

INVESTIGACIÓN HISTÓRICA DE CONCEPTOS EN LOS LIBROS DE MATEMÁTICAS

Alexander Maz Machado
Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

RESUMEN

Durante los últimos años en España ha cobrado importancia la investigación sobre libros de texto de matemáticas, esto se ve reflejado en los artículos y tesis doctorales que señalan su uso como objeto de estudio. Dentro de las técnicas del análisis de contenido, el análisis conceptual es una herramienta idónea para buscar los usos y tratamientos de determinados conceptos. También permite y facilita determinados estudios de tipo histórico para determinar y conocer la génesis de los conceptos matemáticos. En este documento se presentan algunos aspectos para clarificar el análisis de contenido y conceptual, para luego presentar una ejemplificación mediante un estudio histórico sobre el concepto de número en manuales españoles de matemáticas de los siglos XVIII y XIX.

Palabras clave: *Análisis de contenido, análisis conceptual, número, investigación histórica, libros de texto.*

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM.

LIBROS DE TEXTO

En la comunidad de educadores matemáticos se reconoce la importancia que ha tenido el libro de texto en la enseñanza y, en particular, en la de nuestra área disciplinar; el informe Cockroft (1985) indicaba que *“los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula”* (p. 114) y quizás esto ha generado un interés en España por investigar los textos de matemáticas en diversos niveles educativos (Azcarate & Serradó, 2006; Gómez, 2001; Martín, 2002; Maz, 2000; Maz & Rico, 2007; Ortiz, 1998; Sanz, 1995; Sierra, González, & López, 1999).

Hoy día es actual volver a plantear la pregunta de Selander (1995) ¿Por qué puede ser hoy interesante para investigadores y profesores indagar sobre los libros de texto? Esta crucial pregunta amerita reflexionar un poco sobre la investigación centrada en libros de texto, y más especialmente en nuestra disciplina, las matemáticas, por dos razones. En primer término, sabido es que en toda sociedad es primordial la transmisión de su cultura; y han sido los libros textos uno de los principales instrumentos que han colectivizado la cultura y contribuido a la difusión de los conocimientos (García & Beas, 1995), transmitiendo información con alguna intencionalidad. En segundo término, se tiene que en la construcción de conceptos en el conocimiento científico y particularmente en el matemático, el lenguaje asume un importante papel mediador, donde su referente es el lenguaje textual, pues es en el texto donde *“efectivamente se producen las matemáticas”* (Lizcano, 1993; p. 30) con lo cual cobra importancia del análisis de los libros de texto de matemáticas.

Es evidente que el análisis de textos escolares en cualquiera de los niveles educativos, arroja no sólo información sobre el contenido de los conocimientos, sino que también lo hace sobre aspectos pedagógicos, curriculares o sociales. Cuando se trabaja en Educación Matemática y se estudian libros de texto, hay que considerar que los textos que se estudian y analizan son fuentes primarias para conocer el estado del conocimiento científico y en que medida estos conocimientos se incardinan en los planes de formación (Maz & Rico, 2009).

Los textos son documentos didácticos ubicados en determinado marco curricular y, por tanto, el análisis de su contenido ha de contemplar la naturaleza didáctica de los documentos. Desde esta perspectiva, se ha de subrayar que los textos de matemáticas no son documentos exclusivamente formales, sino que son materiales docentes, con propósitos educativos, que se proponen transmitir unos determinados significados para la correcta comprensión de los conceptos formales que presentan (Segovia & Rico, 2001). Durante los últimos años se ha dado en España una eclosión de estudios en Educación Matemática en los que se ha utilizado el libro de texto como objeto de investigación.

Como afirma Reed (1995), la utilidad de analizar el texto matemático está en que hace posible argumentar sobre algunos problemas que enfrentan a los filósofos de las matemáticas, permitiendo mostrar una dimensión de pensamiento alterna que encamine a su posible solución.

Al estudiar los libros de texto el investigador analizará contenidos de un determinado campo de conocimiento bajo diversos sistemas de representaciones y aunque varíen los enfoques se tratara siempre de un análisis del contenido presente en

ellos. En este documento abordaremos el análisis histórico de libros de texto mediante el análisis de contenido como técnica metodológica.

EL ESTUDIO HISTÓRICO DE LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS EN ESPAÑA

A nivel internacional, los conocidos estudios de Glaesser (1981) y Schubring (1987) son de los más trascendentes, entre otros aspectos porque establecen criterios metodológicos para abordar el análisis histórico de los libros de textos de matemáticas.

A nivel español, Vea (1995) realiza un estudio descriptivo sobre los manuales españoles de matemáticas del siglo XIX para secundaria centrado en relacionar los contenidos con las disposiciones gubernamentales sobre la enseñanza de las matemáticas.

El trabajo de Sierra, Rico & Gómez (1997) es el que inicia el estudio de los manuales españoles de matemáticas desde el punto de vista de la educación matemática, señalando tres focos de análisis:

1. La forma de presentación de los conceptos, símbolos, tablas, gráficas etc.
2. La función cognitiva que los autores pretenden desarrollar.
3. Las aplicaciones a las que se orientan los conocimientos matemáticos.

Posteriormente Sierra, González, & López (1999) analizan el concepto de límite funcional en libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU) de los años 1940 hasta el 1995.

En Maz & Rico (2004) se estudian manuales de la primera mitad del siglo XVIII categorizando las nociones del concepto de número y cantidad, postulando la influencia ejercida por los jesuitas en la enseñanza de las matemáticas de la época.

En el grupo de Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática se realizó un trabajo histórico sobre algunas de las obras matemáticas de José Mariano Vallejo (Maz, Torralbo & Rico, 2005) centrando la atención en aspectos conceptuales y didácticos. Todos estos trabajos reflejan el interés que existe en el ámbito español por el análisis de libros de textos antiguos.

ANÁLISIS DE CONTENIDO: UNA HERRAMIENTA METODOLÓGICA EN LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

El análisis de contenido hace parte de los métodos modernos de las técnicas documentales y se desarrolló especialmente en Norteamérica dentro de las *communications research* de la Psicología Social (Visauta, 1989). Se centra en las ideas que se expresan y reflejan en un texto dado. El análisis de contenido puede ser cuantitativo (Krippendorff, 1990; Bisquerra, 1989) o cualitativo (Polit & Hungler, 1997) dependiendo del enfoque.

En éste tipo de estudios se debe resaltar la objetividad, lo que se logra a través de la formulación de reglas claras y explícitas que sirvan como pautas para que otros investigadores puedan analizar el mismo material bajo iguales condiciones y puedan validar o falsar las conclusiones. En tal sentido Krippendorff (1990) señala que *“El análisis de contenido es una técnica de investigación destinada a formular, a partir ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto”*

(p. 28). Así mismo, Cea (1996, p. 34), puntualiza en que el “*análisis reflexivo de documentos*” dirigido “*no tanto a la descripción, como a la comprensión de los significados latentes, y a la verificación en el análisis cualitativo*”.

Por otra parte, Visauta (1989) resalta el hecho de ser un método sistemático y objetivo en el sentido de que puede ser reproducido por otros investigadores, y además, en él pueden cifrarse de manera numérica los resultados; es decir, de manera cuantitativa.

Bardin (1986; p. 32) define el análisis de contenido como:

[...] un conjunto de técnicas de análisis de comunicaciones, tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes, permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/ recepción (variables inferidas) de estos mensaje.

El análisis de contenido es “*una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto*” (Krippendorff, 1990; p.28), además, Weber (1990; p. 9) indica que “*El análisis del contenido es un método de la investigación que utiliza un sistema de procedimientos para hacer inferencias válidas del texto*”.

El hecho de realizar inferencias obliga al investigador a poseer un bagaje de conocimientos superior a las fuentes que son objeto de estudio, dado que en el “*nivel latente*” del análisis de contenido se intenta obtener una base para conocer algo sobre las intenciones del autor del texto que se analiza (Fox, 1981).

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA MEDIANTE EL ANÁLISIS DE CONTENIDO

Cuando se trabaja en Educación Matemática y se analizan los libros de texto, hay que considerar que estos textos son documentos didácticos y que, por tanto, el análisis de contenido ha de realizarse sobre la naturaleza didáctica de los documentos (Maz, 2005). Desde esta perspectiva, subrayamos que los textos no son documentos exclusivamente formales, sino que necesitan transmitir una pluralidad de significados para la correcta comprensión de los conceptos formales que presentan (Segovia y Rico, 2001). Es por ello por lo que el análisis de contenido debe contemplar esos diversos significados para ponerlo de manifiesto en toda su riqueza. La presentación del análisis de contenido realizado en libros de texto debe estar acompañada por los focos en que dicho análisis se centra y los criterios que van a utilizarse.

En diversas investigaciones se afirma que se ha realizado un análisis de contenido; sin embargo no se indica en qué ha consistido ese análisis ni se explicita cuáles son los aspectos sobre los que se centró el análisis ni cuáles son las categorías que se han considerado para ello. La mayoría de estas investigaciones sólo toman en consideración significados formales del concepto mediante un simple recuento de la unidad básica de análisis (palabra, en la mayoría de los casos) y su posterior agrupamiento en categorías.

El análisis de contenido es uno de los métodos empleados frecuentemente para la investigación en Educación Matemática (Fernández Cano y Rico, 1992). El Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA), utiliza con regularidad y de manera sistemática el análisis de contenido cuando estudia los tópicos de la matemática

escolar y trabaja sobre documentos didácticos (Gómez, 2002; p. 263): “*En el análisis de contenido se busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados [...] de las matemáticas escolares y tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico)*”. El análisis de contenido de un texto escolar de matemáticas se diversifica, pues, en tres tipos de análisis, según los significados antes mencionados: el que estudia la propia estructura matemática considerada; en este caso un análisis de la estructura matemática es determinante; el que considera los diversos sistemas de representación utilizados para expresar dichos conceptos; y el que realiza el análisis fenomenológico de los conceptos estudiados, junto con los procesos de modelización en que tales conceptos se implican.

En el trabajo mencionado, Gómez (2002) detalla las referencias consideradas para el análisis de contenido:

- *Estructura conceptual*: Se considera como tal a todas aquellas descripciones de los conceptos y las interrelaciones entre ellos, así como la estructura matemática que les justifican. Sobresalen técnicas para el análisis de esta estructura conceptual: la representación en mapas conceptuales y la organización en sistemas de representación.
- *Sistemas de representación*: Los sistemas de representación manifiestan diversas facetas de un mismo concepto matemático; esta descripción en sistemas de representación permite identificar y delimitar las subestructuras matemáticas que conforman la estructura matemática presentada.
- *Análisis fenomenológico*: Algunas de las estructuras matemáticas pueden modelizar fenómenos sociales, naturales y matemáticos, de tal forma que, en el análisis fenomenológico, se identifican las características del fenómeno que son relevantes y se relacionan con elementos y propiedades de la estructura matemática en una o más de sus representaciones.

Otros autores, como Sierra *et al.* (1999), utilizan el análisis de contenido para el estudio de textos de matemáticas, considerando la secuenciación de contenidos, las definiciones según el tipo y papel que juegan en el texto, los ejemplos y ejercicios, las representaciones gráficas y simbólicas, finalmente atienden a los aspectos materiales que determinan la presentación del concepto.

En general los procesos básicos para el análisis de contenido son (Krippendorff, 1990; Fox, 1981):

1. Elección de la unidad de análisis.
2. Elaboración del conjunto de indicadores o categorías.
3. Elaboración de un fundamento lógico que sirva como guía para colocar las respuestas en cada categoría.

Dentro de los variados enfoques del análisis de contenido, se tiene el análisis conceptual como un potente método para el estudio de los significados que se quieren transmitir de un concepto determinado. A continuación se presenta una breve descripción del análisis conceptual como técnica metodológica.

ANÁLISIS CONCEPTUAL

El análisis conceptual es un método que a partir de descripciones, definiciones o listas extensivas, entre otros contenidos documentales, examina en detalle la diversidad de significados y las posibles conexiones entre los términos de cada campo conceptual;

además de que “contextualiza la definición dentro del área en que se inserta” (Rico 2001 p. 186) y posibilita eliminar aquellas posibles inconsistencias debidas a una imprecisión en la utilización de los significados de los conceptos. Para efectuarlo debe tenerse claro qué es un concepto y en nuestra área qué es un concepto matemático.

Para Tall y Vinner (1981) un concepto son “*las palabras usadas para especificarlo. Puede ser personal o formal, siendo esta última la que es aceptada por la comunidad matemática*” (p. 152). Estas palabras son las definiciones y en matemáticas estas son de tipo terminológico, esto es, establecen la relación entre el concepto y el término que lo designa; estas definiciones también establecen y crean las relaciones entre los conceptos de un sistema conceptual (Sager, 1990).

A través de los significados que las personas atribuyen a las palabras, revelan los grados de abstracción que ellos han logrado en su pensamiento (Smagorinsky et al., 2003).

Scriven (1988) señala que los conceptos deben ser analizados antes de que se realice un el trabajo científico sobre en ellos. Esto no debe algo polémico, simplemente se enfatiza en que si los conceptos y sus relaciones no están suficientemente razonados y comprendidos, estos pueden confundir a los investigadores sobre lo que están investigando y por lo tanto los resultados de cualquier investigación empírica serán confusos.

A continuación presentamos una tabla que pretende brindar una distinción metodológica entre el análisis conceptual y el análisis de contenido.

	Análisis conceptual	Análisis de contenido
Unidad central de indagación.	Término, concepto (i.e. currículo, número negativo).	Un texto, discurso o comunicación.
Sentido.	Externo al concepto.	Interno al texto (dentro del texto).
Unidades básicas de análisis.	Acepciones/definiciones del término.	Unidades menores de discurso (i.e. palabra-termino, verbo-adjetivo, palabra-frase.)
Nivel de análisis.	Único.	Continuo: Manifiesto ----- latente
Técnicas propias.	Método del ejemplo/contraejemplo. Lenguaje evocativo y uso de analogías. Reflexión de estructuración e interpretación de la red noseológica (significados del concepto).	Delimitación de la unidad básica. Establecimiento de categorías. Interrelación de categorías. Adscripción de unidades a categorías. Interpretación de categorías: nivel manifiesto y latente.
Fin primordial.	Fundamentar y clarificar términos y conceptos.	Estudiar textos.
Secuenciación.	Longitudinal: relevancia del devenir histórico.	Transversal: relevancia de la ampliación del discurso.
Función auxiliar al método científico general.	Definir términos. Clasificación de teorías. Validación de constructos.	Técnica de recogida de datos. Técnica de análisis de datos.

Tabla 1. Clarificación metodológica entre análisis conceptual y análisis de contenido

A continuación se presenta un ejemplo del diseño de un análisis de libros de matemáticas antiguos utilizando el análisis de contenido y conceptual.

INVESTIGANDO EL CONCEPTO DE NÚMERO EN LOS MANUALES MATEMÁTICOS ESPAÑOLES DE LOS SIGLOS XVIII Y XIX

Objetivo

Establecer el tratamiento dado al número en textos publicados en España durante los siglos XVIII y XIX, mediante su análisis conceptual y de contenido.

Concepto de número en libros de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX

La importancia del número en el aprendizaje de las matemáticas es conocida por todo profesor y en el ámbito de la investigación se han realizado algunos trabajos para determinar su significado en distintos momentos (Gómez, 1999; Maz & Rico, 2004). Por otra parte, Gómez (1993; p. 13) afirma “*Conocer la evolución histórica de los sistemas de numeración y saber las razones que provocaron los cambios y el abandono de unos sistemas por otros, contribuye a dar sentido a los conocimientos previos o ya adquiridos*”. Esto avala el interés por conocer la consideración y tratamiento dado al concepto de número en España durante los siglos XVIII y XIX. Para esto recurrimos a la regla de *representabilidad*, esto es selección de una muestra significativa de los textos, en este ejemplo se tiene en cuenta el prestigio de los autores y el uso reconocido en diferentes ámbitos educativos de la época.

Criterios para la selección inicial de textos

Se tomaron en consideración cuatro criterios para efectuar una primera selección de los textos de matemáticas para el estudio:

- Que estuvieran disponibles. Así la muestra sería intencional y por conveniencia.
- Que los textos fuesen ediciones originales y en español.
- Que los textos hubieran sido publicados entre 1700 y 1902 en España.
- Que el nivel al que estuvieran dirigidos fuese de enseñanza secundaria o superior.
- Que los contenidos y ejemplos no se repitieran en varios textos si estos eran de un mismo autor.
- La relevancia de los autores en la época.
- La trascendencia o influencia de los textos en la época
- Que quedase, al menos, un texto por cada periodo de tiempo seleccionado.

Se seleccionaron 15 libros de texto como una muestra significativa de la producción española de textos matemáticos durante los siglos XVIII y XIX (ver Anexo 1).

Elección de la unidad de análisis:

Seleccionamos el concepto de número en sus diferentes acepciones así como los términos asociados con él y en todos los usos que de él se hace en los libros de texto.

Elaboración del conjunto de indicadores o categorías:

Elegimos cinco indicadores de la presencia, uso o definición del número en los textos a analizar.

Indicador
1 Noción de número o número natural utilizada y conceptos relacionados
2 Idea de cantidad
3 Otros tipos de números tratados
4 Usos y Ejemplos
5 Observaciones generales

Elaboración de un fundamento lógico que sirva como guía para cada categoría

Este apartado debe garantizar la objetividad y la fidelidad, esto servirá de guía para que al ser sometidos los textos al análisis por parte de otros investigadores se apliquen las mismas categorías y pueda ser reproducido el análisis conceptual. Por lo que se garantiza que las diferencias de resultados dependerán de las relaciones que se establezcan y no por la mala asignación de las unidades a una determinada categoría.

1. Noción de número o número natural utilizada:

Aquí se consignaran las ideas de número que utilizan los autores y las que hacen explícitas en el texto. Este campo pretende obtener información que permita más adelante una comprensión e interpretación del concepto de número que se utiliza en el texto.

2. Idea de cantidad:

Se reflejaran las ideas de cantidad y definiciones de cantidad que presentan los autores de los textos, bien sea de manera explícita o deducidas a partir de la lectura y del desarrollo de los contenido en el texto.

3. Otros tipos de números utilizados:

En este campo pretendemos recoger los demás números que se presentan y utilizan en los textos, así se tiene una idea del grado de complejidad y alcance pretendido por el autor.

4. Usos y ejemplos:

Todos aquellos ejemplos que los autores utilizan para mostrar la idea de número. El contenido de este campo corresponde a la fenomenología del concepto o a los procesos de modelización en que está implicado, así como a los sistemas de representación utilizados.

5. Observaciones generales:

Aspectos relacionados con los números que llamen la atención del texto, pero que no son considerados bajo ninguno de los anteriores campos.

Hemos hallado varias ideas o nociones de número utilizadas por los autores de

esta época; estas ideas no se presentan aisladas, en algunos autores están mezcladas o acompañadas de otras, lo que consideramos como expresión de transición entre una y otra. Hemos identificado cinco nociones distintas de número.

Codificación:

A continuación se presentan algunos ejemplos de la codificación de las unidades de análisis según los indicadores o categorías definidas.

Libro de Texto 1			
Indicador	Pedro de Ulloa (1706). <i>Elementos Mathematicos</i> . Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.		
1	<p>“una cantidad cuyas partes estan discontinuadas aunque sea con imaginaria defunion, ò discontinuacion” (p. 5)</p> <p>“Uno, no es Numero ; pero puede confiderarse como Principio, y origen de todo Numero”(p. 5).</p> <p>“fe expreffa folo con alguna, ò algunas NOTAS puesftas todas en vn Renglon” (p. 6)</p>		
2	“todo lo que se puede medir y contar es cantidad inteligible” (p. 6)		
3	“quebrados”, enteros (naturales).		
4	$-4 > -3 > -2;$ <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="border: none; padding-right: 20px;"> $\begin{array}{ l} +3 \\ +3 \\ +3 \end{array} \begin{array}{ l} = \\ < \\ > \end{array} \begin{array}{ l} -3 \\ -4 \\ -2 \end{array}$ </td> <td style="border: none;"> $\begin{array}{ l} -3 \\ -3 \\ -3 \end{array} \begin{array}{ l} = \\ < \\ > \end{array} \begin{array}{ l} +3 \\ +4 \\ +2 \end{array}$ </td> </tr> </table>	$\begin{array}{ l} +3 \\ +3 \\ +3 \end{array} \begin{array}{ l} = \\ < \\ > \end{array} \begin{array}{ l} -3 \\ -4 \\ -2 \end{array}$	$\begin{array}{ l} -3 \\ -3 \\ -3 \end{array} \begin{array}{ l} = \\ < \\ > \end{array} \begin{array}{ l} +3 \\ +4 \\ +2 \end{array}$
$\begin{array}{ l} +3 \\ +3 \\ +3 \end{array} \begin{array}{ l} = \\ < \\ > \end{array} \begin{array}{ l} -3 \\ -4 \\ -2 \end{array}$	$\begin{array}{ l} -3 \\ -3 \\ -3 \end{array} \begin{array}{ l} = \\ < \\ > \end{array} \begin{array}{ l} +3 \\ +4 \\ +2 \end{array}$		
5	“puede dezirse, que ha abançado menos que nada, y que fu avance es, -2. leguas: conque aquí, dos leguas fon menos que nada” (p. 20).		

Libro de Texto 2	
Indicador	Thomas Vicente Tosca (1727). <i>Compendio Matemático</i> . Tomo II. Segunda edición corregida y enmendada. Madrid: Imprenta de Antonio Marín.
1	<p>“Numero es una colección de unidades. Euclides def. 2 del libro 7.” (p. 136).</p> <p>“[...] la unidad no es numero, por no componerse de otras unidades; aunque Caramuel quiera defender lo contrario: y quando la unidad se considera dividida en partes, como en tercios, quartos, &c. Ya no se forma como unidad, si como numero. En tanto pues se llama unidad en quanto la suponemos indivisible; pero en variando la suposicion considerándola dividida en partes, ya dexa de ser unidad, y pasa à tener la razon de numero, y se transfiere la razon de unidad à cada una de las partes de la división” (Tomo I, p. 136).</p>

2	“ es objeto de la matemática aquello por lo cual una cosa se dize mayor, menor, ò igual a otra; y la razon es, porque todo su empleo consiste en averiguar, y demostrar las propiedades, y atributos de dicha cantidad” (Tomo I, p. 2)
3	“Magnitudes irracionales è incommensurables”; “ cantidades negativas”
4	“A mas de esto, por medio del restar no fe bufca otra cofa que la diferencia que ay entre dos cantidades ; y es claro, que la diferencia que ay de 14. a -2. es 16. porque de 14. à nada van 14. de nada a -2. van 2. luego de 14. a -2. van 16.” (p. 91).
5	“Las cantidades cuyas partes, ni van unidas con el signo + ni separadas con el signo -, fe llaman abfolutas, è incomplexas ; y todas las demas fe llaman compuestas, y complexas;” (p.73). “Las magnitudes positivas, son mas que nada; pero las negativas, son menos que nada” (p. 73).

Libro de Texto 3	
Indicador	José de Odriozola (1844). <i>Curso completo de Matemáticas puras</i> . Tomo I reformado. Aritmética y Álgebra elemental. Tercera edición. Madrid: Imprenta de los señores viuda de Jordán é hijos.
1	“Esta segunda cantidad destinada servir de término de comparación para todas las demas de su misma especie, se llama unidad; y la expresión de las veces que la unidad está comprendida en la cantidad valuada, se llama número” (p. 6).
2	“Todo lo susceptible de aumento ó disminución se llama cantidad” (CCO2) (p. 5). “[...] procedemos á valuar el grandor de cada cantidad, comparándola con otra de la misma especie.” (p. 6). “Cuando la cantidad es capaz de variar de grandor de una manera continúa, es decir de aumentarse ó disminuirse cuan poco a poco se quiera imaginar, como sucede á la distancia, al bulto, al peso, al tiempo, etc., se puede elegir por unidad una magnitud de la especie respectiva, cuan grande ó pequeña se quiera, [...]. Más cuando la cantidad aumenta ó disminuye de una manera brusca ó discontinua, como sucede á los diferentes géneros de colecciones de individuos; entonces la unidad es necesariamente uno de los individuos, como por ejemplo un hombre tratándose de número de hombres, sin atender á si la unidad es grande ó pequeña.” (p. 6)
3	“Una letra puede representar cualquiera número de cualquiera sistema de numeración, y este número puede ser entero ó fraccionario ó incommensurable” (p. 381).
4	“Así, por ejemplo, +8 y -8 son valores algébricos del número absoluto 8: igualmente que +a y -a lo son del número absoluto general a.” (p. 42). “[...] Tambien dada $-5 < -3$, sucede otro tanto en $-5+2 < -3+2$ y $-5-2 < -3-2$. Lo mismo en $-3 < 2$ y $-3+4 < 2+4$ y $-3-4 < 2-4$.” (p. 444).

5	<p>“La idea de cantidad de cada especie se imprime en nuestra mente por una continuación de sensaciones que causan en nuestro sentidos los objetos materiales. Así, padeciendo mil y mil ilusiones y desengaños, aprendemos lo que es distancia, superficie, bulto, peso, tiempo, etc., y en general lo que es cantidad” (pp. 5 y 6)</p>
---	--

El análisis de los libros arroja una serie de nociones que hemos categorizado de la siguiente forma:

- ***Noción euclídea:***

Esta noción corresponde a la segunda definición que viene dada en el libro séptimo de los Elementos de Euclides. Esta dice “*Un número es una pluralidad compuesta de unidades*”, En esta concepción la agrupación de unidades genera el número. Así mismo esta idea de número lo asocia a objetos tangibles, y está referida a lo discreto. En sus versiones más primitivas no consideran a 1 como número.

Esta noción es utilizada por Pedro de Ulloa, Vicente Tosca, Thomas Cerdá, Benito Bails y Juan Justo García. Esta idea se manifiesta a lo largo de todo el siglo XVIII.

- ***El número como relación:***

La idea está asociada a considerar los números como la relación que se establece entre una cantidad con otra o con varias cantidades. Esta caracterización de la noción en indica que la idea relacional del número surge con Stevin, cuando el número pasa a explicar la cantidad. Más adelante, Newton da una definición más precisa de número en términos de una relación abstracta entre dos cantidades. Las dos diferencias entre esta noción y la euclídea son en primer lugar, que las definiciones de Stevin y Newton abarcan lo continuo, mientras que la definición de Euclides trata exclusivamente de lo discreto; en segundo término la definición relacional de Newton indica que se trata de relaciones “*abstractas*”, mientras que la euclídea tiene que ver con los objetos concretos. Es la noción con más presencia en los trabajos analizados.

Conviene señalar que García Galdeano considera las cantidades discretas como abstractas, respecto a las continuas, que las valora como concretas.

Dentro de los autores que utilizaron esta idea de número están: Thomas Cerdá, Benito Bails, Francisco Verdejo, José Mariano Vallejo, José de Odriozola, Acisclo Fernández Vallín y Bustillo, Zoel García de Galdeano y Luís Octavio de Toledo; también parece haber indicios en el trabajo de Jacinto Feliú, aunque no está muy clara la noción de este autor.

- ***Idea algebraica o formalista:***

Esta noción concibe al número como un objeto que pertenece a un sistema, y en tal sistema está sujeto a reglas establecidas. Es decir, el número es producto de una estructura algebraica. Este formalismo pretende obtener un lenguaje controlado que evite las ambigüedades e interpretaciones erróneas al presentar los contenidos.

García de Galdeano evidencia esta noción y, pese a que no es tan clara la utilización de esta noción, creemos que también la concebían José de Odriozola y Jacinto Feliú. Octavio de Toledo no declara esta consideración pero todo el tratamiento numérico que realiza se basa en este supuesto.

- **Noción cardinal o preconjuntista:**

Esta es una idea precantorianiana o quizá pre-fregeana, según la cual el número es un cardinal. El número es señalado como lo que denota una colección de objetos, y como cardinal designa cuántos hechos de una misma naturaleza hay reunidos en un conjunto. No importa cuales son los hechos u objetos que forman los conjuntos. El número no diferencia la naturaleza de los elementos de un conjunto, sólo requiere que sean de componente común. Bajo esta concepción encontramos los textos de Acisclo Fernández Vallín y Bustillo, José M^a Rey y Heredia y Luís Octavio de Toledo. Joaquín M^a Fernández y Cardin también presenta indicios de esta noción.

- **Noción Inductiva**

Esta noción inductiva de número natural, se caracteriza porque plantea que cada término se obtiene de manera recurrente, *por síntesis sucesiva de la unidad consigo misma*. José Maria Rey y Heredia es el único autor que expone esta noción, que extrae de Kant.

Estas concepciones en los autores españoles de la época se precisan en la tabla siguiente:

Autor	Euclídea	Relacional	Inductiva	Cardinal o preconjuntista	Algebraica o formalista
Pedro de Ulloa	X				
Vicente Tosca	X				
Thomas Cerdá	X	X			
Benito Bails	X	X			
Francisco Verdejo		X			
Juan Justo García	X				
José Mariano Vallejo	X	X			
José de Odriozola		X			?
Jacinto Feliú		?			?
A. Fernández Vallín y Bustillo		X		X	
J. M ^a Fernández y Cardín				?	
José M ^a Rey y Heredia			X	X	
Z. García de Galdeano		X			X
Luís Octavio de Toledo		X		X	X

Tabla 2. Noción de número utilizada en los textos españoles (1700-1902)

En los autores que no era posible afirmar de forma precisa la presencia de una determina noción, pero que evidencia algún rasgo de una de ellas se ha indicado con el signo de interrogación (?)

La noción euclídea se evidencia en los autores del XVIII lo cual es coherente con la citación a los *Elementos* que prácticamente todos ellos hacen en sus obras, aunque los vientos de la ilustración se hacen sentir a partir de la segunda mitad del siglo, al empezar a aceptar y utilizar los planteamientos relacionales de Newton y

Stevin. Esta noción relacional es la predominante entre estos autores, y se halla tanto entre los de la segunda mitad del siglo XVIII como en los de la primera del XIX.

Los avances matemáticos en la teoría de los números que se suceden en el ámbito internacional llegan hasta España, como lo demuestra el tratamiento cardinal del número que hacen estos autores durante la segunda mitad del siglo XIX.

CONSIDERACIONES FINALES

Se ha presentado cómo el análisis de contenido es una valiosa herramienta en la investigación histórica con libros de texto de matemáticas y de que forma éste con el análisis conceptual se complementan como técnicas metodológicas.

Es un hecho que la validez de los resultados obtenidos mediante el análisis de contenido depende en gran medida de la elección de la unidad de análisis así como de la claridad de los criterios o categorías fijados. Esto brinda la posibilidad de que la investigación pueda ser reproducida, cumpliendo así con uno de los requisitos fundamentales de la investigación científica.

El estudio presentado sobre el concepto de número en los siglos XVIII y XIX hace parte un estudio más amplio, pero es suficiente como ejemplo de un estudio de libros de texto mediante los análisis de contenido y conceptual.

BIBLIOGRAFÍA

- Azcarate, P., Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación* (340), 341-378.
- Bardín, L. (1986). *El análisis de contenido*. España: Ediciones Akal.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa. Guía Práctica*. Barcelona: CEAC.
- Cea, M. A. (1996). *Metodología cuantitativa: estrategias y técnicas de investigación social*. Madrid: Síntesis Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Segunda edición. Pamplona: Ediciones de la Universidad de Navarra.
- Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. El informe Cockcroft*. Madrid: MEC.
- Fernández-Cano, A., Rico, L. (1992). *Prensa y educación matemática*. Madrid: Síntesis.
- García, J., Beas, M. (1995). Análisis histórico del libro de texto. En J. Figueres & M. Beas, *Libros de texto y construcción de materiales curriculares*. Granada: Proyecto Sur.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(39), 303-346.
- Gómez, B. (1999). Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud. In M. Díaz (Ed.), *Actas de las 9AS JAEM. Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Lugo: FESPM.
- Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿por qué menos por menos es mas? En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la*

- investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada. pp. 257-275.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*. Vol. 7, Nº 3, pp. 251-292.
- Krippendorff, K. (1990). Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica. Barcelona: Paídos.
- Lizcano, E. (1993) Imaginario colectivo. La construcción social del número y el infinito. Paidós.
- Maz, A. (2000). *Tratamiento dado a los números negativos en libros de texto publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Granada: Universidad de Granada.
- Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Maz, A., Rico, L. (2004). Concepto de cantidad, número y número negativo durante la época de influencia jesuita en España (1700-1767). In E. De la Torre (Ed.), *Actas del VIII Simposio SEIEM* (pp. 249-258). Coruña: Universidad da Coruña.
- Maz, A., Rico, L. (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX fenomenología y representaciones. *Revista de Investigación Psicoeducativa*, 7(1), 117-129.
- Neuendorf, K. A. (2002). The content analysis. Guidebook. Thousand Oaks, Ca: Sage.
- Ortiz, J. J. (1998). Significado de los conceptos probabilísticos elementales en libros de texto de bachillerato. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Polit, D. F., Hungler, B. P. (1997). *Investigación Científica en Ciencias de la Salud*. Quinta edición. México: McGraw-Hill.
- Reed, D. (1995). *Figures of Thought. Mathematics and mathematical texts*. London: Routledge.
- Rico, L. (2001). Análisis conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En Gómez, P., Rico L, (Eds.) *Iniciación a la investigación en educación matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Sanz, I. (1995). *La construcción del lenguaje matemático a través de los libros escolares de matemáticas. Configuraciones gráficas de textos*. Tesis doctoral. Universidad del País Vasco.
- Sager, J. (1990). *A Practical Course in Terminology Processing*. Amsterdam/ Philadelphia: John Benjamins
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors. *For the learning of mathematics*, 7(3), 41-51.
- Scriven, M. (1988). Philosophical Inquiry Methods in Education. En Jaeger, R. M. (ed), *Complementary Methods for Research in Education* (pp.131-149). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Segovia, I., Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (ed): *Didáctica de las matemáticas en la educación primaria*; 11. 83-104. Madrid: Síntesis.

- Selander, S. (1995). Análisis del texto pedagógico. En Figueres, J., Beas M. (Eds). *Libros de texto y construcción de materiales curriculares*. Granada: Proyecto Sur
- Sierra, M., González, M. T., López, C. (1999). Evolución del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.
- Sierra, M., Rico, L., Gómez, B. (1997). El número y la forma. Libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. In A. Escolano (Ed.), *Historia Ilustrada de libro escolar en España. Del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 373-398). Fundación Germán Sánchez Rupérez.
- Smagorinsky, P., Cook, L. S., y Johnson, T. S. (2003). The Twisting Path of Concept Development in Learning to Teach. *Teachers College Record*, V. 105 (8), pp. 1399-1436.
- Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity *Educational Studies in Mathematics*(12), 151-169.
- Vea, F. (1995). Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España (s. XIX). Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
- Visauta, B. (1989). Técnicas de investigación social. Recogida de datos. Barcelona: PPU.

LISTADO CRONOLÓGICO DE LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS UTILIZADOS

- Pedro de Ulloa* (1706). *Elementos Mathematicos*. Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.
- Thomas Vicente Tosca* (1727). *Compendio Matemático*. Tomo II. Segunda edición corregida y enmendada. Madrid: Imprenta de Antonio Marín.
- Thomas Cerdá* (1758). *Liciones de Mathematica, o Elementos Generales de Arithemtica y Algebra para el uso de la clase*. Tomos I y II. Barcelona: Francisco Suriá, Impresor de la real Academia de Buenas Letras de dicha ciudad.
- Benito Bails* (1772). *Elementos de Arismética*. Tomos I y II. Primera edición. Madrid: D. Joaquín Ibarra. Impresor de la cámara de S.M.
- Juan Justo García* (1782). *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría*. Cuarta edición. Tomo primero. Salamanca: Imprenta de D. Vicente Blanco.
- Francisco Verdejo González* (1794). *Compendio de Matemáticas puras y mixtas*. Tomo primero. Madrid: Imprenta de la viuda de Ibarra.
- José Mariano Vallejo* (1813). *Tratado elemental de matemáticas*. Tomo I. *La Aritmética y álgebra*. Segunda edición. Madrid: Imprenta Garrasayaza.
- José de Odriozola* (1844). *Curso completo de Matemáticas puras*. Tomo I reformado. Aritmética y Álgebra elemental. Tercera edición. Madrid: Imprenta de los señores viuda de Jordán é hijos.

Jacinto Feliu (1847). Tratado elemental de matemáticas. Para el uso del Colegio General Militar. Tomo II. Álgebra. Madrid: Imprenta de D. José M. Gómez Colón y Compañía.

Acisclo Fernández Vallín y Bustillo (1857). Elementos de Matemáticas. Aritmética y Álgebra. Geometría, Trigonometría y Nociones de Topografía. Nueva edición estereotípica. Madrid: Imprenta de la Viuda de Hernando y Compañía.

Joaquín María Fernández y Cardín (1884). Elementos de matemáticas. Algebra Decimocuarta edición notablemente mejorada. Madrid: Imprenta de la viuda e hija de Fuentenebro.

José María Rey y Heredia (1865). Teoría transcendental de las cantidades imaginarias. Madrid: Imprenta Nacional.

Zoel García de Galdeano y Yaguas (1883). Tratado de Álgebra. Tratado Elemental. Parte primera. Madrid: Imprenta de Gregorio Juste.

Luis Octavio de Toledo (1900). Elementos de aritmética universal. Calculatoria. Madrid: Imprenta Fortanet.