DESCRIPCIÓN DE LA GENERALIZACION DE ESTUDIANTES DE 3º Y 4º DE ESO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN SUCESIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS[1]

María C. Cañadas Santiago, Universidad de Zaragoza

Encarnación Castro Martínez, Universidad de Granada

Enrique Castro Martínez, Universidad de Granada

Resumen. *Describimos la generalización que logran estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. La descripción se centra en aspectos relativos al razonamiento inductivo y a las estrategias inductivas. Estas estrategias permiten describir el proceso seguido en términos de los elementos y los sistemas de representación correspondientes al contenido matemático.*

Abstract. *We describe the generalization achieved by students of years 9 and 10 working on problems which involve linear and quadratic sequences. The description is focused on aspects related to inductive reasoning and to the inductive strategies. These strategies allow to describe the procedure in terms of the elements and the representation systems corresponding to the subject matter.*

El principal objetivo del razonamiento inductivo es la generalización. La formulación de conjeturas y, particularmente, su expresión para el caso general (generalización) es la que hace que el proceso inductivo se considere fundamental para la construcción del conocimiento (Neubert y Binko, 1992). Nuestra investigación contempla la generalización como uno de los pasos clave en el razonamiento inductivo, como refleja el modelo utilizado para describir el razonamiento inductivo que llevan a cabo los estudiantes de secundaria en Cañadas (2007). Este modelo también ha sido empleado para la descripción de procesos relacionados con la formulación de conjeturas y vinculados a otros tipos de razonamiento (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov, 2007).

En este artículo describimos la generalización que llevan a cabo 359 estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de determinados problemas. A través del análisis de las producciones escritas de los estudiantes, identificamos el número de estudiantes que llegan a la generalización y cómo la expresan. Mediante un procedimiento para determinar estrategias inductivas, describimos el trabajo que realizan los estudiantes previa y posteriormente a la generalización. Este procedimiento se basa en los elementos y en los sistemas de representación utilizados y que son específicos del contenido matemático involucrado en los problemas propuestos.

MARCO TEÓRICO

El objetivo general de nuestra investigación es describir y caracterizar el razonamiento inductivo que utilizan estudiantes de 3º y 4º de ESO al resolver tareas relacionadas con

[1] Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto del plan nacional de I+D+I Representaciones, Nuevas Tecnologías y Construcción de Significados en Educación Matemática, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER, con referencia SEJ2006-09056.

progresiones aritméticas de orden 1 o 2 (Cañadas, 2007). En este objetivo se identifican cuatro elementos: (a) razonamiento inductivo, (b) progresiones aritméticas de orden 1 o 2, (c) resolución de problemas y (d) estudiantes de 3º y 4º de ESO. A continuación describimos algunos aspectos relativos a los tres primeros elementos.

Razonamiento Inductivo

Consideramos el razonamiento inductivo equivalente a la *inducción* de Pólya (1945), como un proceso cognitivo que permite avanzar en el conocimiento mediante la obtención de más información de la que aportan los casos particulares con los que se inicia el proceso (Cañadas, 2007).

Modelo de Razonamiento Inductivo

A partir de los trabajos de Pólya (1945) y de otros trabajos más próximos como el de Castro (1995) y Reid (2002), establecemos un modelo para la descripción del razonamiento inductivo. Este modelo está constituido por los siguientes pasos: (a) trabajo con casos particulares, (b) organización de la información obtenida con los casos particulares, (c) búsqueda y predicción de patrones, (d) formulación de conjeturas, (e) prueba de conjeturas, (f) generalización de conjeturas y (g) demostración de la conjetura (Cañadas, 2007).

Estos pasos pueden ser pensados como niveles en el sentido de que se inicia con los casos particulares y se avanza hacia la generalización. Esto no implica que se tengan que observar todos los pasos propuestos en el proceso inductivo, ni que tengan que darse en el orden presentado.

Nos centramos en la generalización, como la forma de expresar una conjetura que se refiera a todos los casos de una clase determinada.

Progresiones Aritméticas de Orden 1 o 2[2]

Para el análisis del contenido matemático, seguimos la idea de organizadores del currículo de Rico (1997), a partir de la cuál Gómez (2007) desarrolla el *análisis de contenido*.

En una de las dos dimensiones que contempla el análisis de contenido nos centramos en aspectos relativos a: (a) los elementos de una progresión, (b) los sistemas de representación en los que pueden expresarse y (c) las relaciones que pueden establecerse entre ellos.

Elementos y Sistemas de Representación

Dado nuestro interés por el razonamiento inductivo, consideramos los términos k-ésimos de las progresiones (casos particulares) y el término general de una progresión.

Para la expresión de los elementos de las progresiones, como tipo particular de funciones[3], podemos tener en cuenta los sistemas de representación numérico, gráfico, verbal y algebraico (Janvier, 1987; Castro y Castro, 1997). Los términos k-ésimos se

---

[2] Las progresiones aritméticas de orden 1 y 2 son también llamadas *sucesiones lineales* y *sucesiones cuadráticas*, respectivamente en otras investigaciones anglosajonas como la de García (1998) y Stacey (1989).

[3] Esta consideración es consecuencia de la dimensión del análisis de contenido que persigue delimitar las estructuras matemáticas a las que pertenece el concepto matemático y las estructuras con las que se relaciona. En este documento no presentamos esta dimensión, que se presenta para las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 o 2 en Cañadas (2007).

pueden expresar numérica, gráfica y verbalmente; los términos generales se pueden representar verbal o algebraicamente.

Transformaciones y Cambios en los Sistemas de Representación

Duval (2006) subraya el salto cognitivo que pueden suponer las transformaciones entre sistemas de representación. Teniendo en cuenta los elementos y sus sistemas de representación correspondientes, las posibles transformaciones en las progresiones consideradas son entre: (a) un mismo elemento expresado en diferentes sistemas de representación (Kaput, 1992; Janvier, Girardon y Morand, 1993), (b) diferentes elementos expresados en distintos sistemas de representación y (c) un elemento expresado de diferentes formas dentro de un mismo sistema de representación (Kaput, 1992)[4].

En la Tabla 1 mostramos las transformaciones y cambios entre sistemas de representación que se pueden producir en el trabajo con los elementos de las progresiones consideradas, con la nomenclatura que presentamos en Cañadas y Castro (2006).

Tabla 1. *Transformaciones entre sistemas de representación*

	Sistema de representación			
Sistema de representación	Numérico	Algebraico	Gráfico	Verbal
De un término k-ésimo a un término k-ésimo				
Término k-ésimo	Término k-ésimo			
Numérico	TSN		T3	T5
Gráfico	T1		TSG	T6
Verbal	T2		T4	TSV
De un término general a un término general				
Término general	Término general			
Algebraico		TSA		T8
Verbal		T7		TSV
Entre un término k-ésimo y un término general				
Término k-ésimo	Término general			
Numérico		C1 C1B		C4 C4B
Gráfico		C2 C2B		C5 C5B
Verbal		C3 C3B		C6 C6B

Relaciones y Operaciones

Entre los términos k-ésimos y el término general de una determinada progresión aritmética se establecen diferentes tipos de relaciones: (a) entre términos k-ésimos de la progresión, (b) entre el término general de la progresión, (c) entre términos k-ésimos y general y (d) entre el término general y k-ésimos. Estas relaciones dan lugar a una serie

[4] Estas transformaciones se conocen con el nombre de *transformaciones sintácticas*.

de operaciones que se pueden realizar entre los elementos de las progresiones: (a) continuación, (b) extrapolación, (c) generalización y (d) particularización.

Resolución de Problemas y Estrategias

Nuestra investigación se desarrolla en el contexto general de la resolución de problemas, ya que se considera una actividad altamente formativa que pone de manifiesto diferentes tipos de razonamiento (Segovia y Rico, 2001), en particular, el razonamiento inductivo.

Desde que la resolución de problemas se constituyera como un campo de investigación para los psicólogos es la Teoría del Procesamiento de la Información, algunos autores identifican dos fases: (a) la representación del problema y (b) la solución del mismo (Mayer, 1986; Newell y Simon, 1972). En este enfoque, la búsqueda de soluciones a un problema necesita de un procedimiento al que llaman *estrategias*.

Estrategias Inductivas

Llamamos *estrategias inductivas* a un tipo de estrategias que se pueden describir en problemas donde la inducción se puede utilizar como heurístico en el sentido que considera Pólya (1966). Expresamos las estrategias inductivas como secuencias de transformaciones y cambios en los sistemas de representación que se han recogido en la Tabla 1.

OBJETIVOS

Nuestro objetivo general en este trabajo es describir la generalización a la que llegan los estudiantes en la resolución de determinados problemas. Este objetivo se concreta en unos objetivos específicos:

- Describir si los estudiantes llegan o no a expresar la generalización.
- Analizar si existen diferencias significativas entre el número de estudiantes que generalizan en los problemas que involucran progresiones de orden 1 y los que lo hacen en los problemas que involucran progresiones de orden 2.
- Describir cómo expresan la generalización los estudiantes que la alcanzan.
- Analizar los sistemas de representación en los que trabajan los estudiantes antes de expresar la generalización.
- Identificar el uso que dan los estudiantes a la generalización cuando la expresan.

METODOLOGÍA

Sujetos

La muestra fue tomada de manera intencional de cuatro centros públicos españoles a los que tuvimos acceso. En la Tabla 2 presentamos el número de estudiantes participanates según el curso y la localidad a la que pertenecía su centro.

Tabla 2. *Número de estudiantes*

	Curso		
Centro	3º	4º	Total
Cúllar-Vega	48	38	86
Granada	76	38	114

Tabla 2. *Número de estudiantes*

Centro	Curso 3º	Curso 4º	Total
Madrid	51	39	90
Teruel	36	33	69
Total	211	148	359

Instrumento de Recogida de Información: Prueba Escrita

El instrumento de recogida de información fue una prueba escrita con seis problemas que los estudiantes debían resolver individualmente durante una de sus horas lectivas de matemáticas. La selección de problemas se hizo partiendo del objetivo de investigación y con base en el análisis de contenido.

Tipos de Problemas

A partir del análisis de contenido de las sucesiones de números naturales de orden 1 y 2, consideramos los siguientes criterios para la selección de los problemas:

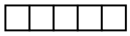
- Orden de las progresiones: 1 o 2.
- Operaciones: seleccionamos continuación y extrapolación, y desestimamos generalización y particularización, ya que las segundas eran parte de nuestros objetivos de investigación.
- Sistemas de representación en los que se pueden expresar los elementos de las progresiones: (a) numérico, (b) gráfico y (c) verbal.

Problemas de la Prueba

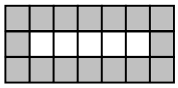
En el Cuadro 1 recogemos los problemas de la prueba.

1. Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior. - ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación? - Justifica tu respuesta.
2. Se tiene la siguiente secuencia de números: 3, 7, 13, 21,... - Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia. - Justifica tu respuesta.

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

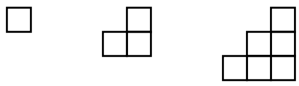
4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

Cuadro 1. *Problemas de la prueba*

En la Tabla 3 recogemos las características de los seis problemas de la prueba en función de los criterios de selección.

Tabla 3. *Características de los problemas de la prueba*

	Problema					
Característica	1	2	3	4	5	6
S. de representación	Verbal	Num.	Gráfico	Verbal	Num.	Gráfico
Tarea	Cont.	Cont.	Extrap.	Extrap.	Extrap.	Cont.
Orden	1	2	1	2	1	2

Num. = Numérico. Cont. = Continuación. Extrap. = Extrapolación.

ANÁLISIS DE DATOS/RESULTADOS

Para dar respuesta a los objetivos planteados, realizamos un análisis de datos que combina lo cuantitativo y lo cualitativo.

Frecuencias de Generalización

En primer lugar, identificamos el número de estudiantes que llegan a la generalización en cada problema. En la Tabla 4 recogemos estos datos, junto con la forma en la que expresan esa generalización.

Tabla 4. *Número de estudiantes que generalizan algebraica y verbalmente en los seis problemas*

	Número de estudiantes que generalizan		
Problema	Algebraicamente	Verbalmente	Total
1	10	7	17
2	12	3	14*
3	3	57	60
4	1	69	70
5	57	26	83
6	3	5	8

* Hay un estudiante que expresa la generalización verbal y algebraciamente

De la Tabla 4 se deduce que la frecuencia de generalización es inferior al 23,2% en todos los problemas. Las frecuencias mayores se han detectado en los problemas 3, 4 y 5. En el siguiente epígrafe presentamos el análisis de diferencias de las frecuencias de generalización identificadas entre los problemas que involucran progresiones de orden 1 y los problemas que involucran sucesiones de orden 2.

Relación Orden* Pasos

Aplicamos un modelo de análisis lineal logarítmico, considerando un modelo saturado, que incluye las interacciones a tres variables: Orden*Sistemas de Representación*Pasos. El parámetro *lambda* estimado y el valor de z permite concluís que el efecto parcial Orden*Pasos es significativo.

A partir de los resultados obtenidos, concluimos que el único paso donde se observan diferencias significativas según el orden de las progresiones es en la generalización ($|z| = 3{,}635$). Por un lado, el número de alumnos que generalizan en los problemas con una sucesión de orden 1 es superior a la media ($\lambda = 0{,}473$ y z = 3,635). Por otro, la frecuencia de los estudiantes que generalizan en los problemas que involucran una sucesión de orden 2 es inferior a la media ($\lambda = -0{,}473$ y z = -3,635).

Descripción de Estrategias Inductivas

Para describir el trabajo previo y posterior de los estudiantes en función de los elementos de las progresiones y los sistemas de representación, utilizamos las estrategias inductivas identificadas.

Ejemplo de Identificación de Estrategia Inductiva

En el Cuadro 2 mostramos un ejemplo resolución escrita de un estudiante en el Problema 4.

autononica → 924 partidos
nacional → 105.540 partidos
Son los que juegan unos contra otros, multiplicados por dos.

Cuadro 2. *Ejemplo de resolución del Problema 4*

En el Cuadro 2 se observa que el estudiante pasa de términos k-ésimos expresados verbalmente en el enunciado a una representación numérica. Después pasa a una expresión verbal de la generalización (en este caso, el patrón que expresa esta generalización no es adecuado). Esta secuencia de transformaciones, se expresa como T2-C4, según el procedimiento para la identificación de estrategias inductivas mostrado en Cañadas y Castro (2006).

En cada problema de la prueba seguimos este procedimiento, para después contabilizar el número de estudiantes que emplearon cada una de las estrategias y describirlas. Mostramos, a modo de ejemplo, los resultados obtenidos en el Problema 4[5].

Estrategias Inductivas de Generalización en el Problema 4

En la Tabla 5 recogemos las frecuencias asociadas a cada una de las estrategias inductivas de generalización utilizadas por los estudiantes en el Problema 4.

Tabla 5. *Frecuencias de las estrategias inductivas de generalización en el Problema 4*

Estrategias inductivas	Frecuencias
T2-TSN-C1-C1B-TSN	1
T2-C4	6
T2-TSN-C4	59
TSV-T2-TSN-C4	1
TSV-C6	3
Total	70

Los 70 estudiantes que generalizan en el Problema 4 (ver Tabla 4) expresan la generalización tras haber hecho alguna transformación en el sistema de representación numérico o verbal (T2 o TSV). 66 han realizado una transformación del sistema de representación verbal al numérico (T2) y los otros cuatro hacen una transformación sintáctica verbal antes de expresar la generalización (TSV).

En cuanto a la forma de expresar la generalización, destacamos que hay 69 estudiantes que expresan la generalización verbalmente. Para 59 de ellos, la generalización verbal es la última transformación que constituye su estrategia inductiva (C4 o C6).

[5] En Cañadas, Castro y Castro (2008) se observa un ejemplo de utilización de este procedimiento para el Problema 3.

En cuanto al uso de la generalización, las estrategias inductivas indican que el único estudiante que generaliza algebraicamente, utiliza la generalización como herramienta para calcular términos k-ésimos y formular su conjetura (T2-TSN-C1-C1B-TSN).

Todos los estudiantes que generalizan verbalmente, lo hacen el final de su respuesta (C4 y C6 al final de la secuencia que determina su estrategia inductiva, ver Tabla 5).

CONCLUSIONES

En general, la mayor parte de los estudiantes no recurren a la generalización para dar respuesta a los problemas propuestos.

La generalización ha sido en el único paso considerado en el modelo de razonamiento inductivo en el que se han encontrado diferencias significativas entre los problemas que involucran progresiones de orden 1 y los problemas que involucran progresiones de orden 2.

El procedimiento de determinación de estrategias inductivas ha sido útil para los objetivos específicos de este trabajo. Utilizando este procedimiento para los problemas de la prueba, de forma análoga a lo presentado para el Problema 4, llegamos a las conclusiones generales que mostramos a continuación.

Destacamos la variedad de estrategias inductivas empleadas en los diferentes problemas, lo cual confirma que los estudiantes no conocen algoritmos que les lleven sistemáticamente a la solución.

Al igual que el resto de los estudiantes, los que llegan a expresar la generalización utilizan el sistema de representación numérico con una frecuencia mayor que los otros sistemas de representación.

Los estudiantes suelen utilizar el sistema de representación verbal al final de la respuesta que presentan. Hay quienes generalizan verbalmente cuando intentan justificar sus conjeturas y lo que consiguen es dar una explicación para el caso general. Esto muestra que hay estudiantes que ven en la generalización una forma de dar respuesta a la tarea de justificación en los problemas propuestos (ver ejemplo de Cuadro 1).

El sistema de representación gráfico únicamente es empleado por los estudiantes cuando éste aparece en el enunciado del problema (Problemas 3 y 6). La mayoría de ellos, se limitan a hacer una transformación dentro de este sistema de representación y traducen la información al sistema de representación numérico. Esto pone de manifiesto que la visualización juega un papel importante en la generalización.

REFERENCIAS

Cañadas, M. C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. Granada: Universidad de Granada. (Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CannadasM07-2850.PDF)

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa, IV*, 13-24.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning, 5*(1), 55-72.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis Doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.

Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale: LEA.

Janvier, C., Girardon, C. y Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. En P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 79-102). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington: National Education Association.

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: University Press.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.