

ALGUNOS ELEMENTOS DEL MODELO DE COMPETENCIA INICIAL para la Enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. análisis de un modelo de enseñanza en magisterio

Edna González, Gregoria Guillén

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.

Olimpia Figueras.

Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Resumen. *En este trabajo presentamos resultados que se refieren a elementos de una conducta competente para la enseñanza de la geometría de los sólidos a nivel de enseñanza Primaria. Éstos se han obtenido al analizar un plan de formación para la enseñanza de la geometría de los sólidos en Magisterio y la puesta en práctica del mismo. Indicamos también observaciones que han permitido precisar estos elementos y que hacen referencia, por un lado, a la actividad matemática asociada a los procesos matemáticos de describir, generalizar y particularizar que desarrolló la profesora en su clase a partir de diferentes contextos. Por otro, a “su manera” de dirigir la clase, considerando respuestas de los estudiantes o tareas que un futuro maestro tiene que realizar, como es la planificación de las clases.*

Abstract. *In this paper we present results which refer about elements of a competent conduct for teaching geometry of solids concerning elementary education. The results were obtained from an analysis made to a Teaching Model for the geometry of solids for elementary school teachers and its implementation. We also indicate the observations that have allowed specify these elements and that refer, on the one hand, to the mathematical activity associated with the mathematical processes describe, generalize and particularize that developed from different contexts by the teacher in her class. On the other one, “her way” of conducting the class, considering answers of the students or tasks that a future teacher has to realize, as it is the class planning.*

PRESENTACIÓN

Este trabajo se incluye dentro de la línea de investigación sobre formación de profesores enfocándonos en los diversos contenidos pertinentes para un plan de formación (por ejemplo Climent y Carrillo, 2003; De Ponte y Chapman, 2006). De Ponte y Chapman (2006) subrayan que la investigación en esta línea se ha centrado en los últimos 25 años en la actividad del profesor, especialmente en el análisis del conocimiento o la práctica, apuntando que apenas se ha prestado atención al análisis de los planes de formación para los propios profesores.

Investigación sobre el análisis de los procesos matemáticos y la didáctica de la geometría de los sólidos también ha sido referencia para este estudio (Guillén, 1991, 1997, 2000, 2004; González et al. 2006; Olvera, 2007). En Guillén y otras (2004) se subraya que algunos profesores enfrentan dificultades para propiciar un acercamiento a la geometría de los sólidos reconociendo, algunos de ellos, que no tienen una formación muy sólida en esta materia.

Los resultados que exponemos se obtuvieron al analizar un plan de formación en geometría de los sólidos para futuros profesores de educación básica y su puesta en

práctica. Como Marco metodológico, expuesto en González et. al. (2006), hemos utilizado la teoría de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy, 1999). El objetivo del trabajo es elaborar un Modelo de competencia inicial (MCI) que pueda servir de referencia para interpretar Modelos de Enseñanza propuestos para la enseñanza de la geometría de los sólidos en Planes de formación para maestros. En el caso particular de este trabajo el MCI contiene elementos de los conocimientos de un individuo ideal, capaz de realizar tareas relacionadas con la enseñanza de la geometría de los sólidos a nivel escolar. Los resultados aquí expuestos complementan los presentados en González et. al. (2006).

ANTECEDENTES. MARCO TEÓRICO

Este trabajo forma parte de uno más amplio¹ que tenía como objetivo la construcción de una “Biblioteca virtual” para incidir en la formación permanente de profesores². Como marco teórico se consideró el trabajo de Climent y Carrillo (2003) en cuanto que señala que el conocimiento del profesor consta de diferentes componentes, y otros estudios que hacen referencia a la influencia que tienen las creencias y concepciones de los individuos sobre su modo de actuar (por ejemplo, Peterson, Fennema, Carpenter y Loef, 1989, citado por Llinares, 1996). El sentido en el que hemos utilizado los términos creencias y concepciones puede consultarse en González et. al. (2006).

Han sido relevantes en este estudio investigaciones que se han desarrollado tomando como referencia trabajos realizados en el instituto Freudenthal (Freudenthal, 1973, 1983; Treffers 1987, Kindt, 1993; Guillén 1991, 1997, 2000, 2004) que reflejan la preocupación de desarrollar el razonamiento lógico de los estudiantes, entendiendo razonamiento lógico como los procesos matemáticos de analizar, clasificar, definir, conjeturar, particularizar, generalizar, probar y que los estudiantes avancen en la progresiva matematización. Éstos fundamentan teóricamente nuestras concepciones sobre la geometría y su enseñanza.

Como marco metodológico experimental retomamos el trabajo de Filloy et. cols. (1999) donde expresa que para poder tomar en cuenta la complejidad de los fenómenos que se producen en los sistemas educativos, el MTL integra varios componentes teóricos interrelacionados: 1) Modelo de enseñanza; 2) Modelo para los procesos cognitivos; 3) Modelo de competencia, y 4) Modelo de los procesos de comunicación.

Los resultados presentados en González et. al. (2006) se refieren, siguiendo la distinción de Climent y Carrillo (2003), a contenidos *de* y *sobre* la geometría y su enseñanza. Este reporte los completa al centrarnos en el contenido de “la geometría de los sólidos” y en “la labor docente como formador de profesores”. La información que aportamos se refiere a los procesos matemáticos de describir, generalizar y particularizar. De ahí que tomamos como referencia el trabajo de Guillén (2004), donde se centra la atención en la descripción y análisis de objetos geométricos. Ahí se muestra un análisis de situaciones o contextos donde se implican sólidos o familias de sólidos a partir de los cuales se puede trabajar la descripción y el análisis, explicando que la descripción en un determinado

¹ "Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas". Proyecto de investigación, co-financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología clave G37301-S. México.

² <http://www.pernodis.com/ptria/index.htm>. En el sitio dedicado a la geometría, dentro del apartado "Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas", sección ¿Cómo enseñan otros?, se presentan algunos extractos de las sesiones con el análisis correspondiente. Otra parte del análisis también se puede consultar en González et. al., (2006).

nivel se asociará a listas de propiedades o características de los objetos. Hace una distinción entre el análisis centrando la atención en los elementos y el análisis fijándose en la estructura de los sólidos (análisis local o global). Para los procesos de generalizar y particularizar, se analizó el trabajo de Guillén (1991, 1997), donde se distinguen diferentes tipos de generalización y particularización, por ejemplo la elaboración de una lista de propiedades de una familia a partir de las descubiertas en ejemplos; la elaboración de una fórmula y generalización para n o pasar de un modelo de un sólido a un polígono por analogía.

METODOLOGÍA

Se analizaron trabajos teóricos relativos a las dos líneas de investigación indicadas en la presentación y el plan de formación de la profesora de Magisterio en relación con la geometría de los sólidos (Guillén, 2000). Así establecimos un MCI y delimitamos los criterios que sirvieron de referencia para analizar la puesta en práctica del plan de formación.

Posteriormente se llevó a cabo la observación de 22 sesiones que la profesora dedicó a la geometría de los sólidos en el año escolar 2005-2006. Las sesiones se grabaron en video y audio, y se tomaron notas sobre los contenidos impartidos y recursos en los que se apoyaba la profesora. Se transcribieron las sesiones y se estableció como elemento básico para el análisis extractos de interrelaciones de la profesora con los estudiantes.

Teniendo como referencia las competencias delimitadas previamente se procedió al análisis de los extractos y se dividieron en dos grandes categorías: los que reflejaban el trabajo con contenidos *de* y *sobre* la materia y los que reflejaban trabajo con los contenidos referentes a la enseñanza de la misma.

El análisis de los extractos de la primera categoría lo realizamos basándonos en esquemas como el que se muestra en el Anexo I, permitiéndonos identificar los procesos matemáticos y los componentes de éstos que se pretendían desarrollar. Se identificaron también las situaciones o contextos de partida, el sólido o la familia de sólidos utilizada y los elementos implicados en el análisis. Posteriormente, reorganizamos los datos para reflejar la actividad matemática que se desarrollaba a partir de las diferentes situaciones utilizadas, como se ve reflejado en las observaciones del apartado siguiente. Para los extractos referentes a la enseñanza de la geometría, localizábamos indicaciones, sugerencias o reflexiones acerca de distintos aspectos de la enseñanza.

En González et. al. (2006) se describen brevemente las 6 categorías que se establecieron finalmente. A continuación exponemos algunas observaciones obtenidas para las categorías: Sobre contenidos geométricos; ¿Cómo aprende alguno de los estudiantes? ¿Para qué? y Planificación de la clase.

ALGUNAS OBSERVACIONES

Sobre la enseñanza de algunos procesos matemáticos

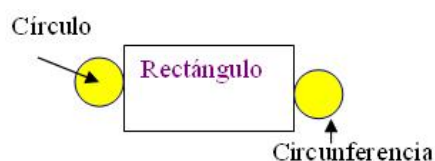
En la actividad matemática desarrollada por la profesora se han considerado como contextos el intento de organizar objetos del entorno cotidiano y, especialmente, los diferentes procedimientos para construir o generar representaciones físicas de objetos o familias de sólidos. Según las problemáticas indicadas en la presentación, exponemos en primer lugar, la actividad relativa al proceso de describir al considerar estos contextos y, dada la brevedad del informe, indicamos algunas observaciones relativas a generalizar y particularizar.

Sobre descripción. Nos detenemos indicando observaciones concernientes a los poliedros de revolución (familias que pueden considerarse cada una de ellas con un solo tipo de ejemplos cuando nos abstraemos del tamaño de los mismos), y mencionamos una mínima parte de la actividad desarrollada al tomar como soporte otras familias de sólidos.

1. Los objetos del entorno se utilizaron para dar nombre a las familias de los cilindros, conos, esferas, prismas, ... e identificar ejemplos y no ejemplos de la familia utilizando atributos visuales y funcionales conjuntamente con terminología geométrica, e incidiendo en parecidos y diferencias, así como en las transformaciones que convierten no ejemplos en ejemplos. Por ejemplo, se hizo notar que no todos los vasos tienen forma de cilindro y se centró la atención en cómo hacer la transformación en algunos para que su superficie cilíndrica (el tubo) “fuese igual de gorda por todos los lados”. “Ahora ya se puede obtener al desplazar un círculo paralelamente a sí mismo”. “Y los dos círculos iguales cierran el tubo, se juntan con la superficie cilíndrica formando dos aristas (las costuras) iguales, completamente redondas, que tienen forma de circunferencia”.

2. El intento de construir los cilindros (conos, esferas) con cartulina se utilizó como contexto para introducir o revisar conceptos geométricos relacionados con la familia. Por ejemplo, al centrarse en el cilindro se introdujo el desarrollo plano, y otros elementos del plano: rectángulo, círculo y circunferencia, superficie lateral y superficie total.

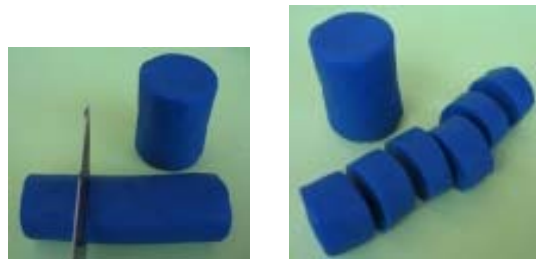
Se describieron los elementos del espacio y los correspondientes del plano remarcando las propiedades del sólido que se notaban en esa representación con observaciones del tipo: el cilindro recto que podemos construir con un folio y dos círculos iguales tiene una cara curva que al despegarse puede tener forma de rectángulo y las caras que cierran el "rulo" son planas y tienen forma de círculo.



Se mostraron ejemplos y no ejemplos de rectángulo y de círculo, variando el tamaño y la posición cuestionando si correspondían a desarrollos del cilindro o no. Se llegó a establecer que a cada rectángulo le correspondían dos cilindros, que uno de los lados del rectángulo reflejaba lo grueso que era el cilindro y coincidía con la longitud de la circunferencia de las bases del cilindro, y el otro lado reflejaba la altura del cilindro “recto”. El rectángulo se modificó y convirtió en paralelogramo, se interpretó por qué seguía saliendo un cilindro recto. Se hizo notar diferencias entre circunferencia, círculo y esfera. Se plantearon cuestiones como: ¿Qué tipo de curvas cerradas son igual de anchas en todas direcciones? ¿Qué tipo de superficies cerradas cumplen esta propiedad? ¿Y de sólidos? Se centró la atención en el número de caras, aristas y vértices de los sólidos que se estaban considerando (cilindro, cono y esfera). Al considerar los conos y las esferas se incidió sobre características y propiedades de objetos geométricos que ya se habían expresado al considerar los cilindros y se expresaron otras al relacionar familias y analizar las diferencias y los parecidos. Por ejemplo, se destacó que la esfera no se puede extender en el plano.

3. Modelar formas utilizando plastilina permitió remarcar las características y propiedades descubiertas en la construcción de modelos con cartulina y se prestó

atención a otros aspectos. Por ejemplo, se centró la atención en las diferentes posiciones de los ejemplos de la familia que se estudiaba. Para el cilindro, se destacó que al apoyarlo sobre la superficie lateral, rueda; si se apoya en los círculos, parece una columna. Truncar los modelos proporcionó gran actividad ligada a la descripción al centrar la atención en la forma de las secciones o en los trozos obtenidos y en la manera de hacer los cortes para obtener una determinada sección. Cuando se consideraron varios cortes se trataron cuestiones como ¿Al cortar paralelamente a las bases, qué forma tienen las secciones que van apareciendo? ¿Y si los cortes no son paralelos a las bases? ¿Qué ocurre en el cono? Así, se expresaron ideas ingenuas para estas familias que se extendieron posteriormente a los prismas y pirámides. Centrando la atención en parecidos, diferencias y modificaciones correspondientes entre las familias que se comparaban (cilindros con prismas y conos con pirámides) se estableció, por ejemplo, que al hacer cortes paralelos a las bases obtenemos cilindros (prismas) menos altos, que la forma de la sección es igual a las bases, la suma de las alturas de los sólidos resultantes es igual a la altura del original.



Se estableció también que realizar varios cortes perpendicularmente a las bases de un cilindro recto permite obtener diferentes prismas rectos. Al observar el proceso de esta transformación se hicieron observaciones: se puede conseguir que los círculos se transformen en los polígonos de las bases del prisma obtenido; el número de lados de estos polígonos es igual al número de cortes; el prisma obtenido tiene tantas caras laterales como cortes se han hecho,...

A continuación sólo damos un breve avance de otros procedimientos y familias que se utilizaron al trabajar la descripción.

Con la construcción a partir de la unidad base se amplió la lista de características de los prismas, por ejemplo: las caras laterales son paralelogramos; las aristas laterales tienen la misma longitud... se plantearon cuestiones relativas al número de elementos: ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene un prisma concreto? ¿Cuántos ángulos de las caras tiene un prisma concreto? ¿Y un prisma n-agonal?... y luego se abordaron problemas de clasificación en el mundo de los poliedros.

Dar reglas para la construcción permitió enumerar todos los elementos posibles para algunas familias finitas como las pirámides de caras regulares y los poliedros regulares.

Construir el armazón de los poliedros regulares permitió analizar la disposición espacial de los elementos que los forman, se llegó a describir la forma de las secciones, por ejemplo, en el icosaedro hay secciones con forma de pentágonos o decágonos, llegando a establecer planos de simetría o no, así como relaciones de inscripción y dualidad.

Sobre generalizar y particularizar. La familia de los prismas y pirámides se utilizaron como soporte para trabajar estos procesos.

Después de haber utilizado los objetos concretos del entorno y haber realizado transformaciones para convertirlos en ejemplos, (ver punto 1 de descripción), se

cuestionó si las propiedades expresadas se verificaban o no en todos los ejemplos, y en un ejemplo general. Así se señalaron como propiedades de la familia correspondiente.

Además, contar de manera estructurada el número de caras, vértices y aristas, en ejemplos concretos de los que se disponía del modelo, llevó a expresar verbalmente la relación en general y a encontrar la expresión algebraica correspondiente. Por ejemplo, para el número de caras (C) de un prisma n-agonal se estableció que este número se obtiene al sumar las dos bases y el número de caras laterales. Y hay una cara lateral por cada lado del polígono de la base. $C = 2 + n$.

La construcción de modelos a partir de condiciones dadas permitió pasar de una familia a otra poniendo una condición más restrictiva. De esta manera se pasó de los poliedros de caras regulares a los poliedros regulares.

La construcción de modelos con la unidad base permitió pasar de un sólido a un polígono por analogía, por ejemplo, que los polígonos (círculos) se pueden ver como caso límite de los prismas (cilindros). También se plantearon analogías que no funcionaban; por ejemplo, la de los poliedros platónicos (sólo hay 5) y los polígonos regulares (infinitos).

Reflexiones sobre la enseñanza

¿Cómo aprende alguno de los estudiantes? ¿para qué? Hay reflexiones que amplían la formación de los estudiantes de Magisterio al hacerlos conscientes sobre el aprendizaje de los niños y el suyo propio. En diversas ocasiones se centró la atención en las dificultades que enfrentan los estudiantes en relación con determinados contenidos geométricos que les llevan a aplicar “ideas” que se tienen que revisar y corregir. También se reflexionó sobre el modo de actuar de la profesora ante las mismas y sobre cómo las utilizó para desarrollar actividad a partir de ellas. Por ejemplo, la idea errónea de que la base es la cara donde se apoya el prisma se trabajó para perfilar la idea de caras laterales y distinguir los atributos críticos y no críticos de los prismas.

Planificación de la clase. Hubo sugerencias para que los alumnos tengan presente cuestiones que deben tomar en cuenta al planificar clases. Se incidió en que se reflexionara sobre las finalidades de las actividades o sobre determinados contenidos geométricos que se trabajan. Por ejemplo, se hizo notar la importancia de seleccionar previamente los ejemplos de una familia que se mostraran en clase para que los estudiantes no incluyeran para la familia más propiedades de las que tienen todos los ejemplos. También se analizaron brevemente diferentes currículos de geometría y se propuso analizar distintos materiales (libros de texto y páginas web).

CONCLUSIONES

Hemos constatado que las familias de los sólidos constituyen un contexto muy amplio y rico para trabajar los contenidos geométricos. Haciendo referencia al objetivo plasmado en la presentación, como rasgos de una conducta competente para enseñar geometría de los sólidos en primaria se puede considerar:

- Trabajar planteando diversas situaciones de partida. Por ejemplo, una conectada directamente con el entorno cotidiano al intentar organizar objetos y otra con la construcción de modelos por diferentes procedimientos.
- Aproximarse a la clasificación desde diferentes puntos de vista y tratando diferentes tipos de clasificaciones. En González et. al. (2006) se exponen algunos.

- Utilizar objetos y familias de sólidos finitas e infinitas para trabajar los diferentes tipos y componentes de la descripción. Esto es, la descripción local o global basándose en propiedades visuales, funcionales o geométricas. Considerar propiedades que se refieren a los elementos fundamentales (caras, vértices y aristas) y a otros elementos que tienen su análogo en el plano (ángulos, diagonales, altura).
- Trabajar de manera dinámica la particularización y generalización, partiendo de la misma situación y planteando tareas que permiten el desarrollo de ese tipo de trabajo conjunto.
- Facilitar que los estudiantes construyan “ideas” para los elementos en el espacio y los respectivos elementos en el plano basadas en la construcción con diferente procedimientos.
- Establecer relaciones entre los elementos del plano y el espacio por analogía.
- Tener en cuenta diferentes representaciones y esquemas para que se registren las propiedades y relaciones que se expresan.
- Comparar familias centrando la atención en propiedades que cambian o se mantienen y en las modificaciones que se tienen que hacer en las propiedades de una familia para que lo sean de otra.
- Trabajar las propiedades y relaciones en diferentes contextos y en diferentes momentos.
- Trabajar las formas de manera dinámica, en una constante transformación, para: i) obtener ejemplos de una familia a partir de otros que no lo sean, ii) obtener diferentes ejemplos de una familia, iii) convertir los ejemplos de una familia de sólidos en ejemplos de otra, iv) ejemplos de una familia de sólidos en una familia de polígonos o a la inversa.
- Abordar el estudio de la geometría de dos y una dimensiones inmerso en las situaciones que se plantean para el estudio de los sólidos. Mostrar en diversas ocasiones la relación entre elementos de la geometría de tres, dos y una dimensiones.
- Intentar averiguar “qué” y “cómo” aprenden los estudiantes.
- Prestar atención a las creencias y conocimientos previos de los alumnos.
- Prestar atención a las ideas de los alumnos que se tienen que revisar.
- Reflexionar sobre cómo dirigir la clase cuando algún estudiante expresa una idea que se tiene que revisar.
- Mostrar diferentes posturas que existen en la enseñanza de la geometría.
- Provocar reflexiones y discusiones en clase para que se tome conciencia sobre los propios conocimientos y para que éstos se cuestionen, revisen y/o complementen.
- En la planificación, prestar mucha atención a: i) la reflexión sobre qué, por qué y para qué sobre las cuestiones que se seleccionan para las clases, ii) los recursos que se pueden utilizar y iii) la evaluación de materiales.

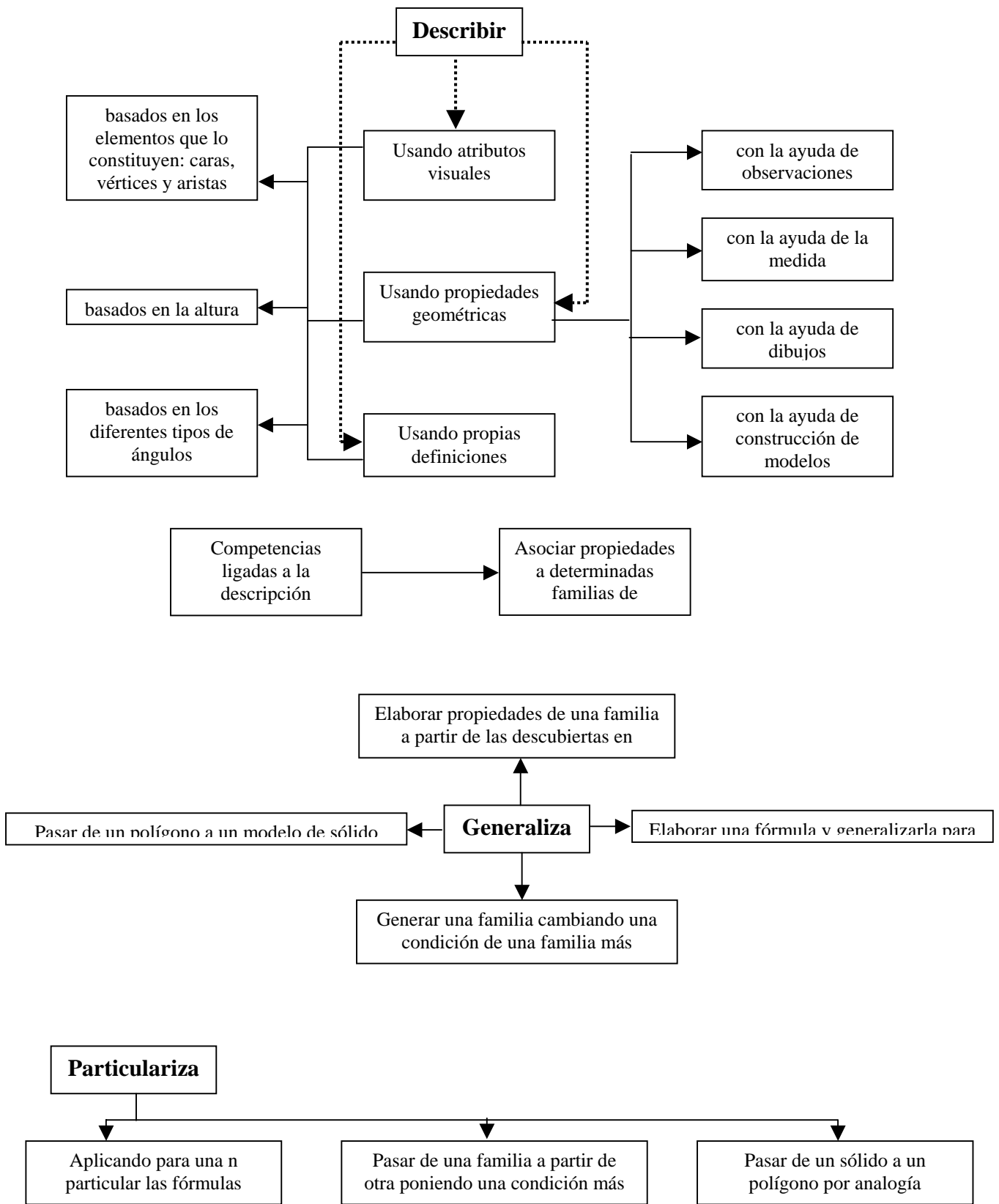
Referencias

- Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, 21(3), 387-404.
- Filloy, E. Y col. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Investigaciones en

Matemática Educativa. México, D. F. Ed. Iberoamérica.

- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.
- González, E; Guillén, G y Figueras, O (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio, en Bolea, P.; González, M. J.; Moreno, M. (eds.) (2006). *Actas de X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 195-204). Huesca, España.
- Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. (Tesis doctoral). Valencia: Universitat de València (Publicada en 1999. Col·lecció: Tesis doctorals en Microfitxes. Valencia: Universitat de València).
- Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid. España. Ed. Síntesis.
- Guillén, G. (2000). *Proyecto Docente para optar a una plaza de Profesor Titular de Universidad en el Área de Didáctica de la Matemática*. Universitat de Valencia.
- Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad geométrica, *Educación Matemática*, 16(3), 79-101.
- Guillén, G. y Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Curso taller como técnica para la obtención de datos, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.) (2004). *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 227-234). Córdoba, España.
- Kindt, M. (1993). Enfoque realista de la Educación matemática, en Salar, A; Alayo, F; Kindt, M y Puig, L.(eds) (1993). *Aspectos didácticos de Matemáticas*. 4, 67-91. Zaragoza: ICE de la U. de Zaragoza. España.
- Llinares, S. (1996). Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria, en Jiménez, J.; Llinares, S. Y Sánchez, V. (eds.). *El Proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática*. 13-36. Granada: Mathema, España.
- Olvera, F. (2007) *La enseñanza y el aprendizaje de la geometría de los sólidos en la escuela primaria*. Proyecto predoctoral, Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN. México
- Ponte, J. and Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice, en Gutiérrez, A. y Boero, P. (eds.) (2006), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 461-494). Sense Publishers. Róterdam, Netherlands.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project)*. Dordrecht: D. Reidel.

ANEXO I³



³ Esquemas que muestran la organización de los niveles de razonamiento de Van Hiele. Realizados por Olvera y Guillén en 2006 y que se presentaron en 2007 como parte del proyecto predoctoral.