

## ACTUACIONES DE MAESTROS EN FORMACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Ana Gabriela Valverde Soto, Encarnación Castro Martínez

Universidad de Granada

### RESUMEN

*El propósito de esta comunicación es presentar los resultados de un estudio sobre el razonamiento proporcional aplicado por un grupo de maestros en formación de la Universidad de Granada en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. La identificación de determinadas estrategias, procedimientos y errores en las producciones de los estudiantes permiten caracterizar el tipo de razonamiento proporcional que predomina en este grupo, así como reflexionar acerca de las implicaciones que se derivan de esta situación.*

### ABSTRACT

*The purpose of this communication is to present findings of a study which aims to analyze performance of pre-service elementary school teachers' at the University of Granada related to solving multiplicative structure problems which involve relations of direct proportionality between quantities. The identification of the some strategies, procedures and difficulties on the students productions make possible to describe the predominant proportional reasoning category of this class as well as to reflect about the implications of this situation.*

---

Valverde Soto, A. G., Castro Martínez, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander: SEIEM.

## INTRODUCCIÓN

Los profesores de matemáticas, implicados en los programas de formación de maestros de primaria, a menudo expresan su insatisfacción con el conocimiento de las matemáticas y las actitudes hacia las mismas que muestran los futuros maestros. El conocimiento matemático de los maestros en formación frecuentemente es descrito como insuficiente (Ball, 1990; Even 1990; Graeber, Tirosh, y Glover, 1989; Reys, 1974; Simon, 1993; Wheeler, 1983)<sup>1</sup>. Investigaciones en el contexto de los números racionales (Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Harel, Behr, Post y Lesh, 1994, citados en Lamon, 2007) han mostrado que el conocimiento que los maestros en formación poseen acerca de este tópico es procedimental y escasamente conectado. De acuerdo con Durmus (2005) la insuficiencia del conocimiento pedagógico y matemático de los maestros es una de las causas primarias de las dificultades que experimentan los estudiantes en las aulas, particularmente con los subconstructos de los números racionales. Esta imagen poco prometedora supone un desafío real para aquellos formadores de maestros que crean que el conocimiento matemático de sus alumnos constituye un componente trascendental en su proceso formativo. Conscientes de la relevancia que tiene el análisis de las actuaciones de los maestros en formación en cualquier tópico de las matemáticas nos centramos en la proporcionalidad por considerarlo parte relevante del currículo, tanto por su uso en la resolución de problemas de la vida cotidiana, como por sus conexiones con otros tópicos matemáticos. Consideramos que este tipo de análisis constituye un material fundamental para orientar los procesos de formación en las facultades de educación.

## MARCO TEÓRICO

En la literatura de investigación aparecen numerosas definiciones de razonamiento proporcional, Presentaremos algunas de ellas, las que corresponden a la visión que sustenta los diferentes tipos de problemas usados en este trabajo.

Karplus, Pulos y Stage (1983) se refieren al razonamiento proporcional como un término que denota el razonamiento en un sistema de dos variables entre las cuales existe una relación de función lineal. Behr y col. (1988, citados en Fernández, 2001) consideran el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que implica un sentido de covariación y de múltiples comparaciones, y cuya principal característica es el reconocimiento de la similitud estructural e invarianza en un sistema matemático simple. Se refieren a la covariación como el cambio simultáneo entre dos variables que se produce por la existencia de una relación entre ellas (esta es la relación que Freudenthal denominó externa o funcional entre magnitudes), y a la invarianza como la igualdad entre la razón de dos valores de una variable en una magnitud y la razón de los valores correspondientes de la otra variable en otra magnitud (en términos de Freudenthal la preservación de la razón o la igualdad de las razones internas). Lamon (2007) propone que el razonamiento proporcional significa ser capaz de dar argumentos que apoyen afirmaciones hechas sobre la relación estructural entre cuatro cantidades ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ) en un contexto que simultáneamente implica covarianza de cantidades e invarianza de razones o productos. Específicamente, esto podría consistir en la habilidad de distinguir una relación multiplicativa entre dos cantidades, así como también la habilidad de extender la misma relación a otros pares de cantidades. Sostiene Norton (2005) que el término razonamiento proporcional es usado para describir los conceptos

---

<sup>1</sup> Citados en Tirosh, Graeber y Wilson (1998)

y pensamiento requeridos para comprender las tasas, la razón y la proporcionalidad y que algunos autores han señalado que la esencia de tal pensamiento es principalmente multiplicativo (Ben-Chaim, Keret, Ilany, 2007; Lo y Watanabe, 1997) y ser hábil en el mismo capacita al sujeto en la comprensión de porcentajes, la pendiente, la función lineal, en trigonometría, en álgebra, entre otros.

### **Categorización del Razonamiento Proporcional**

Respecto al uso de distintos indicadores, para describir el razonamiento proporcional recogemos los de Karplus, Pulos y Stage (1983), que para un problema de comparación de razones basado en la tarea “Rompecabezas de la limonada”, agrupan las actuaciones de los estudiantes en 4 amplias categorías: Categoría I (incompleta, ilógica) que incluye las actuaciones de los alumnos que no dan explicaciones, o que utilizan los datos de manera ilógica o que utilizan operaciones cuantitativas no apropiadas; Categoría Q (cualitativa), contiene las actuaciones de los alumnos que justifican su respuesta usando los cuatro términos dados y comparándolos mediante expresiones de tipo cualitativo como “más”, “menos” o equivalentes; Categoría A (aditiva), en la que se ubican las actuaciones de alumnos que usando todos los datos obtienen la respuesta mediante la estrategia aditiva de la diferencia constante; Categoría P (proporcional), en la que se incluyen los alumnos que usan las relaciones proporcionales entre todos los datos para obtener la respuesta, aunque haya errores aritméticos. Esta categoría la dividen en tres subcategorías: Pb (between), si usan la relación externa o funcional; Pw (within), si usan la relación interna o escalar y Pu (unclassificable), si usan otro tipo de comparación.

Por su parte Lamon (1993) para el análisis de las soluciones hechas por niños de 6° grado a problemas de razones y proporciones, utiliza las siguientes dimensiones matemáticas para analizar y codificar las respuestas: a) uso del pensamiento relativo o absoluto, b) tipo de representación (verbal, pictórica, tabular), estructura de la cantidad (unidad simple, unidad compuesta), c) sofisticación de la estrategia (estrategia incorrecta, razonamiento preproporcional, razonamiento proporcional cualitativo, razonamiento proporcional cuantitativo). Con respecto a la sofisticación de la estrategia la autora establece dos tipos de estrategias, las constructivas y las no constructivas, y según estas estrategias, propone seis niveles, en relación con un mayor o menor razonamiento proporcional; los niveles correspondientes a las estrategias no constructivas los denominan: evasiva, visual o aditiva, construcción de patrones y los niveles que corresponden. A las estrategias constructivas se denominan: razonamiento preproporcional, razonamiento proporcional cualitativo y razonamiento proporcional cuantitativo. En su trabajo, Allain (2000) ofrece una escala para medir las actuaciones de los estudiantes ante diez tareas de proporcionalidad, en esta escala se asigna a cada sujeto un número del 1 al 4, según algunos indicadores predeterminados por la investigadora. Su objetivo era describir, a grandes rasgos, el razonamiento proporcional de los estudiantes que formaron parte de su estudio.

### **MARCO METODOLÓGICO**

El estudio que presentamos se ubica dentro del tipo de investigaciones exploratorias. Nuestro interés general en dicha investigación se ha enfocado en explorar las formas de razonamiento, actuaciones y características de los procesos de resolución que los sujetos, participantes en el estudio, ponen en marcha al resolver problemas de

proporcionalidad directa. Los participantes de este trabajo han sido 76 estudiantes del 3º curso de la carrera de Maestro de la especialidad de Educación Especial, de la Universidad de Granada del curso 2007-2008. Para la recogida de datos se aplicó una prueba de lápiz y papel (Valverde, 2008); el instrumento denominado *Proportional Reasoning Assessment Instrument* fue producto de un trabajo de investigación de Allain (2000) y está compuesto por diez problemas de desarrollo con diferentes niveles de dificultad. Los problemas son de los siguientes tipos: El problema 1 es de comparación numérica, el 2 es de valor perdido, el 3 de conjuntos asociados, el 4 es del tipo parte-parte-todo, el 5, 6 y 7 son partes de un mismo problema de comparación numérica bajo el contexto de mezclas, el 8 es de comparación de razones expresadas gráficamente, el 9 es de tipo ampliador y el 10 consta de 2 ítems, uno de los cuales es de valor perdido (ancho de la bandera) y el otro es del tipo ampliador no lineal (área de la bandera).

### Categorización de las Actuaciones de los Sujetos

Con el fin de categorizar las actuaciones de los sujetos que han realizado la prueba, construimos unas categorías divididas, cada una de ellas, en cuatro niveles jerárquicos, identificados con los números 1, 2, 3 y 4. Para la elección de los indicadores que forman parte de cada categoría, hemos tomado como referencia los trabajos de Karplus, Pulos y Stage (1983), Lamon (1993), Lamon (2007) y Allain (2000); pero principalmente la información procedente de las resoluciones hechas por los participantes, considerando: indicadores que describan el razonamiento proporcional, indicadores que describan la comprensión del concepto de proporcionalidad, tipos de estrategias específicas que pueden ser consideradas como correctas e incorrectas, tipos de errores que ponen de manifiesto los sujetos al abordar las tareas, tipos de conocimientos procedimentales aplicados al resolver las situaciones planteadas.

Las categorías se presentan con un carácter escalonado, de modo que en la categoría 1 se ubicarán las actuaciones que denotan la ausencia del razonamiento proporcional, y en la categoría 4 las actuaciones que se corresponden con un razonamiento proporcional alto. En la Tabla 1 se presenta las categorías e indicadores usados en nuestra investigación, una descripción más detallada de cada categoría puede verse en (Valverde, 2008).

Categoría de las Actuaciones	Indicadores de cada Categoría
1	a. Actuaciones que no tienen una interacción con el problema. b. No resolver el problema. c. No dar respuesta.
2	a. Dar respuestas sin justificación o dar respuestas erróneas debidas a la aplicación de alguna estrategia incorrecta. b. Aplicar un pensamiento absoluto. c. Aplicar estrategias incorrectas.

<b>3</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>a. Dar una respuesta incorrecta debido a un error en la aplicación de alguna de las estrategias consideradas en este nivel, a un error procedimental o a una interpretación inadecuada de los datos.</li> <li>b. Aplicar un pensamiento relativo.</li> <li>c. Aplicar la estrategia de normalización.</li> <li>d. Aplicar la estrategia de la unidad simple.</li> <li>e. Mostrar la no comprensión de las propiedades estructurales de una proporción.</li> </ul>
<b>4</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>a. Obtener la respuesta correcta.</li> <li>b. Usar la estrategia de suposición de razones equivalentes.</li> <li>c. Aplicar la estrategia de la unidad compuesta.</li> <li>d. Reconocer la razón constante de proporcionalidad entre dos cantidades en una situación de proporcionalidad directa.</li> <li>e. Mostrar la comprensión de las propiedades estructurales de una proporción.</li> </ul>

Tabla 1. Categorías usadas en nuestro estudio para describir las actuaciones de un grupo de maestros en formación en problemas de proporcionalidad simple directa.

### Resultados de la Categorización de las Actuaciones por Problema

En el Gráfico 1 se presentan las frecuencias de las categorías correspondientes a las actuaciones mostradas en cada problema. Las actuaciones se observaron con base en la Tabla 1.

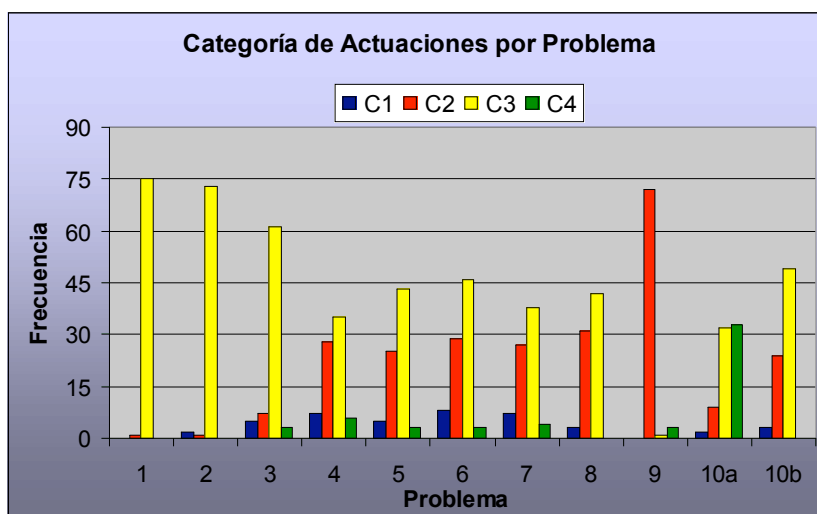


Gráfico 1

Observamos que en todos los problemas, excepto en el 9, la categoría 3 es la que presenta la mayor frecuencia, este hecho nos habla del predominio de un razonamiento pre-proporcional en las actuaciones de este grupo de maestros en formación. De manera global afirmamos que aunque los sujetos, en la resolución de las tareas, apliquen estrategias y procedimientos correctos, se percibe falta en el reconocimiento del operador escalar, de la relación funcional entre las cantidades así como de argumentos que permitan establecer la relación de orden entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón; prevaleciendo una serie de conocimientos procedimentales en lugar del reconocimiento de las propiedades estructurales de una proporción.

Destacamos que los problemas 4, 5, 6, 7, 9 y 10b presentan una frecuencia importante de actuaciones con categoría 2, estas actuaciones se caracterizan por la presencia de errores conceptuales, por ejemplo la aplicación de un pensamiento absoluto, así como de la aplicación de estrategias incorrectas al afrontar el problema, el caso más sobresaliente es el problema 9, en el cual algunas palabras incluidas en el enunciado podrían haber influenciado la aplicación de la estrategia aditiva. Este hecho es una evidencia que muestra cómo sujetos con características distintas a las de los niños o adolescentes participantes en otros estudios, continúan revelando los mismos errores conceptuales en torno a las relaciones de proporcionalidad simple directa.

En la mayor parte de los problemas, la frecuencia de actuaciones con categoría 4 fue muy baja, pocos estudiantes mostraron una comprensión de la relación de proporcionalidad directa entre las cantidades. El comportamiento atípico, en relación con los demás problemas, de las categorías de actuaciones en el problema 10a se explica por la presencia de un operador escalar entero y fácilmente reconocible (el número 2). Sin embargo, la diferencia entre actuaciones con categoría 3 y actuaciones con categoría 4 fue mínima.

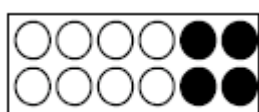
Después de estudiar la actuación de cada sujeto, observamos que 58 de ellos obtuvieron una moda de 3 como actuación global en la prueba, lo cual nos dice que la mayoría de estos sujetos únicamente muestran actuaciones de tipo pre-proporcional y que en esta fase de su formación universitaria, no llegan a identificar los elementos y características de una relación de proporcionalidad directa entre cantidades. Otra situación relevante que se confirma con este dato es el predominio de la aplicación de procedimientos matemáticos para hallar el valor de la razón, sin importar si en la situación el factor multiplicativo es fácilmente reconocible.

Destacamos que 15 de los participantes, han obtenido la categoría 2 en sus actuaciones, lo que nos dice que en la mayoría de los problemas estos alumnos mostraron errores conceptuales en torno a la proporcionalidad directa, solamente 1 sujeto presenta una moda de 4 en sus resoluciones. Este hecho invita a la reflexión, pues estos alumnos universitarios llegarán a ser maestros activos, con el riesgo latente de transmitir esas mismas ideas erróneas en sus aulas.

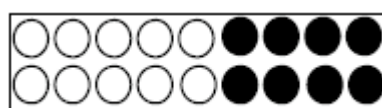
#### Categorización de las Actuaciones en el Problema 4

Con el fin de ejemplificar el procedimiento que seguimos para asignar una cierta categoría a las actuaciones mostradas por los estudiantes presentamos el trabajo de dos de ellos en el problema 4 que es del tipo parte-parte-todo.

*Los dibujos en este problema representan dos cajas de manzanas. Una pequeña y otra grande. La caja pequeña contiene 8 manzanas verdes y 4 manzanas rojas. La caja grande contiene 10 manzanas verdes y 8 manzanas rojas (los círculos sombreados representan manzanas rojas y los no sombreados representan manzanas verdes). ¿Cuál de las dos cajas contiene más manzanas rojas respecto a las manzanas verdes?*



Caja P



Caja G

## Actuación con categoría 2

$C.P = 8 \text{ verdes} \rightarrow 4 \text{ rojas}$   
 $C.G = 10 \text{ verdes} \rightarrow 8 \text{ rojas}$

La Caja G, contiene más manzanas rojas respecto a las verdes, ya que la Caja P, tiene exactamente 4 manzanas verdes si le superpones las rojas y a la caja G le sobran 2 si le superpones las rojas. Por lo tanto la caja G contiene más manzanas Rojas.

El alumno relaciona las cantidades de manzanas, de manera aditiva. Aunque no realiza la diferencia entre las manzanas rojas y verdes de cada caja, explícitamente, dice que si en la caja G se superpone (acción de restar) las rojas (serían el sustraendo) a las verdes (serían el minuendo) sobrarían sólo 2 verdes, mientras que en la caja P tendría 4 manzanas verdes, por lo que concluye que como la diferencia es menor en la caja G entonces ésta contiene más manzanas rojas.

El estudiante muestra un pensamiento absoluto y aditivo ya que para resolver el problema únicamente aborda la situación de cuál caja contiene más manzanas rojas, si ésta hubiese sido la pregunta el trabajo del alumno no tendría ningún error, pero podemos notar que el sujeto no ha interpretado la cuestión planteada que es “*Cuál de las dos cajas contiene más manzanas rojas respecto a las manzanas verdes*”. Se muestra la dificultad para interpretar lo que significa la expresión “respecto a”. En relación con esta situación, Freudenthal (1983) plantea que es precisa una verbalización más temprana de ideas tales como relativamente o comparativamente que podrían mejorar esta situación.

## Actuación con categoría 4

$12 \Rightarrow 4$   
 $18 \Rightarrow x$

$$x = \frac{18 \cdot 4}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

En una caja de 18 manzanas tiene que haber 6 manzanas rojas.  
 Como tiene 8 la caja grande contiene + manzanas rojas respecto a las manzanas verde.

Observamos que, aunque el problema no es de valor perdido, el alumno aplica una regla de tres. El estudiante plantea una nueva situación que gira en torno a la suposición de que si en la caja P, cuyo total de manzanas es 12, hay 4 manzanas rojas

entonces en una caja como la G que contiene un total de 18 manzanas debería haber 6 manzanas rojas, luego como en la situación planteada hay 8 rojas el alumno concluye que la caja G contiene más rojas respecto a las verdes. Aunque a simple vista el procedimiento aplicado es la regla de tres, consideramos que el uso hecho por el estudiante ha sido “con sentido”, reconocemos este uso como una estrategia relevante en la resolución de problemas de proporcionalidad directa, en nuestro estudio la denominamos *suposición de razones equivalentes*. En la aplicación de esta estrategia el sujeto implícitamente reconoce que la relación entre las cantidades total de manzanas y manzanas rojas es de proporcionalidad directa, percibimos que para plantear la relación  $12 \rightarrow 4$ ,  $18 \rightarrow x$ , el sujeto debe de reconocer la invarianza de las razones externas y el razonamiento global mostrado constituye un argumento sobre la relación estructural entre las cantidades de una proporcionalidad, también destacamos que en esta actuación no está presente la necesidad de conocer el valor de la razón para abordar la situación propuesta.

## CONCLUSIONES

En relación con las categorías de las actuaciones de los maestros en formación en problemas de proporcionalidad simple directa observamos que la categoría 3 es la que presentó la mayor frecuencia, esta situación confirma el predominio de un razonamiento pre-proporcional en las actuaciones de este grupo de maestros en formación. El análisis del conocimiento procedimental aplicado por los participantes de nuestro estudio, nos han mostrado que existe una fuerte influencia de procedimientos y algoritmos relacionados con otros significados de las fracciones ajenos al subconstructo de razón, en este sentido observamos una separación entre la representación simbólica y el significado de la fracción como razón. Es posible que estos sujetos hayan experimentado previamente las nociones de razón, proporción, proporcionalidad de forma algorítmica.

Esta situación nos incita a reflexionar acerca de la importancia de desarrollar, en los procesos de formación de maestros, los diferentes subconstructos de los números racionales de una manera conectada, resaltando las situaciones o fenómenos que dan sentido a cada uno y proporcionando a los estudiantes de magisterio experiencias de aprendizaje que permitan establecer las diferencias entre los significados de las fracciones como representantes de un número racional.

De manera global concluimos que aunque los sujetos, en la resolución de las tareas, apliquen estrategias y procedimientos correctos, se echa en falta el reconocimiento del operador escalar, de la relación funcional entre las cantidades y de argumentos que permitan establecer la relación de orden entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón; prevaleciendo una serie de conocimientos procedimentales en lugar del reconocimiento de las propiedades estructurales de una proporción.

*Agradecimientos:* Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto SEJ2006-09056 "Representaciones, nuevas tecnologías, construcción de significados en Educación Matemática" financiado por el Plan Nacional de I + D + I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.



## BIBLIOGRAFÍA

- Allain, A. (2000). *Development of an instrument to measure proportional reasoning among fast-track middle school students*. Thesis for the degree of master of science. North Caroline State University. Versión digital recuperada el 26/02/2008 de <http://www.lib.ncsu.edu/theses/available/etd-20010417-144134/unrestricted/etd.pdf>
- Ben-Chaim, D., Keret, J., Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Vol. 10, pp. 333-340.
- Durmus, S. (2005). Identifying pre-service elementary school teachers' conceptualization levels of rational numbers. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, Vol. 5 (2), pp. 659-666. Obtenido el 12 de abril de 2008 de la base de datos ProQuest Psychology Journals.
- Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Cap.6. Reidel, Dordrecht. Traducción de trabajo para uso interno. Luis Puig Espinosa. Universidad de Valencia.
- Karplus, R., Pulos, S., Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 219-233.
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, pp. 41-61.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Edited by Frank K, Lester Jr. National Council of Teachers of Mathematics. *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 629-667). United States of America.
- Lo, J., Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 28 (2), pp. 216- 237.
- Norton, S. (2005). The construction of proportional reasoning. In Chick, H. L., Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 17-24. Melbourne: PME.
- Tirosh, D., Graeber, A., Wilson, J. (1998). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Versión digital recuperada el 26/03/2008 de <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html>
- Tourniaire, F., Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, pp. 181-204.
- Valverde, A. (2008). Razonamiento Proporcional: Un análisis de las actuaciones de maestros en formación. Trabajo Final de Máster. Universidad de Granada.