

Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas

Juan D. Godino, Angel M. Recio, Rafael Roa, Francisco Ruiz y Juan L. Pareja
Proyecto de Investigación “Edumat-Maestros”. Universidad de Granada

Resumen

Mediante la aplicación de algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática se desarrollan criterios para diseñar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basados en el uso de recursos tecnológicos. Los criterios son aplicados al análisis de un recurso virtual orientado al estudio de nociones algebraicas elementales por estudiantes de magisterio en el marco de su formación matemática y didáctica.

Summary

Using some theoretical notions from the ontosemiotic approach to mathematic cognition and instruction we develop criteria to design and evaluate mathematics teaching and learning processes based on the use of technological tools. We apply these criteria to analyse an applet oriented to explore elementary algebraic notions by student teachers in the context of their mathematics and didactical training.

INTRODUCCIÓN

Los recursos didácticos, sean manipulativos o virtuales, pueden ser el soporte para el planteamiento de problemas y situaciones didácticas que promuevan la actividad y reflexión matemática. Como tales recursos, tienen unas potencialidades que deben ser hechas realidad por el profesor, lo cual no es inmediato, ya que no es suficiente con el enunciado de las tareas sino que es necesario identificar e implementar los conocimientos matemáticos y la trayectoria de estudio correspondiente. Es ingenuo pensar, como se supone en ciertas posiciones constructivistas sobre el aprendizaje, que el alumno aprende interactuando con los recursos y resolviendo problemas, sin tener en cuenta tanto el papel de las interacciones entre los estudiantes como el papel del profesor.

La disponibilidad de recursos tecnológicos (en la modalidad de “applets” y otros tipos de programas interactivos) destinados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es ya en la actualidad muy abundante. Instituciones oficiales en España (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa, MECD, “Proyecto Descartes”) y profesionales a nivel internacional, como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), promueven el desarrollo y difusión de recursos para los distintos contenidos matemáticos y niveles educativos. Empresas comerciales han desarrollado también diversos programas informáticos que han sido objeto de numerosas investigaciones y experiencias de innovación, como las referidas a CABRI, LOGO y DERIVE.

Esta situación plantea un reto a los profesores, formadores de profesores e investigadores en educación matemática ya que la incorporación de estos recursos en el estudio de las matemáticas no es inmediata y transparente. En el “Research Forum” del PME 25, Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2001) presentaron los resultados de un meta-análisis de más de 600 publicaciones de los últimos diez años con informes de investigaciones y experiencias de innovación sobre el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y las Comunicaciones) en la educación matemática. Este trabajo y otros “surveys” similares (Ruthven y Hennessy, 2002) han constatado el bajo nivel de integración de las TIC en las clases de matemáticas y la diversidad de factores a tener en cuenta, tanto para la evaluación de sus efectos como de las condiciones de implementación. Se constata una tensión entre las altas expectativas del uso de las TIC para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la baja integración en las clases. Parece necesario abordar el tema desde nuevas perspectivas que ayuden a comprender este fenómeno.

En este trabajo vamos a aplicar algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002) para elaborar criterios de evaluación de recursos, situaciones y trayectorias didácticas. Según este marco teórico es necesario tener en cuenta las interacciones entre la trayectoria mediacional y las distintas dimensiones implicadas en el estudio de las matemáticas, esto es, las componentes o dimensiones epistémica, cognitiva, emocional, docente y discente (Godino, Contreras y Font, en prensa). Describiremos los criterios aplicándolos al análisis de un recurso propuesto para la introducción de nociones algebraicas elementales: la balanza de expresiones algebraicas (NCTM: <http://illuminations.nctm.org>).

Este recurso ha sido usado en un curso de formación inicial de maestros en el que se registraron algunas interacciones de los estudiantes con el mismo. Durante el análisis haremos referencia a algunos incidentes ilustrativos de dicha experiencia relacionados con las interacciones de los estudiantes con el recurso y el papel del formador en el proceso de estudio. La falta de espacio nos impide extendernos en esta dirección.

La pauta de análisis que vamos a describir en este trabajo, elaborada desde el marco teórico mencionado, puede ayudar a explicar el dilema altas expectativas/ baja integración de los recursos informáticos en las clases de matemáticas, al tener en cuenta la complejidad de las interacciones de las diversas dimensiones y factores implicados. Nuestro análisis puede orientar también en el diseño de recursos tecnológicos y de trayectorias didácticas basadas en los mismos, así como para prevenir conflictos semióticos potenciales.

Para la elaboración de la pauta de evaluación de los recursos didácticos tendremos en cuenta los conocimientos matemáticos que potencialmente se ponen en juego en el uso del recurso (en su doble faceta, institucional y personal). Dichos conocimientos son analizados teniendo en cuenta los tipos de entidades primarias emergentes de la actividad matemática (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos) y algunos aspectos de las dualidades cognitivas descritas en el marco teórico de referencia (Godino, 2002).

DESCRIPCIÓN DEL RECURSO

En la balanza con **expresiones algebraicas** (Figura 1) se escriben expresiones con una variable X en cada platillo de una balanza virtual, por ejemplo, $X-7$ y $7-X$. En la celda designada como $X =$ aparece un valor por defecto ($X=-10$) que se puede cambiar, bien desplazando horizontalmente el cursor situado a la izquierda, o escribiendo directamente un número en la celda. Automáticamente se calculan los valores de las expresiones escritas en los platillos y se representan en la ventana correspondiente las gráficas de las funciones $Y = X-7$; $Y=7-X$. Ambas rectas se cortan en el eje de abscisas para $x = 7$.

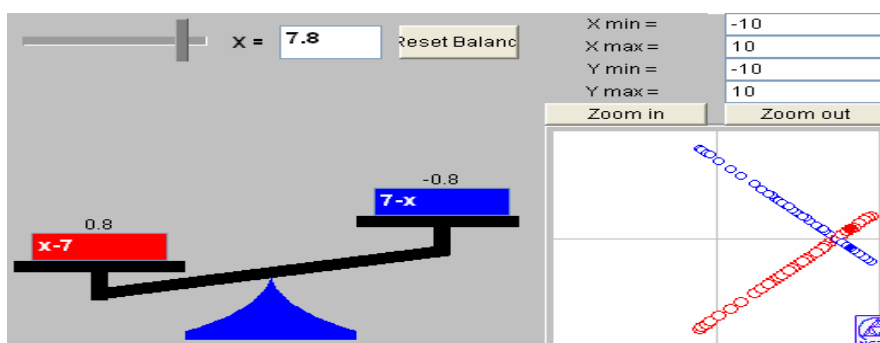


Figura 1: Balanza de expresiones algebraicas

Como posibles tareas sugeridas por los diseñadores del “applet” figuran las siguientes:

1. Introduce las expresiones $x + x$ y $2 \cdot x$ en los platillos de la balanza. Cambia el valor de x desplazando el cursor deslizante o clicando en el gráfico y arrastrando el ratón. ¿Qué observas cuando cambia el valor de x ?
2. ¿Qué observas en la balanza cuando pones las expresiones $7-x$ y $x-7$? ¿Cómo se corresponde el comportamiento de la balanza con el gráfico?
3. ¿Qué expresión nunca se iguala con $7-x$? ¿Cómo puedes reconocer en el gráfico que estas dos expresiones nunca son iguales?
4. ¿Puedes encontrar otras dos expresiones de manera que cuando el valor de x aumenta la balanza se comporta del siguiente modo: (1) Se equilibra para algunos valores; (2) Siempre está en equilibrio; (2) Siempre está desequilibrada.
5. Encuentra expresiones equivalentes a las siguientes, comprobando la equivalencia con la balanza: $x \cdot (x + 1)$; $(x + 1) / x$; $x / (x + 1)$; $(x + 1) / (x + 1)$

La balanza de expresiones resalta el hecho de que una ecuación se puede interpretar como una relación entre dos expresiones simbólicas, que la igualdad puede cumplirse para cualquier valor de la variable, para ningún valor, o para un número finito de valores.

DESARROLLO Y APLICACIÓN DE UNA PAUTA DE ANÁLISIS

Clasificaremos las cuestiones de reflexión y análisis teniendo en cuenta las dimensiones epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales) e instruccional (funciones docentes y discentes; patrones de interacción). Para las dimensiones epistémica y cognitiva fijaremos la atención en los tipos de entidades primarias y las facetas cognitivas duales que se proponen en el enfoque ontosemiótico como objetos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas. Cada una de estas dimensiones “interactúa con la tecnología de diferentes maneras” (Kapur, 2004, p. 2).

Debido a la falta de espacio desarrollamos con algún detalle el análisis de la dimensión epistémica, siendo las demás parcialmente descritas. Esta opción permite no perder la visión global de la complejidad del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y las posibilidades del marco teórico para abordarla.

Dimensión epistémica (conocimientos institucionales pretendidos)

Situaciones

S1) ¿Qué tipo de situaciones-problemas (tareas) específicas permite plantear el recurso?

Los tipos de cuestiones que se pueden plantear son:

- ¿Qué valor de x resuelve la ecuación, $E1(x) = E2(x)$?
- ¿Para qué valores de x las expresiones $E1(x) < E2(x)$ (respectivamente $>$)?

Dando valores numéricos a la variable x el “applet” permite resolver ecuaciones en las cuales intervienen expresiones racionales (no sólo lineales y cuadráticas).

Se quiere introducir el uso de la igualdad como equivalencia de expresiones algebraicas y como punto de intersección de las gráficas de dos funciones. Simultáneamente se tiene una situación matemática de comparación (numérica y gráfica) de dos expresiones algebraicas evaluadas para valores de la variable x . Cada miembro de la igualdad se interpretan como funciones, $Y = 7-x$; $Y = x-7$, que son representadas en un gráfico cartesiano.

S2) ¿Sobre qué tipo de situaciones previas se apoyan las nuevas situaciones?

La figura de la balanza y su comportamiento virtual como consecuencia de la “colocación de pesos en cada platillo” refiere metafóricamente a las experiencias de pesar objetos tangibles. Se suponen conocidas la situación de la medida con la balanza, la representación cartesiana de las funciones y la interpretación de cada miembro de una ecuación como el criterio de una función.

S3) ¿Qué variables de tarea permiten generalizar la actividad matemática y en qué dirección?

Las expresiones que se pueden introducir en los platillos de la balanza pueden ser no sólo polinómicas, sino algebraicas racionales y trascendentes, por lo que las ecuaciones, inecuaciones y funciones cuyos valores numéricos se pueden comparar son muy generales. Por ejemplo, se pueden plantear cuestiones como: ¿Para qué valores de x se hace cero la expresión $(\sin(x)+\cos(x))/x$.

El rango de valores de x e y que se representan se puede cambiar actuando en los botones señalados como zoom (in y out). La igualdad de las dos expresiones, que corresponde a la solución de la ecuación, se interpreta como intersección de las gráficas de las dos funciones.

Lenguaje

L1) ¿Se introduce un lenguaje específico en la descripción y uso del recurso? ¿Qué nuevos términos, expresiones, símbolos y gráficos se introducen?

Se usa la expresión de una ecuación (inecuación) como equilibrio (desequilibrio) de una balanza. El desequilibrio de la balanza se puede expresar mediante el lenguaje de las inecuaciones. El signo = se usa de manera ostensiva en la asignación de un valor específico a las variables X e Y , ($X = 7.8$, $X \min = -10$, ...). Pero también hay usos no ostensivos de la igualdad,

- Para indicar el valor de cada expresión, colocando el resultado encima del platillo.
- Asignación funcional mediante las gráficas ($y = x-7$; $y = 7-x$).
- Equivalencia de expresiones cuando la balanza está en equilibrio.

L2) ¿Se utiliza más de un registro semiótico, traducciones y tratamientos entre los mismos?

Se pretende relacionar el punto de corte de las gráficas con la situación de equilibrio de la balanza y la igualdad de los valores calculados para las dos expresiones colocadas en cada lado de la balanza.

L3) ¿Qué conocimientos lingüísticos previos requiere el uso del recurso?

Se suponen conocidos los lenguajes de la balanza, las gráficas cartesianas, y las expresiones algebraicas (* para la multiplicación, ^ para la potenciación). La atribución de valores a la variable mediante el desplazamiento de un cursor, y la interpretación de los valores máximo y mínimo para la

X y la Y.

L4) ¿Es útil en la progresión del aprendizaje matemático el lenguaje específico introducido?

Dado el uso cada vez más extendido de recursos informáticos, los convenios lingüísticos utilizados pueden aparecer en otros similares (cursores, pulsadores, etc.).

Técnicas (acciones)

T1) ¿Qué técnicas específicas se requieren para la solución de las tareas?

- Se evoca la manipulación imaginaria de la balanza; cambiando los pesos se puede lograr el equilibrio.
- Manipulación del “applet” (escritura de expresiones, asignación de valores a x ; elección de extremos para los intervalos).

La técnica de solución de las ecuaciones consiste en dar valores a la variable y observar el comportamiento de la balanza y las gráficas; puede ser útil en los casos en que no se disponga de un método algebraico de solución (reducción, sustitución, etc.)

T2) ¿Qué técnicas previas es necesario dominar para aplicar las nuevas técnicas?

- Manipulación y ejecución de programas informáticos y del hardware necesario.

T3) ¿Es posible generalizar las técnicas y en qué dirección?

Aunque la manipulación del “applet” implica el aprendizaje de algunos convenios específicos (escritura en los platillos, asignación de valores a x desplazando un cursor), estos convenios suelen tener un alcance general en este tipo de recursos informáticos. Su aprendizaje puede ser de utilidad para operar esos otros recursos.

Conceptos (reglas conceptuales)

C1) ¿Qué conceptos específicos se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?

Solución de una ecuación como valor numérico que iguala ambos miembros y como punto de intersección de dos gráficas.

C2) ¿Qué conceptos previos se usan de manera explícita o implícita y se suponen conocidos?

La metáfora de la balanza supone familiaridad con la magnitud peso, cantidades, unidades y medidas. Números y operaciones aritméticas; reglas de uso de paréntesis. Funciones reales de variable real; gráficas cartesianas de funciones.

C3) ¿En qué dirección se pueden generalizar los conceptos emergentes?

El recurso está construido como soporte específico y restringido a los conceptos descritos.

Propiedades

P1) ¿Qué propiedades se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?

Si a una equivalencia de expresiones algebraicas se les aplican las mismas transformaciones a ambos

miembros, la equivalencia se mantiene.

P2) ¿Qué propiedades previas se usarán de manera explícita o implícita y se suponen conocidas?

Si a los dos platillos de una balanza se añaden o quitan los mismos pesos, se mantiene el equilibrio.

P3) ¿En qué dirección se pueden generalizar las propiedades emergentes?

No se pretende generalizar la propiedad emergente mencionada.

Argumentos(justificaciones)

A1) ¿Qué tipo de justificaciones de las técnicas y propiedades proporciona el recurso?

La justificación de las técnicas y propiedades es de tipo empírico y ostensivo. La solución de la ecuación se logra asignando valores a x de manera continua; el dispositivo calcula y muestra los resultados de manera numérica y gráfica. No hay argumentación deductiva.

A2) ¿Las argumentaciones específicas propiciadas por el recurso se apoyan en otras previas?

No consideramos aplicable en este caso.

A3) ¿En qué dirección se pueden generalizar las argumentaciones propiciadas por el recurso?

No se pretende en este caso.

Dimensión cognitiva (significados personales)

El análisis a priori de los conocimientos institucionales que potencialmente se ponen en juego en la implementación del recurso proporciona elementos para la elaboración de instrumentos de evaluación de los significados personales de los estudiantes, respecto de los conocimientos previos requeridos, y de los nuevos conocimientos logrados tras el proceso de estudio. Cada uno de los seis tipos de elementos descritos en la sección 3.1. nos pueden servir de guía para elaborar ítems de evaluación de los significados personales de los estudiantes. La falta de espacio nos impide incluir el cuestionario elaborado para evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes que participaron en nuestra experiencia.

Dimensión instruccional (funciones docentes, discentes y patrones de interacción)

El análisis epistémico a priori realizado nos proporciona un marco de referencia para elaborar posibles *trayectorias didácticas* de los contenidos puestos en juego por el recurso. Tales trayectorias se implementarán de acuerdo a unas *guías de estudio*, o “proyectos de enseñanza-aprendizaje”, en los cuales se hará una selección de los distintos tipos de conocimientos y su secuenciación temporal. En esta fase, la cuestión será la búsqueda de criterios que permitan optimizar la *idoneidad epistémica* (Godino, Contreras y Font, en prensa) del proceso de estudio, entendida como representatividad de los significados pretendidos respecto de los significados de referencia.

Las guías de estudio deben incluir también indicaciones sobre el desempeño de las funciones docentes y discentes, así como una previsión de los tipos de configuraciones didácticas que optimicen la idoneidad didáctica del proceso. Algunas cuestiones relacionadas con las funciones docentes:

¿En qué nivel educativo se puede usar el recurso?

¿En qué medida facilita el recurso que los estudiantes se impliquen personalmente en la realización de las tareas?

¿Cuánto tiempo se puede dedicar a los distintos tipos de tareas que se pueden proponer?

¿Cómo interesa secuenciar las tareas y las técnicas?

¿Qué conocimientos se deberán institucionalizar (regular) y en qué momento?

¿Facilita el recurso la evaluación de los conocimientos de los estudiantes?

El recurso no es transparente en diversos aspectos. El docente deberá plantear cuestiones problemáticas que inciten a la exploración, informar de los convenios lingüísticos, institucionalizar los nuevos conocimientos pretendidos. En particular, los usos no ostensivos (implícitos) del signo = y del lenguaje de las ecuaciones e inecuaciones requieren intervenciones del docente si se desea sistematizar los conocimientos pretendidos.

En la experiencia de enseñanza que hemos realizado con estudiantes de magisterio hemos podido observar que el profesor ha debido comenzar explicando el funcionamiento del “applet”, la escritura de las expresiones, uso del cursor para asignar valores a la variable x de manera continua, interpretar las dos expresiones que se escriben en los platillos como una ecuación y la relación entre cada miembro y los gráficos cartesianos

Algunas cuestiones que ayudan a evaluar el recurso desde el punto de vista de las funciones del estudiante son:

¿Pueden los estudiantes usar el recurso de manera autónoma para actividades de exploración?

¿Están disponibles los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes?

¿Aporta el recurso elementos para la autoevaluación de los aprendizajes pretendidos?

¿Ayuda el recurso a identificar conflictos semióticos y resolverlos?

¿En qué medida facilita el recurso la implementación de configuraciones didácticas de tipo adidáctico, dialógico, magistral o personal?

Otras cuestiones que debemos plantearnos para evaluar globalmente la pertinencia o eficacia de un recurso pueden ser:

¿Existe un recurso alternativo que permita implementar los conocimientos pretendidos de una manera más eficaz?

¿Cómo se puede complementar el recurso con otros para optimizar la progresión del aprendizaje matemático? ¿Para qué tipo de conocimientos?

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

La gran cantidad de investigaciones e innovaciones sobre el uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas muestra el interés que el tema despierta, así como su extraordinaria complejidad. El estudio cualitativo y cuantitativo realizado por Lagrange y cols (2001) muestra que las ideas y resultados publicados están débilmente apoyados por la reflexión y la experimentación y no se ha abordado toda la complejidad de las situaciones educativas. La dificultad de la integración (uso e implementación efectiva en las clases) se puede ver a través de esa perspectiva: las innovaciones

presentan una amplitud de ideas y proposiciones cuya difusión es problemática; la investigación se esfuerza por afrontar la complejidad del uso de las TIC.

Nuestro objetivo ha sido construir una pauta que sirva como herramienta para mirar las condiciones de implementación de algunas herramientas TIC y las dimensiones a tener en cuenta, tanto de tipo epistémico (conocimientos institucionales), cognitivo (significados personales) como instruccionales (funciones docentes, discentes y patrones de interacción). En la práctica el marco teórico y la pauta de análisis elaborada puede ayudar a los investigadores e innovadores a diseñar, implementar y evaluar proyectos de integración de las TIC en las clases de matemáticas y comprender mejor la problemática multidimensional implicada.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco de los Proyectos de Investigación BS2002-02452, y MCYT SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Ambos proyectos son cofinanciados con Fondos FEDER (UE).

REFERENCIAS

- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237-284.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).
- Kaput, J. (2004). Technology becoming infrastructural in mathematics education. ICME-10 TSG-15: *The role and use of technology in the teaching and learning mathematics*. <http://www.ICME-10.dk>
- Lagrange, J.B, Artigue, M., Laborde, C. y Trouche. L. (2001). A meta study on IC Technology in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. *Proceedings of the 25 PME Conference*. Freudenthal Institute, Utrecht.
- MEC. *Proyecto Descartes*, <http://descartes.cnice.mecd.es/>
- NCTM. Illuminations, <http://illuminations.nctm.org/tools/index.aspx>
- Ruthven, K. y Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 49: 47-88.