

SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA MEDIA ARITMÉTICA DE PROFESORES EN FORMACIÓN

Juan J. Ortiz, Universidad de Granada
Vicenç Font, Universidad de Barcelona
Silvia Mayén, Instituto Politécnico Nacional de México

RESUMEN

La formación estadística de los futuros profesores es fundamental para realizar el cambio propuesto en la enseñanza por los actuales currículos. El objetivo principal de esta investigación es determinar el significado personal declarado del objeto matemático "media aritmética" de los profesores en formación de Educación primaria. La herramienta configuración cognitiva propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados y mostrar que existen importantes dificultades relacionadas con la comprensión del concepto y algunas de sus propiedades. Finalizamos con algunas implicaciones educativas para la formación de profesores en el campo de la estadística

ABSTRACT

The statistical training of future teachers is essential to make the change proposed by the current education curriculum. The main objective of this research is to determine the personal meaning of the mathematical object "average" in the Primary school teachers. The cognitive configuration tool proposed by the Onto-semiotic approach to Cognition and Instruction Mathematics (EOS) has revealed the great variety of kinds of meanings and show that there are significant difficulties associated with understanding the concept and some of its properties. We finish with some educational implications for teacher training in the field of statistics.

Ortiz, J. J., Font, V., Mayén, S. (2009). Significados personales de la media aritmética de profesores en formación. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 345-353). Santander: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

El interés de la enseñanza de la estadística se ha visto reforzado en el Real Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación primaria (MEC, 2006), donde se incluye un bloque de contenidos sobre *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* desde el primer ciclo. Este documento enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos estadísticos y de hacer más activa y exploratoria la metodología de enseñanza, incidiendo en la comprensión de las informaciones presentes en los medios de comunicación, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en otros currículos (ej., NCTM, 2000; SEP, 2006). Pero un cambio efectivo de la enseñanza de la estadística requiere mejorar la formación de los profesores que han de llevarla a cabo (Stohl, 2005), pues, sin una formación específica, tendrían que confiar en sus creencias e intuiciones, con frecuencia erróneas, y que podrían transmitir a sus estudiantes como se ha comprobado en el caso de la probabilidad (Ortiz y cols., 2006). Para conocer si los maestros en formación están debidamente preparados, hemos realizado un amplio estudio de evaluación inicial de la competencia de los futuros profesores de Educación primaria para resolver problemas elementales de estadística. En este trabajo presentamos solo una pequeña parte de los resultados relacionada con el significado personal de los maestros en formación sobre el objeto matemático media aritmética.

El gran esfuerzo de investigación sobre formación de profesores en la pasada década apenas se refleja para el caso de la estadística, como se observa al analizar los contenidos de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education*, o en el survey de Shaughnessy (2007). A pesar de ello, progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de dificultades en este colectivo en el uso de los promedios, que permanecen incluso después de haber recibido enseñanza específica (ver por ejemplo, la investigación de Batanero, Godino y Navas (1997)) o los errores que cometen en la construcción de ciertas gráficas y las dificultades que muestran cuando razonan sobre representaciones de distribuciones de datos (Espinel, 2007). En un estudio para evaluar el conocimiento del contenido pedagógico y del contenido estadístico de los futuros profesores de primaria, Godino y cols. (2008) observaron que aunque muchos tienen una buena intuición sobre la equiprobabilidad, minusvaloran la variabilidad, y en cuanto al análisis didáctico muchos de ellos tuvieron dificultades en juzgar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción. Los resultados de los trabajos de Garrett (2008) y García Cruz y Garrett (2008), con alumnos de secundaria y universitarios, algunos de éstos últimos estudiantes para profesor de matemáticas en educación primaria y secundaria, revelaron que el alumnado muestra distintos tipos de razonamiento sobre la media aritmética y sus respuestas se pueden asociar a cinco niveles de comprensión según la taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1991) así como que no hubo diferencias significativas entre los estudiantes universitarios y de secundaria en cuanto a los niveles de interpretación observados. En estudiantes universitarios también se han descrito errores de cálculo de la media simple y ponderada (Pollatsek, Lima y Well, 1981) o en la aplicación incorrecta de algunas propiedades de la misma (Mevarech, 1983). Por todo ello consideramos de interés seguir esta línea de investigación ya que, como vemos, la media aritmética es un concepto fundamental en estadística, del que hay pocas investigaciones sobre profesores en formación. A continuación describimos el marco teórico, los objetivos y los resultados obtenidos.

MARCO TEÓRICO, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

De los constructos propuestos en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), en esta investigación se utilizaron fundamentalmente tres: los significados de los objetos personales (del profesorado en formación) y las configuraciones epistémicas/cognitivas. De acuerdo con ello proponemos el par (*sistema de prácticas, configuración de objetos*) como la herramienta que nos permite caracterizar el significado del objeto “media aritmética”. En este trabajo, se considera que su significado es un sistema complejo de prácticas en las que cada una de las diferentes configuraciones de objetos en las que se “presenta” el objeto “media aritmética” posibilita un subconjunto de prácticas de dicho sistema. Los sistemas de prácticas se pueden parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas, posibilitadas por una determinada configuración de objetos, permitiendo la distinción entre significado y sentido (Font y Ramos, 2005): los sentidos pueden ser interpretados como significados parciales. En consecuencia, en esta investigación se ha entendido el significado personal de dicho objeto como el conjunto de prácticas que puede realizar el futuro profesor en las que la media es fundamental (o no) para su realización y como las configuraciones cognitivas que el alumno activa para realizar dichas prácticas. Las prácticas que realiza el futuro profesor, en este caso, son la lectura del texto de cada uno de los problemas y la producción de un texto como respuesta.

El objetivo principal de esta investigación es determinar el significado personal declarado del objeto matemático “media aritmética” de los futuros profesores de Educación primaria de la Facultad de Educación de Melilla, cuando inician el estudio de la asignatura de Matemáticas y su didáctica (4,5 créditos). Como objetivos específicos se pretenden los siguientes: 1. Determinar tipologías de significados parciales personales declarados de los estudiantes según la configuración cognitiva activada en sus respuestas (es decir, según la presencia o ausencia de determinados conceptos, proposiciones, procedimientos, lenguaje y argumentos) y 2. Determinar los errores y dificultades de los estudiantes según la configuración cognitiva activada en sus respuestas.

Para evaluar el significado personal declarado de los futuros profesores, hemos utilizado el cuestionario propuesto en Batanero (2000), donde también se determina el significado de referencia del objeto matemático “media aritmética” y al que consideramos idóneo desde el punto de vista del contenido, ya que es representativo de dicho significado de referencia. Consta de cinco problemas, siendo el tercero del cuestionario el que analizamos en este trabajo:

Problema. Elemento representativo de un conjunto de datos

Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

Altura saltada en cm.

<i>Alumno</i>	<i>Ana</i>	<i>Bea</i>	<i>Carol</i>	<i>Diana</i>	<i>Elena</i>	<i>Fanny</i>	<i>Gia</i>	<i>Hilda</i>	<i>Ines</i>	<i>Juana</i>
<i>Antes del entrenamiento</i>	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
<i>Después del entrenamiento</i>	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

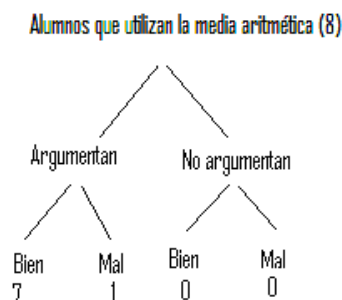
Es un ejemplo particular de una clase de problemas donde se trata de reconocer que la media aritmética es el parámetro más adecuado para comparar estas dos distribuciones. En el EOS para analizar las producciones matemáticas de los alumnos se analizan primero las prácticas matemáticas y después los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. En este estudio, tal como ya se ha dicho, las prácticas que realiza el alumno son la lectura del texto de cada uno de los problemas y la producción de un texto como respuesta, las configuraciones de objetos se analizan a continuación (por cuestiones de espacio no se hace el análisis de procesos). La muestra participante estuvo integrada por 40 futuros profesores de Educación primaria de diferentes especialidades, con escasa formación matemática y en particular estadística.

RESULTADOS

En base a la configuración cognitiva de las soluciones de los futuros profesores, hemos obtenido tres categorías de significados personales declarados de los alumnos:

Categoría 1: Alumnos que utilizan la media aritmética para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: Son alumnos que interpretan de forma correcta que la media aritmética es el mejor parámetro para la comparación de las dos distribuciones propuestas.



Un ejemplo de configuración cognitiva de uno de los siete alumnos que en su práctica utiliza la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es correcta sería la siguiente (alumno 24):

Utiliza la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es correcta	Alumno 24
SITUACIÓN PROBLEMA	<i>Problema. Elemento representativo de un conjunto de datos (Al medir la altura...)</i>
<p>LENGUAJE</p> $115 + 112 + 107 + 119 + 115 + 138 + 126 + 105 + 104 + 115 = 1156$ $1156 / 10 = 115.6$ $128 + 115 + 106 + 128 + 122 + 143 + 132 + 109 + 102 + 117 = 1204$ $1204 / 10 = 120.4$ <p>Si el entrenamiento es efectivo, porque la media de salto antes era 115.6 y ahora es de 120.4; y</p> <p>... .. $120.4 > 115.6$.</p>	<p>Verbal relacionados con el contexto: entrenamiento, salto.</p> <p>Simbólico: números enteros y decimales, suma (horizontal), división, fracción</p>

CONCEPTOS	Media aritmética: $\bar{x} = \bar{x}_i/n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ Comparación de medias Suma División
PROPOSICIONES	El entrenamiento es efectivo
PROCEDIMIENTOS	Cálculo de la media aritmética Comparación de las dos medias
ARGUMENTO	Tesis: El entrenamiento es efectivo Argumento: porque la media de salto antes era 115,6 y ahora es de 120,4; y $120,4 > 115,6$

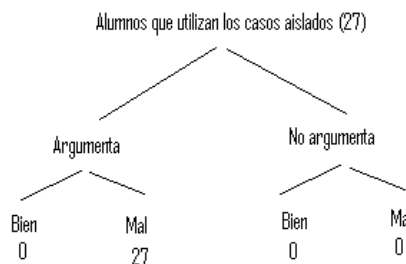
Figura 1. Configuración cognitiva del alumno 24

Hay 4 futuros profesores (alumnos 22, 25, 29 y 31) que han activado esta misma configuración cognitiva, y los otros dos (alumnos 21 y 38), aunque han calculado la media y han visto que la altura media saltada después del entrenamiento ha sido mayor, siguen haciendo alusión a que “*en la mayoría de los casos sí es efectivo*”, por lo que consideramos que, aunque usan la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones, no tienen el concepto muy claro ya que siguen basando sus argumentos en el comportamiento de los casos de forma aislada.

La configuración cognitiva del futuro profesor (alumno 6) que en su práctica utiliza la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es incorrecta sería similar a la anterior, calcula las medias de cada una de las distribuciones y concluye que el entrenamiento “*No ha sido efectivo porque la media antes del entrenamiento = 115,6 y después la $\bar{x} = 120,4$* ”.

Categoría 2: Alumnos que analizan los casos de forma aislada para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: Son alumnos que para comparar las dos distribuciones propuestas analizan el comportamiento de los casos aislados en cada una de ellas.



Entre los veintisiete futuros profesores pertenecientes a esta segunda categoría podemos distinguir tres grupos, según el procedimiento utilizado:

Grupo 1: Un ejemplo de configuración cognitiva de uno de los siete futuros profesores (alumnos 1, 5, 9, 14, 30, 33 y 36) que en su práctica utiliza el análisis de los casos de forma aislada, calculando el porcentaje de alumnas que han mejorado sus resultados, para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es incorrecta sería la siguiente (alumno 36):

Utiliza el análisis de los casos de forma aislada, calculando el porcentaje de alumnos que han mejorado sus resultados, para la comparación de dos distribuciones casi simétricas, argumenta y su respuesta es incorrecta	Alumno 36
SITUACIÓN PROBLEMA	<i>Problema. Elemento representativo de un conjunto de datos (Al medir la altura...)</i>
LENGUAJE Este entrenamiento es efectivo, porque el 80% de los escolares ha obtenido un salto mayor que en los anteriores entrenamientos, frente a un 20% que ha descendido negativamente su puntuación.	Verbal relacionados con el contexto: entrenamiento, salto. Simbólico: números enteros y porcentajes.
CONCEPTOS	Comparación de casos aislados Porcentaje
PROPOSICIÓN	El entrenamiento es efectivo
PROCEDIMIENTO	Cálculo del porcentaje
ARGUMENTOS	Tesis: El entrenamiento es efectivo Argumento 1: porque el 80% de los escolares ha obtenido un salto mayor que en los anteriores entrenamientos Argumento 2: frente a un 20% que ha descendido negativamente su puntuación.

Figura 2. Configuración cognitiva del alumno 36

Grupo 2: Hay dieciséis futuros profesores que en su práctica utilizan el análisis de casos aislados, calculando el número de alumnas que han mejorado sus resultados, para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumentan y sus respuestas son incorrectas. Dos de ellos en su práctica utilizan una configuración cognitiva similar pero consideran que el entrenamiento no es efectivo porque *“algunos alumnos han superado bien el ejercicio y en cambio otros han empeorado”* (alumno 11) o *“porque después del entrenamiento, excepto en un par de casos, los alumnos saltan más que antes del entrenamiento, por lo que no tienes una medida estable”* (alumno 20).

Grupo 3: Hay dos futuros profesores (alumnos 23 y 27), que en su práctica utilizan el análisis de casos de forma aislada, calculando la suma de las desviaciones entre el valor obtenido después y antes del entrenamiento para cada una de las alumnas, para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumentan y sus respuestas son incorrectas. Otro utiliza una configuración cognitiva similar pero considera que el entrenamiento no es efectivo porque *“hay varias alturas y no se varia de la misma unidad”* (alumno 28). Por último, hay un alumno que calcula la media de dichas desviaciones y aunque comete errores en la suma y en alguna diferencia, considera que

el entrenamiento si es efectivo “*puesto que los chavales ganan de media 4,3 cm después del entrenamiento*” (alumno 40).

Categoría 3: Alumnos que no utilizan ningún cálculo para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: Son alumnos que para comparar las dos distribuciones no utilizan ningún cálculo y aportan otro tipo de argumentos.

En esta categoría hay dos futuros profesores, uno que considera que el entrenamiento sí es efectivo “*ya que al entrenar el cuerpo queda predispuesto para avanzar en los resultados iniciales*” (alumno17) y otro que argumenta que “*en algunos casos sí y en otros no es tan efectivo puesto que no dan más de lo que dieron al principio*” (alumno32). Por último, hay tres futuros profesores que no contestan.

En resumen, se han identificado tres categorías de significados personales declarados de los futuros profesores: Categoría 1, con ocho futuros profesores que utilizan la media aritmética y aportan argumento y respuesta correctos, salvo uno; categoría 2, con 27 futuros profesores que analizan los casos de forma aislada y sus argumentos y respuestas son incorrectos y categoría 3, con 2 futuros profesores que no utilizan ningún cálculo y sus argumentos y respuestas son también incorrectos. En la categoría 2 distinguimos tres grupos, según el procedimiento utilizado: grupo 1, con 7 futuros profesores que calculan los porcentajes de casos que han mejorado después del entrenamiento; grupo 2, con 16 futuros profesores que calculan el número de casos que han mejorado después del entrenamiento y grupo 3, con 4 futuros profesores que utilizan la suma de las desviaciones entre el valor obtenido después y antes del entrenamiento para cada una de los casos o la media de dichas desviaciones.

En la Tabla 1 quedan recogidas las tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores y la frecuencia de cada una de ellas, indicando si son correctas, incorrectas y si argumentan o no su respuesta. En ella observamos que, siendo la media aritmética de las alturas de cada una de las dos distribuciones propuestas el mejor parámetro para realizar la comparación de las mismas, hay 32 futuros profesores (80 %) que no la utilizan.

	Correcta		Incorrecta		No contesta	Total
	Argumenta	No argumenta	Argumenta	No argumenta		
Media	7	0	1	0		8
Casos aislados	0	0	27	0		27
Otras	0	0	2	0		2
No contesta					3	3
	7	0	30	0		
Total	7		30		3	40

Tabla 1. Frecuencia de tipologías de significados personales declarados

Han obtenido el resultado correcto solo 7 futuros profesores (17,5 %), donde todos han aportado el argumento correcto. Han respondido de forma incorrecta 30 (75 %), que han cometido los siguientes errores: 27 de ellos han analizado los casos de forma aislada, y aunque afirman que el entrenamiento es efectivo, sus argumentos están basados en procedimientos que no siempre proporcionan la solución correcta; 1 aunque utiliza la media no la interpreta bien, respondiendo que el entrenamiento no es efectivo, y 2 no han utilizado ningún cálculo argumentando de forma errónea. Estos errores son similares a los descritos en Batanero, Godino y Navas (1997), aunque en este caso las tareas eran de respuesta múltiple y el porcentaje de respuestas incorrectas más bajo (49,1%). Por último, hay 3 futuros profesores (7,5%) que no contestan.

CONCLUSIONES

La herramienta configuración cognitiva propuesta por el EOS ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores en formación cuando resuelven un problema de comparación de dos distribuciones, donde hemos identificado tres categorías y en la segunda de ellas distinguimos tres grupos según el procedimiento utilizado. Destacan el alto porcentaje de profesores en formación que no tiene en cuenta la media aritmética para la comparación de estas dos distribuciones (80%) y que en su práctica activa otras configuraciones cognitivas incorrectas o no contestan e incluso cometen errores de cálculo en las operaciones y el alto porcentaje que si aporta argumentos pero de forma incorrecta (75 %), lo que puede ser debido a su escasa formación en estadística.

Nuestros resultados, coincidentes con investigaciones anteriores, en el sentido de que muchos de los errores continúan hasta la universidad, apuntan la necesidad de reforzar la formación estadística elemental de los futuros profesores de Educación primaria que difícilmente podrán enseñar un tema en el que muestran dificultades tan notables. Como consecuencia, el formador de profesores debe tenerlos en cuenta, además del razonamiento estadístico, al abordar la enseñanza de la estadística en las Facultades de Educación, cambiando no solo los contenidos sino la metodología. Para ello, debemos proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del significado global de la media aritmética, y prepararlos en la componente didáctica, mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodología didáctica y los aspectos cognitivos.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte del Proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

BIBLIOGRAFÍA

- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno*, 25, 41-58.
- Batanero, C. Godino, J., Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada.
- Biggs, J. B., Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. En H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, 57-76. Erlbaum. Hillsdale, NJ.

- Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 99-119). Tenerife: SEIEM. ISBN: 84-7985-261-5.
- Font, V., Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-346.
- García Cruz, J. A., Garrett, A. J. (2008). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Journal of the Corea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 12 (1), 49-66.
- Garrett, A. J. (2008). *La media aritmética: Aspectos cognitivos, estrategias, errores y dificultades en su comprensión por el alumnado*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey. México.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.
- N. C. T. M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.
- Ortiz, J. J., y cols. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.
- Pollatsek, A. Lima, S., Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.
- Shaugnessy, J. M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 957-1008. NCTM. Greenwich, CT.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Dodrecht: Kluwer

