

ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Pedro Gómez, Universidad de Granada

Resumen

En este documento, describo algunos aspectos del significado con el que usamos la expresión “análisis didáctico” en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada. En particular, introduzco el análisis didáctico como un nivel del currículo y establezco su papel en la identificación, organización y selección de los múltiples significados de un concepto matemático para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Estas consideraciones dan lugar a algunas reflexiones sobre el papel del análisis didáctico en el diseño de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en la identificación de las capacidades que califican la competencia de planificación del futuro profesor de matemáticas y en la caracterización de su conocimiento teórico, técnico y práctico.

Abstract

In this paper, I describe some aspects of the meaning with which we use the expression “didactical analysis” in a preservice secondary mathematics teacher training methods course. In particular, I introduce didactical analysis as a level of curriculum and I establish its role in identifying, organizing and selecting the multiple meanings of a mathematical concept for the purpose of designing, implementing and assessing didactical units. I show the role that this notion can play in the design of teacher training programs, in identifying the capacities that qualify the preservice teacher’s planning competence, and in characterizing his theoretical, technical and practical knowledge.

Aunque la expresión “análisis didáctico” ha sido una noción importante en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada desde hace tiempo, en los últimos cinco años hemos precisado su significado y le hemos asignado un papel central en su diseño y desarrollo¹. ¿Con qué significado utilizamos esta expresión²? ¿Qué papel puede jugar en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? En este documento abordo estas cuestiones.

Organizo este trabajo en dos partes. En la primera, describo el análisis didáctico como un nivel del currículo de matemáticas de secundaria; profundizo en la noción de significado en las matemáticas escolares; destaco la multiplicidad de significados de un concepto matemático; y describo, de manera general, el ciclo de análisis didáctico como un procedimiento para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. En la

¹ En lo que sigue, me tomo la libertad de redactar en primera persona del singular aunque, en muchas ocasiones, describo el producto del trabajo de una línea de investigación y desarrollo en la que, bajo la tutela de Luis Rico, han trabajado y trabajan varios investigadores. Entre aquellos con quienes he trabajado, debo mencionar a Isidoro Segovia, Evelio Bedoya, José Ortiz, José Luis Lupiáñez y Antonio Marín.

² La expresión “análisis didáctico” se utiliza con múltiples significados. Por ejemplo, de nuestro grupo de investigación, Gallardo y González (2006, en este volumen) la utilizan para referirse a una metodología de investigación en educación matemática.

segunda, muestro, en el contexto de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada³, el papel que el análisis didáctico puede jugar en el diseño de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y en la especificación de las capacidades que caracterizan la competencia de planificación del profesor. Finalmente, exploro una caracterización del conocimiento teórico, técnico y práctico del profesor de matemáticas en términos del proceso en virtud del cual él transforma las nociones del análisis didáctico en instrumentos útiles para realizar su labor docente.

1. PLANIFICACIÓN DE CLASE Y CURRÍCULO

Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deben conocer y utilizar principios, procedimientos, herramientas y técnicas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, les permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar su planificación de clase. Por lo tanto, hay que diferenciar entre los problemas de diseño curricular global (para la totalidad de una asignatura, por ejemplo) y los problemas de diseño curricular local (para una unidad didáctica o una hora de clase sobre una estructura matemática específica o uno o más aspectos de ella). El *análisis didáctico*, introducido por Rico (1992, § III.2.1; , 1997, p. 55) y que hemos venido desarrollando recientemente (Gómez, 2002) es una conceptualización del nivel *local* de la planificación; se constituye en un nuevo nivel del currículo (p. 256); aborda la problemática de la brecha entre el diseño curricular global y local (Rico, 1997; Segovia y Rico, 2001); y se enmarca en una visión funcional del currículo de matemáticas (Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia, 1997, p. 284).

La planificación es una de las actividades más importantes en el trabajo del profesor (Ball y Bass, 2003, p. 3; Van Der Valk y Broekman, 1999) y es una de sus competencias (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001, p. 380). Esta competencia reviste especial importancia en los planes de formación inicial de profesores y se incluye en los diferentes estándares profesionales de los profesores (e.g., Department of Education, 2001; Department of Education and Training, 2004). La situación es similar en el marco del trabajo y la formación del profesor de matemáticas: la planificación se reconoce como una de las competencias indispensables (ver, por ejemplo, Niss, 2003; Recio, 2004; Rico, 2004). El profesor debe abordar diferentes tipos de planificación. Cuando la planificación es local, el foco de atención del profesor es un tema matemático específico. En este nivel, la planificación del profesor debe tener en cuenta la complejidad del contenido matemático desde diversos puntos de vista: “cuando las matemáticas se enseñan desde una perspectiva pluralista, entonces se pueden ver desde múltiples perspectivas —perspectivas que motivan a los profesores a considerar no solamente los diferentes significados de las matemáticas, sino también su diversidad en su enseñanza” (Cooney, 2004, p. 511). De hecho, la negociación y construcción de esta multiplicidad de significados debe ser uno de los propósitos centrales de la interacción en el aula. Ésta es la posición que, desde comienzos de la década de los noventa, Rico y sus colaboradores han propuesto como aproximación a la planificación de unidades didácticas en España (e.g., Rico, 1992; Rico, 1998; Rico, Castro, Castro, Coriat, Marín, Puig *et al.*, 1997). Esta propuesta se centra en la idea de que la planificación de una unidad didáctica o de una hora de clase se debe fundamentar en la exploración y

³ Me refiero principalmente a características de esta asignatura en el periodo 2000-2006.

estructuración de los diversos significados de la estructura matemática objeto de esa planificación.

Los “organizadores del currículo” propuestos por Rico (1997, p. 44) son herramientas conceptuales y metodológicas que le permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar información sobre estos múltiples significados. Un organizador del currículo (por ejemplo, los sistemas de representación) es una noción, con un significado teórico proveniente de la didáctica de la matemática, para la que hemos desarrollado un significado técnico. Este significado técnico recoge los usos que un profesor puede hacer de ella cuando diseña, implementa y evalúa unidades didácticas. En lo que sigue, utilizaré el término “noción” para referirme tanto al organizador del currículo (es decir, a su significado técnico), como a sus significados teórico y práctico. Para efectos de abordar la descripción del análisis didáctico y su relación con los organizadores del currículo, considero a continuación la interpretación que hacemos de la noción de significado de un concepto en las matemáticas escolares.

2. PLANIFICACIÓN DE CLASE Y SIGNIFICADO

La extensión y profundidad de los significados que construyen los escolares en el aula (y, por consiguiente, la calidad de su aprendizaje) se realiza atendiendo los distintos modos de expresión y de uso con que se manejen los conceptos, a la capacidad para conectar diversas estructuras y utilizar diferentes procedimientos, a la diversidad de los problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, en definitiva, considerando la riqueza de conexiones —de significados— que se establecen para una determinada noción o conjunto de nociones matemáticas. Parte relevante del aprendizaje matemático de los escolares se lleva a cabo en el aula, cuando ellos negocian y construyen significados con motivo de las actividades propuestas por el profesor (Biehler, 2005, pp. 61-62; Bromme y Steinbring, 1994, p. 218). ¿Cuáles son los significados de un concepto matemático que pueden ser objeto de la interacción en el aula? ¿Cuáles son los significados que se considera relevante desarrollar? En este apartado, abordo estas preguntas y asumo una posición con respecto a ellas. Mi propósito es mostrar la utilidad de abordar la noción de significado en las matemáticas escolares desde una perspectiva amplia en virtud de la cual un concepto matemático puede ser estudiado desde una variedad de significados.

Frege (1998a; , 1998b; , 1998c) introdujo la idea de un triángulo semántico para abordar el significado de un término (ver Figura 1).

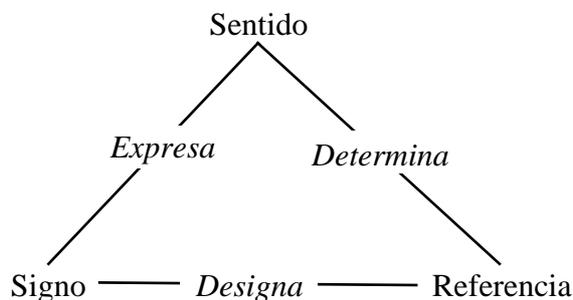


Figura 1. Triángulo semántico (término)⁴

Al igual que la referencia de un nombre propio es el objeto que designa, un término conceptual se refiere a un concepto. En la noción de Frege para significado de un

⁴ Frege no dio ningún nombre para la relación entre sentido y referencia. La denominé “determina” siguiendo a Oldager (2004, p. 21).

término conceptual, el triángulo semántico viene dado por el *signo* o *término* con el que se expresa, por su *referencia* o concepto propiamente tal, y por su *sentido* o modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto (Ver Figura 2).

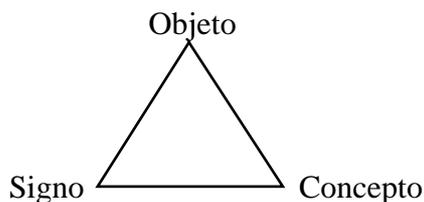


Figura 2. Triángulo semántico (concepto)

El triángulo semántico propuesto por Frege identifica los elementos constitutivos del significado de un término conceptual desde una perspectiva estrictamente lógica y formal. Dado que nuestro interés por el significado de los conceptos matemáticos está centrado en el ámbito de la matemática escolar, adaptamos las ideas de Frege para considerar un sistema de relaciones más amplio⁵.

Mi propuesta interpreta las ideas de Frege al enfatizar el hecho de que los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático implican, por un lado, los modos en los que se establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos, y, por el otro, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar. Adicionalmente, y siendo coherente con nuestra posición con respecto al currículo de matemáticas, adopto un punto de vista funcional, en virtud del cual el sentido en el que se usa un término conceptual matemático también incluye los fenómenos que sustentan el concepto. En la matemática escolar, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto. Mi propuesta aborda el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que denomino estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Ver Figura 3)⁶:

- ◆ En la *estructura conceptual* incluyo las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.
- ◆ En los *sistemas de representación* incluyo las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos.
- ◆ En la *fenomenología* incluyo aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

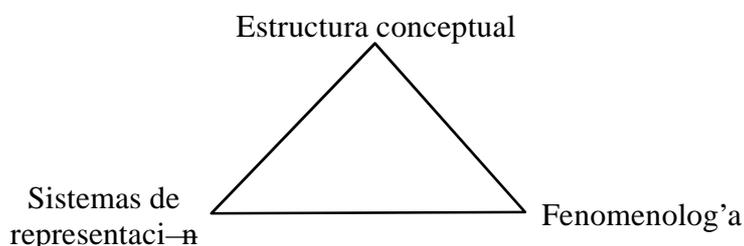


Figura 3. Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar

⁵ Debo a Luis Rico la aclaración de que, para efectos del análisis de contenido —que describiré más adelante—, no es necesaria una aproximación social a la noción de significado. Basta con una extensión de las ideas originales de Frege.

⁶ Diveros autores se han aproximado a la problemática de los significados de un concepto en las matemáticas escolares. Biehler (2005, pp. 62-66) resume algunas de estos trabajos. Mi propuesta, en sus tres dimensiones, comparte muchos aspectos con la de Steinbring (1999).

Estas tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar ponen en evidencia y organizan una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de clase: *la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares*⁷.

Esta multiplicidad de significados implica que, para efectos de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, sería deseable que el profesor:

1. conociera las tres dimensiones que caracterizan el significado de un concepto en la matemática escolar

y fuera capaz de:

2. recabar la información necesaria que le permita identificar dichos significados y organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;
3. seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción; y
4. utilizar la información que surge de los diversos significados del concepto para el diseño de unidades didácticas.

El contexto impone unos condicionantes a los últimos tres pasos. Por ejemplo, el contenido propuesto por la programación a comienzo de curso delimita los significados que se consideran relevantes a nivel institucional. Por otro lado, el profesor debe atender al desarrollo de la asignatura en el momento de la planificación. Para ello, él debe tener en cuenta su percepción sobre las capacidades que los escolares ya han desarrollado y su previsión sobre cómo los escolares pueden, al abordar las tareas objeto de la instrucción, desarrollar las capacidades involucradas en los objetivos de aprendizaje. A continuación, describo el análisis didáctico como un procedimiento que aborda y organiza esta complejidad.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO: UN PROCEDIMIENTO PARA ORGANIZAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor puede organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis (Gómez, 2002):

1. el *análisis de contenido*, como procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto;
2. el *análisis cognitivo*, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje;
3. el *análisis de instrucción*, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción; y
4. el *análisis de actuación*, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

⁷ En este trabajo me centro en el análisis de un concepto y de las estructuras matemáticas relacionadas con él. Los temas de la educación secundaria no son solamente conceptos. Incluyen, por ejemplo, operaciones entre conceptos, propiedades de conceptos, resultados, procedimientos o sistemas de representación. Todos estos temas se enmarcan dentro de una estructura matemática y, por lo tanto, pueden ser abordados con las herramientas del análisis didáctico.

Denomino *análisis didáctico* a un procedimiento cíclico que incluye estos cuatro análisis, atiende a los condicionantes del contexto e identifica las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto. La descripción de un ciclo del análisis didáctico sigue la secuencia propuesta en la Figura 4.

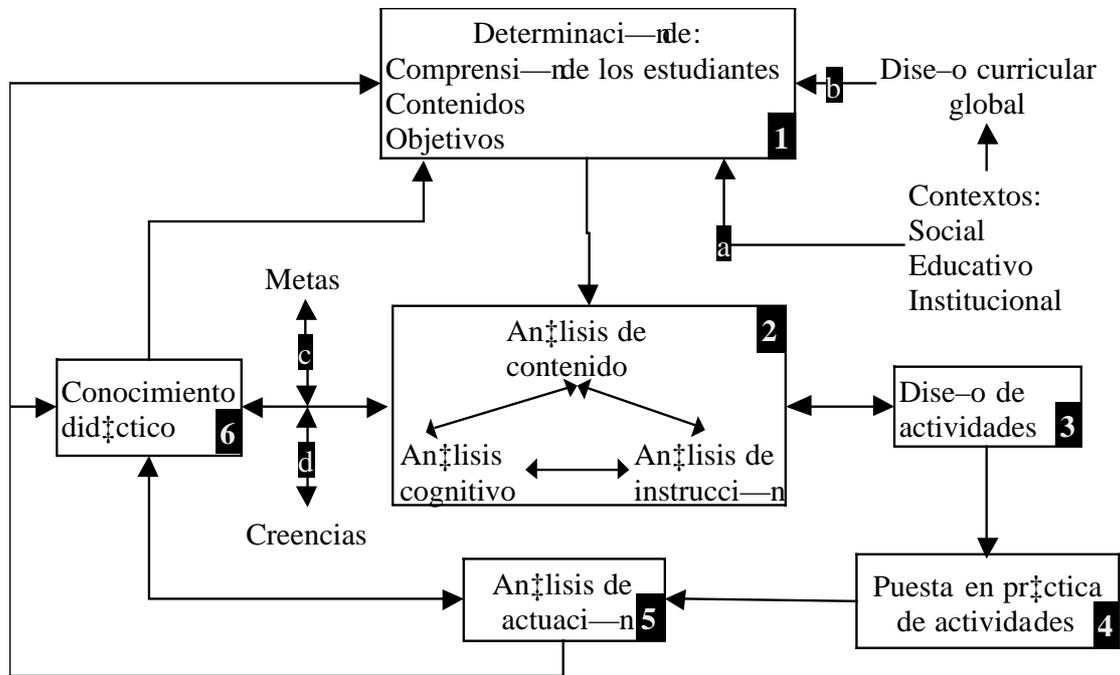


Figura 4. Ciclo de análisis didáctico y sus condicionantes

El ciclo del análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la Figura 4). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo, al identificar y organizar los múltiples significados del concepto objeto de la instrucción. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2). En el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados de referencia y, con base en ellos y en los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto, identifica las capacidades que pretende desarrollar en los escolares. También formula conjeturas sobre los posibles caminos por los que se puede desarrollar su aprendizaje cuando ellos aborden las tareas que conforman la instrucción. El profesor utiliza esta información para diseñar, evaluar y seleccionar estas tareas. Por consiguiente, la selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El

conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

Cada uno de los análisis se articula alrededor de unas *nociones*. Los organizadores del currículo son la expresión del significado técnico de esas nociones. Por ejemplo, el análisis de contenido incluye las nociones de sistema de representación, estructura conceptual y fenomenología, que corresponden a las tres dimensiones del significado de un concepto en el contexto de las matemáticas escolares. Por su parte, para cada noción, adoptamos un significado teórico, un significado técnico y un significado práctico. Por ejemplo, en el caso de los sistemas de representación podemos seleccionar, como *significado teórico*, la propuesta de Kaput (1992), en virtud de la cual, un sistema de representación es “un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523). El *significado técnico* de la noción abarca los usos que idealmente el profesor hace de ella cuando analiza un concepto matemático. Su *significado práctico* abarca las técnicas (razonamientos y procedimientos, Artigue, 2002) que el profesor desarrolla y pone en juego cuando utiliza la información que surge del análisis del concepto para efectos de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica (por ejemplo, las técnicas para utilizar la información que surge del análisis de contenido a efectos de identificar las capacidades y errores de los escolares).

A continuación, apoyándome en un ejemplo, presento *algunos* aspectos del significado técnico de las nociones estructura conceptual y sistemas de representación, con el propósito de dar cuenta de la complejidad del análisis de contenido, en particular, y del análisis didáctico, en general⁸.

Utilizo la expresión “estructura conceptual” para referirme a tres aspectos de todo concepto matemático del currículo escolar:

1. *Estructuras matemáticas involucradas*. Todo concepto matemático está relacionado con al menos dos estructuras matemáticas: (a) la estructura matemática que el concepto configura y (b) las estructuras matemáticas de las que él forma parte. Por ejemplo, el concepto función cuadrática configura una estructura matemática en la que se establecen relaciones estructurales entre conceptos como ecuación cuadrática, parámetro, foco y vértice (ver Figura 5). Adicionalmente, el concepto función cuadrática forma parte, por ejemplo, de la estructura matemática correspondiente al concepto función.
2. *Relaciones conceptuales*. Resalto las relaciones que se establecen entre el concepto y (a) los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura (e.g., la relación entre la función cuadrática y la ecuación cuadrática), (b) los objetos que son casos particulares de dicho concepto (en términos de Frege, los objetos que saturan el predicado; e.g., $f(x) = 3x^2 - 4$ como caso particular de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$), y (c) los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte (e.g., la relación entre la función cuadrática y las funciones continuas).
3. *Relaciones de representaciones*. La exploración de los significados de un concepto requiere de los sistemas de representación, puesto que con ellos es posible identificar los modos en que el concepto se presenta. Al tener en cuenta los sistemas de representación, se pueden destacar varias relaciones (ver Figura 5): (a) la relación

⁸ La descripción detallada de los cuatro análisis del análisis didáctico y de su papel en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria es un trabajo en curso en nuestro grupo de investigación (ver, por ejemplo, Lupiáñez y Rico, 2006; Marín, 2005).

entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas invariantes —e.g., como consecuencia de completar cuadrados), (b) la relación entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación —e.g., la relación entre parámetros de una forma simbólica y elementos de la representación gráfica) y (c) la relación entre dos signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas variantes —e.g., como consecuencia de aplicar una traslación a la gráfica).

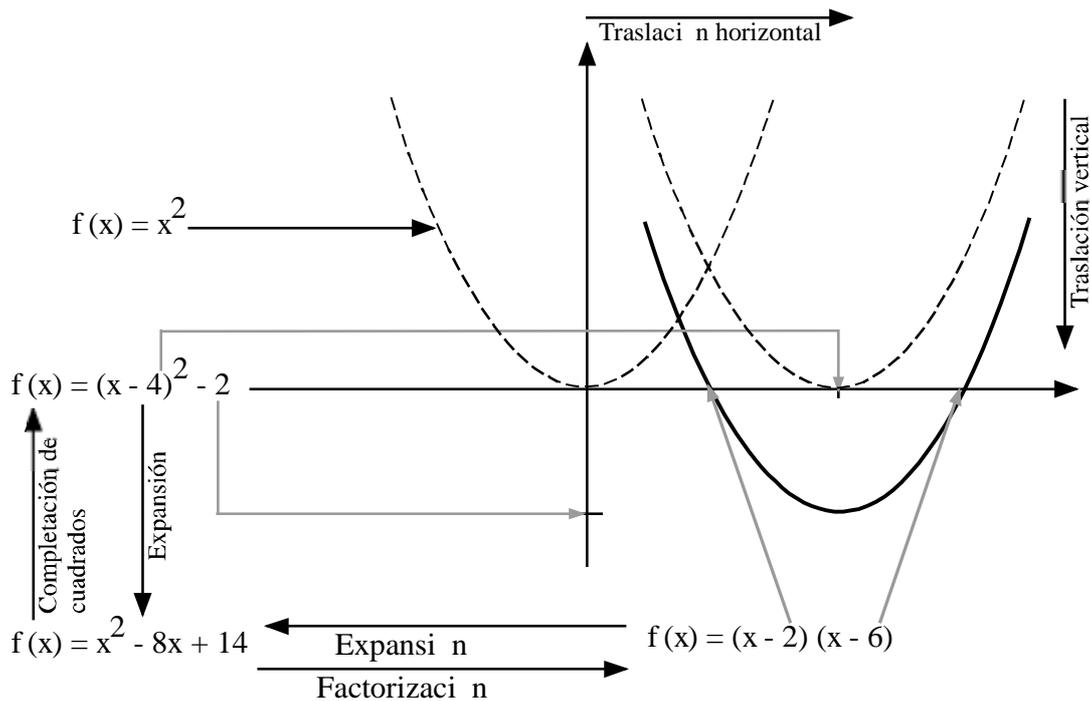


Figura 5. Conceptos y procedimientos

Por lo tanto, cuando exploramos los significados de un concepto en las matemáticas escolares, debemos tener en cuenta tres tipos de “elementos” y dos grupos de relaciones entre esos elementos.

Podemos clasificar los elementos en:

- ◆ los *objetos*, como casos particulares de un concepto y que conforman la extensión del concepto,
- ◆ los *conceptos*, como predicados que son saturados por los objetos y, a su vez, conforman estructuras matemáticas, y
- ◆ las *estructuras matemáticas*, que están conformadas por conceptos.

Por otro lado, las relaciones descritas en los puntos 2 y 3 anteriores se pueden agrupar en dos categorías que denomino *relaciones verticales* y *relaciones horizontales*. Las relaciones verticales se refieren a las relaciones entre los tres tipos de elementos: Objeto \leftrightarrow Concepto \leftrightarrow Estructura matemática. Por otra parte, las relaciones horizontales se refieren a las relaciones entre los signos en sus diferentes sistemas de representación (relaciones entre representaciones).

Abordar los significados de un concepto desde la perspectiva de su estructura conceptual y sus representaciones, implica identificar y organizar los elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas) y las relaciones (horizontales y verticales) correspondientes a ese concepto. Éste es un trabajo *matemático* en el contexto del contenido matemático escolar. Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006, en este volumen) lo hacen a través de lo que ellos denominan configuraciones epistémicas asociadas a un concepto. Por su parte, Biehler (2004, pp. 69-71) se aproxima a este tipo de procedimiento cuando, en un esquema y en una tabla, presenta lo que él denomina “el paisaje semántico” del concepto.

4. ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Si el análisis didáctico es una noción curricular, ¿qué papel juega en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? A continuación, muestro las contribuciones de esta noción en tres aspectos de esta actividad: (a) el diseño de una asignatura de formación inicial, (b) la identificación de las capacidades que califican la competencia de planificación del profesor de matemáticas y (c) la caracterización de su conocimiento teórico, técnico y práctico.

Análisis Didáctico y Diseño de una Asignatura de Formación de Profesores de Matemáticas

En la Figura 6, resumo el papel que el análisis didáctico ha jugado en el diseño de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada. Este diseño se soporta en dos pilares: una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores⁹ y una conceptualización de las actividades del profesor. Mostraré en la siguiente sección que es posible identificar y caracterizar la competencia de planificación del profesor a partir del análisis didáctico, como conceptualización de las actividades del profesor a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas.

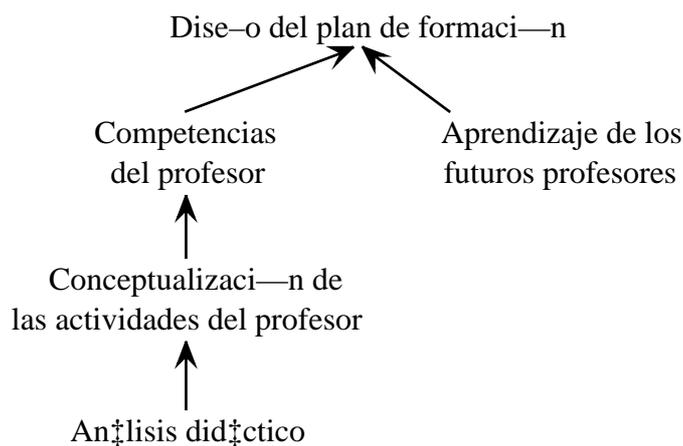


Figura 6. Conceptualización y diseño de un plan de formación

⁹ En este documento no profundizo en este aspecto de la fundamentación del diseño de planes y asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Para más detalle a este respecto ver, por ejemplo, Gómez y Rico (2005).

De las diferentes “tareas profesionales” del profesor (Llinares, 2005) y sus correspondientes competencias (Rico, 2004), nosotros hemos centrado nuestra atención en la planificación. Es decir, nos preocupamos por las competencias y capacidades necesarias para el diseño de unidades didácticas. El esquema metodológico para desarrollar estas competencias y capacidades se basa en un proceso de simulación (Van Der Valk y Broekman, 1999), en virtud del cual los grupos de futuros profesores deben producir, al final de la asignatura, el diseño de una unidad didáctica sobre un tema concreto. Para ello, los futuros profesores, con la guía y el apoyo de los formadores, ejecutan los diversos procedimientos implicados en cada uno de los análisis del análisis didáctico. Éste es, por lo tanto, un segundo papel del análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: es una de las bases que guían la secuencia de actividades que realizamos dentro de la asignatura.

Análisis Didáctico y Capacidades del Profesor de Matemáticas

En esta sección sugiero cómo la noción de análisis didáctico puede apoyar la identificación de las *capacidades* que contribuyen al desarrollo de la competencia de planificación del profesor de matemáticas. Enumeraré y organizaré estas capacidades de acuerdo con los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. A continuación, presento únicamente un primer nivel de las capacidades correspondientes a cada análisis. Cada una de estas capacidades se puede desarrollar en descripciones más detalladas que corresponden a los procedimientos que configuran cada uno de los análisis del análisis didáctico.

Análisis de Contenido

Para las tres dimensiones del significado de un concepto, el profesor debe ser capaz de:

- ◆ recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto;
- ◆ organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;
- ◆ seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales; y
- ◆ seleccionar los significados relevantes para la instrucción al tener en cuenta las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo).

Análisis Cognitivo

A partir de la información que surge del análisis de contenido, el profesor debe ser capaz de establecer:

- ◆ las competencias que se quieren desarrollar,
- ◆ los focos de interés que se han de tratar,
- ◆ las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción,
- ◆ las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción (que contribuyen a las competencias previamente identificadas y que delimitan los significados a tratar),
- ◆ las tareas que conforman la instrucción (cuyo establecimiento involucra las capacidades que se enumeran en el análisis de instrucción),

- ◆ las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar esas tareas, y
- ◆ las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

Análisis de Instrucción

Para efectos de analizar y seleccionar las tareas que conforman la instrucción, el profesor ha de ser capaz de analizar una tarea con el propósito de:

- ◆ identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden,
- ◆ identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir,
- ◆ establecer los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden la tarea, y
- ◆ evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

Análisis de Actuación

Una vez que se ha realizado la instrucción y que el profesor ha observado y registrado lo que sucedió en su interacción con los estudiantes, él ha de ser capaz de:

- ◆ comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula,
- ◆ establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula,
- ◆ caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades, y
- ◆ producir información relevante para una nueva planificación.

Si se tienen en cuenta los procedimientos que configuran el análisis didáctico, entonces es posible desarrollar en detalle las capacidades que he enumerado en la sección anterior. Por ejemplo, las dos primeras capacidades del análisis de contenido se refieren a la identificación y organización de los significados de un concepto matemático. Si consideramos las dimensiones de sistemas de representación y estructura conceptual de estos significados, entonces, para realizar estos procedimientos, el profesor debe ser capaz, para el concepto correspondiente, de:

1. identificar sus elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas),
2. determinar las diferentes representaciones de esos elementos y
3. establecer las relaciones entre los elementos y entre sus representaciones.

Si profundizamos en el detalle de la capacidad 3, observamos que, de acuerdo con lo que presenté anteriormente, esta capacidad implica que el profesor debe ser capaz de establecer las relaciones:

- ◆ entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura,
- ◆ entre el concepto y los objetos que son casos particulares de dicho concepto,
- ◆ entre el concepto y los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte,

- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas invariantes),
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación) y
- ◆ entre pares de signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas variantes).

En el ejemplo que acabo de presentar se aprecia la complejidad de las capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas (ver Figura 7). He identificado unas capacidades que contribuyen a esta competencia y las he descrito detalladamente de acuerdo con los análisis que conforman el análisis didáctico. En el caso del análisis de contenido, dos de estas capacidades se refieren a la identificación y organización de los significados del concepto en términos de los sistemas de representación y la estructura conceptual. Estas capacidades implican, entre otras cosas, establecer diversos tipos de relaciones entre los elementos con los que el profesor organiza los significados del concepto en cuestión.

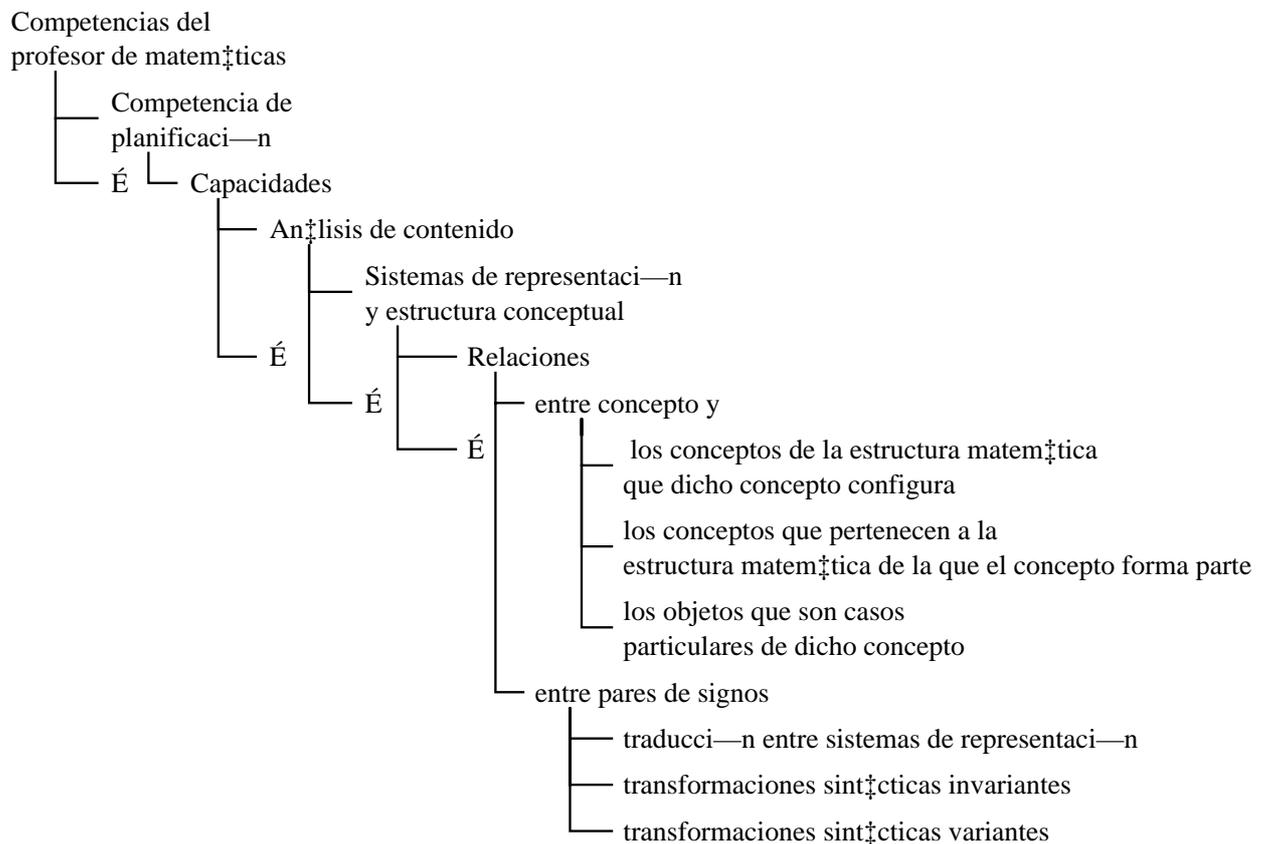


Figura 7. Competencia de planificación y complejidad de las capacidades asociadas

Análisis Didáctico y Conocimiento del Profesor

En el contexto de la asignatura de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria a nuestro cargo, nosotros esperamos que, para cada una de las nociones del análisis didáctico y para un concepto matemático concreto, el futuro profesor:

1. conozca el significado de la noción;

2. recabe y organice información sobre los significados del concepto en términos de la noción;
3. use la información obtenida para realizar los otros análisis del análisis didáctico; y
4. use la información de todos los análisis para el diseño de la unidad didáctica.

Estas actividades del profesor corresponden a los significados teórico (1), técnico (2) y práctico (3 y 4) de las nociones que conforman el análisis didáctico que introduce anteriormente y configuran, a su vez, tres tipos de conocimientos del futuro profesor. En este contexto, el *conocimiento teórico* es declarativo e implica la capacidad para describir, en abstracto, la noción. Por ejemplo, para declarar la definición de sistema de representación, enumerar sus características o su relación con otras nociones (como la estructura conceptual o la fenomenología). Denomino como *técnico* al conocimiento y a las capacidades para analizar un concepto matemático en términos de una noción dada. Por ejemplo, la identificación de las diferentes representaciones de un concepto forma parte del conocimiento técnico. Finalmente, en este contexto, el *conocimiento práctico* involucra las capacidades necesarias para usar, de manera orquestada, una información técnica con un propósito práctico (e.g., la planificación de unidad didáctica).

La relación entre las actividades que se espera que realice el futuro profesor, los significados de las nociones del análisis didáctico y los tipos de conocimientos que están implicados pone de manifiesto la complejidad del conocimiento didáctico y de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. El conocimiento didáctico, como el conocimiento que se pone en juego y se desarrolla al realizar el análisis didáctico, es un *conocimiento para la acción*, tal y como lo caractericé al describirlo en términos de competencias en la sección anterior. El desarrollo de este conocimiento requiere que los futuros profesores puedan transformar las nociones que conforman el análisis didáctico en instrumentos¹⁰. El desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores se fundamenta en un juego entre teoría y práctica, que se puede caracterizar con una adaptación de la teoría de la génesis instrumental (Rabardel, 2003; Rabardel y Bourmaud, 2003; Vérillon, 2000): es a través del uso de la noción (el instrumento), como mediador entre los futuros profesores y el concepto sobre el que se trabaja, que ellos construyen y desarrollan significados tanto acerca de la noción, como del concepto. La idea de génesis instrumental surge al constatar que un artefacto¹¹ se convierte en un instrumento en la medida que tienen lugar tres procesos:

1. La *instrumentalización*¹², como proceso en el que el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 673).
2. La *instrumentación*, como el proceso en el que se generan esquemas de acción (p. 673). Éstas son habilidades de aplicación de la herramienta para realizar tareas significativas (Kaptelinin, 2003, p. 834) que se transforman en técnicas (Artigue, 2002, p. 250). Una técnica es una amalgama de razonamiento y procedimientos rutinarios que permiten resolver una tarea (p. 248).
3. La *integración orquestada*, en virtud de la cual la herramienta se integra a otros artefactos (Kaptelinin, 2003, p. 834).

¹⁰ Este aspecto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria ha sido ya resaltado por Llinares (2005).

¹¹ Lo que propongo es una adaptación de la teoría de la génesis instrumental dado que, en este caso, el instrumento no se refiere a un artefacto material concreto, sino a una “herramienta analítica” (Kaptelinin, 2003, p. 834).

¹² Soy consciente de que este término no existe en castellano, pero lo introduzco como traducción del término “instrumentalization” en inglés, y, así, diferenciar este primer proceso del segundo.

De hecho, estos tres procesos corresponden, al menos parcialmente, a las tres categorías en las que también he clasificado las actividades del futuro profesor, los significados de las nociones del análisis didáctico y los tipos de conocimientos que esperamos que él desarrolle a lo largo de su formación (ver Tabla 1).

Actividad	Significado	Conocimiento	Proceso
Conocer la noción	Teórico	Teórico	Instrumentalización
Recabar información	Técnico	Técnico	Instrumentación
Usar información	Práctico	Práctico	Integración orquestada

Tabla 1. Actividades, significados, conocimientos y procesos

5. DISCUSIÓN

En este trabajo he descrito el significado con el que, en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, utilizo la expresión “análisis didáctico”. Le doy especificidad a este significado al caracterizarlo como un procedimiento para organizar la enseñanza de un concepto matemático y concretar:

- ◆ el contexto en que se usa (una asignatura de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria),
- ◆ el propósito de su implementación (la fundamentación del diseño de la asignatura),
- ◆ el sujeto que lo utiliza (el futuro profesor) y
- ◆ las nociones que lo conforman (los organizadores del currículo).

He mostrado el papel que esta noción puede jugar en el diseño de planes de formación, en la identificación de las capacidades que califican la competencia de planificación del profesor de matemáticas y en la caracterización de su conocimiento teórico, técnico y práctico.

La caracterización de los procedimientos que conforman el análisis didáctico y de los significados teóricos, técnicos y prácticos de las nociones implicadas en sus procedimientos me permite identificar y organizar las capacidades necesarias para la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria. De esta manera doy concreción al conocimiento didáctico que esperamos que los futuros profesores desarrollen dentro de la asignatura. La implementación del Espacio Europeo de Educación Superior implica la determinación de un conjunto de competencias (genéricas y específicas) para el perfil profesional del profesor de matemáticas de secundaria. Diversas instituciones españolas han colaborado para producir una lista de competencias específicas (Recio, 2004), conocida como las competencias ITERMAT. Pero, no es suficiente con enumerar estas competencias. Es necesario precisar su significado, caracterizarlas en términos de capacidades, relacionarlas con las actividades que se espera que el profesor realice en su labor docente y diseñar los currículos que pueden promover su desarrollo en los planes de formación inicial. He mostrado que el análisis didáctico puede ser una noción valiosa en esta reflexión.

La adaptación de la teoría de la génesis instrumental a una visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria resalta un aspecto central

del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores que, en muchas ocasiones, se mantiene en segundo plano: los futuros profesores deben desarrollar técnicas (razonamientos y procedimientos) para resolver las tareas que configuran su actividad docente. La formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria no puede centrarse exclusivamente en el desarrollo de un conocimiento teórico o en la reflexión sobre un conocimiento práctico. Tampoco puede ver sencillamente estos dos conocimientos como complementarios. La integración entre teoría y práctica en la formación de profesores debe, en primera instancia, reconocer la importancia de promover el conocimiento técnico de los futuros profesores. Este conocimiento técnico es el vínculo entre teoría y práctica: su construcción implica el desarrollo de las capacidades del futuro profesor para transformar las nociones teóricas en instrumentos útiles para la práctica. Pero, el esfuerzo de formación no se debe restringir exclusivamente al conocimiento (técnico) de cómo se deberían idealmente analizar las múltiples facetas del significado de un concepto. También debe incluir, en segunda instancia, los razonamientos y procedimientos (las técnicas) en virtud de los cuales los futuros profesores pueden, a partir del significado técnico de las nociones teóricas, recabar, organizar y seleccionar la información relevante sobre un concepto concreto y *usar esa información con propósitos didácticos*. En la asignatura a nuestro cargo hemos profundizado en algunos aspectos de este conocimiento práctico. Lo hacemos, por ejemplo, cuando describimos en detalle la multiplicidad y complejidad de las relaciones involucradas en la descripción de los significados de un concepto (relacionando así los significados técnicos de la estructura conceptual y los sistemas de representación); o cuando establecemos esquemas para definir los objetivos de aprendizaje a partir del análisis de las capacidades que se pretenden lograr y de las competencias a las que estas capacidades contribuyen (relacionando un aspecto del análisis didáctico —el análisis cognitivo— con un aspecto del diseño curricular a nivel global). Sin embargo, otras permanecen, por el momento, opacas y las sugerimos tan sólo a través de ejemplos. Es el caso, por ejemplo, de los procedimientos en virtud de los cuales se pueden identificar y organizar las capacidades y errores de los escolares a partir de la información que surge del análisis de contenido; de los esquemas para evaluar y seleccionar tareas con base en la información que surge de los análisis de contenido y cognitivo; o de los procedimientos mediante los cuales se pueden analizar las propuestas de los libros de texto a partir de la información del análisis didáctico.

Estos son tan sólo unos primeros intentos en nuestro propósito de comprender cómo aprende un futuro profesor en un plan de formación y de desarrollar estrategias para promover ese aprendizaje. Nos queda mucho espacio aún por recorrer.

6. AGRADECIMIENTOS

Agradezco a María José González, María Consuelo Cañadas, José Luis Lupiáñez, Juan D. Godino y Jesús Gallardo quienes leyeron y comentaron un borrador de este documento.

7. REFERENCIAS

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Ball, D. L. y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.
- Biehler, R. (2004). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.
- Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.
- Bromme, R. y Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the Mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 217-248.
- Cooney, T. J. (2004). Pluralism and the teaching of mathematics. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 503- 517). Göteborg: National Center for Mathematics Education.
- Department of Education. (2001). *Teacher Competencies and Professional Standards Discussion Paper*. East Perth: Autor.
- Department of Education and Training. (2004). *Competency framework for teachers*. East Perth: Autor.
- Frege, G. (1998a). Función y concepto. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 53-79). Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998b). Sobre concepto y objeto. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 123-139). Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998c). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006, Septiembre 2006). *El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática*. Trabajo presentado en X Simposio de la SEIEM, Huesca.
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, R. (2006, Septiembre 2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Trabajo presentado en X Simposio de la SEIEM, Huesca.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. y Rico, L. (2005). *Learning in secondary preservice teacher education from the communities of practice perspective*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Kaptelinin, V. (2003). Learning with artefacts: integrating technologies into activities. *Interacting with Computers*, 15(6), 831-836.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O. y Findell, B. (2001). *ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academy Press.

- Llinares, S. (2005). *Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-Americano de Educação Matemática, Porto.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares, *X Simposio de la SEIEM*. Huesca.
- Marín, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Oldager, N. (2004). *Conceptual knowledge representation and reasoning*. Tesis doctoral no publicada, Technical University of Denmark, Copenhagen.
- Rabardel, P. (2003). From artefact to instrument. *Interacting with Computers*, 15(5), 641-645.
- Rabardel, P. y Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15(5), 665-691.
- Recio, T. (2004). Seminario: itinerario educativo de la licenciatura de matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 7(1), 33-36.
- Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L. (1998). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de secundaria en didáctica de la matemática. En Braira (Ed.), *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas* (pp. 183-194). León: Universidad de León.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M. y Segovia, I. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-318). Madrid: Síntesis.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Steinbring, H. (1999). *How do Mathematical Symbols acquire their Meaning? - The Methodology of the Epistemology-based Interaction Research*. Trabajo presentado en Annual Meeting of the GDM, Bern.
- Van Der Valk, T. A. E. y Broekman, H. H. G. B. (1999). The lesson preparation method: a way of investigating pre-service teachers' pedagogical content knowledge. *European Journal of Teacher Education*, 22(1), 11-22.
- Vérillon, P. (2000). Revisiting Piaget and Vigotsky: in search of a learning model for technology education. *The Journal of Technology Studies*, 26(1), 3-10.