ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL USO DE HERRAMIENTAS CULTURALES PARA LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Jesús Salinas Herrera, UNAM, México
Ernesto A. Sánchez Sánchez, CINVESTAV, México

Resumen

El propósito de este trabajo es presentar los resultados de un estudio exploratorio, el cual se basó en una experiencia de enseñanza apoyada en actividades de construcción geométrica usando distintas herramientas de mediación semiótica[1]. Se utilizaron herramientas físicas (la regla y el compás) y virtuales (el software Cabri – Géomètre), para la solución de problemas abiertos de construcción. Los resultados que aquí se presentan corresponden solamente al uso de la regla y el compás y están relacionados con el proceso de desarrollo de la noción de justificación.

Abstract

This work presents the results of an exploratory study on teaching of geometrical constructions aided by semiotic mediation tools. Physical and virtual tools (such as ruler and compass and Cabri Géomètre software respectively) were used in the solution to the geometrical construction problems. In this paper only the results related to physical tools –ruler and compass – as related to the process of geometrical proof, will be presented.

MARCO TEÓRICO

El diseño y análisis de esta experiencia fue elaborada de acuerdo con la perspectiva teórica de Lev S. Vygotsky, en la cual se hace hincapié en el enfoque sociocultural como motor del desarrollo cognitivo. La idea principal que seguimos del análisis genético de este autor, es que los procesos psicológicos del ser humano pueden ser entendidos únicamente estudiando, no el producto del desarrollo, sino el proceso mismo mediante el cual se constituyen los nuevos significados (Vygotsky, 1995). De manera particular, nos hemos orientado con la idea de Wertsch (1988), quien destaca, del marco teórico de Vygotsky, el tema de la mediación de signos e instrumentos. Asimismo, se destaca la idea de considerar los procesos mentales superiores como funciones de la actividad mediada, en la cual es posible distinguir tres clases principales de mediadores: instrumentos materiales, instrumentos psicológicos y otros seres humanos (Kozulin, 2000). En este estudio se ha puesto mayor atención en el análisis de los primeros factores de mediación semiótica, sin descartar la influencia de los otros seres humanos en este proceso.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

El objetivo general de este estudio exploratorio fue propiciar el desarrollo del significado teórico de una construcción geométrica usando la regla y el compás. Entendemos por significado teórico de una construcción la relación que se puede establecer entre los elementos del dibujo producido y los axiomas y teoremas de la geometría euclidiana. La

---

[1] Este estudio exploratorio puede ser ubicado en una línea de investigación acerca del uso de instrumentos en la enseñanza de las matemáticas. Véase los trabajos de (Hoyos, 2005) y (Bartolini, 1993), en (Falconi & Hoyos, 2005).

relación entre los elementos del dibujo está indicada por un teorema respecto al diagrama geométrico representado por el dibujo. De esta forma, los teoremas validan la corrección de la construcción (Mariotti, 2001).

Así, se llevo a cabo un experimento de enseñanza en el que se persigue producir un cambio del nivel de prueba pragmática al nivel de prueba intelectual como es definido por Balacheff (1987) en su estudio sobre los procesos de prueba, es decir, nos referimos al paso de un tipo de prueba fundada en la acción efectiva aplicada a representaciones de objetos matemáticos, a una prueba que está separada de la acción y se apoya en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones (op. cit.).

De acuerdo con Balacheff (1987), la experiencia mental señala la transición de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales, en la medida en que las pruebas pasan de ser acciones efectivas a ser acciones interiorizadas. Puesto que este cambio implica una evolución radical de los conocimientos de los estudiantes, no se puede realizar de manera circunstancial. Por consiguiente, considerando la idea de Balacheff de que una característica importante de las situaciones de enseñanza es que cuando una realización material del contenido de una afirmación no puede ser llevada a cabo, “el alumno se ve forzado a producir pruebas intelectuales” (Balacheff, 2000, p. 25), se llevó a cabo una experiencia de enseñanza en la que fuera factible producir este resultado.

LA POBLACIÓN DE ESTUDIO

La población observada fue un grupo de 42 alumnos de tercer semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, durante las actividades escolares de un curso normal. Participaron 22 hombres y 20 mujeres con edades entre 15 y 16 años.

Los antecedentes de los alumnos sobre dicho tema eran esencialmente poseer cierta familiaridad en el uso de la regla y el compás.

INSTRUMENTOS DE OBSERVACIÓN

Los instrumentos de observación fueron: la aplicación de actividades de construcción geométrica en hojas de trabajo, notas de campo y aplicación de cuestionarios. Las observaciones fueron realizadas en el salón de clase.

Se realizó un análisis cualitativo de los datos, los cuales fueron recogidos en el curso de la investigación. Estos datos fueron tomados de las hojas de actividades de construcción realizadas, notas de campo, y cuestionarios. Por consiguiente, tales datos fueron expresados en forma de textos. El análisis se llevó a cabo mediante la categorización de las respuestas según los rasgos cognitivos previstos en la realización de las tareas.

INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

De acuerdo con el marco vygotskiano del desarrollo conceptual, el análisis se enfocó en observar la descontextualización de los instrumentos de mediación. Tal descontextualización es el proceso mediante el cual el significado de las palabras o conceptos se vuelve cada vez menos dependiente del contexto.

Para llevar a cabo lo anterior, diseñamos un instrumento de análisis que permitiera comparar las diversas respuestas y sistematizar el proceso de desarrollo conceptual de la población observada. Se trata de una rejilla donde, para cada pareja de alumnos, las columnas indican los rasgos cognitivos requeridos para la solución de los problemas, desde una dimensión institucional, y las filas corresponden a las respuestas de cada problema en una dimensión personal. [2]

Así, se propone un modelo de respuesta a los problemas de construcciones geométricas y, comparando el modelo con los rasgos cognitivos que reflejan los alumnos en sus respuestas, se observa si se produce la transición de una función indicativa del lenguaje a una función simbólica[3]; y se obtiene un registro del tipo de desenvolvimiento cognitivo que se observa.

PROCEDIMIENTO

Para la aplicación de esta experiencia de enseñanza se llevo a cabo un taller de construcción geométrica en el que se utilizaron las herramientas indicadas antes. La duración fue de 20 horas. La periodicidad fue de tres sesiones por semana y la duración generalmente osciló entre una hora 15 minutos y una hora 45 minutos.

Inicialmente, las actividades consistieron en resolver una serie de problemas típicos de construcción geométrica y describir el procedimiento que llevaron a cabo. Se pidió a los alumnos que describieran el procedimiento con la mayor claridad y detalle posible, de tal manera que cualquier otro estudiante pudiera reproducir el mismo resultado. Después, además de realizar la construcción geométrica y describir el procedimiento, debían formular una justificación, es decir, proporcionar una argumentación que validara la construcción, con lo cual se introdujo un contrato social en la clase según el cual todas las construcciones tenían que ser justificadas. Con estas actividades también se pretendía fomentar en los estudiantes la cultura de utilizar el lenguaje para describir a los objetos geométricos, es decir, propiciar la organización de un lenguaje que considera a la vez objetos y proposiciones (Pluvinage, 1996). Finalmente, se pidió a los alumnos realizar la demostración de 3 teoremas sobre triángulos, sin utilizar la regla y el compás.

De acuerdo con el marco teórico, se tomó como premisa central el carácter social de la construcción del conocimiento (Vygotsky, 1995). Por consiguiente, en estas actividades están implicados grupos de personas que tienen una interacción social determinada y la práctica comunicativa. Así, las actividades se resolvieron en parejas, y se propició la discusión matemática (Mariotti, 2001); acerca de las actividades con el grupo en su conjunto. De esta manera, el profesor utilizaba la mediación de las herramientas y signos para negociar el significado matemático de la actividad.

---

[2] Tomamos en cuenta el enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática propuesto por Godino (2002).

[3] En la función indicativa el lenguaje utiliza signos contextualizados, en los cuales el significado de una palabra se encuentra asociado directamente con un objeto o situación, que está presente. La función simbólica del lenguaje implica el uso de categorías generalizadas, para clasificar eventos y objetos, y permite establecer relaciones entre categorías (Wertsch, 1988).

La tesis básica que tuvimos en cuenta, fue que las construcciones geométricas tienen un significado teórico, el cual está relacionado con la geometría euclidiana. La insistencia en tal paralelismo entre construcción y teoría fue una constante en el tratamiento de las explicaciones por parte del profesor (Mariotti, 2001).

ACTIVIDADES DE CONSTRUCCIÓN USANDO REGLA Y COMPÁS

De acuerdo con nuestro marco teórico, una experiencia de enseñanza que pretende generar instrumentos psicológicos debe abordar las actividades de manera sistémica (Kozulin, 2000). Es importante que cada tarea particular este relacionada con el conjunto de ellas, es decir deben ser de la misma naturaleza. Así, cada tarea concreta aparece como una versión particular del paradigma general de la tarea. En los problemas considerados en esta experiencia se pidió realizar una construcción geométrica partiendo de un enunciado general. Este enunciado se materializa en un diagrama particular que representa al enunciado general, y se obtiene mediante una sucesión de trazos de rectas y círculos. La justificación del procedimiento proporciona la prueba, es decir, los argumentos que los alumnos producen para explicar porqué el objeto propuesto en el problema ha sido satisfecho.

Los problemas a resolver fueron los siguientes:

1. En un punto dado de una recta dada, trazar una perpendicular a la recta.
2. De un punto dado fuera de una recta, trazar una perpendicular a la recta.
3. Dibujar un triángulo en que dos de los lados sean iguales a un segmento dado.
4. Por un punto dado de una recta, trazar una recta que forme con la primera un ángulo igual a un ángulo dado.
5. Dividir un segmento dado en dos partes iguales.
6. Trazar la bisectriz de un ángulo dado.
7. Dado un segmento trazar una perpendicular que pase por uno de sus puntos extremos.
8. Bisectar un ángulo dado.
9. Bisectar un segmento dado.
10. Construir un triángulo dados sus tres lados.
11. Construir un triángulo, dados 2 lados y el ángulo que forman.
12. Construir un triángulo, dados un lado y los 2 ángulos contiguos a él.
13. Construir un ángulo de 60º.
14. Construir la paralela a una recta dada que pase por un punto dado.
15. Construir la tangente a una circunferencia dada en un punto dado de ella.

El éxito en la solución de los problemas de construcción no constituye la meta última de la experiencia de enseñanza. Lo importante es generar en los estudiantes los principios cognitivos que les permitan entender los elementos teóricos que justifican o prueban una respuesta correcta, y poderlos extender a otras situaciones.

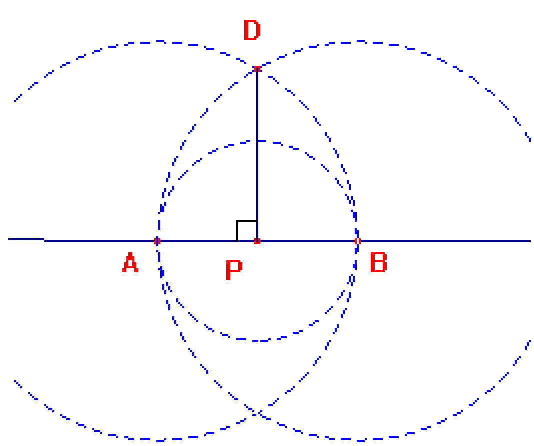
Otro rasgo del carácter sistémico de las tareas es el aspecto repetitivo, como poder comparar tareas nuevas y antiguas. En particular nos interesó observar si se modificaba el tratamiento de algunos problemas en distintos momentos. Por ello, los últimos 5 problemas de construcción que realizaron los estudiantes, con una redacción diferente, fueron repetición de alguno anterior. Se eligieron dos tipos de problemas, algunos de los que tuvieron el mayor porcentaje de respuestas correctas. Estos fueron algunos de los primeros: problema 2, 5 y 6. Otros problemas, fueron algunos de los que habían generado mayores dificultades: problema 7 y 14.

En las actividades planeadas hay pocos conceptos geométricos puesto que el interés de esta experiencia no es el contenido sino el desarrollo de los instrumentos psicológicos que permitan elaborar una justificación teórica de la construcción.

ANÁLISIS A PRIORI DE LAS ACTIVIDADES

Consideremos el primer problema para hacer un análisis del tipo de conocimientos que se ponen en juego.

Enunciado general: En un punto dado de una recta dada trazar una perpendicular.
Enunciado particular: Sea L la recta dada y P un punto sobre ella, trazar una perpendicular L' que pase por P.
Construcción:
Con cualquier medida del compás, trazar un círculo con centro P. Sean A y B los puntos de intersección de este círculo con la recta L. Abrir el compás una abertura AB. Trazar un círculo con centro en A y radio AB. Trazar un círculo con centro en B y radio AB. Sea D una de las intersecciones de los círculos C(A, AB) y C(B, AB). Unir el punto P con el punto D.
Afirmación: El segmento AB es perpendicular al segmento PD.
Diagrama:



Demostración:
Observemos los triángulos ΔADP y ΔBDP. AP=PB ya que P es punto medio de AB, por construcción. AD=AB y BD=AB, por lo tanto AD=BD. PD es el cateto mayor de ambos

triángulos. Luego, los triángulos son congruentes (teorema LLL): $\Delta ADP=\Delta BDP$. Se deduce entonces que <APD=<DPB=90º, por lo tanto DP es perpendicular a AB. LQQD.

Lo primero que los estudiantes tienen que hacer es pasar del enunciado general del problema a un enunciado particular, en el cual se representan las condiciones iniciales del problema. Cuando un alumno realiza lo anterior, podemos decir que distingue los datos del problema de las acciones que tiene que realizar ulteriormente para obtener el trazo solicitado por el problema. A continuación, se efectúan los trazos que pueden conducir a lo solicitado por el problema. En esta parte, lo más probable es que los estudiantes usen la regla y el compás por ensayo y error y exploren diferentes trazos. Así, gradualmente podrán reconocer las reglas de uso de tales herramientas: trazar segmentos que unan dos puntos, prolongar un segmento por uno de sus extremos, trazar una circunferencia con centro y radio dado. Cuando alguna de dichas condiciones no se cumple entendemos que los alumnos no tienen el significado matemático de estas herramientas, los cuales corresponden a los postulados respectivos de la geometría euclidiana.

El aspecto central de estas actividades es observar la manera en que los alumnos realizan los trazos para resolver los problemas y si son capaces de describir el procedimiento como una sucesión de operaciones elementales. Consideramos que si tal procedimiento es articulado de manera inteligible, ello implica un control teórico de las herramientas por parte de los estudiantes, es decir, se puede afirmar que se conducen mediante una estrategia consciente que establece relaciones entre propiedades geométricas. Esta situación implica la apropiación de instrumentos psicológicos, los cuales constituyen una condición para realizar una demostración.

El aspecto crucial de esta experiencia lo constituye la aplicación de un problema cuya realización directa no puede ser llevada a cabo y se toma la hipótesis que sólo aquellos alumnos que tengan un desarrollo de la noción de construcción que se ha distanciado de una racionalidad apoyada sólo en la evidencia de los sentidos, podrán producir una prueba intelectual. La actividad consiste en trazar un ángulo de 60º, usando la regla y el compás. Este problema, que llamamos aquí “problema crucial”, confronta al alumno con sus presupuestos de validación básicos (Balacheff, 2000), pues se les pide un ángulo con cierta medida pero que al mismo tiempo no pueden medir. Los alumnos que puedan resolver el problema deben mover su atención del dibujo hacia el procedimiento (Mariotti, 2001), lo cual les permitirá resolverlo indirectamente, mediante una deducción.

ALGUNOS RESULTADOS GENERALES Y DISCUSIÓN

Se presentan los resultados de la aplicación de la rejilla para un análisis de 11 parejas de alumnos considerando los 20 problemas planteados. Esta muestra considera parejas de alumnos con diferente desempeño en cuanto al número de problemas de construcción resueltos correctamente. La primera tabla contiene los resultados relacionados con los rasgos cognitivos que reflejan los alumnos en la ejecución de la tarea; la segunda tabla corresponde a las características de las expresiones lingüísticas utilizadas para describir el procedimiento.

1. Los resultados de las tablas 1 y 2 muestran un mayor desarrollo en el proceso de ejecución de las tareas de construcción geométrica, que el desarrollo de la organización lingüística para describir el procedimiento. Así, mientras en la ejecución de la construcción

(Tabla 1), las condiciones de aplicación de la regla y el compás se cumple en el 68.6% y el 78%, respectivamente; los rasgos cognitivos correspondientes relacionados con la organización lingüística (Tabla 2) tienen 47.3% y 41.4% respectivamente. Este resultado sugiere que los rasgos cognitivos relacionados con la acción son genéticamente anteriores a los relacionados con el uso del lenguaje.

Resultados de los rasgos cognitivos observados en la realización del conjunto de las tareas de construcción

Rasgos cognitivos	1.1 Los datos se distinguen de los pasos para resolver el problema	1.2 Los pasos se apoyan en las condiciones de aplicación de la regla	1.3 Los pasos se apoyan en las condiciones de aplicación del compás	1.4 Vincula la construcción con una precedente
20 Problemas / 22 alumnos	136	151	172	8
Porcentaje	61.8%	68.6%	78%	3.6%

Tabla 1

Resultados de los rasgos cognitivos observados en la descripción del procedimiento de construcción

Rasgos cognitivos	2.1 Menciona las condiciones de aplicación de la regla	2.2 Menciona las condiciones de aplicación del compás	2.3 Usa algún concepto con una connotación independiente del contexto	2.4 Señala alguna relación entre conceptos independiente del contexto	2.5 Usa símbolos definidos en el diagrama y el texto
20 Problemas / 22 alumnos	I04	91	9	6	104
Porcentaje	47.3%	41.4%	4%	2.7%	47.3%

Tabla 2

2. Hay una dificultad generalizada en los alumnos para vincular construcciones geométricas, lo cual da cuenta de un pensamiento asistemático, característico del sentido común (Tabla 1). Sólo en el 3.6% de los problemas se vincula la construcción con otra y, esta situación ocurre únicamente en el problema crucial.[4]

3. De acuerdo con la hipótesis de esta experiencia de enseñanza y con el marco teórico, los alumnos que resuelven el problema crucial muestran un avance en la descontextualización de los instrumentos de mediación, lo cual permite afirmar que se ha interiorizado la regla y el compás, y en consecuencia, la mediación semiótica que se ha conseguido permite un desarrollo del significado teórico de la construcción. Por lo tanto, de acuerdo con Mariotti (2001) esta situación permite afirmar que los estudiantes han obtenido una aproximación a una perspectiva teórica de la demostración.

[4] Se trata del problema de construir un ángulo de 60º.

ACERCA DEL DESENVOLVIMIENTO DE LA JUSTIFICACIÓN EN LOS ALUMNOS

La justificación del procedimiento resultó un proceso muy complejo. Al inicio, un cierto porcentaje de alumnos (13%) no expresan en absoluto algún argumento para justificar lo correcto de su construcción. Los demás, aunque responden, no parecen percatarse de la necesidad de examinar si los pasos que realizaron son correctos. De esta manera, expresan ideas como las siguientes:

- "Nosotros conocemos este procedimiento, es lo que sabemos y lo que pensamos que está bien".
- "El procedimiento que use se me hace correcto porque seguimos las instrucciones".
- "Sabemos que está bien porque se forma lo que pedía el problema".

Esta situación de dar una justificación les es extraña. Confronta su racionalidad, la cual descansa en la intuición, en un sentido de auto evidencia (Fischbein, 1982), y les resulta muy difícil entender que deben dar argumentos para respaldar las acciones que realizaron.

Después, la tendencia que se manifiesta gradualmente es elaborar respuestas que apelan a una constatación empírica para validar su resultado. Este tipo de justificaciones se apoyan en la observación y en la medición de ángulos y lados; sin embargo, no toman en cuenta el procedimiento sino que enfocan su atención sólo en el producto, es decir el dibujo realizado. Posteriormente, aparecen ocasionalmente, justificaciones que incorporan inferencias lógicas incorrectas y, finalmente algunas parejas de alumnos llegan a formular una argumentación deductiva para validar la construcción realizada. [5]

Este lento y difícil proceso muestra un desarrollo gradual de la noción de prueba en los alumnos y, también, lo complejo de construir una cultura de la justificación, de la cual los alumnos han estado ajenos en su formación escolar (Mariotti, 2001).

En el problema crucial, de acuerdo a nuestra hipótesis, hay un cambio cualitativo en las respuestas correctas. Sus justificaciones se refieren explícitamente al procedimiento y se basan en inferencias lógicas correctas. La viñeta de la figura 1 es un ejemplo que ilustra esta situación.

Se observa claramente que los alumnos planean previamente una estrategia para resolver el problema. La solución es más bien un proceso mental que se manifiesta externamente en el dibujo. El compás es usado no como un artefacto que produce un círculo, sino como un instrumento para encontrar puntos que estén a una distancia dada, así, el compás material se ha convertido en un objeto mental. La estrategia tiene un carácter general que le permite ser usada en cualquier situación análoga. Asimismo, la solución del problema puede ser defendida por argumentación referida a la teoría aceptada (Bartolini & Boni, 2003).

Sin embargo, es pertinente señalar que después de que algunos alumnos han logrado cambiar claramente el estatus de justificación, en el caso del problema crucial, en los

[5] Se trata del problema que denominamos crucial.

siguientes problemas cuya solución se obtiene ejecutando directamente la construcción; las justificaciones se vuelven a apoyar fundamentalmente en elementos empíricos.

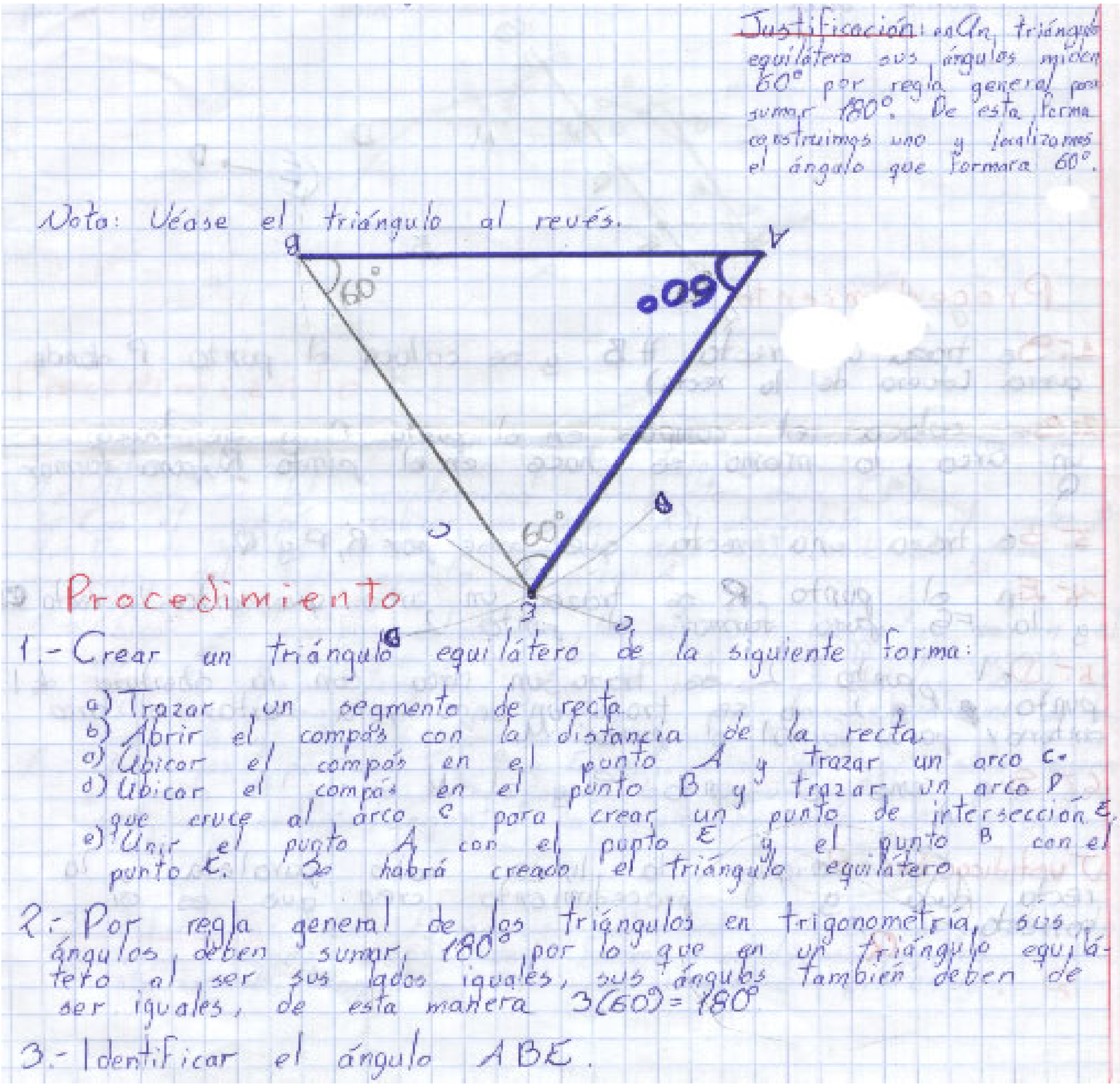


Figura 1

CONCLUSIONES

Las observaciones de nuestro estudio exploratorio nos permiten afirmar que el fundamento intuitivo que tienen los alumnos de la geometría puede comenzar a reorganizase de acuerdo con un enfoque deductivo, gracias a un proceso de mediación semiótica que brindan las herramientas de construcción y a fomentar una cultura en los alumnos de justificar las soluciones que construyen.

La continua práctica de describir y justificar conduce a los alumnos al manejo de un discurso que los capacita gradualmente para describir objetos geométricos y relaciones entre sus elementos. El manejo de un lenguaje funcional es una condición importante para que los estudiantes puedan eventualmente elaborar una prueba matemática (Balacheff, 1987; Sánchez & Mercado, 2002).

En esta experiencia de enseñanza no sólo la interacción social entre los estudiantes y el profesor jugó un papel central para la interiorización de las herramientas de mediación sino también el tipo de actividades que apoyan el proceso didáctico.

Consideramos que esta experiencia requiere de ulteriores investigaciones en al menos dos direcciones. Por una parte, en profundizar en el tipo de mecanismos que impiden a los alumnos que se han aproximado a un significado teórico de una construcción geométrica, transferir este enfoque de justificación para cualquier tipo de problema geométrico. Por otra parte, en relación con las herramientas de mediación, es necesario investigar si el desarrollo cognitivo que se obtiene con el uso de la regla y el compás para resolver problemas de construcción y elaborar justificaciones de la corrección de la solución puede ser complementado y potenciado con el uso de la computadora.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1987). Processus de prueve et situations de validation; *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Bartolini, Bussi, M. & Boni, M., (2003). Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms (1). *For the learning of mathematics* **23**, 2 *pp.15-22*

Falconi, M. & Hoyos, V. (2005). *Instrumentos y matemáticas. Historia, fundamentos y perspectivas educativas.* (Compiladores). Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics* ***3**,(2), pp. 9-24*

Godino, J. (2002). *Problemas de investigación basados en el enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.* Recuperado en Internet: http://www.urg.es/local/jgodino/.

Kozulin, A., (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Mariotti, M. A., (2001). *Introduction to proof: The mediation of dynamic software environment.* Educational Studies in Mathematics. Special issue 44, 25-53.

Pluvinage, F., (1996). Diferentes formas de razonamiento matemático. En F. Hitt (ed). *Investigaciones en matemática educativa* (pp. 77-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sánchez, E. & Mercado, M. (2002). Writing conjectures in geometrical activities with Cabri- Géomètre, Proceedings of the XXIV *Conference of North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education.*

Vygotsky, L. S., (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. .Barcelona: Paidós.
Wertsch, J. V., (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.