LA NEGATIVIDAD PERMITIDA: GEORGE PEACOCK EN LA HISTORIA Y EN LA ENSEÑANZA[1]

Aurora Gallardo, Oralia Torres
CINVESTAV, México

Resumen

Vía el análisis de los principios del Álgebra Aritmética, ciencia que sugirió las leyes del Álgebra Simbólica, intentamos entender la categoría de la negatividad en la enseñanza del álgebra elemental.

Abstract

We intent to analyze the principles of Arithmetical Algebra, as that science the laws of which suggested those of the Symbolical Algebra in order to understand the negativity in the teaching of elementary algebra.

INTRODUCCION

"La práctica clandestina del cálculo de los números relativos precede en 1600 años a su comprensión. ¡He aquí una buena lección que la didáctica de las matemáticas no debería olvidar!" Glaeser (1981).

"Los números negativos pusieron en tela de juicio pilares esenciales de la filosofía de las matemáticas. Las matemáticas eran concebidas como ciencia de las cantidades. Los números negativos obligaban de manera implícita a comprenderlas de otra manera, no empírica ya que en el mundo exterior, ninguna realidad podía asignársele a estos números… el proceso de reconocimiento de los números negativos, en tanto concepto matemático legítimo no ha evolucionado de manera continua, sino que ha variado de cultura a cultura, poniendo incluso, en evidencia rupturas y retrocesos. Cabe aclarar que los números negativos no constituyen un concepto aislado en el seno de las matemáticas, sino que surgen más allá del concepto del número en el nivel de los fundamentos, convirtiéndose en un desafío para las mismas." (Schubring, 1988)

Una vez exhibido el complejo telón de fondo de lo que nos preocupa vía las dos citas anteriores, nos colocamos históricamente en el *Tratado de Álgebra* de George Peacock y nos preguntamos:

¿Cómo incorporar el legado de este autor a los avances conceptuales y tecnológicos existentes actualmente en el álgebra escolar?

En este escrito solamente pretendemos esbozar algunas de las ideas fundamentales de Peacock referidas a la categoría de la negatividad y analizarlas desde la perspectiva de la enseñanza elemental actual.

El término "negatividad" lo utilizamos como lo han concebido Lizcano (1993) y Cid (2000). Estos autores hacen referencia a *los antecedentes histórico-epistemológicos de los números negativos* afirmando que no pueden ser considerados aún, como los enteros de hoy día. Guardando las dimensiones, la negatividad así entendida, coincide con las maneras en que muchos estudiantes durante la transición de la aritmética al álgebra la perciben ahora (Gallardo, 2002).

---

[1] Estudio teórico financiado por CONACYT. Proyecto de investigación: 44 632. "Procesos de abstracción y patrones de comunicación en aulas de matemáticas y ciencias en entornos tecnológicos de aprendizaje: estudio teórico experimental con alumnos de 10 a 16 años de edad."

Sobre la obra de Peacock, Pycior (1981) asegura que este autor, con el fin de responder a la problemática de los números negativos, elaboró un sistema algebraico que admitía esencialmente símbolos, signos y leyes arbitrarios. Diferimos del argumento de Pycior respecto al uso de las palabras "números negativos" pues Peacock sólo menciona en su obra: términos negativos, cantidades negativas, generalizaciones de forma negativas pero nunca se refiere a números negativos (Gallardo y Torres, 2005).

Menghini (1994), señala que Peacock fue uno de los primeros autores que enfrentó el problema de la justificación de las operaciones con expresiones literales o símbolos. Nosotros hemos comenzado apenas a desmenuzar el primer volumen de su obra.

SOBRE EL TRATADO DE ÁLGEBRA DE GEORGE PEACOCK

Antecede a la obra de Peacock un escenario poco claro y áspero que impregnaba en el ambiente matemático en la Inglaterra del siglo XIX. El *Tratado de Álgebra* (1842) de este autor dio lugar a controversias con respecto al status de las cantidades negativas y de la operación de sustracción. En el siglo XVIII las matemáticas se definieron como la ciencia de la cantidad y las entidades negativas fueron consideradas cantidades menores que nada y cantidades obtenidas al sustraer una cantidad mayor de una menor. Esta visión dio lugar a que muchos resultados algebraicos de indiscutible valor y consistencia entre sí, fueran cuestionados como válidos. A Peacock le inquietaba esta problemática.

El autor consagra un primer volumen de su tratado a lo que denomina Álgebra Aritmética, donde define los principios de esta ciencia y sus aplicaciones a la teoría de números. Dedica un segundo volumen al Álgebra Simbólica, donde abarca las áreas más importantes del análisis de su tiempo con la perspectiva de presentar sus principios en forma tal, que constituyan los componentes de un sistema uniforme e interrelacionado.

En el Álgebra Aritmética, Peacock considera símbolos que representan números digitales[2] y operaciones, definidas éstas como en la aritmética. Así, los signos más y menos denotan la adición y sustracción en su significado usual, de manera que estas operaciones pueden considerarse imposibles cuando los símbolos sean reemplazados por números. Por ejemplo, en $a + b$, a y b son cantidades de la misma clase. En cambio, para $a - b$ es necesario suponer que $a > b$. Debido a esta restricción, las cantidades negativas son expulsadas por imposibles o extrañas al Álgebra Aritmética. Existen también generalizaciones válidas para cualesquiera a y b como en:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

Obsérvese, que la sustitución por valores específicos no afecta la formación del resultado. Ahora bien, si consideramos:

$$(a + b)\,(a - b)$$

Esta expresión sólo será equivalente a $a^2 - b^2$ cuando $a > b$. En ningún otro caso, la forma del resultado es consistente con la definición aritmética de la multiplicación. Advierte el autor que nos encontramos muchas veces, aunque sin percibirlo, con ejemplos de operaciones en Álgebra Aritmética, que no podemos realizar o resultados que no podemos reconocer. Es muy difícil describir estas operaciones o resultados

[2] Peacock denomina *números digitales* a aquellos números representados por los 9 dígitos y el cero. (1842)

inadmisibles antes de llevar a cabo el proceso. Peacock afirma: “si se requiere sustraer de $7a + 5b$, los sustraendos varios: $a + 3b$, $3a - 2b$ y $3a + 7b$, se procede aplicando la regla general de sustracción y se obtiene:

$$7a + 5b - a - 3b - 3a + 2b - 3a - 7b =$$

$$7a - a - 3a - 3a + 5b - 3b + 2b - 7b =$$

$$= 7b - 10b$$

Este resultado es imposible en Algebra Aritmética”.

Cabe señalar, que la ley general de sustracción referida por Peacock, explica cómo al realizar la operación, todos aquellos términos del sustraendo sin signo o precedidos por el signo “+”, en el resultado final estarán precedidos por el signo “-”. En cambio, los términos del minuendo y los signos que los anteceden no sufrirán alteración alguna.

Peacock, manifiesta que seremos capaces de conseguir una extensión de nuestra noción de número, que amplíe las provincias de la Aritmética y del Álgebra Aritmética. Construye entonces el Álgebra Simbólica, que adoptará los principios del Álgebra Aritmética pero eliminará todas las restricciones. Afirmó que si generalizamos la operación denotada por menos para aplicarla en todos los casos, habremos encontrado la existencia independiente de este signo e introducido una clase de cantidades, $+a$ y $-a$, nunca contempladas en la Aritmética o en el Álgebra Aritmética. La restricción esencial de que el Álgebra Simbólica deba incluir al Álgebra Aritmética, la denominó el Principio de Permanencia de las Formas Equivalentes. Añade, que solamente en Álgebra Simbólica formamos y reconocemos los resultados cualesquiera que sean. Así, esta ley general de transición de resultados conduce a equivalencias como las siguientes:

$$a - (a + b) = a - a - b = - b$$

$$a - (a - b) = a - a + b = + b$$

Peacock, advierte el hecho de que los resultados del Álgebra Simbólica que no son comunes al Álgebra Aritmética, son generalizaciones de forma y no son deducibles de definiciones no existentes para este caso.

Sorprende al autor, que los algebristas de su tiempo no hayan advertido la transición de una clase de resultados a otros y que se haya considerado a ambos como consecuencias de las definiciones de la Aritmética y del Álgebra Aritmética. Concluye Peacock: “…un estudiante que no solamente esté familiarizado con los resultados del Álgebra Aritmética, sino también con las limitaciones que ésta impone, se encontrará en condiciones de apreciar en toda su extensión las conclusiones legítimas de esta ciencia… adquirirá, además, el hábito de observar no solamente lo que está dentro, sino también lo que queda fuera de las fronteras del Álgebra Aritmética e inclusive, lo más importante, estará preparado para el estudio del Álgebra Simbólica. Será capaz de apreciar en toda su extensión el Principio de las Formas Equivalentes, que supone un conocimiento de las reglas del Álgebra Aritmética como bases de las del Álgebra Simbólica… lo mencionado justifica suficientemente, el hecho de presentar el estudio de estas ciencias por separado.” (Prefacio, ix, obra citada)

En el presente artículo exponemos ideas fundamentales de la obra de Peacock, a saber: 1) la ley general de transición de resultados que originó el Principio de las Formas Equivalentes; 2) la existencia independiente de los signos más y menos que hizo posible la sustracción en todos los casos. Este escrito nuestro desembocará en la presentación de la etapa preliminar de un estudio empírico realizado con alumnos actuales.

SOBRE EL ESTUDIO EMPÍRICO PRELIMINAR

Nos apoyamos en Freudenthal (1985) y Filloy (1999) para analizar las interacciones entre el lenguaje aritmético algebraico y el lenguaje natural en estudiantes de 11 a 16 años de edad. Estos autores ponen de manifiesto que en los sujetos aún predominan los significados de las palabras provenientes del lenguaje vernáculo inhibiendo en ocasiones la traducción a expresiones formadas por estas palabras en el sistema simbólico matemático.

Basados en las ideas de Piaget (1960), Filloy y Rojano (1984) acuden al método histórico-crítico como componente teórica metodológica para analizar los problemas de enseñanza aprendizaje del álgebra elemental. Nosotros nos apoyamos en este acercamiento al uso del método histórico-crítico en educación matemática caracterizado por movimientos recurrentes entre el análisis de textos clásicos de la historia de las matemáticas y el trabajo empírico realizado con estudiantes.

Hemos retomado las ideas fundamentales de Peacock, para diseñar cuestionarios y entrevistas. Pretendemos analizar la categoría de la negatividad en el terreno del álgebra elemental. Hemos advertido cómo Peacock, construye su texto de manera muy minuciosa y gradual partiendo primero de proposiciones en lenguaje usual con números digitales, donde no se requiere de signos de operación. Por ejemplo, para la adición y la sustracción utiliza el formato vertical; acto seguido expresa estas operaciones en formato horizontal e introduce símbolos literales y los signos más y menos. Continúa en forma detallada y explícita su propuesta teórica, con el fin de que su obra pueda ser utilizada en un curso introductorio de álgebra (Gallardo y Torres, 2005).

La secuencia metodológica inició con la aplicación de un cuestionario, con 40 alumnos de edades entre los 15 y 16 años del décimo grado (primer semestre) turno vespertino de la escuela preparatoria de la Universidad Autónoma del Estado de México (U. A. E. M) de la ciudad de Toluca. Se eligieron, a partir de su desempeño en el cuestionario así como en la asignatura de matemáticas, a tres alumnos para entrevistar y se seleccionó a un estudiante (M) que nos permitiera observar su manejo del lenguaje natural. Estas características del estudiante, nos aseguraban el dominio de los lenguajes aritmético y pre-algebraico, necesarios para los propósitos de nuestro estudio. Para tal caso, intencionalmente, se le presentaron cuestiones tomadas de Baldor (1965), el libro de texto utilizado en el aula así como del primero y quinto capítulos de la obra de Peacock (1842).

El cuestionario tuvo una fase preparatoria que permitió mejorar su diseño. Inicialmente se aplicó a estudiantes de 9º grado de una secundaria estatal pública así como a tres profesores de secundarias diversas. Confrontando los resultados obtenidos en esta primera fase con las propuestas teóricas del estudio, decidimos elegir un grupo de 10º grado. En el cuestionario se desarrollaron los temas siguientes: operaciones en lenguaje natural, operaciones en lenguaje algebraico, resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas. Las correcciones hechas al cuestionario permitieron reestructurar la entrevista que incluyó los mismos temas que éste.

Aquí reportamos algunos de los ejercicios realizados en entrevista video-grabada con el estudiante elegido (M). Las cuestiones que resolvió fueron tomadas de Baldor (1965) que recurre a un lenguaje algebraico que pareciera estar inspirado en el de Peacock en el sentido del uso del lenguaje natural y obviamente del lenguaje algebraico, aunque se aclara que no es tan minucioso como el que se encuentra en la obra del autor inglés.

Para su análisis, las respuestas del estudiante las hemos organizado en torno a la formación de resultados simples, formación de resultados de equivalencia, y el uso del signo menos. Estos tres rubros se originaron a partir del pensamiento de Peacock: la Ley de Transición de Resultados y la Existencia Independiente del Signo Menos, mencionados anteriormente.

Debido a la limitación de extensión de este escrito, se considerarán ítem referidos exclusivamente al primer capítulo (*Principios de Álgebra)* de la obra de Peacock (1842).

LA ENTREVISTA

La mecánica empleada durante la entrevista, era leer la cuestión y que el alumno la resolviera pensando en voz alta, cada vez que elaboraba algo sin hablar, se le pedía que expresara lo que acababa de efectuar y por qué. Había ocasiones, pocas, que se le interrumpía para aclarar algún punto. A continuación, se muestran fragmentos del diálogo entre M y el entrevistador (E) así como la interpretación de las respuestas basada en nuestras premisas teóricas.

Sobre la Formación de Resultados Simples. Operaciones que no admiten simplificación o reducción.

A) *E: Representa la resta de b más c de a*

1. M: ¿La resta de *b* más *c* de *a*?... [Escribe]: $-\ b\ c\ +\ a$.
2. *E: Si yo te pidiera la resta de 7 más 5 de 10.*
3. M ¿De siete más *5*?
4. *E: De 10.*
5. M: ¿Sería entonces *7* más *5* igual a *10*?... Pero *7* más *5* no es igual a *10*.
6. No entiendo que es de *10*.
7. *E: Bueno, resta 4 de 10.*
8. M: ¡Ah! Entonces sería *c* menos *b* más *a*.
9. *E: Colócalo.*
10. M: [Escribe]: $a - (b + c)$.

En el renglón 1 (R1) escribe: – *b c + a*, vía una lectura de izquierda a derecha de la frase: “la resta de *b* más *c* de *a*”. Interpreta la palabra “resta” como el signo “−” y traduce *b* más *c* como *b c*. De hecho, la adición se comenzó escribiendo de esta manera en el álgebra de antaño. En R2, E decide sugerirle una resta en un nivel más concreto, esto es, con números naturales para que identifique la operación planteada. En R3, M verbaliza: “de *7* más 5” y olvida la existencia de la resta. Además en R5, M iguala esta suma a *10.* Esta tendencia de convertir operaciones abiertas en expresiones cerradas, refleja la necesidad de obtener un resultado numérico y apunta al predominio del conocimiento aritmético sobre el algebraico en el sujeto. En R6, M afirma que no entiende la expresión: “de *10*”. En R7, E recurre a un ejemplo numérico aún más simple. En R8, M recupera la operación de resta para literales, que rescató de R7, al verbalizar E: "resta *4* de *10*". En este mismo renglón, M verbaliza incorrectamente lo que escribió en R1. Cuando E le pide en R9, que anote en el papel, M forma la operación planteada en R1, no sin antes volver a leer el enunciado del ejercicio A. Nótese, que han intervenido en el diálogo los lenguajes: natural, en forma verbal y escrita; algebraico, en forma verbal y escrita. Ha sido en el lenguaje algebraico escrito en formato horizontal donde M recuperó finalmente el resultado en R10. Vale enfatizar el hecho, de que M asoció la palabra "de" con el uso de paréntesis, signo de agrupación indispensable para la escritura algebraica correcta de la expresión:

$$a - (b + c)$$

B) *E: Representa el producto de 7, a y b*

11. M: ... [Escribe]: $(a)\ b = 7$. [Verbaliza]: el producto de a por b es igual a *7.*
12. *E: Si yo te pidiera el producto de m, n y p.*
13. M: Entonces, ¡ya sé! Sería *7* por a y por b. [Escribe]: $a\ (b)\ 7$.

En (R11), M cierra de nuevo la oración abierta (predominio de su pasado aritmético). En (R12), E recurre a un nivel más abstracto de la expresión considerando solamente símbolos literales. Gracias a este cambio de perspectiva, M forma el producto planteado en R13. Nótese que escribe: $a\ (b)\ 7$, aunque verbaliza: "*7* por a y por b". Este hecho pone de manifiesto, el cambio de orden de sucesión de factores, por parte del estudiante Dos lenguajes son los utilizados: lenguaje verbal y lenguaje escrito, ambos en formato horizontal.

C) *E: Restar* $d - e + 5$ de $c + d - 2$

14. M: Este [$d - e + 5$] se lo tengo que restar a este [$c + d - 2$]. Y entonces quedaría:
15. c, la d se elimina, y queda menos e, ¡Ay! Me equivoqué, es mas e y si vas restar *5*
16. de menos *2,* es menos *7.*
17. [Trazos del estudiante]:

$$\begin{array}{r} \_\ c + d - 2 \\ \underline{d - e + 5} \\ c + e - 7 \end{array}$$

En R13, observamos que, M ya interpreta correctamente el lenguaje verbal donde se utiliza "de". Recordar que tuvo dificultad en R6. En R14, R15 y R16 es capaz de salir airoso utilizando el lenguaje algebraico vertical y formar la operación de resta [R17]. Surgen dos lenguajes: lenguaje natural y lenguaje algebraico vertical. En este último, es muy relevante observar que verbaliza símbolos negativos: más e, menos *2*, menos *7.* Además, para llevar a cabo la operación, no acomoda los términos que se corresponden [semejantes) en el minuendo y sustraendo. De hecho, así encontramos esta operación escrita en Peacock (1842).

Sobre la Formación de Resultados de Equivalencia.

D) *E: Escribe una forma equivalente a:* $a - a =$

18. M: [Escribe]: $a - a - a + a$ pero esto [$- a + a$] se elimina ¿no?

19. E: Muy bien.

E) *E: Escribe una forma equivalente a* $a - b =$

20. M: [Escribe]: $a - b - b + b$.

21. E: ¿Habría otra forma de escribir a menos b?

22. Sí. [Escribe]: $– b + a$.

En R18, utiliza correctamente el cero para lograr una expresión equivalente. Uso del lenguaje algebraico horizontal. En R20, forma el resultado de manera análoga a R18, esto es, agrega cero: $- b + b$. Sin embargo, al pedirle E otra escritura, surge una nueva forma equivalente que contiene el negativo $– b$ [R22]. Emplea el lenguaje algebraico horizontal.

Sobre el Uso del Signo Menos

F) *E: Simplificar* $3\,a\,b - 2\,b\,a + b\,a - 10\,a\,b =$

Trazos del proceso realizado por el estudiante:

$$\cancel{3\,a\,b} - 2\,b\,a + \cancel{b\,a} - 10\,a\,b$$
$$\cancel{4\,a\,b} - \cancel{2\,b\,a} - 10\,a\,b$$
$$\cancel{2\,a\,b} - \cancel{10\,a\,b}$$
$$- 8\,a\,b$$

23. E:… ¿Cómo le hiciste?

24. M: Sumé los positivos y luego le fui restando los negativos.

25. E: ¿Y cuánto es el resultado?

26. M: Menos $8\,a\,b$.

El estudiante formó expresiones equivalentes, la última de ellas, fue el término negativo $– 8\,a\,b$. Se observa el cambio de orden de sucesión de factores, por parte del estudiante.

G) *E: Escribe una forma equivalente a* $a - (b + c + d) =$

27. M: [Escribe]: $a - b - c - d$.

28. *E: ¿Cómo lo obtuviste?*

29. M: ...Cambié el signo.

30. *E: ¿Es resta esta* [$a - (b + c + d) =$] *?*

31. M: Yo veo que esta [a] es aparte y el signo menos es el que multiplica a toda esta

32. expresión [$b + c + d$]. Lo que está dentro del paréntesis está multiplicándose con
33. el signo menos.

En R27, M escribe una expresión equivalente al despojarla del paréntesis. En R29 afirma que cambió el signo. En R31, R32 y R33, se muestra que el paréntesis lo conduce a introducir una multiplicación en la operación de sustracción planteada. Observamos que, M hace uso del signo menos para obtener la forma equivalente que se le pide. En la expresión $a - (b + c + d)$ escrita en formato horizontal no advierte el minuendo ni los sustraendos, sino únicamente usa el signo menos. En R32 y R33 afirma: “están multiplicándose con el signo menos”. En el caso del lenguaje vertical de la resta en R15 y R16, M sí había advertido números con signo: más *e*, menos *2*, menos *7*.

Peacock, explica la supresión del paréntesis en la sustracción aboliendo la ambigüedad de considerar esta operación como un producto. Para el caso: $a + b - (c - d)$, el autor afirma que esta expresión puede escribirse como: $a + b - c + d$. Advierte que el sustraendo $(c - d)$ se encontraba en un principio dentro del paréntesis con la intención de mostrar que toda esta cantidad, que representa el exceso de c sobre d, será sustraída de $a + b$. En consecuencia, la ley de eliminación del paréntesis, en el caso de que éste se encuentre precedido por un signo “–” es idéntica a la ley de sustracción.

REFLEXIONES FINALES

Al mirar las actuaciones del estudiante con los ojos de Peacock, creador del Álgebra Aritmética, e ir buscando cómo se forman las operaciones, cómo se forman los resultados y cómo se usa el signo menos, vislumbramos la necesidad de considerar el entrecruzamiento de los distintos lenguajes utilizados por el estudiante para resolver los ejercicios planteados. Asimismo, advertimos que el surgimiento de números con signo, aún no números realmente negativos o el uso del signo menos, parecieran depender del lenguaje vertical de carácter aritmético o del lenguaje horizontal propio del álgebra. Por otra parte, la introducción de las leyes de los signos pertenecientes al dominio multiplicativo, propicia el desconocimiento de la sustracción.

REFERENCIAS

Baldor, A. (1965). *Álgebra elemental*. Mediterráneo. Madrid, 5–30.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de la XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Boletín del SI–IDM, 10.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del algebra educativa.* Grupo Editorial Iberoamericano. México.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). *La aparición del lenguaje aritmético y algebraico*. L’Educazione Matematica, V(3), 278–306.

Freudenthal, H. (1985). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing Company, Dordrech/Boston/Lancaster.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171–192. Kluwer Academic Publishes. Printed in the Netherlands.

Gallardo, A. y Torres, O. (2005). El álgebra aritmética de George Peacock: Un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica. *Memorias del IX Simposio de la SEIEM.* Universidad de Córdoba. España, 243–249.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2(3), 303–346.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Editorial Gedisa. Barcelona.

Menghini, M. (1994). Form in algebra: Reflecting, with Peacock, on upper secondary School teaching. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 9–14.

Peacock, G. (1842). *A treatise on algebra*. 2 nd ed. (Reprinted, New York: Scripta Matematica 1940).

Piaget, J. (1960). *Introducción a la epistemología genética*. I. El pensamiento matemático. Biblioteca de Psicología Evolutiva. Paidos. Buenos Aires Argentina.

Pycior, H. (1981). George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra. *Historia Mathematica,* 8, 23–45.

Schubring, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845. *Actes du Premier Colloque Franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de I´informatique*. Editions La Pensée Sauvage.