

# LA INFLUENCIA DEL SGD EN LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Nuria Iranzo y Josep Maria Fortuny  
Universidad Autónoma de Barcelona

**Resumen.** Este estudio forma parte de una investigación<sup>16</sup> en curso sobre la interpretación del comportamiento de los estudiantes de Bachillerato en la resolución de problemas de geometría plana analítica, mediante el análisis de la relación entre el uso de GeoGebra<sup>17</sup> y la resolución en papel y lápiz, así como el conocimiento geométrico. El marco teórico del presente trabajo se basa en la teoría de la instrumentación de Rabardel (2001). Pretendemos buscar relación entre las concepciones de los alumnos y las técnicas que utilizan mediante el análisis de la influencia del uso simultáneo de las ventanas algebraica y geométrica que ofrece el Geogebra en las estrategias de resolución de problemas de los alumnos.

**Abstract.** This study is part of an ongoing research on the interpretation of student's behaviors when solving plane analytical geometry problems by analyzing relationships among DGS (GeoGebra) use, paper-and-pencil work and geometrical thinking. Our theoretical framework is based on Rabardel's (2001) instrumental approach to tool use. We seek for relationships between student's thinking and their use of techniques by exploring the influence of certain techniques on the student's resolution strategies.

## INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Este estudio se enmarca en las investigaciones sobre la integración de las nuevas tecnologías en la enseñanza secundaria, en particular el uso de software de geometría dinámica (SGD) en el contexto de la resolución de problemas de Geometría analítica (problemas tipo de selectividad). Conocidos programas como por ejemplo Cabri y Cinderella facilitan la experimentación con Geometría sintética. Escogemos trabajar con Geogebra (Howenwarter y Preiner, 2007) ya que integra de forma dinámica Geometría sintética y analítica y la expresión algebraica de objetos gráficos. También porque es un software muy intuitivo que no requiere estrategias de uso avanzadas para utilizarlo en el contexto de esta investigación. En este estudio se analiza la relación entre la resolución de problemas de Geometría analítica en los entornos de papel y lápiz y con Geogebra. Como cita Laborde (1992) "a task solved using DGS may require different strategies to the same task solved with paper and pencil and it affects the feedback provided to the user". Nos planteamos las siguientes cuestiones:

- ¿Qué relación hay entre lápiz y papel y el trabajo con Geogebra?
- ¿Cómo afecta su uso a las estrategias de resolución y la comprensión de conceptos? ¿Qué aporta el uso de Geogebra a los alumnos?

Analizamos y comparamos los procesos de resolución en ambos medios, así como las interacciones alumno-alumno y alumno-GeoGebra (GGB)

---

<sup>16</sup> MEC. Development of an e-learning tutorial system to enhance students' solving problem competence. SEJ2005-02535.

<sup>17</sup> [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

basándonos en la teoría de la instrumentación de Rabardel (2001). Los objetivos de esta investigación son:

- caracterizar las estrategias de resolución de los alumnos en ambos medios y analizar los procesos de instrumentación/instrumentalización intentando así esbozar diferentes tipologías de alumnos.
- ¿Cómo influye (adquisición de conocimiento, visualización, estrategias,...) el uso de GGB en cada tipología de alumnos?

El interés del tema sería ofrecer conocimiento para mejorar las competencias que potencia el entorno.

## **MARCO TEÓRICO**

Una parte importante del marco teórico de esta investigación está basada en la teoría de la instrumentación de Rabardel (2001) que diferencia entre el artefacto (GGB en este caso) y el instrumento. El instrumento es la conjunción del artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para construirlo. Según Rabardel (2001), el software restringe “no sólo la manera de actuar, sino también la manera de pensar del usuario”, por tanto, el alumno tiene que movilizar conscientemente estructuras de control sobre el conocimiento que se pone en juego durante la génesis instrumental (el artefacto se transforma en instrumento para el usuario). Los estudiantes desarrollan esquemas mentales en los que las técnicas de uso y sus conceptos están interrelacionados. El proceso de génesis instrumental tiene dos direcciones. Por un lado las características del software influyen las estrategias de resolución y las concepciones del estudiante (proceso de instrumentación). Por otro lado el proceso de instrumentalización, dirigido del estudiante al software, lleva a una internalización del uso del artefacto. Así, un mismo artefacto puede ser instrumentalizado de distintas formas en función del alumno y del problema propuesto.

Otros componentes del marco teórico son el punto de vista epistemológico (Lakatos 1984), semiótico (Duval, 1995) y cognitivo (Cobo, 1998).

## **METODOLOGÍA**

Se trata de un estudio de casos que analizamos desde una perspectiva cualitativa dependiente de la obtención de datos. Se centra en la observación y análisis de las conductas de los alumnos durante la resolución de problemas. En la investigación participaron un grupo heterogéneo de 10 alumnos de 1º de Bachillerato tecnológico. Estos alumnos trabajaron la geometría enfatizando en una aproximación Euclídea desde la resolución de problemas. Se escogió el grupo de alumnos teniendo en cuenta sus características cognitivas (grupo heterogéneo escogido por su profesor que colaboró en la investigación) y también su interés en participar en la investigación. Teniendo en cuenta la unidad didáctica trabajada en el momento de la investigación, los conocimientos previos de los alumnos y su forma habitual de trabajo en clase se escogieron (con la colaboración del profesor) los problemas planteados a los alumnos, cuya resolución (en ambos medios) analizamos en la investigación. Los problemas escogidos son:

Problema de la circunferencia:

*Una circunferencia pasa por los puntos  $P=(1,-1)$ ,  $Q=(3,5)$  y su centro pertenece a la recta de ecuación  $x+y+2=0$ . Hallar su centro y el radio.*

Problema del rombo:

*Un rombo tiene 2 vértices  $P=(-2,1)$  y  $Q=(0,-3)$  que forman una diagonal del rombo. El perímetro es de 20 cm. Hallar los vértices restantes y el área del rombo*

A partir de la construcción del espacio básico de resolución en los dos medios, analizamos los contenidos conceptuales y procedimentales implicados en su resolución (Cobo, 1998) así como las herramientas<sup>18</sup> de GGB necesarias para las distintas resoluciones. También se diseñaron cuestionarios sobre la resolución en papel y lápiz y sobre la opinión de los alumnos del uso de GGB (ventajas, diferencias entre los dos medios, dificultades, etc.).

La investigación se llevó a cabo a lo largo de tres sesiones:

- Una primera sesión (una hora) de introducción al uso de GGB. Se trabajaban en grupo, con la ayuda del profesor, algunos ejemplos y problemas de construcción con el objetivo de familiarizar a los alumnos con las herramientas necesarias para las sesiones siguientes (construcción de un cuadrado, recta de Euler, teorema de Varignon).

- Segunda sesión (40 minutos): se inició la experimentación con la resolución en grupos de dos o tres alumnos (forma habitual de trabajo en clase) del problema de la circunferencia sólo con lápiz y papel. Posteriormente se realizó el cuestionario (individualmente).

- Tercera sesión (40 minutos): Se les propuso la resolución con Geogebra (individual pero respetando la distribución de los alumnos de la sesión de papel y lápiz) del problema de la circunferencia y seguidamente, se les propuso la resolución con GGB del problema del rombo. Los estudiantes, al mismo tiempo que avanzan en la resolución del problema, van escribiendo notas comentando su actividad, es decir escriben un auto-protocolo (Gutiérrez, 2005). Posteriormente se realiza un cuestionario sobre el uso de GGB.

## **RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS**

Concretamos los tipos de datos que se recogieron con los siguientes instrumentos de análisis: a) registros escritos realizados por los estudiantes en su cuadro de notas (resolución en papel y lápiz, cuestionario) b) las interacciones entre alumnos, que fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas, c) respuestas a un cuestionario referente a la resolución en papel y lápiz (dificultad del problema, de visualización), d) los protocolos de construcción grabados en los archivos de GGB y auto-protocolo de los estudiantes, e) las grabaciones en vídeo de la sesión en el aula de informática, que permite observar aspectos relevantes imposibles de registrar en el protocolo de construcción como elementos borrados en la pantalla, gestos e interacciones entre los estudiantes y f) auto-protocolo y respuestas a un cuestionario sobre la opinión que tienen los alumnos de GGB. Toda esta información se analizó mediante un análisis etnográfico (Eisenhart, 1998). Mediante el análisis de estos datos caracterizamos el comportamiento de aprendizaje de los alumnos usando los grados de los procesos de instrumentación-instrumentalización propios de la teoría de la instrumentación. Con la experimentación realizada en el aula intentamos esbozar diferentes tipologías de alumnos, en el contexto de esta investigación, teniendo en cuenta a) sus estrategias heurísticas (se remiten a propiedades geométricas, se basan en el uso de herramientas algebraicas y de medida, hacen uso de ambas, estrategias de resolución, etc.), b) la

---

<sup>18</sup> Desde un punto de vista geométrico las herramientas *punto*, *círculo por un punto dado el centro e intersección de objetos* son suficientes. Consideramos todas las herramientas (geométricas y de medida) aunque algunas sean innecesarias.

influencia de GGB (visualización, conceptos geométricos, superación de obstáculos) c) sus características cognitivas (información proporcionada por el profesor y por la experimentación) y d) los obstáculos encontrados en ambos medios (conceptuales, algebraicos, de visualización, técnicos, etc.).

## **RESULTADOS**

Presentamos algunos resultados que nos han parecido relevantes y algunos ejemplos de resolución con GGB de los problemas del círculo y del rombo. La dificultad de los problemas estaba relacionada con la comprensión de los conceptos geométricos involucrados, que se habían trabajado anteriormente, los obstáculos algebraicos y las estrategias de resolución. Mostramos a continuación las diferentes categorías de alumnos consideradas. A pesar de que haría falta un estudio en profundidad para poder hacer una clasificación completa, hemos podido observar las siguientes tipologías de alumnos:

### **1. Autónomos (2 alumnos)**

Son buenos resolviendo problemas, son intuitivos y no tienen obstáculos conceptuales ni algebraicos en la resolución con papel y lápiz. El grado de instrumentación es alto así como el grado de instrumentalización. El uso de GGB no presenta en la resolución de los problemas propuestos un valor añadido pero facilita aspectos materiales (Laborde, 2001). Estos alumnos intentan optimizar las estrategias de resolución y se basan en propiedades geométricas de las figuras (en el sentido considerado por Laborde y Capponi (1994) en su construcción con GGB. Conjeturamos que, para estos alumnos, el uso de GGB consistiría un soporte para explorar aspectos curriculares avanzados y desarrollar sus competencias argumentativas (problemas de prueba, lugares geométricos, etc.).

### **2. Instrumentales (4 alumnos)**

Son alumnos de nivel medio a alto que tienden a reducir los problemas geométricos a problemas algebraicos. Tienen algunas dificultades (conceptuales, algebraicas y/o visualización) en la resolución con papel y lápiz. El uso de GGB les proporciona un soporte algebraico, conceptual y visual. En la resolución con GGB se basan en propiedades geométricas de la figura. El grado de instrumentación e instrumentalización es de medio a alto. En general, no tienen dificultades en el uso de GGB

### **3. Procedimentales (4 alumnos)**

Son alumnos de nivel medio a alto, más analíticos que intuitivos. A pesar de tener algunas dificultades en la resolución con papel y lápiz (distancia de un punto a una recta, visualización, obstáculos algebraicos, etc.) entienden los conceptos geométricos. No tienen dificultades técnicas en el uso de GGB (utilización de las herramientas). El grado de instrumentalización es inferior al de los alumnos de tipo instrumental. Los alumnos razonan sobre la figura pero también se basan en propiedades de medida. Por ejemplo, no utilizan circunferencias de radio dado para obtener segmentos de longitud dada.

### **4. Naif (2 alumnos):**

Son alumnos con muchas dificultades conceptuales, algebraicas y de visualización (elementos básicos de la circunferencia, distancia de un punto a una recta, vectores, concepto de mediatriz, etc.). El grado de instrumentación es bajo (utilizan pocas herramientas de GGB y principalmente son herramientas de medida y algebraicas, tienen obstáculos técnicos en el uso de las herramientas). No tienen una estrategia de

resolución clara, pero el uso de GGB les proporciona un soporte visual, algebraico y conceptual. Se basan en herramientas de medida en las construcciones realizadas con GGB no pasan el arrastre de test (Arzarello y otros, 2002). Estos alumnos tienden a razonar sobre el dibujo y no sobre la figura.

Mostramos, a modo de ejemplo, la siguiente tabla de técnicas instrumentadas observadas en el estudio. También mostramos, a modo de resumen, la siguiente gráfica (fig. 1) que relaciona los procesos de instrumentación/instrumentalización en las tipologías definidas anteriormente.

Technique	GGB	observations
Report congruent distances	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tool circle given the center and radius</li> <li>- mirrored at point</li> <li>- guided dragging</li> <li>- Segment with given length from a point</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- They do not use the exact value</li> <li>- Distance in the algebraic window</li> <li>- Misunderstanding</li> </ul>
Intersection of objects	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Visually define a point on object</li> <li>- intersection tool</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- more than 2 objects</li> </ul>
Perpendicular bisector	<ul style="list-style-type: none"> <li>- perpendicular line through midpoint</li> <li>- perpendicular bisector tool</li> </ul>	
P mirrored at line	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tool mirrored at line</li> <li>- tool perp.line through a point</li> <li>intersection of lines</li> <li>report distance or translation</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tool mirrored at point?</li> <li>- they abandon this technique in the last step. Is it due to technical obstacles?</li> </ul>
circle's radius	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tool segment and read length in algebraic window</li> <li>- interpret circle's equation in algebraic window</li> </ul>	
Circle trough 3 points	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tool circle trough 3 points</li> <li>interpret the center in the equation</li> <li>- circumcenter of the triangle</li> </ul>	
Rhombus Area	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tool polygon and area in the algebraic window</li> <li>- tool distance to obtain the diagonals' lengths and insert in input field <math>Dxd/2</math></li> <li>- visual strategy: area of the triangle</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- They calculate in worksheet or do not obtain the exact value</li> <li>- they abandon the strategy</li> </ul>

Tabla 1: Técnicas instrumentadas (Iranzo, 2008)

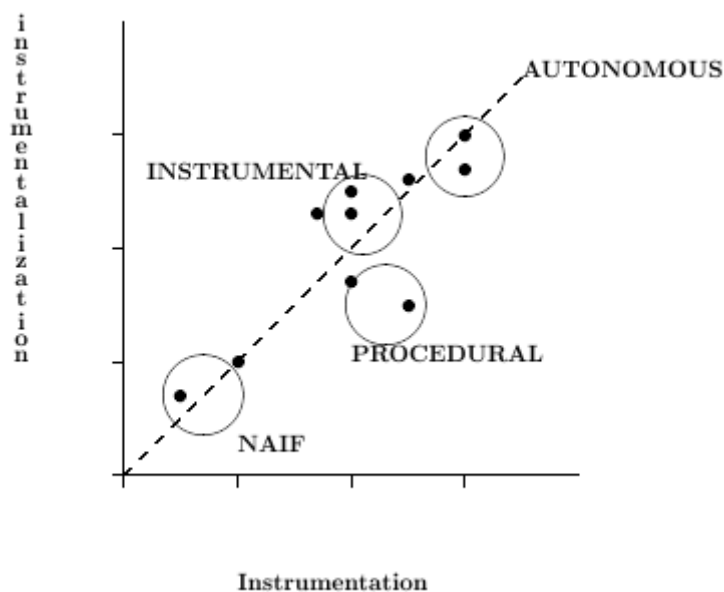


Figura 1: Procesos de instrumentación/instrumentalización de las distintas tipologías (Iranzo, 2008)

A continuación, especificamos algunas observaciones realizadas en este estudio.

- Observamos que muy pocos alumnos pertenecen a la categoría Naif o Autónoma. La mayoría de alumnos validan la construcción con herramientas de medida (por ejemplo, en el problema del rombo comprueban que la longitud de los cuatro lados es la misma), incluso los alumnos que hacen construcciones basadas en propiedades geométricas de la figura.

- Sólo una de las estudiantes de tipo autónomo comenta que el uso de GGB permite usar estrategias de resolución diferentes a pesar de que la mayoría de estudiantes utilizan estrategias diferentes (por ejemplo, utilizan la opción desplazar combinada con herramientas de medida). La forma en que algunos estudiantes de tipo Procedimental resolvieron el problema del rombo no tiene transferencia clara a un método de papel y lápiz. En la figura 2 se puede observar la resolución de uno de estos alumnos basada en las propiedades geométricas del rombo y en herramientas de medida (las diagonales se cruzan perpendicularmente en el punto medio, obtiene el vértice A' como simétrico de A respecto a la diagonal). El estudiante desplaza el vértice A sobre la diagonal hasta que todos los lados tienen la misma longitud igual a 5 unidades.

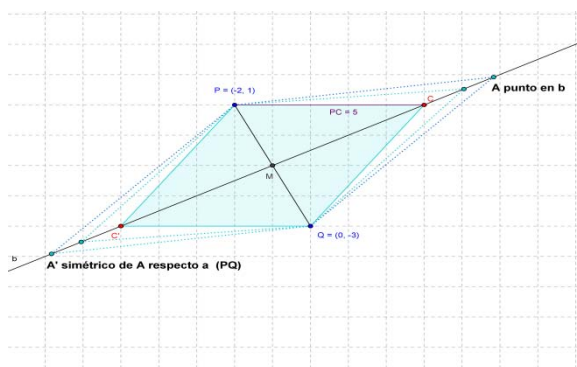


Figura2: Construcción del rombo, estrategia dinámica

Éste es un ejemplo de instrumentación, la posibilidad de usar el arrastre de puntos influye en la estrategia de resolución. En cambio, en la figura 3 podemos ver la construcción que hizo Sara (Autónoma), que tiene una clara transferencia a papel y lápiz. A pesar de que conjeturamos que en la resolución en papel y lápiz de este problema, Sara habría utilizado distancias en lugar de la circunferencia o bien se habría decantado por una resolución vectorial (forma habitual de resolver este tipo de problemas en clase). En este sentido, las restricciones del software promueven un pensamiento más geométrico.

Por ejemplo, en la resolución del problema del rombo observamos las siguientes estrategias:

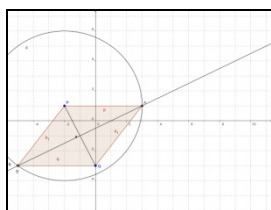


Figura 3 (Autónomo)  
Intersección de círculo de radio 5 y diagonal del rombo.

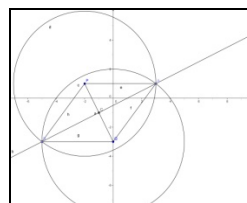


Figura 4 (Instrumental)  
Intersección de dos círculos centrados en los vértices dados.

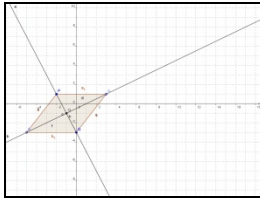


Figura 5 (Procedimental)

Estrategia dinámica:

Construcción de las diagonales  
obtener

definen un vértice A en la diagonal  
y obtienen el otro vértice  $A' = S_{PQ}(A)$ .

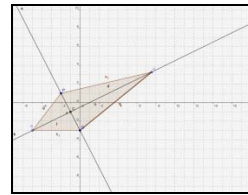


Figura 6 (Naif)

Estrategia basada en el dibujo  
desplazan los vértices hasta

lados de misma medida.

La figura no pasa el arrastre de test

- En general, los alumnos tienen pocas dificultades con relación al uso de Geogebra (salvo la tipología Naif). Todos los estudiantes coinciden en que el uso de GeoGebra ayuda a visualizar el problema a pesar de que los alumnos de tipo autónomo no tienen dificultades en la visualización en la fase de resolución con lápiz y papel. Un hecho relevante, es que ningún alumno utiliza ejes de coordenadas en la representación gráfica con papel y lápiz. Conjeturamos que este hecho se debe a la influencia del profesor. Observamos que algunos obstáculos técnicos en el uso de GGB son “obstáculos ya existentes trasladados al software” (Drijvers, 2002). Por ejemplo, analizamos el caso de Marc.

En la resolución del problema del círculo (fig. 7), Marc intenta primero obtener el radio de la circunferencia utilizando erróneamente la fórmula distancia de un punto a una recta (recta que contiene el centro de la circunferencia). Considera así el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \text{radio} = d(P, r) \\ \text{radio} = d(Q, r) \end{cases}$$

Finalmente abandona la estrategia al obtener valores distintos. Observamos que en la resolución del problema de la circunferencia con la ayuda de GGB aparece el mismo obstáculo.

2.

$P(2,1)$   $Q(3,5)$   
 $x+7+2=0$

$\frac{|3+5+2|}{\sqrt{2}} = d$   
 $\frac{2+(-1)+2}{\sqrt{2}} = d$

**Equation-distance strategy**  
**Step 2.1**

**Perpendicular bisector strategy**

**Step 1.1**  
 $O$  belongs to the perpendicular bisector  $m$  of  $[P,Q]$

$\vec{PA} = [2, 6]$   
 $\vec{v}_\perp = [6, -2]$   
 $\mu = P + \frac{1}{2} \vec{PA}$   
 $\mu = (2, 2)$

**Step 1.2**  
 $O$  belongs to  $m$  and  $r$

$\begin{cases} 6x + 2y = -16 \\ x + y = -2 \end{cases}$

$2x - 6x = -16$   
 $4x = -16$   
 $x = -4$

$2x + 4 = 6x - 12$   
 $2x - 6x = -16$

**mistake by**  
 $O = (2, -3)$

Figura 7: Estrategia de resolución (Marc)

En la resolución con la ayuda de GGB del problema del rombo, observamos en las interacciones entre Marc y su compañero Aleix (tabla 2) que Marc intenta obtener una recta a distancia 5 del vértice P del rombo en lugar de usar circunferencias. Nos preguntamos si entiende la herramienta “segmento de distancia dada desde un punto” como “recta a una distancia dada de un punto” (en lugar de circunferencia).

	Alumno	Intervenciones
1	Marc	¿Pones la mediatriz directamente? (diagonal del rombo)
2	Aleix	Sí, pero para hacer aquí...[vértice] ya no sé...
3	Marc	Con la distancia
4	Aleix	Sí claro! Pero con la distancia necesitarías poder hacer...
5	Marc	Una pregunta, hay alguna manera de hacer una recta a una cierta distancia de un punto? [concepto distancia de un punto a una recta]
6	Aleix	Quieres decir una paralela?
7	Marc	O bien un punto a una cierta distancia, en cms por ejemplo...
8	Aleix	No sé...
9	Marc	Ah! Vale, ya está. [intenta usar la herramienta segmento dada la longitud, 5, desde un punto en lugar de circunferencia]

Tabla 2: Interacciones

Marc obtiene la siguiente figura (fig. 8) y abandona la estrategia. No se da cuenta de que el punto obtenido está a distancia 5 del vértice P (propiedad particular de esta figura).

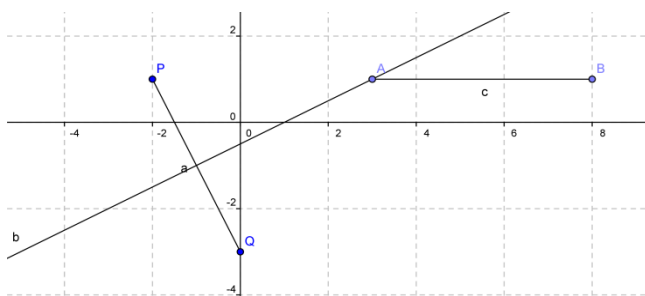


Figura 8: Estrategia de resolución del problema del rombo basada en el concepto erróneo de distancia de un punto a una recta (Marc).

- Observamos también que la transferencia de las estrategias usadas con GGB a estrategias de papel y lápiz no es evidente. Por ejemplo, en la resolución del problema del círculo con GGB el alumno Joaquim construye un tercer punto de la circunferencia  $P^3 = S_r(P)$  y con la herramienta *circulo por tres puntos* construye el círculo (fig. 9). Obtiene las coordenadas del centro y el radio interpretando la ecuación de la circunferencia que aparece en la ventana algebraica:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ .



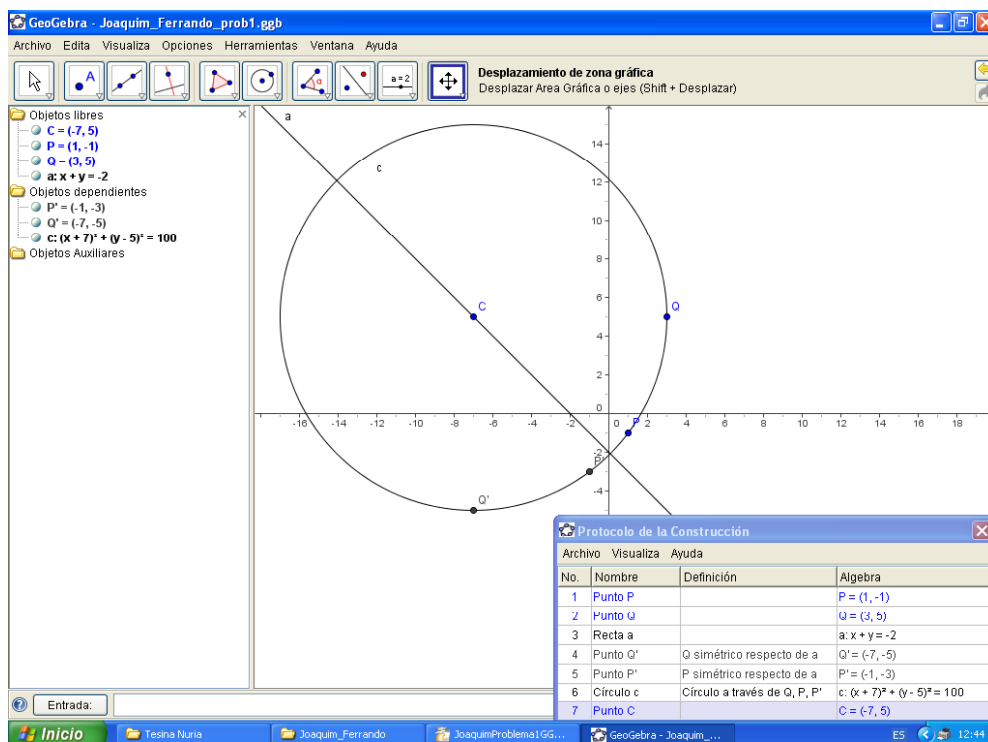


Figura 9: Circunferencia por tres puntos

- Finalmente, observamos que los alumnos no han utilizado la estrategia visual para obtener el área del rombo (fig. 10). Calculan el área con papel y lápiz utilizando la fórmula  $\frac{Dd}{2}$  o bien insertando la fórmula anterior en la barra de entrada.

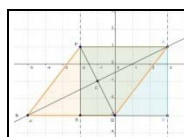


Figura 10: Estrategia visual

## CONCLUSIONES

Podemos observar que la mayoría de estudiantes utilizan herramientas algebraicas y de medida y consideran que GeoGebra les ayuda a visualizar el problema y a evitar obstáculos algebraicos. En general, los alumnos han tenido pocas dificultades con relación al uso del software y algunos obstáculos son obstáculos cognitivos ya existentes trasladados al software (Drijvers, 2002).

También hemos podido observar que en general, el uso de GeoGebra promueve un pensamiento más geométrico (por ejemplo, consideran la intersección de circunferencias en lugar de igualar distancias en el problema del rombo) y facilita un soporte visual, algebraico y conceptual a la mayoría de alumnos (categorías instrumental, procedimental y naif). Consideramos que el uso de Geogebra favorece múltiples representaciones de conceptos geométricos, ayuda a evitar obstáculos algebraicos permitiendo centrarse en los conceptos geométricos así como a resolver los problemas de otra forma, pero la influencia del uso de GGB depende de los alumnos y de los problemas propuestos. Consideramos que sería necesario, para la integración de

GGB en el aula, adaptar los problemas a las características de cada alumno (diferentes tipologías).

Es necesario llevar a cabo una investigación más exhaustiva para entender mejor el proceso de apropiación del software y analizar la co-emergencia de las técnicas en ambos medios (software de geometría dinámica y papel y lápiz) como forma de mejorar las habilidades argumentativas de los alumnos de secundaria. También es importante analizar el papel del profesor (orquestración) en una investigación más exhaustiva en el marco de la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje con recursos informáticos mediante sistemas interactivos cuyo uso requiere la tutorización combinada humana-artificial (El-Khoury y otros (2005), Cobo y Fortuny (2005)).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARZARELLO, F. y otros (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34.3, 66-72.

COBO, P. (1998). Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos. *Doctoral dissertation*. Universitat Autònoma de Barcelona.

COBO, P. y FORTUNY, J. M. (2005). El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas, *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 56-70.

DRIJVERS, P. (2002) Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5): 221-228.

DUVAL, D. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registre sémiotique et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

EISENHART, M. A. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 99-114.

EL-KHOURY, S., AÏMEUR, E., RICHARD, P.R. y FORTUNY, J. M. (2005). Development of an Intelligent Tutorial System to Enhance Students' Mathematical Competence in Problem Solving. *Actas de la E-learn 2005 World Conference of Association for the Advancement of Computing in Education*. Richards (Ed.), Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare and Higher Education 2005, 2042-2049. Chesapeake, VA: AACE.

GUTIÉRREZ, A. (2005): Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 27-44.

HOHENWARTER, M., PREINER, J. (2007) Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. ID1448, vol. 7.

IRANZO, N. (2008). The influence of the use of Geogebra on student's practice. Master thesis

LABORDE, C. (1992) Solving problems in computer based Geometry environment: the influence of the feature of the software, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 92(4), 128-135

LABORDE, C.; CAPPONI, B. (1994): Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14. 1 (2), 165-209.

LAKATOS, I.(1984) *Preuves et réfutations*. Essai sur la logique de la découverte mathématique. Paris: Hermann.