUERQUE (2004-2006): Sección Juegos, *SUMA*. Madrid: FESPM.

GUZMÁN, M. de (1984): Juegos matemáticos en la enseñanza, en *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Sta. Cruz de Tenerife: FESPM.

KINDT, M. (2001): Matemática discreta como preparación a las ciencias sociales, en: *Aspectos didácticos de Matemáticas, 4, Educación abierta,* 103, 67-91.

MARTÍN, J. (2006): Sudoku and Gröbner bases. *Proceedings of Transgressive Computing: a conference in honor of Jean Della Dora*. Université J. Fourier, Grenoble, France, 303-310.

MINOUX, M., BARTNIK, G. (1986): *Graphes, algorithmes, logiciels*. París: Dunod-Bordas.

MUSSER, G., BURGER, W., PETERSON, B. (2006): *Mathematics for elementary teachers. A contemporary approach (7th ed.).* EEUU: John Wiley & Sons, Inc.

OLLER, A. M., MUÑOZ, J. M. (2006): Euler jugando al dominó. *SUMA*, 53, 39-49.

RICO, L. (2005): Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003, en: *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: MEC – INECSE. 11-25.

SIPSER, M. (1996): *Introduction to the theory of computation*, Boston: Course Technology.

WEST, D. (2001*): Introduction to Graph Theory*, New Jersey: Prentice Hall.