Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración

Vicente Vicario y José Carrillo Yañez
Universidad de Huelva

Resumen

Este trabajo examina las concepciones que dos profesores de educación secundaria presentan respecto a la demostración matemática y sus funciones. Los datos son recogidos a través de entrevistas relacionadas con aspectos de la demostración. Los resultados sugieren que los profesores reconocen la variedad de las funciones de la demostración pero que tienen puntos de vista limitados sobre su naturaleza y una inadecuada comprensión de lo que constituye una demostración matemática.

Abstract

This study examined 2 in-service secondary school mathematics teachers´ conceptions of proof and its functions. Data were gathered from a series of interviews and teachers´ responses to designed tasks focusing on proof. The results of this study suggest that teachers recognize the variety of roles that proof plays in mathematics but they hold limited views of the nature of proof in mathematics and demonstrated inadequate understandings of what constitutes proof.

Motivación

Muchos profesionales de la enseñanza de la Matemática consideran la demostración como uno de los núcleos principales de la disciplina, coincidiendo con Ross (1998, p. 254): "la esencia de la Matemática está en las demostraciones". El papel de las demostraciones en la educación secundaria ha sido de carácter periférico y esencialmente destinado a un contexto relativamente limitado.

En este contexto surge el trabajo encaminado a la tesis doctoral (en curso) "Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática", dirigido por el segundo autor de este informe.

Muchos trabajos pioneros en este campo, de entre los que destacan sin ánimo de ser exhaustivos Hanna (1989a,b, 1990), de Villiers (1993), Hersh (1993), Hanna & Jahnke (1996), Ibañes & Ortega (1997), Recio (1999), Knuth (2002), indican la importancia asociada a la demostración matemática, a sus funciones y a las concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración.

El objetivo de este trabajo es acceder a las concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática y sus funciones. Esto nos dará pistas para plantearnos qué funciones de la demostración pueden ser utilizadas en el aula para hacer de ella una actividad más significativa. Nos acercaremos a estas preguntas a través de las declaraciones de dos profesores.

Perspectiva teórica

Tradicionalmente la demostración matemática se ha tratado casi exclusivamente en términos de verificación o justificación de enunciados matemáticos. Se ha tenido la sospecha de que los profesores de secundaria han mantenido estos términos como referentes básicos de la función exclusiva de la demostración. Uno de los campos de batalla estriba en criticar este punto de vista por ser parcial y estudiar funciones de la demostración asumidas por los profesores susceptibles de ser aplicadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Desde esta perspectiva resumiremos las funciones de la demostración matemática propuestas por de Villiers (1993) sin ánimos de exhaustividad, y caracterizamos otras funciones emergentes:

* **Verificación** (concerniente a la verdad de una afirmación)
* **Explicación** (profundizando en por qué es verdad)
* **Sistematización** (organización de resultados dentro de un sistema axiomático)
* **Descubrimiento** (descubrimiento/invención de nuevos resultados)
* **Comunicación** (transmisión del conocimiento matemático)

Una amplia bibliografía caracteriza esta problemática asociada a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática: Davis & Hersh (1983), Guzmán (1995), Ibañes y Ortega (1997), Ibañes (2001), Guzmán (2003), Macías et al. (2004).

Asumimos la óptica de Lakatos (1978), quien, desde el análisis epistemológico de ejemplos de la historia de la Matemática, asume la falibilidad de la demostración, y coincidiendo con Sáenz (2001) al establecer la hipótesis de que el sistema co*njetura-pruebas-refutaciones* constituye la lógica del descubrimiento matemático escolar.

Metodología

Se analizaron las funciones que dos profesores de educación secundaria asignaron a varias demostraciones alternativas, para así poder percibir sus concepciones. Las demostraciones fueron proporcionadas con antelación y estudiadas por ellos antes de efectuar una entrevista semiestructurada.

La entrevista fue grabada en audio y transcrita después, siguiendo las pautas de la metodología cualitativa y el enfoque interpretativo en este estudio de casos (Stake, 2000).

Exponemos a continuación las demostraciones alternativas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que presentamos a los profesores, una breve caracterización de dichos profesores y el guión de las entrevistas.

Demostraciones de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

1ª Demostración: Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces tendremos dos números naturales p y q , con $q\neq0$ tales que $\sqrt{2} = p/q$ y con M.C.D.(p,q)=1. Por tanto $2q^2 = p^2$ y p^2 es par. Además p también es par porque el cuadrado de un número impar es impar. Por tanto p = 2k para algún número natural k. Sustituyendo en la relación anterior y dividiendo por 2 tenemos que: $q^2 = 2k^2$, por lo que q^2 es par y también lo es q. Hemos llegado, pues, a una contradicción ya que p y q eran primos entre sí.

2ª Demostración: En esta demostración emplearemos el conocido teorema fundamental de la aritmética, que afirma que "*Todo número natural se puede descomponer, salvo reordenaciones triviales, como producto de factores primos y de forma única*".

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces tendremos dos números naturales p y q , con $q\neq0$ tales que $\sqrt{2} = p/q$. Por tanto $2q^2 = p^2$ lo que es absurdo, ya que en el primer miembro de la igualdad tenemos multiplicándose un número impar de factores primos y en el segundo miembro un número par.

3ª Demostración: Esta demostración recurre al método de descenso infinito. Supongamos que √2 es racional. Entonces existirán números naturales p y q, con q≠0 tales que √2 = p/q. Ahora, de entre todos los números racionales iguales a √2, consideremos aquel tal que el valor de p sea mínimo.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

Sabemos que:

Si sustituimos el primer valor de √2 por p/q y despejamos en el segundo √2, obtenemos que:

$$\sqrt{2}=\frac{2q-p}{p-q}$$

Ahora, puesto que p > q , entonces 2q – p < p y además:

$$\frac{2q-p}{p-q}=\frac{p}{q}=\sqrt{2}$$

en contradicción con lo supuesto.

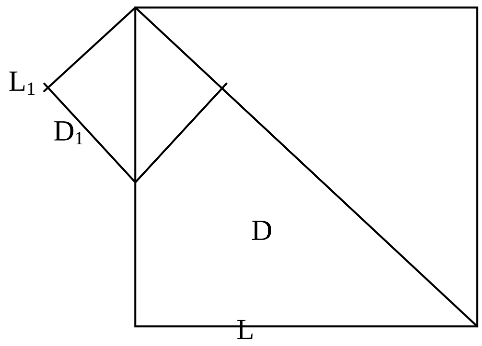
4ª Demostración: Supongamos que √2 es un número racional. Entonces deben existir dos números naturales p y q, q≠0 tales que √2 = p/q con p y q primos entre sí.

Como √2 = p/q entonces $2q^2 = p^2$. Construyamos una tabla con todas las cifras en las que pueden terminar p, q, p^2, q^2 y $2q^2$ en el sistema decimal de numeración:

p	q	p^2	q^2	$2q^2$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	2
2	2	4	4	8
3	3	9	9	8
4	4	6	6	2
5	5	5	5	0
6	6	6	6	2
7	7	9	9	8
8	8	4	4	8
9	9	1	1	2

Si comparamos las columnas correspondientes a p^2 y $2q^2$ nos damos cuenta de que $2q^2 = p^2$ si ambos miembros de la igualdad terminan en cero, y esto sucede únicamente si p termina en cero y q termina en cero ó en cinco; en cualquier caso p y q serían múltiplos de cinco y por tanto no serían primos entre sí.

5ª Demostración: Consideremos un cuadrado de lado unidad. Tracemos una de sus diagonales y observemos que su longitud, aplicando el teorema de Pitágoras, viene dada por $\sqrt{2}$. Pasemos ahora a demostrar que la diagonal y el lado del cuadrado son dos segmentos inconmensurables entre sí, es decir que $\sqrt{2}$ es irracional.



Midamos el lado del cuadrado sobre la diagonal y tracemos la perpendicular a la diagonal a partir del punto de corte. Obtenemos así un nuevo cuadrado de diagonal D_1 y lado L_1.

Todo el proceso anterior puede aplicarse al nuevo cuadrado: se mide su lado sobre la diagonal y a partir del punto de corte se traza la perpendicular a la misma. Evidentemente este proceso puede repetirse indefinidamente. Aunque este proceso no termina, el resto obtenido será gradualmente menor, es decir: $L > L_1 > L_2 > ...$

Cada uno de estos restos constituye la diferencia que existe entre la diagonal y el lado del cuadrado correspondiente: $L_1 = D - L$; $L_2 = D_1 - L_1$...

A partir de aquí procederemos a la demostración. Asumiremos que el lado y la diagonal son conmensurables y llegaremos a una situación contradictoria. Si ambos son conmensurables tienen una medida común, un segmento u que divide exactamente al lado y a la diagonal. Si dos segmentos cualesquiera son múltiplos enteros de u, la diferencia entre ambos también es un múltiplo de u. Es decir, si D y L son múltiplos enteros de u, también lo es L_1. Por otra parte, resulta que $D_1 = L - L_1$ (es fácil verificarlo aplicando el teorema de Pitágoras), lo cual, siendo una diferencia entre múltiplos de u, también es un múltiplo de u.

Del primer cuadrado hemos pasado al segundo. Podemos continuar de la misma forma. Tomando L_1 y D_1 resulta que L_2 y D_2 son múltiplos de u, y esto continúa en los sucesivos cuadrados. Llegamos ahora a la contradicción ya que si D y L son múltiplos enteros de u, también lo son L, L_1, L_2,... Pero estos múltiplos de u decrecen continuamente. Esta es la contradicción que prueba el teorema ya que en el proceso de descenso llegaríamos a múltiplos de u menores que el propio u.

Los profesores

Los dos profesores (P_1 y P_2) implicados en esta investigación son profesores de secundaria, licenciados en Matemáticas y llevan ejerciendo la profesión 8 y 10 años respectivamente.

El guión de la entrevista

1. ¿Crees que los argumentos presentados son demostraciones? ¿Puedes plantear algún inconveniente?

2. ¿Qué impresiones fundamentales has sacado al estudiar estas demostraciones? ¿Propondrías alguna demostración alternativa?

3. ¿Encuentras que estas demostraciones aparte de verificar el enunciado o justificarlo, cumplen alguna otra finalidad?

4. De estas cinco demostraciones, ¿cuál es para ti la más idónea desde el punto de vista didáctico? ¿Y personalmente?

5. ¿Te incomodan las demostraciones por reducción al absurdo? ¿Sería obligado para ti sustituir, siempre que sea posible, una demostración por reducción al absurdo por otra directa? ¿Qué problemas puede causar en el alumno este tipo de demostraciones por reducción al absurdo?

Análisis

Presentamos un breve análisis de las concepciones y funciones que los profesores asignan a la demostración matemática, confeccionado a partir de los datos extraídos de los cuestionarios y entrevistas.

Las respuestas a la primera pregunta indican de forma transparente una poco clara comprensión de la demostración por parte de P_1 al calificar de "indefinidas" a las demostraciones 1ª, 3ª y 5ª:

> *"...En las demostraciones 2ª y 4ª no encuentro ningún problema, son claras y transparentes, rotundas. Las demostraciones 1ª, 3ª y 5ª están formuladas de una manera indefinida,..."* (P_1).

Esta afirmación se afianza más cuando expone sobre la 5ª demostración:

> *"...a mí la 5ª demostración no me ha gustado nada, me parece insoportable, porque parte de un argumento geométrico en el que luego hay que implementar un procedimiento muy complicado disminuyendo tamaños y sin embargo la explicación del fundamento del proceso no es intuitiva. No tengo muy claro que demuestre lo que quiere demostrar"* (P_1).

También dice que en la 3ª demostración (por descenso), no se deja claro lo que se quiere demostrar:

> *"...la 3ª demostración, su formulación, el método de descenso infinito, no me gusta. Da una falsa impresión de circularidad debido a que se demuestra una desigualdad que es evidente y no se deja claro lo que se quiere demostrar"* (P_1).

Según el profesor P_2 los cinco argumentos presentados son demostraciones pero aunque al principio comenta que la 4ª demostración empleada efectivamente lo es, después dice que:

> *"...La 4ª demostración, más que reducción al absurdo, llega a ver que es imposible que $\sqrt{2}$ sea irracional"* (P_2).

indicando en cierto sentido que esta demostración es más bien una demostración directa y no una demostración por reducción al absurdo.

En cuanto a la segunda cuestión, P_1 asume que el contenido de la demostración 1ª se puede remodelar para simplificarla más, sin darse cuenta de que la demostración ya es "elemental":

> *"Propondría reformulaciones, sobre todo de la 1ª demostración a un lenguaje más llano y menos rebuscado"* (P_1).

Una de las funciones de la demostración que emerge en este estudio es la función *simplificativa* (carácter de encontrar un argumento relativamente breve y sencillo) que es contemplada en el marco de De Villiers como una “subfunción” de la función *sistematización*.

Ni P_1 ni P_2 mencionan que aunque a los dos les ha parecido altamente estética la 2ª demostración, ésta no es más elemental que la 1ª, que no recurre a ningún otro teorema de la envergadura del *teorema fundamental de la aritmética* al que sí recurre la 2ª demostración.

Además, muestran poca familiaridad con demostraciones como la 3ª, que les parece a ambos bastante artificial (no la habían visto nunca) e incluso dudosa, ya que por ejemplo a P_1 le parece que supone un argumento circular:

> *"...porque ya digo que la demostración por descenso infinito parece que está contenida en ella (la 1ª demostración)..."* (P_1).

y a P_2 le parece que introduce operaciones con el "irracional" $\sqrt{2}$ antes de probar su irracionalidad y sin ningún derecho a manipular este número algebraicamente:

> *"La 3ª demostración, el método es artificial de la descomposición de la fracción del irracional del denominador. Maneja el uso de irracionales en la propia demostración, pero esto no quita la propiedad de que sea irracional, ¿no?.."* (P_2).

A la tercera pregunta P_1 responde literalmente de forma sorprendente que:

> *"...La 2ª demostración muestra la raíz de la contradicción. También es una reducción al absurdo, pero en la 2ª demostración está patente la raíz de la contradicción, cosa que en la 1ª demostración está totalmente ausente..."* (P_1).

caracterizando así su escasa comprensión de lo que supone una demostración por reducción al absurdo. Los profesores P_1 y P_2 asumen que algunas demostraciones como la 4ª son más "didácticas" y tienen mayor carácter "explicativo" que otras, y la 2ª es la más "bella" o "ingeniosa". Aparece, pues, la función *explicativa* propuesta por de Villiers y creemos que la función *didáctica* como una subfunción, de la función *explicativa*, además de la función *estética* que el propio de Villiers considera fuera de su esquema de funciones pero perfectamente factible.

Con respecto a la cuarta pregunta, están de acuerdo en considerar la 4ª demostración como la de mayor carácter "didáctico" por estimar que es la más cercana al horizonte cultural de sus alumnos. Coinciden en que la 2ª demostración es su preferida por su fuerte carácter estético y la brevedad en obtener la contradicción:

> *"Personalmente la que más me gusta es la 2ª demostración...Ahora, como didáctica, no hay ninguna demostración como la 4ª…"* (P_1).

> *"... pienso que la 4ª demostración es muy sencilla de entender por el alumno... Personalmente me gusta la 2ª... No aporta otras cosas pero es muy elegante e ingeniosa"* (P_2).

A la pregunta 5ª, en general P_1 y P_2 están de acuerdo en que siempre que les sea posible es conveniente la sustitución de una demostración por reducción al absurdo por otra de carácter directo, pero no especifican que tal sustitución puede que en algunos casos sea imposible, es decir, no aclaran que puede que un argumento sólo se pueda demostrar por reducción al absurdo aunque de varias formas alternativas:

> *"...Visto en general sí creo que es conveniente esta sustitución...y utilizar otras demostraciones más directas y contundentes..."* (P_1).

> *"... Si puedo usar una demostración más directa y si tiene algún gráfico que les permite ver a los alumnos más fácilmente, la usaría...Si no tuviese demostración directa, entonces recurriría a otra por reducción al absurdo, por ejemplo a la 1ª demostración, quizás, que es habitual, pero viendo la 4ª demostración, ahora mismo usaría esta otra"* (P_2).

De los comentarios anteriores, surgen, de nuevo, la función *explicativa* y la subfunción *didáctica* de la demostración.

Resumen de resultados y conclusiones

Observamos que estos profesores reconocen algunas de las funciones de la demostración, además de la *verificativa* o *justificativa*. Una de las funciones de la demostración que el trabajo de De Villiers (1993) propone es la *explicativa*, obtenida en este estudio.Los profesores analizados la función *estética* o grado de "belleza" o "ingenio" puesto en juego. Asimismo, aparecen las subfunciones *simplificativa* y *didáctica* respecto de las funciones sistematización y *explicativa* respectivamente.

Resumimos las funciones (cursiva) y subfunciones (subrayado) de la demostración detectadas en las respuestas de los profesores P_1 y P_2 a las cinco preguntas de la entrevista (Ei) en la tabla 1:

	P_1	P_2
E_1	*Verificativa*	*Verificativa*
E_2	<u>*Simplificativa*</u> *Estética*	*Estética*
E_3	*Explicativa* <u>*Didáctica*</u>	*Explicativa* <u>*Didáctica*</u>
E_4	*Explicativa* *Estética* <u>*Didáctica*</u>	*Explicativa* *Estética* <u>*Didáctica*</u>
E_5	*Explicativa* *Verificativa*	*Explicativa* *Verificativa* <u>*Didáctica*</u>

Tabla 1

Queremos resaltar, finalmente, que estos profesores presentan puntos de vista limitados respecto a la comprensión de la esencia de una demostración matemática, sobre todo en lo que se refiere a las demostraciones por reducción al absurdo, algo que pone de relieve carencias en el conocimiento *sobre* matemáticas (Ball y McDiamird, 1990).

Referencias

Ball, D.L., y McDiamird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. En W.R. Houston (ed) *Handbook of Research on Teacher Education*. New York: Macmillan.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1983). *Experiencia Matemática*. Madrid: Labor.

Guzmán, M. de (1995). *Capítulo 2: Demostración Matemática*. http://www.matucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm

Guzmán, M. de (2003) Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas. Iniciación al método matemático. *Base universitaria*. Madrid: Anaya.

Hanna, G. (1989a). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.

Hanna, G. (1989b). Proofs that prove and proofs that explain. Proceedings of the *13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, 45-51.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange,* 21, 6-13.

Hanna, G. & Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. En Bishop, A.J. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education. (p 887-908).*

Hersh, R. (1993). Proving is convencing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24, 389-399.*

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). La demostración matemática. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. *Educación Matemática*, 9(2), 65-104.

Ibañes, M. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M.F. Moreno et al. (eds) *Investigación en educación matemática*. Almería: Universidad de Almería.

Knuth, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers´ Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza.

Macías et al. (2004). La enseñanza de la demostración matemática. Parte 3 del diagnóstico de la situación actual*: Análisis de las concepciones de los docentes de Matemática sobre la demostración de proposiciones y su enseñanza.* Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura- UNNE. Corrientes.Argentina.

Martínez Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y al aprendizaje de la demostración matemática.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, 3, 252-255.

Sáenz, C. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M.F. Moreno et al. (eds) *Investigación en educación matemática*. Almería: Universidad de Almería.

Stake, R.E. (2000). Case Studies. En N.K. Denzin & Y. Lincoln (eds) *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks: Sage Publications.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.